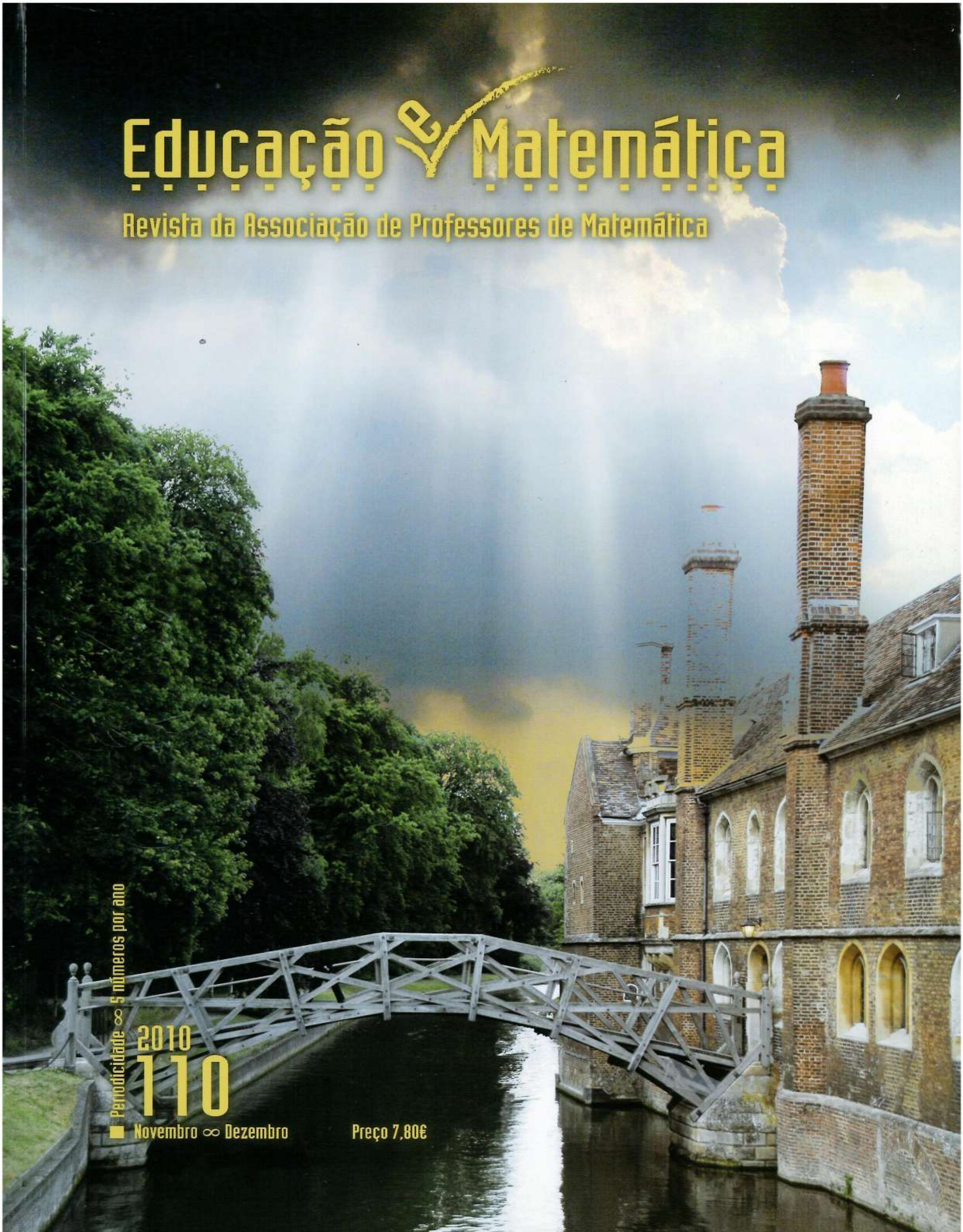
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



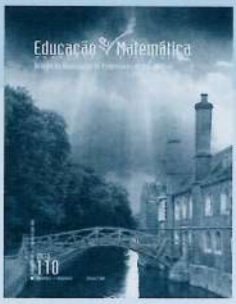
Periodicidade ∞ 5 números por ano

2010

110

Novembro ∞ Dezembro

Preço 7,80€



ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Dezembro 2010
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S.A.
Fonte Santa, Paúl
2530–250 Torres Vedras

Depósito Legal n° 72011/93
Registo no ICS n° 124051
ISSN 0871-7222

Porte Pago

Sobre o número temático

Este número temático é dedicado às Conexões Matemáticas. A escolha do tema e de Susana Carreira, para editora convidada, surgiram como uma conexão natural e consensual. Susana Carreira é sócia fundadora da APM, colaborando desde o primeiro momento na vida desta Associação. Actualmente é professora associada do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve.

Desde o início da sua actividade profissional de professora e investigadora, tem desenvolvido um vasto e sólido trabalho no domínio da modelação matemática, explorando a resolução de problemas, usualmente com recurso a tecnologia. Ao longo dos anos, quer nas produções escritas quer nas conferências proferidas, a presença das conexões tem sido uma constante. A sua experiência é, sem dúvida, uma mais-valia para a nossa revista.

Agradecemos a forma empenhada como se dedicou à concepção e concretização deste número da *Educação e Matemática*.

Sobre a capa

A capa deste número representa uma famosa ponte de madeira sobre o rio Cam que atravessa o «campus» do Queens College em Cambridge. A ponte, designada a «Ponte Matemática», foi desenhada por William Etheridge e a ela se encontra associado o mito de ter sido originalmente concebida por Isaac Newton. Mas, nenhum facto parece confirmar esta «tese» e, de facto, Newton morreu cerca de 20 anos antes de a ponte ser construída.

A razão para o nome da ponte reside no facto de o arco da ponte (uma curva imaginária que não surge na construção) ser materializado numa sequência de tangentes que dão origem a uma construção que é uma triangulação da estrutura ideal. Do ponto de vista estrutural trata-se de uma utilização muito eficiente deste tipo de material.

António M. Fernandes

Sobre a secção Actualidades

A revista *Educação e Matemática* vai deixar de publicar a secção *Actualidades*, da responsabilidade dos membros da redacção. Não porque tenham deixado de existir notícias actuais sobre Educação e Matemática, mas porque entendemos que a secção *Pontos de vista, reacções e ideias* pode desempenhar o papel de reagir, comentar e levantar questões relativamente aos acontecimentos actuais, com a vantagem de ser uma secção aberta a sócios e não sócios da APM. Por isso, fazemos desde já o desafio a todos, no qual nos incluímos como redacção, para reagirem com o vosso ponto de vista a alguma *Actualidade* relevante.

A redacção

Neste número também colaboraram

Alexandre Costa, Ana Brito Jorge, Ana Paula Mestre, Cláudia Lança, Conceição Mesquita, Graça Cebola, Graziela Fonseca, Helena Paradinha, Isabel do Vale, Jaime Carvalho e Silva, Joana Latas, João Pedro Ponte, Josefa Costa, Margarida Neves, Nélia Amado, Rita Borromeo Ferri, Rosa Antónia Ferreira, Tamara Leuca, Teresa Marques, Teresa Moreira, Teresa Pimentel.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, N° 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90 Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

Conexões no ensino da Matemática — Não basta vê-las, é preciso fazê-las!

Susana Carreira

Parece ser hoje relativamente unânime a importância das conexões matemáticas como elemento essencial da experiência matemática dos alunos, ao longo do seu percurso escolar. Mas, à semelhança de muitas outras ideias e propósitos da matemática escolar, é necessário abrir caminhos, propondo hipóteses de concretização, na prática, que ora clarifiquem ora estendam o nosso entendimento e capacidade de os converter em situações concretas de aprendizagem da Matemática.

O conceito de conexões matemáticas é suficientemente elástico para podermos olhá-lo de múltiplas formas. Desde logo, é natural pensar em conexões, relações e ligações frutuosas entre tópicos matemáticos. Tem igualmente todo o sentido considerar as conexões da Matemática com a realidade que nos envolve, numa direcção que nos aproxima das aplicações da Matemática ou da actividade de construir e explorar modelos matemáticos. Importa também pensar a relação da Matemática com outras áreas do saber, com outras disciplinas, e o ainda difícil diálogo interdisciplinar ou a ainda incompreendida pedagogia do trabalho de projecto. Surgem ainda a vertente das articulações curriculares — conectar a Matemática entre os diferentes ciclos e os vários momentos e formas de trabalhar sobre um mesmo conceito ou mesmo problema ou mesmo tema.

Em qualquer das variantes que se possam imaginar, há decididamente uma noção importante subjacente ao papel das conexões matemáticas na aprendizagem — a de que a Matemática espreita e é necessário não deixar desaproveitadas as inúmeras oportunidades de a agarrar e de a integrar, de lhe dar sentido e coerência. No que se refere à construção dos conceitos matemáticos, desde há muito que se entende a necessidade de se trabalhar no estabelecimento de relações entre conceitos e de se pensar nesse processo como a formação de sistemas conceptuais. É impossível entender um conceito novo sem o relacionar com conceitos anteriores, sem elementos de mediação, sem analogias, pontes, metáforas, contextos, experiências. Como é bem descrito no livro *Pensamento e Linguagem*, de Vygotsky, os conceitos que as crianças aprendem na escola não ficam depositados nas suas mentes como ervilhas soltas dentro de um saco.

A nossa principal aspiração num número dedicado às conexões matemáticas é dar uma visão tão alargada quanto possível da forma como podem ser entendidas, pensadas e levadas à prática, no currículo, na sala de aula, nos diversos temas matemáticos, com o recurso às tecnologias, com uma diversidade de materiais, com diferentes abordagens didácticas, e do 1.º ciclo ao secundário. Para tal, convidámos autores dos programas de Matemática do Ensino Básico e do Secundário a analisar o modo como os respectivos programas abordam as conexões; incluímos artigos de especialistas que problematizam o conceito e que trazem uma visão internacional — mostra-se como a actividade de modelação pode começar nos primeiros anos, a forma como as conexões estão presentes nas Provas de Aferição ou ainda, como o trabalho com padrões pode ser um poderoso contexto para o estabelecimento de conexões matemáticas; demos lugar à ligação da Matemática com a Arte ou com a Física e procurámos dar voz a professores de todos os níveis do Ensino Básico e do Ensino Secundário, através do relato de experiências e projectos com os seus alunos, mostrando-se como as conexões entre várias representações de um mesmo conceito são essenciais, como ganham sentido entre dois ciclos de escolaridade ou que ligações se podem fazer a partir de uma história. Mas também se percebe o contributo das conexões para o aprofundamento do conhecimento da cultura local, com base em princípios matemáticos, ou o trabalho de projecto como um ambiente de aprendizagem onde se relaciona a matemática com situações do mundo real, ainda pouco desenvolvido nas escolas mas com potencialidades únicas para a aprendizagem. As tecnologias estão presentes em muitas das experiências relatadas, havendo artigos específicos que destacam o papel da tecnologia como ferramenta poderosa no estabelecimento de conexões.

Pegando numa ideia que será desenvolvida nas páginas desta revista: *Em certo sentido, as conexões matemáticas são o verdadeiro currículo, aquele que nenhum documento oficial pode fielmente exprimir porque corresponde a inúmeros caminhos possíveis e a tantas outras formas de tratar a Matemática, os conceitos, as ideias, as tarefas e as questões na sala de aula.*

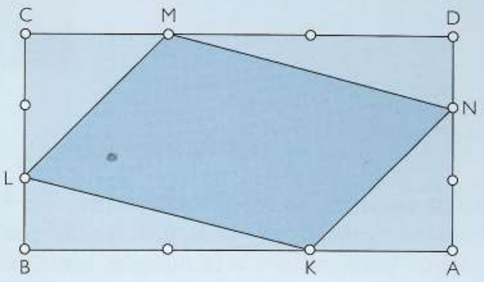
Assim, estabelecer conexões deverá ser uma prática deliberada e habitual que urge ir fazendo com os alunos!

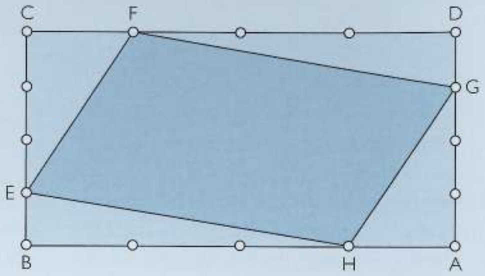
Susana Carreira
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve
e UIDEF da Universidade de Lisboa

Paralelogramos no rectângulo

Dividimos cada lado de um rectângulo ABCD em três partes iguais. Unimos depois quatro dos novos pontos obtidos de modo a formar um paralelogramo KLMN. Que relação existe entre as áreas destas duas figuras?

E se tivéssemos dividido os lados do rectângulo em quatro partes iguais, qual seria agora a relação entre as áreas?





Problema adicional: E se dividirmos cada lado em *n* partes iguais?

(Respostas até 20 de Fevereiro para zepaulo@armail.pt)

À mesa de jogo

O problema proposto no número 108 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Em cima da mesa estavam dois baralhos de 52 cartas cada um. Cada um dos jogadores retirou para si algumas cartas, ficando as restantes no meio da mesa.

Depois e simultaneamente:

— *a Ana deu metade das suas cartas à Beatriz,*

— *a Beatriz entregou um terço das suas ao Carlos,*

— *o Carlos deu um quarto das que tinha ao Diogo,*

— *o Diogo passou um quinto do seu monte à Ana.*

Feito isto, verificaram que todos ficaram com igual número de cartas. Quantas cartas sobraram no meio da mesa?

Recebemos 10 respostas: Afonso Garcia (Torres Novas), Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Ana Loureiro, Catarina Ferreira (Lamego), Edgar Martins (Queluz), Francisco Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Leonel Vieira (Braga) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

O processo seguido por estes nossos leitores foi praticamente o mesmo. Vamos representar por A, B, C e D o número de cartas inicialmente retiradas, respectivamente, por Ana, Beatriz, Carlos e Diogo. «Logicamente, estes valores terão de ser superiores a zero para o termo *retirar* ter sentido» (Alberto Canelas). Após a troca de cartas, os jogadores ficarão com:

Ana: $\frac{1}{2}A + \frac{1}{5}D$ cartas Beatriz: $\frac{1}{2}A + \frac{2}{3}B$ cartas

Carlos: $\frac{1}{3}B + \frac{3}{4}C$ cartas Diogo: $\frac{1}{4}C + \frac{4}{5}D$ cartas

Como todos ficaram com o mesmo número de cartas podemos estabelecer as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}A + \frac{1}{5}D = \frac{1}{2}A + \frac{2}{3}B \\ \frac{1}{2}A + \frac{1}{5}D = \frac{1}{3}B + \frac{3}{4}C \\ \frac{1}{2}A + \frac{1}{5}D = \frac{1}{4}C + \frac{4}{5}D \end{cases}$$

Pretendemos resolver um sistema de 3 equações com 4 incógnitas. Se o fizermos em ordem a A, B e C, obtemos:

$$\begin{cases} A = \frac{19}{10}D \\ B = \frac{3}{10}D \\ C = \frac{7}{5}D \end{cases}$$

Como estes valores têm de ser inteiros, D vai ser múltiplo de 10. Se for $D = 10$, vem $A = 19$. Mas A tem de ser um número par porque a Ana deu metade das suas cartas à Beatriz. Impossível.

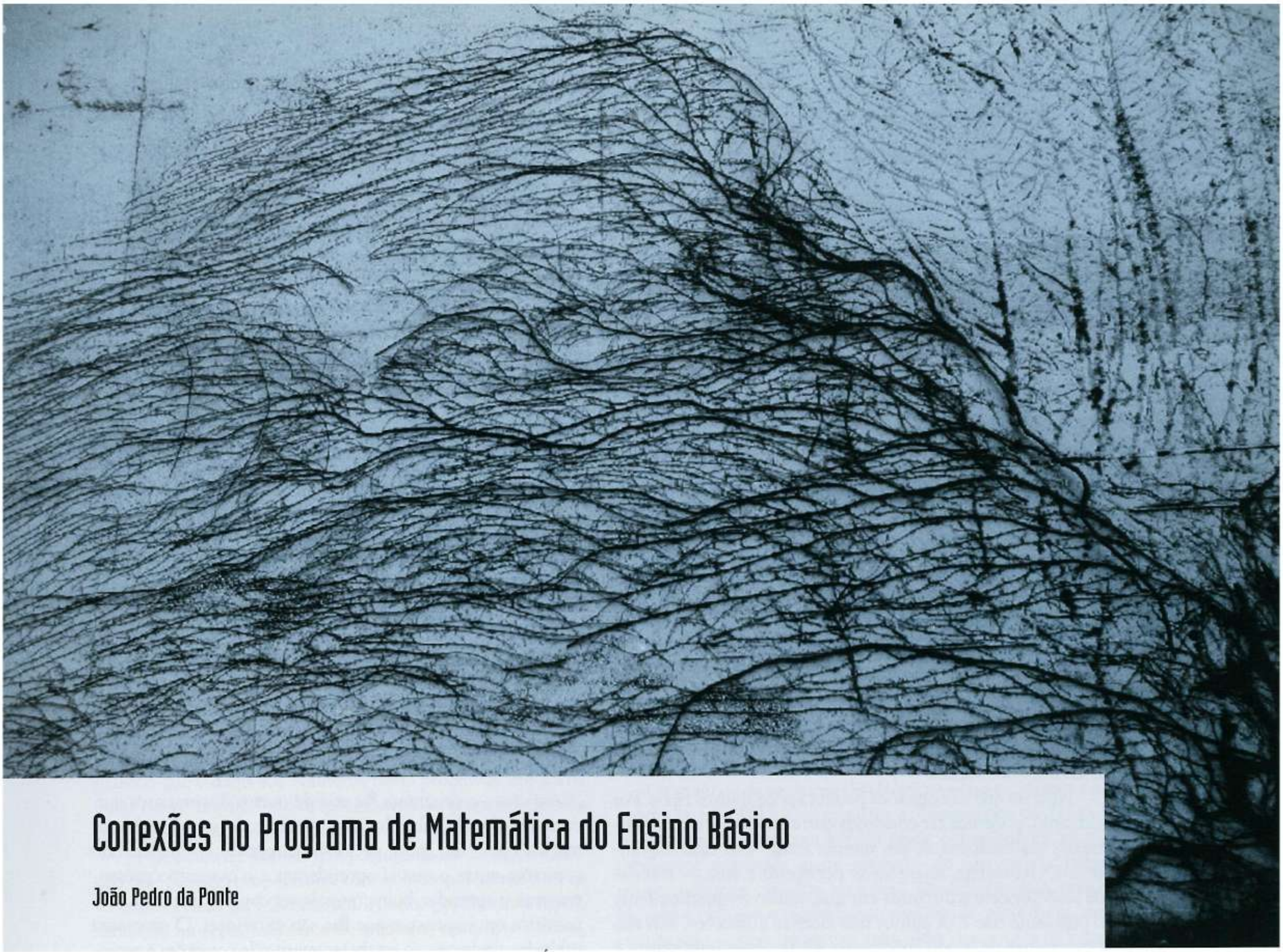
Fazendo $D = 20$, temos $A = 38$, $B = 6$ e $C = 28$.

Se D for um múltiplo de 10 superior a 20, os valores obtidos somam mais que 104, que é o número de cartas de dois baralhos. Assim, inicialmente a Ana tinha 38 cartas, a Beatriz 6, o Carlos 28 e o Diogo 20. No total, são $38 + 6 + 28 + 20 = 92$ cartas. Subtraindo este valor a 104 obtém-se 12. Conclusão: ficaram 12 cartas em cima da mesa.

A Graça Braga da Cruz seguiu um processo ligeiramente diferente depois de ter resolvido o sistema. Chamou N ao número de cartas com que cada um ficou no final. Logo:

$$\frac{19}{10}D + \frac{3}{10}D + \frac{7}{5}D + D = 4N \Leftrightarrow D = \frac{20N}{23}$$

Como D é inteiro, terá de ser $N = 23$ e $D = 20$. A seguir, o processo é idêntico ao anterior.



Conexões no Programa de Matemática do Ensino Básico

João Pedro da Ponte

Nos últimos anos, o papel das conexões no ensino e na aprendizagem da Matemática tem vindo a merecer grande destaque nos documentos curriculares, em Portugal e no estrangeiro, suscitando a atenção de professores e investigadores. Este artigo analisa o modo como o novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) aborda as conexões. Antes disso, porém, faz uma breve análise do significado deste conceito didáctico.

O que são conexões matemáticas?

Embora o uso do termo nos documentos curriculares e no discurso profissional seja recente, a verdade é que a importância das conexões é valorizada deste há muito. Assim, quando damos um exemplo de um conceito, estabelecemos uma conexão entre um caso concreto e um conceito matemático mais geral. Além disso, quando propomos um problema que remete para uma situação da realidade, estamos também a pressupor uma conexão entre conceitos matemáticos e situações extra matemáticas. Podemos dizer que a valorização das conexões matemáticas faz parte do bom ensino da disciplina, largamente documentado em manuais escolares e noutros testemunhos do passado.

No entanto, a ideia moderna de «conexão» envolve algo mais que os exemplos e a resolução de problemas da realidade. Alan Bishop e Fred Goffree (1986), num importante artigo sobre o trabalho do professor na sala de aula, defendem que o sentido que damos a uma ideia matemática depende das conexões que estabelecemos entre essa ideia e outras ideias matemáticas que possuímos:

> Aquilo a que procuramos dar ênfase é à natureza *pessoal* de qualquer novo conceito matemático. Um novo conceito é significativo na medida em que faça a ligação com os conhecimentos individuais já adquiridos. Pode ter ligação com o conhecimento individual sobre outros tópicos e conceitos matemáticos mas pode também estar associado ao conhecimento de outros assuntos fora da Matemática. Pode muito bem estar relacionado com o imaginário, a analogia e a metáfora, mas estas conexões são de um tipo diferente. O conceito pode ser um exemplo de outro conceito matemático (porque isso é a natureza da Matemática) e pode gerar exemplos próprios. Finalmente, um argumento muito importante, pode estar relacionado com o conhecimento individual das situações reais. No entanto, é evidente que não há duas pessoas com as mesmas conexões e ideias e, em particular, professor e aluno terão muitas ideias diferentes associadas à Matemática. (p. 315)

Para Bishop e Goffree (1986), a ideia de conexão está estreitamente ligada à ideia de explicação. Para estes autores, explicar é uma actividade que tanto pode ser realizada pelo professor como pelo aluno e que significa precisamente «estabelecer conexões»: «Manifestamente, explicar é um processo sem fim de representar as conexões, as relações entre a ideia que se está a explicar e outras ideias» (p. 331).

O NCTM (2007) contribuiu de modo decisivo para que as conexões ganhassem grande destaque no ensino da Matemática, quando as colocou como um dos «*process standards*». Nesta publicação, as conexões aparecem ligadas a objectivos de aprendizagem a três níveis, indicando-se que «todos os alunos devem: (i) reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas; (ii) compreender a forma como as ideias matemáticas se inter-relacionam e se constroem umas a partir das outras para produzir um todo coerente; e (iii) reconhecer e aplicar a Matemática em contextos exteriores a ela própria» (p. 71). Argumenta, ainda, que, quando os alunos estabelecem conexões entre ideias matemáticas, a sua compreensão torna-se mais profunda e mais duradoira. Assim, para este documento, quando o ensino dá ênfase à inter-relação das ideias matemáticas, «os alunos não só aprendem Matemática, como também aprendem a reconhecer a utilidade da Matemática» (p. 71). Recomenda, por isso, que os professores usem como ponto de partida as experiências anteriores dos alunos.

Note-se que as conexões podem ser de muitos tipos. Por exemplo, podemos ter conexões entre conceitos e representações matemáticas de um mesmo tema. Um caso flagrante, em Geometria, refere-se ao perímetro e área — trata-se de dois conceitos distintos em que, muito frequentemente, o problema não é os alunos não fazerem conexões, mas sim fazerem-nas de modo incorrecto. Outro caso importante é a existência de diferentes representações para um mesmo conceito — como as representações decimal e fraccionária para os números racionais (Números), as representações gráfica e algébrica para as funções polinomiais (Álgebra) e as representações em tabelas e gráficos (Estatística). Nalguns casos os alunos têm muita dificuldade em estabelecer as devidas conexões entre os diferentes tipos de representação e não conseguem transformar a informação dada numa representação para outra.

Podemos ter também conexões entre conceitos e representações de temas distintos, como Geometria e Álgebra (por exemplo, a representação geométrica da solução de um sistema de equações do 1.° grau), Geometria e Estatística (por exemplo, os gráficos de sectores), e Álgebra e Estatística (por exemplo, o estudo algébrico das propriedades do desvio padrão).

Finalmente, podemos ter conexões entre conceitos e representações matemáticas e situações exteriores à Matemática ou da «realidade». Estão neste caso os conhecidos «problemas de palavras», conhecidos e usados desde a Antiguidade, bem como as situações de modelação matemática. Também entra nesta categoria todo o uso de situações matemáticas susceptível de constituir um ponto de partida para a aprendizagem, na lógica apresentada por Koeno Gravemeijer (2005).

As conexões como objectivo de aprendizagem e como orientação metodológica

Mais do que assinalar todas as conexões que se podem fazer a propósito de cada tópico, o que de resto seria manifestamente impossível, o *Programa de Matemática do Ensino Básico* estabelece diversos princípios fundamentais em relação ao modo como o professor deve encarar o trabalho com conexões no ensino-aprendizagem. Para isso, apresenta as conexões de dois modos, como objectivo geral de aprendizagem e como orientação metodológica central.

Assim, em primeiro lugar, entre os nove objectivos gerais de aprendizagem dos alunos destacados pelo programa, um deles diz respeito precisamente à sua capacidade de estabelecerem conexões:

> Os alunos devem ser capazes de *estabelecer conexões* entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas. Isto é, devem ser capazes de:
>
> — identificar e usar conexões entre ideias matemáticas;
>
> — compreender como as ideias matemáticas se inter-relacionam, constituindo um todo;
>
> — reconhecer e aplicar ideias matemáticas em contextos não matemáticos, construindo modelos matemáticos simples. (ME, 2007, p. 6)

Além disso, o programa faz eco de outros documentos curriculares quando sublinha que os alunos devem ver a Matemática como um todo, de modo integrado, estabelecendo conexões entre o que já aprenderam e o que estão presentemente a aprender, bem como de ser capazes de usar a Matemática em contextos que lhe são exteriores. O programa sublinha ainda que «o estabelecimento de conexões é essencial para uma aprendizagem da Matemática com compreensão e para o desenvolvimento da capacidade de a utilizar e apreciar» (idem, p. 6). Ao colocar as conexões como objectivo de aprendizagem dos alunos, o programa está a indicar que se considera de grande importância que estes sejam capazes de estabelecer tais conexões e de tirar partido delas no raciocínio e na resolução de problemas matemáticos.

Em segundo lugar, o programa apresenta também o trabalho com conexões como uma das orientações metodológicas centrais que o professor deve ter presente na sua prática lectiva: «A exploração de conexões entre ideias matemáticas, e entre ideias matemáticas e ideias referentes a outros campos do conhecimento ou a situações próximas do dia-a-dia do aluno, constitui também uma orientação metodológica importante» (idem, p. 9).

Ao colocar as conexões como orientação metodológica central, o programa sublinha que o estabelecimento de conexões, por si e pelos alunos, constitui um aspecto importante do trabalho na sala de aula, indicando acções a empreender para promover a compreensão dos conceitos e das relações entre conceitos e representações, bem como para promover o desenvolvimento da capacidade dos alunos estabelecerem conexões em geral.

Conexões entre temas e tópicos matemáticos

Além de surgirem nos objectivos e orientações metodológicas gerais, as conexões aparecem valorizadas de forma explícita ou implícita na abordagem que o Programa de Matemática propõe a diversos temas. Por exemplo, ao referir a importância do tema da Medida, o programa alude de modo explícito às conexões matemáticas: «A Medida tem um peso importante no 1.° ciclo, (...) sendo um tema bastante rico do ponto de vista das conexões entre temas matemáticos e com situações não matemáticas, [que] deve ser trabalhado ao longo dos ciclos» (idem, p. 7).

Na verdade, a medida de grandezas (sejam grandezas físicas ou de outra natureza) constitui uma importante conexão entre o domínio onde se situa essa grandeza e a Matemática. Grandezas físicas, como comprimento, área, volume, capacidade, massa, tempo, temperatura, quantidade de calor, energia, etc., bem como grandezas relativas à vida económica e social como dinheiro, taxa de desemprego, taxa de inflação, etc., fazem parte da experiência quotidiana dos alunos. A medida estabelece uma possibilidade de quantificação dessas grandezas, permitindo usar no respectivo estudo todas as possibilidades dos Números e, para uma abordagem mais aprofundada, da Álgebra e da Geometria.

A conexão entre Números e Álgebra é fortemente valorizada pelo programa. Isso decorre do tratamento mais algébrico que é dado aos Números neste programa, em particular no 1.° e no 2.° ciclo, sublinhando as propriedades das operações e a noção de equivalência de expressões.

A Geometria, através das possibilidades de representação que oferece, proporciona conexões importantes com os restantes temas de Matemática. Assim, possibilita a representação na recta numérica de números naturais, inteiros, racionais e reais, essencial para a compreensão da relação de ordem, o desenvolvimento do sentido de número e a compreensão das operações. Permite a representação de entidades algébricas, como intervalos (um certo conjunto de números), vectores (um conceito mais algébrico que geométrico), e funções numéricas de variável numérica. Proporciona, além disso, diversas formas de representação para distribuições estatísticas.

Para além das conexões entre temas distintos, o programa também sublinha a importância das conexões em tópicos relativamente próximos. Um exemplo de grande importância diz respeito às conexões entre as representações decimal e fraccionária dos números racionais. No anterior programa (ME, 1990, 1991), fazia-se primeiro o estudo destes números na representação decimal (no 1.° ciclo estudavam-se os números decimais e as operações com decimais) e só mais tarde é que se fazia um estudo equivalente da representação em fracção (incluindo então as operações com fracções). Sabemos bem que, para muitos alunos, não existia qualquer conexão entre as duas representações. A opção por um estudo dos números racionais mantendo tanto quanto possível em paralelo as representações fraccionária e decimal tem precisamente o objectivo de permitir o estabelecimento de conexões à medida que o estudo se desenvolve. Além disso, o novo programa sublinha também a importância de uma outra representação — a recta numérica — que, como já referido, permite estabelecer uma importante conexão entre o conceito de número racional e a Geometria.

No estudo da Álgebra, o programa dá uma grande ênfase ao conceito de função. Sublinha, a seu respeito, a importância de duas representações — a gráfica e a algébrica. Estas, por sua vez, utilizam como elemento de ligação os números, através do sistema de representação cartesiana. Assim, uma função é, por um lado, um objecto algébrico (dado, por exemplo, por uma equação do tipo $y = kx$), um objecto geométrico (dado, por exemplo, por uma recta que passa na origem) e que cujos objectos e imagens são frequentemente entidades numéricas, que se podem representar em tabelas. Enquanto no passado se procurava chegar o mais rapidamente possível à representação algébrica, desvalorizando a partir daí as restantes representações, reconhece-se hoje a necessidade de valorizar de modo muito mais equilibrado as representações algébrica, gráfica e tabelar.

O programa refere-se a muitas outras conexões que se podem estabelecer entre tópicos diversos. Por exemplo, como oportunidade para desenvolver o pensamento algébrico, sugere «a investigação das fórmulas das áreas e dos volumes de figuras e de sólidos e da soma dos ângulos internos e externos de polígonos convexos» (ME, 2007, p. 55), uma conexão interessante que se pode estabelecer entre Álgebra e Geometria.

Os gráficos de sectores (Estatística — no programa enquadrada na OTD, Organização e Tratamento de Dados) constituem também um tópico onde naturalmente se estabelecem conexões entre aspectos de Geometria (figuras geométricas: círculos, sectores), Medida (ângulo, área), Números (números racionais no significado parte-todo, determinação de percentagens), para além das noções de Estatística propriamente dita (variável, distribuição, etc.).

Conexões exteriores à Matemática

Para além das conexões internas à Matemática, merecem também lugar de destaque no programa as conexões com aspectos exteriores à Matemática. Estas conexões são importantes, em primeiro lugar, a propósito da aprendizagem dos diversos conceitos e representações. Assim, por exemplo, a aprendizagem dos diferentes significados dos números racionais (parte-todo, quociente, razão, medida, operador), um aspecto a que o programa dá destaque, requer uma forte ancoragem em situações experienciais correspondentes.

Em segundo lugar, essas conexões são importantes do ponto de vista da capacidade de usar a Matemática na resolução de problemas. Na verdade, o programa apresenta a resolução de problemas como capacidade matemática transversal, sublinhando que muitos destes problemas devem corresponder a situações da realidade: «No 1.° ciclo, os contextos desempenham um papel particularmente importante, em especial os que se relacionam com situações do quotidiano, devendo ser escolhidos de modo cuidadoso uma vez que servem de modelos de apoio ao pensamento dos alunos» (ME, 2007, p. 29); No 2.° ciclo, «para além dos problemas que correspondem a situações da vida quotidiana,

- Propor situações do quotidiano, incluindo aquelas em que surge naturalmente a representação decimal (por exemplo, folhetos com preços).
- Propor a utilização de unidades de medida não convencionais, como palmos, pés, passos e objectos para medir comprimentos, e recepientes para medir capacidades.
- Solicitar a representação de percentagens pictoricamente e usando o símbolo %, e relacionar percentagens com fracções e decimais.
- Propor situações que possibilitem a ‹visualização› de expressões algébricas por exemplo, o cálculo da área do rectângulo de dimensões a e a+2, usando a fórmula da área e a soma das medidas das áreas do quadrado de lado a e do rectângulo de dimensões a e 2.
- Relacionar o Teorema de Tales (Se duas rectas paralelas intersectam duas secantes, os triângulos obtidos têm os lados correspondentes proporcionais) com a semelhança de triângulos.
- Na identificação de translações, considerar situações da vida quotidiana (como papéis de parede, tecidos, azulejos ou frisos decorativos).

Figura 1. Exemplos de conexões internas à Matemática e da Matemática com situações exteriores à matemática indicadas nas Notas do Programa do Ensino Básico

os alunos devem resolver problemas que se relacionem com outras áreas disciplinares (...)» (idem, p. 45); No 3.° ciclo, «tratam-se problemas que correspondem a situações próximas da vida quotidiana, problemas associados a outras áreas disciplinares» (idem, p. 62).

Todos os temas de Matemática desempenham um papel importante neste tipo de conexões. Por exemplo, no estudo das medidas de grandezas e das respectivas unidades de medida, as conexões entre a Matemática e a realidade aparecem de forma natural e devem ser devidamente exploradas.

A OTD constitui um tema especialmente rico do ponto de vista das conexões, devidamente assinaladas no programa. Assim, no 1.° ciclo, o programa refere que:

A aprendizagem deste tema deve ser alicerçada em actividades do dia-a-dia. Os alunos lêem e interpretam tabelas e gráficos simples e formulam questões sobre um dado assunto, identificam os dados a recolher, e organizam, representam e interpretam esses dados com o propósito de dar resposta às questões formuladas. (idem, p. 26).

Em Estatística trabalha-se com variáveis e com colecções de objectos, o que permite uma quantificação e a respectiva representação tabelar e gráfica. No 1.° ciclo, sugere-se a realização de tarefas baseadas em aspectos como «características dos alunos da turma (...), Estudo do Meio» (idem, p. 26). No 2.° ciclo, refere-se a «resolução de problemas identificados pelos alunos na sua vida quotidiana» (p. 42), indicando que a recolha de dados pode ser feita «recorrendo a observações ou experimentações e a fontes secundárias como a Internet» (p. 43). No 3.° ciclo, refere-se que «os alunos realizam investigações estatísticas baseadas em situações reais» (p. 59). Afirma-se ainda que «o professor deve relacionar os temas de esses estudos com assuntos de outras disciplinas, com temas da actualidade nacional ou internacional ou com interesses dos alunos» (p. 59).

As Probabilidades constituem também um tópico onde a ligação com situações da realidade desempenha um papel essencial, reconhecido pelo programa quando diz, por exemplo, que «devem ser exploradas (...) situações (...) relacionadas com o dia-a-dia, que ajudem os alunos a compreender que existem acontecimentos certos, possíveis, impossíveis, prováveis e improváveis» (p. 27).

Conclusão

As conexões entre a Matemática e a realidade exterior à Matemática são fundamentais para o desenvolvimento dos conceitos e das ideias matemáticas, por parte dos alunos, bem como para o desenvolvimento da sua capacidade de usar a Matemática na resolução de problemas dos mais diversos domínios. Pelo seu lado, as conexões internas à Matemática são essenciais para a compreensão dos conceitos, das representações e das suas relações. Ambos os tipos de conexões são igualmente importantes. O novo programa de Matemática do ensino básico sublinha o papel das conexões e proporciona orientações gerais para o trabalho a realizar pelo professor, que é incentivado a criar oportunidades de trabalho na sala de aula com diversos tipos de conexões e a usá-las para promover a aprendizagem dos alunos e o desenvolvimento das suas capacidades. Pelo seu lado, cabe ao professor, na sua prática do dia-a-dia, em função da experiência e dos conhecimentos prévios dos alunos, decidir as tarefas a propor, as conexões a valorizar e os modos de trabalho a usar, tendo em vista a aprendizagem dos alunos.

Referências

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309–365). Dordrecht: D. Reidel.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83–101). Lisboa: APM.

Ministério da Educação (1990). *Programa do 1.° ciclo do ensino básico.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (2.° ciclo do ensino básico).* Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: DGIDC (disponível em http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ ProgramaMatematica.pdf)

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM.

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Conexões Matemáticas no Ensino Secundário

Jaime Carvalho e Silva

Felix Klein

O actual programa de Matemática A para o Ensino Secundário (2003), tal como o seu antecessor directo (1995), preconizam uma grande atenção às conexões na sala de aula:

«As Conexões entre os diversos temas são consideradas fundamentais neste programa, para que os estudantes possam ver que os temas são aspectos complementares de uma mesma realidade.»

E o programa chama repetidamente a atenção para a importância das conexões. Por exemplo:

«a Geometria (...) deixa perceber verdadeiras conexões entre os vários temas da Matemática, da Álgebra à Análise e à Estatística.»

O que significa esta palavra «conexão»? Porque aparece ela no programa? Trata-se de mais uma das «novas metodologias» tão elogiadas por uns e tão criticadas por outros?

Consultado o dicionário Priberam da Língua Portuguesa encontramos como significados de conexão, enlace ou vínculo entre pessoas ou entidades, ligação, coerência, nexo, analogia. Significa então que se estabelece uma ligação de algum tipo entre dois temas matemáticos diferentes, ou entre um tema matemático e um tema não matemático. Que se pode ganhar com isso?

Um dos trabalhos mais antigos onde encontramos referência ao uso de conexões matemáticas no ensino é de 1908 e foi escrito pelo célebre matemático Felix Klein, o primeiro presidente do ICMI-Comissão Internacional de Instrução Matemática. No primeiro volume do seu livro «Matemática Elementar de um ponto de vista superior», logo na página 2 da introdução, pode ler-se:

«O meu objectivo consiste em mostrar-vos sempre *as conexões entre problemas de diferentes áreas*, o que não acontece de forma suficiente na generalidade dos manuais, e, mais especificamente, sublinhar a relação destes problemas com a matemática escolar.»

Esta é uma afirmação muito forte. Mas Felix Klein dá vários exemplos concretos no seu pequeno livro, tais como

«O problema da divisão da circunferência em partes iguais está intimamente relacionado com a teoria dos números, embora seja raro que se estabeleça esta ligação nas escolas.»

«No ensino escolar é abordada outra questão importante de teoria dos números: o calculo de π, durante o estudo da quadratura do círculo.»

Determinar «os números pitagóricos» reduz-se a «analisar o modo como a circunferência unitária atravessa o conjunto denso dos pontos racionais, e em particular determinar quais desses pontos contém.»

«o aluno deve ser habituado, logo desde o início, à interpretação geométrica e intuitiva no plano complexo.»

E por aí adiante.

A recta multifacetada

Vejamos alguns exemplos de conexões matemáticas no Ensino Secundário. O Programa de Matemática A sugere que:

«Se os estudantes estão a explorar, por exemplo, um problema de geometria poderão estar a desenvolver a sua capacidade de visualizar, de fazer conjecturas e de as justificar, mas também poderão estar a trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, a trabalhar com proporções na semelhança de figuras ou a trabalhar com expressões algébricas.»

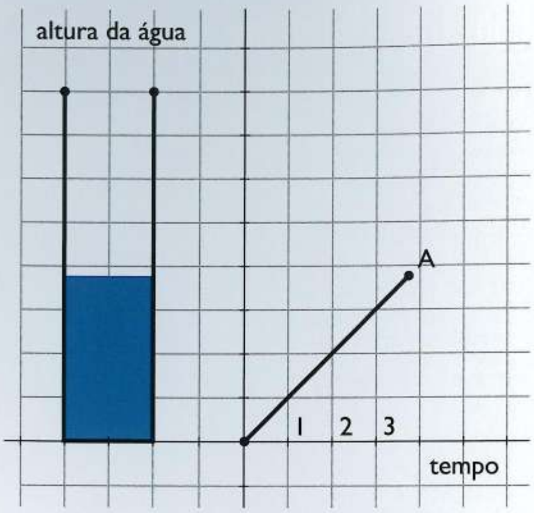


Figura 1

Com efeito, os problemas e os conceitos de Geometria são uma fonte excelente de trabalho tanto geométrico como algébrico como de funções, tanto de ligações fora da Matemática. Muitos conceitos de geometria podem ser ligados uns aos outros e a temas não matemáticos. Por exemplo, a proporcionalidade começa logo a ser discutida no 3° ciclo e tem inúmeras ligações com temas não matemáticos. Para citar apenas um, consideremos o Direito. No glossário da União Europeia pode ler-se:

«*Proporcionalidade (Princípio da)*
(...) o princípio da proporcionalidade regula o exercício das competências exercidas pela União Europeia. Visa delimitar e enquadrar a actuação das instituições da União. Por força desta regra, a actuação das instituições deve limitar-se ao que é necessário para atingir os objectivos dos tratados. Por outras palavras, a intensidade da acção deve estar relacionada com a finalidade prosseguida.»

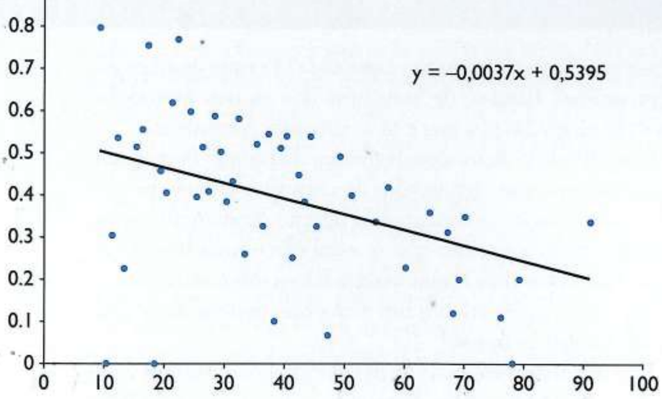


Figura 4

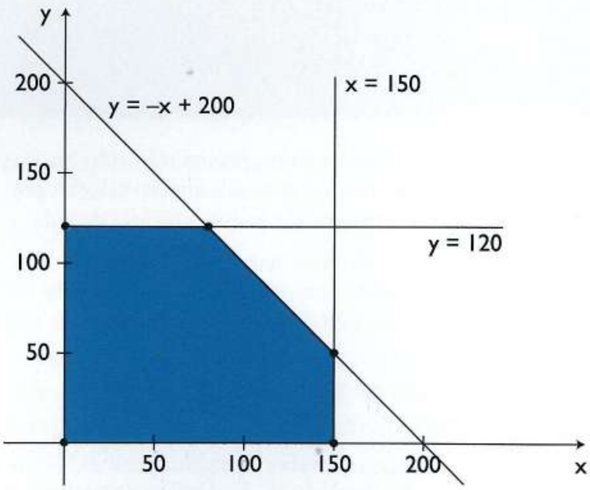


Figura 5

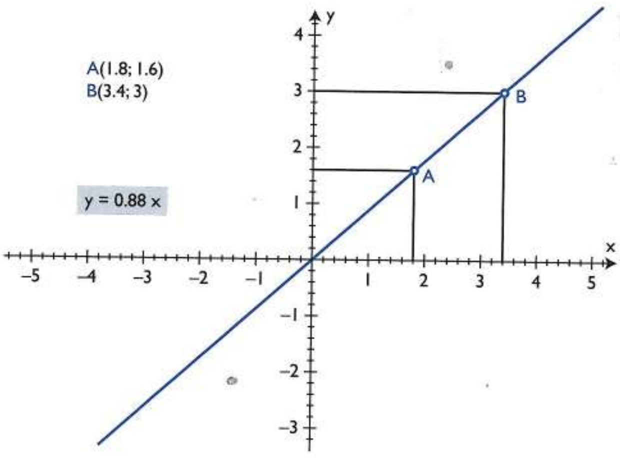


Figura 2

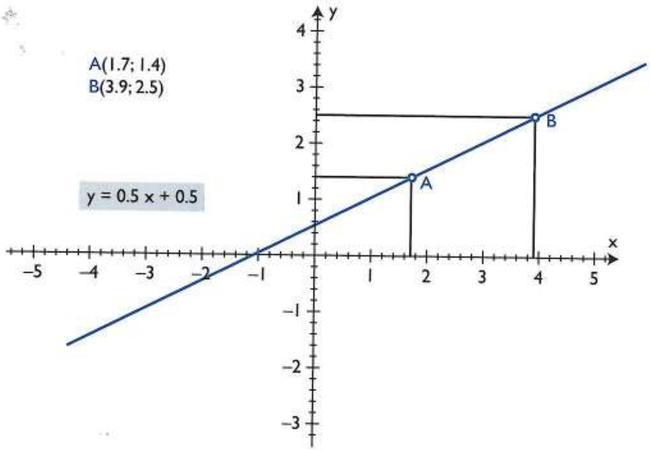


Figura 3

Outra definição:

«*Princípio da proporcionalidade*: Modalidade indicadora de que a severidade da sanção deve corresponder a maior ou menor gravidade da infracção penal. Quanto mais grave o ilícito, mais severa deve ser a pena. »

Mas a proporcionalidade não são só números ou relações entre variáveis. Uma outra abordagem que se junta é a da representação gráfica. E a própria representação gráfica já começa a mostrar as suas grandes potencialidades de exploração, abrindo caminho para, mais tarde, se estudarem as funções em detalhe (figura 1).

Quando se estuda a equação reduzida da recta, reaparece a proporcionalidade, mas alarga-se o âmbito da representação matemática a rectas que não passam pela origem (figura 2, 3 e 4).

Quando se estudam as funções, faz todo o sentido retomar a geometria das rectas que agora representam relações funcionais, com novas interpretações, mas totalmente compatíveis com todo o estudo anterior. Quando se chega ao estudo estatístico da relação entre duas variáveis, aparece de novo a equação da recta.

As rectas mostram toda a sua importância no estudo da programação linear, quando são as actrizes principais dos problemas de optimização (figura 5).

Quando se estudam as taxas médias de variação, descobre-se que o declive é a taxa média de variação da função respectiva, em qualquer intervalo, e que esta taxa média de variação é constante e coincide com o declive da recta. Finalmente, a recta faz a sua suprema aparição quando se estudam tangentes a curvas: o declive da recta tangente é afinal a taxa de variação da função em estudo, no ponto de tangência.

Cada vez que se estuda a recta/função linear/função afim, tudo o que foi visto antes pode ser retomado e integrado no estudo que está a ser feito. O programa de Matemática A enfatiza exactamente este aspecto:

«Uma compreensão mais profunda da Matemática só se verifica quando o estudante vê as conexões, quando se apercebe que se está a falar da mesma coisa encarando-a de diferentes pontos de vista.»

Geometria e Funções

Outros problemas ou conceitos de Geometria podem ser o ponto de partida de conexões interessantes. Problemas de áreas e volumes podem facilmente fornecer essa oportunidade. Consideremos por exemplo o clássico problema da caixa. Se pretendemos calcular o volume de uma caixa sem tampa quando a quantidade de material (cartão, metal, etc.) é fixada à partida, então não sabemos quais as dimensões exactas da caixa, e aparecem várias possibilidades (figura 6).

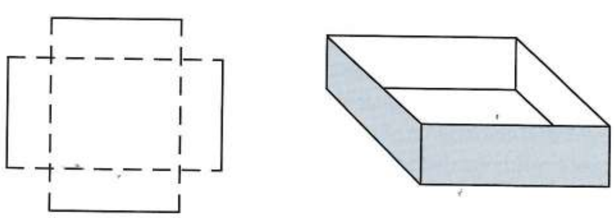


Figura 6

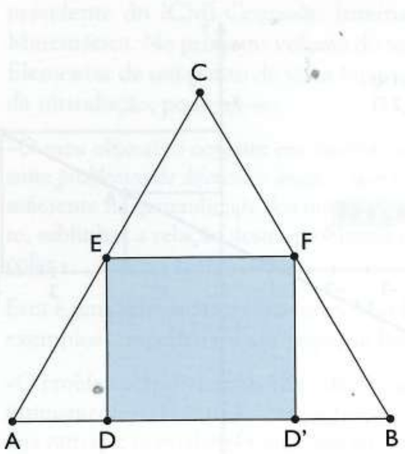


Figura 7

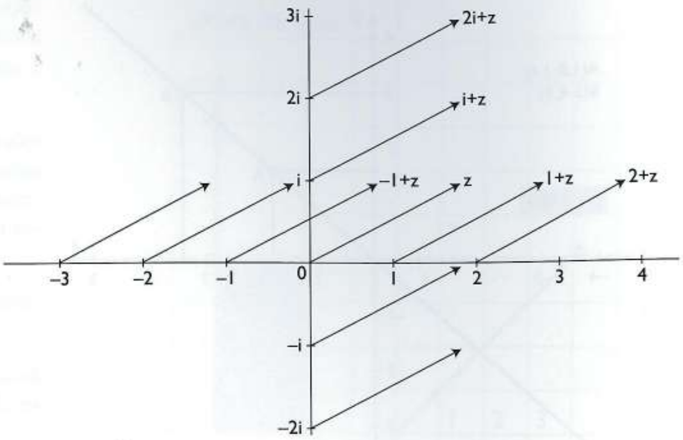


Figura 8

Podemos usar um *software* de Geometria Dinâmica e explorar este problema, ficando com uma boa ideia das diferentes possibilidades e obtendo valores aproximados dos valores extremos. Mas podemos também recorrer à Álgebra e ao estudo das Funções. Se uma das dimensões da base da caixa for x e a outra y e a altura for igual a uma das dimensões da base, digamos x, então o volume será dado em função de x e y por

$$V(x, y) = x^2y$$

Mas se a área da superfície onde se vai recortar a caixa sem tampa for um valor dado A, podemos dizer que

$$A = y^2 + 4xy$$

e assim o volume pode ser expresso em termos de uma só variável

$$V(y) = \frac{1}{4}(A - y^2).$$

Podemos não só estudar esta função quadrática como estudar o desperdício de material

$$D(y) = A - \frac{1}{4}(A - y^2).$$

Se a caixa tiver tampa, então o problema muda completamente e as funções obtidas são bastante diferentes. E se o volume V for dado e se pretender obter uma caixa com o mínimo de área? Então a função a estudar será

$$A(x) = y^2 + 4xy = \frac{V^2}{x^4} + 4\frac{V}{x}$$

que já não é uma função polinomial.

E se o material disponível não tiver forma rectangular mas uma forma triangular? Simplifiquemos a situação e procuremos apenas o rectângulo de área máxima inscrito no triângulo, suposto equilátero e de lado L (figura 7).

Como varia a área do rectângulo em função do lado? Designemos o comprimento do segmento AD por x. Então a área do rectângulo é dada por

$$A(x) = \sqrt{3}x(L - 2x).$$

Nesta função aparece uma raiz quadrada de forma natural. Se o triângulo for rectângulo e pretendermos determinar o maior valor da hipotenusa h de modo que a área seja máxima com o perímetro P dado, em função de um dos catetos x, obtemos

$$h(x) = \frac{P^2 - 2xP + 2x^2}{2(P - x)}.$$

Desta vez obtivemos uma função racional. Se no problema da caixa sem tampa quisermos determinar as dimensões dos lados da caixa em função do volume V, a função passa a ser

$$y(V) = \sqrt{A - 4V}$$

e obtemos desta vez uma função com radicais.

Números Complexos

Os números complexos são também uma excelente oportunidade de trabalhar as conexões. Este tema foi escolhido para encerrar o programa de Matemática A do Ensino Secundário por, tal como assinalam os autores da brochura «Trigonometria e Números Complexos», os números complexos serem um dos temas de unificação matemática por excelência e contêm oportunidade de, pelo menos, «quatro conexões principais (...): números complexos e sistemas de coordenadas, números complexos como vectores, números complexos e transformações geométricas, geometria [elementar] e números complexos». Remeto o leitor interessado para essa brochura para mais detalhes. Irei apenas referir um par de exemplos.

As operações algébricas com números complexos podem todas ser interpretadas em termos de transformações geométricas. Por exemplo: o conjugado de um número complexo z pode ser obtido a partir de uma reflexão de z em torno do eixo das abcissas. Agora é fácil ver geometricamente porque é que o conjugado do conjugado nos devolve o número complexo original, obtendo-se uma visão geométrica de um problema que tem também uma visão algébrica.

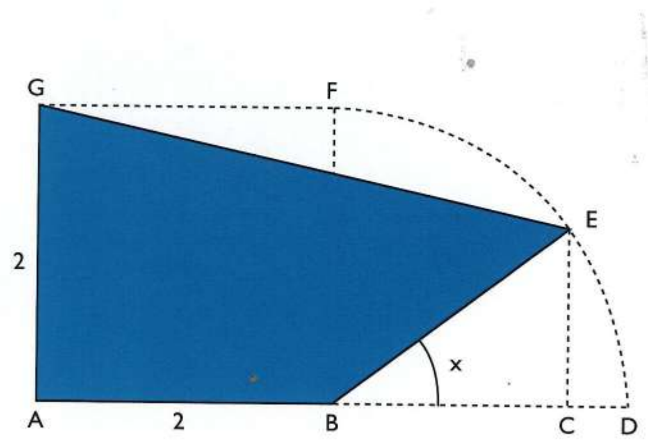


Figura 9

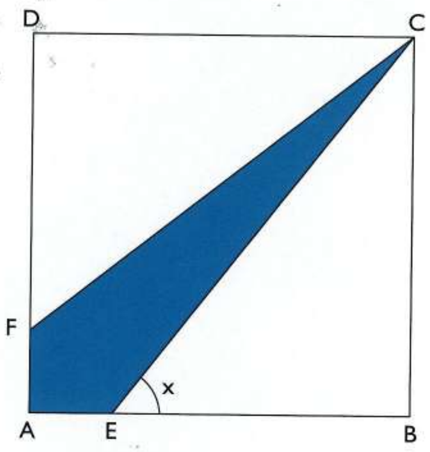


Figura 10

Outro exemplo: adicionar um número complexo significa efectuar uma translação. A figura 8 (tirada da página de Internet de David Joyce) mostra como a adição com o número complexo z corresponde à translação segundo o vector representado pelo número complexo z.

Como todas as operações com números complexos podem ser interpretadas como transformações geométricas, a resolução de problemas de geometria pode ser transformada num problema de transformações geométricas que pode ser mais fácil de resolver, e vice versa.

O vai-vem entre a álgebra dos números complexos e a geometria elementar é muito rico e impressionante: o ortocentro de um triângulo cujos vértices estão no círculo unitário pode ser obtido como a soma dos complexos que representam os vértices. Multiplicar por um número complexo de módulo 1 é efectuar uma rotação de ângulo igual ao argumento do complexo, em torno da origem, no sentido contrário aos ponteiros do relógio. A recta que passa pelos números complexos z e w é paralela à recta que passa pelos números complexos u e v se e somente se

$$\frac{z-w}{u-v}$$

for um número real. Usando números complexos é fácil provar que o segmento que une os pontos médios de dois lados consecutivos de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade do comprimento desse lado. E por aí adiante.

Exames nacionais

Os exames nacionais são tanto mais bem feitos quanto conseguem abranger mais competências definidas no currículo. As conexões entre diferentes temas são frequentes nos exames nacionais do 12° ano de Matemática desde 2000, data dos primeiros exames nacionais do programa de 1995 (que entrou em vigor apenas em 1997). Por exemplo, num exame de 2003, pede-se para determinar a área do polígono [ABEG] na figura 9.

A área é dada por

$$2(1+\operatorname{sen} x+\cos x)$$

e esta expressão é usada para determinar quando a área atinge determinados valores. Em 2002 pede-se para determinar o perímetro do quadrilátero [CEAF] na figura 10.

O perímetro é dado por

$$2-\frac{2}{\tan x}+\frac{2}{\operatorname{sen} x}$$

e depois esta expressão é usada para estudar o modo como o perímetro varia em função de x.

Infelizmente não existem estudos que nos permitam concluir se as conexões matemáticas são bem avaliadas com este tipo de questões e qual o grau de dificuldade que elas apresentam para os alunos portugueses.

Conexões no estudo PISA

As conexões matemáticas são uma das competências abrangidas pelo estudo internacional PISA que é aplicado pela OCDE de 3 em 3 anos a estudantes com 15 anos (que, em Portugal, abrange sobretudo alunos do 9° e 10° anos de escolaridade). Aí se define conexão como:

«conexões — requerem a reunião de ideias e de procedimentos matemáticos para resolver problemas algo familiares e de resolução directa»

Na definição da classe de competência 2 (intermédia) as conexões aparecem ligadas à resolução de problemas com a seguinte definição:

«Conexões e integração para resolução de problemas — Os processos incluídos nesta classe de competências fazem conexões entre linhas de conteúdos e domínios diferentes e integram informação de forma a resolver problemas simples. Embora os problemas sejam, supostamente, não rotineiros, requerem graus de matematização relativamente diminutos.»

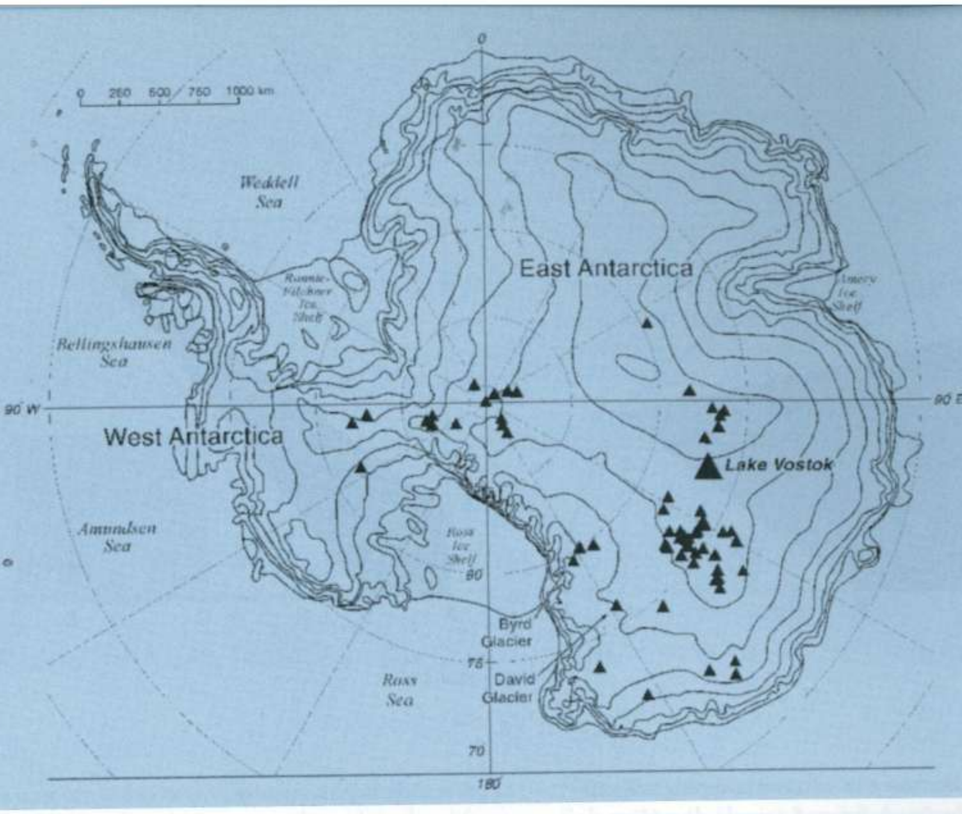


Figura 11

Um dos exemplos de questões nesta classe de competência é dado pelo problema onde se pede um valor aproximado da área de uma figura muito irregular (na circunstância o continente Antárctida, ver figura 11).

No estudo do PISA este item foi desastroso para os alunos portugueses pois 3/4 dos alunos nem sequer responderam; dos que responderam, quase todos os alunos tiveram dificuldades em escolher figuras geométricas que lhes permitissem resolver adequadamente o problema, errando a estimativa por mais de 3 milhões de km^2; só 2,5% dos alunos portugueses responderam correctamente.

Conclusão

Tal como Felix Klein defendia, o trabalho das conexões matemática faz com que «se torne mais fácil … adquirir a capacidade que considero o verdadeiro objectivo dos estudos académicos: a de retirar das grandes questões científicas que nos são oferecidas abundantes estímulos e orientações para o exercício da própria actividade docente.» Para o estudante, evidenciar múltiplas conexões com outros temas, permite que se consiga o «desenvolvimento das competências matemáticas transversais, isto é, daquelas que atravessam todos os temas e devem constituir os grandes objectivos de um currículo de Matemática» visto que uma compreensão mais completa dos temas matemáticos contemplados nos programas só é realmente possível quando, através das conexões, os estudantes se apercebem que muitas vezes na realidade estão a falar de um mesmo conceito, apenas sob um ponto de vista diverso; assim os estudantes ficam realmente preparados para resolver os novos problemas com que se enfrentarão. Em conclusão, tal como refere o programa de Matemática A,

«A Matemática nas suas conexões com todos os ramos de saber é uma contribuição decisiva na criação de condições para a consciência da necessidade da educação e da formação ao longo da vida, com vista a enfrentar mudanças profissionais e as incontornáveis adaptações às inovações científicas e tecnológicas.»

Referências

Carvalho e Silva, J. (coord.), Fonseca, M.G., Martins, A.A., Fonseca, C.M.C., Lopes, I.M.C. — MATEMÁTICA — 10°, 11° e 12° ANOS — Programa, ME–DES, 2003.

Europa — Glossário. Acessado em http://europa.eu/scadplus/glossary/proportionality_pt.htm

GAVE — PISA 2000, Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses, Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação, Lisboa, Portugal, 2002.

Joyce, D. — Dave's Short Course on Complex Numbers. Acessado em http://www.clarku.edu/~djoyce/complex/

JusBrasil — Acessado em http://www.jusbrasil.com.br/topicos/292978/principio-da-proporcionalidade

Klein, F., Matemática Elementar de um ponto de vista superior, vol.1-parte 1 Aritmética, SPM, Lisboa, 2009.

Loureiro, C. (coord.), Oliveira, A., Silva, J. & Bastos, R. — *Trigonometria e Números Complexos*. (1ª ed.). Lisboa: ME–DES, 2000.

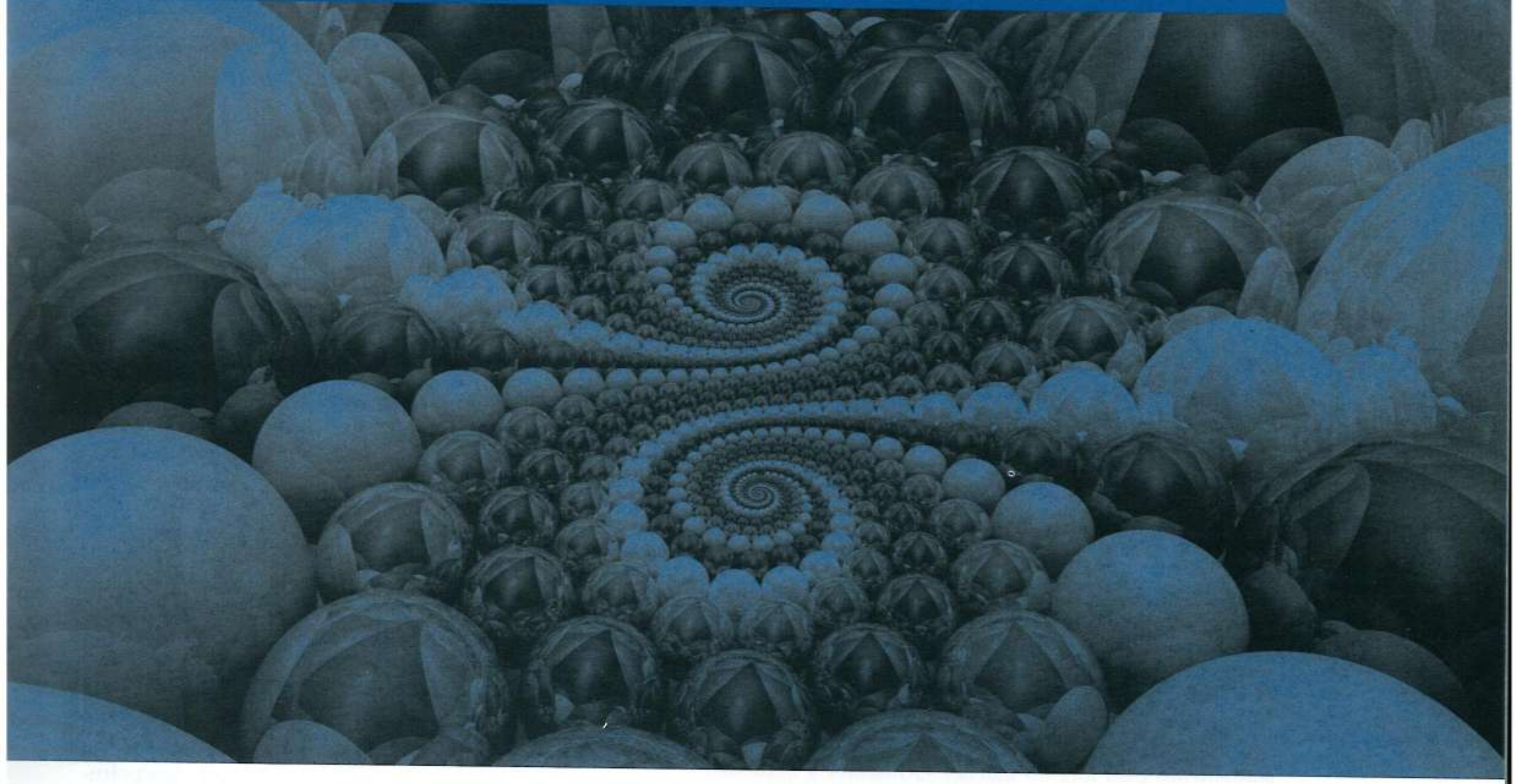
ME–DES, MATEMÁTICA — 10°, 11° e 12° ANOS — Programa, 1995.

Teixeira, P. (coord.), Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C. e Nápoles, S. — Funções: Matemática — 10° ano de escolaridade. Lisboa: ME–DES, 1997.

Jaime Carvalho e Silva
Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra

Conexões matemáticas — Ligar o que se foi desligando

Susana Carreira



A Matemática como um meio e como um sistema

Uma das principais razões pelas quais a ênfase nas conexões matemáticas tem vindo a tornar-se um apelo insistente nos currículos de Matemática escolar consiste na necessidade de contrariar visões e percepções estreitas da Matemática e do trabalho em Matemática, que degeneram em resultados indesejáveis — compartimentação, fragmentação, isolamento, mecanização, incompreensão. Boaler (2003), num artigo que publicou no *Educational Studies in Mathematics*, vai mesmo ao ponto de afirmar:

> Com efeito, poderíamos argumentar que é a estreiteza com que a matemática é encarada que tem mantido o sistema do insucesso educativo, em que apenas alguns chegam a atingir a perícia ou a fluência em matemática (Boaler, 2003, p. 10).

Os estudos que levou a cabo em diversas escolas do Reino Unido e dos Estados Unidos da América são reveladores de um conjunto de concepções enraizadas em alunos e professores, algumas das quais consistentemente observadas em trabalhos de investigação anteriores: os alunos vêem a Matemática como uma colecção de procedimentos desconexos e padronizados; tentam absorver um conjunto de métodos que lhes permitam resolver as questões dos testes; esforçam-se por memorizar esquemas de resolução de tarefas de determinados tipos, procuram reproduzir procedimentos e esbarram com o malogro de nem sempre perceberem quando devem ou não aplicar esses procedimentos.

A questão subsequente colocada por Boaler é a de saber se o acto de estabelecer conexões matemáticas corresponde a algo que deve ser incluído no *conhecimento matemático* dos alunos ou se, em vez disso, deve ser algo que tem de estar presente na *prática matemática*, ou seja, uma acção que eles precisam de fazer e de pôr em prática regularmente.

> Os alunos que têm uma compreensão profunda podem estabelecer conexões no decurso do seu trabalho, pois o conhecimento e a prática estão intrincadamente ligados, mas o acto de estabelecê-las não é definido pelo conhecimento que possuem (Boaler, 2003, p. 12).

Em suma, o acto de criar conexões pode ser entendido como uma acção que se estende para além do conhecimento, escapando, designadamente, à distinção entre conhecimento processual e conhecimento conceptual. Neste sentido, a criação de conexões em matemática, no contexto da aprendizagem escolar, corresponderá a um traço de uma prática matemática, muito mais do que a um elemento do conhecimento matemático a ser adquirido.

Este tipo de perspectiva, que sublinha inequivocamente o carácter do trabalho a desenvolver em matemática ou, se preferirmos, a actividade de *fazer* matemática na esfera da aula de matemática, pode ser complementada por uma outra distinção proveniente da filosofia da Matemática. Roland Fischer (1993), num artigo do livro intitulado *Math Worlds*, teoriza a natureza dupla da matemática, olhando-a como um *meio* e como um *sistema*. A Matemática constitui um *meio* através do qual os indivíduos explicam e controlam situações complexas presentes em ambientes naturais ou artificiais e um mecanismo com o qual são capazes de comunicar acerca das referidas situações. Ao mesmo tempo, a Matemática constitui um *sistema* de conceitos, regras, procedimentos, algoritmos que os seres humanos interiorizam e que se tornam parte intrínseca do modo de pensar dos indivíduos, formando a nossa forma de conceber o mundo e a nossa relação com este, moldando as relações económicas, sustentando uma sociedade computorizada, tecnológica, etc. Ao pensarmos na Matemática como um *meio*, salientamos sobretudo o seu carácter de ferramenta; ao tomarmos a Matemática como um *sistema*, consideramos principalmente o modo como a Matemática organiza e constrói modos de pensar e de actuar, materializando relações, muitas vezes de uma forma que não é questionada mas simplesmente assumida.

Actualmente, parece evidente que o papel primordial atribuído à Matemática pela sociedade reside na sua capacidade de oferecer um *meio* poderoso para resolver problemas. Curiosamente, a ênfase neste lado da Matemática tem uma manifestação a que podemos chamar de modelação matemática, a qual, segundo Fischer, conduz ao nosso afastamento para fora do mundo. Utilizamos a Matemática para explicar e controlar alguma coisa que existe algures, desenvolvendo construções que colocamos de permeio entre nós e aquilo que queremos explicar e controlar. O real torna-se um objecto de estudo, a ser investigado e moldado; o indivíduo afasta-se desse objecto e a Matemática tende a funcionar tanto melhor quanto maior for essa distância. Exemplos paradigmáticos deste processo de afastamento para fora do real encontram-se na economia. Uma possibilidade de matematização das relações económicas assenta em alguns pressupostos fundamentais — um deles é a divisão do mundo económico em consumidores, produtores e mercadorias. Vários outros se podem ir adicionando, numa espécie de axiomática ideal para abrir o espaço à intervenção da Matemática: o consumidor visa maximizar a utilidade (o que permite definir a função procura), o produtor visa maximizar o lucro (o que permite definir a função oferta), a oferta e a procura encontram-se no mercado (o tal que parece anónimo mas que realmente não é) e teoricamente existirá um ponto de equilíbrio ideal que será a condição do «bem estar social». Se, por um lado, reconhecemos a Matemática a funcionar como um *meio*, sendo uma ferramenta para prever lucros, estabelecer preços, etc., por outro, observamos a Matemática a funcionar como um *sistema*, introduzindo um modo de pensar assente em regras como a da consistência do «egoísmo individual» que desembocam numa axiomática para descrever a preferência ou escolha do indivíduo entre duas mercadorias: uma relação de ordem não reflexiva, não simétrica e transitiva.

Da resolução de problemas à actividade matemática

A integração da resolução de problemas no ensino da Matemática não é, como todos sabemos, uma recomendação nova ou uma orientação curricular inédita no nosso país. José Manuel Matos (2008), num artigo publicado nas Actas do XII Simpósio da SEIEM, que se realizou em Badajoz, sublinha bem como a resolução de problemas no ensino da Matemática é um dos grandes factores identitários da Educação Matemática em Portugal, a partir da década de 1980. Todavia, o que vamos constatando, década após década, é a dificuldade em torná-la efectiva, porventura porque a face da Matemática como *sistema* continua a ser aquela que recebe maior apreço no contexto da prática educativa, apesar de muitos indicadores internos e externos denunciarem a importância de trabalhar a Matemática como *meio*. Com efeito, os resultados dos alunos portugueses são particularmente fracos na resolução de problemas; reconhece-se essa debilidade internamente e também quando são comparados com alunos de outros países; sabe-se que os alunos portugueses conseguem atingir um desempenho mais razoável em procedimentos e questões rotineiras. À semelhança do que se lê nas palavras de Boaler, os alunos portugueses mostram dificuldade em relacionar informações e em raciocinar eficazmente sobre contextos e situações multi-facetadas, que envolvem vários tipos de dados e requerem raciocínio analítico para lidar com os dados envolvidos. De facto, no teste do PISA de 2003, relativo à resolução de problemas em áreas curriculares transversais, a média dos estudantes portugueses situou-se no nível 1 de desempenho, ou seja, o nível *básico de resolução de problemas*. Neste nível, os alunos apenas conseguem resolver problemas simples (OECD, 2004).

Actualmente, sobrevêm duas forças convergentes no sentido de tornar a resolução de problemas numa parte integrante do currículo de Matemática. Uma provém da investigação em Educação Matemática e a outra refere-se a movimentos de reforma curricular que têm apontado explicitamente a resolução de problemas como forma de trabalhar a Matemática na sala de aula, tal como patenteia o recente programa de Matemática do ensino básico. Na verdade, como afirma Matos (2008), esta última força tem sobressaído mais, dado que a investigação no campo da resolução de problemas sofreu um notório abrandamento nos últimos dez anos. Não obstante, começam a revelar-se sinais de uma nova vitalidade, em boa parte pelas conexões que esta área de investigação vai criando com outras, como a integração das tecnologias no ensino da Matemática, os aspectos afectivos do ensino e da aprendizagem, as estratégias didácticas e os temas curriculares específicos e, ainda, a inclusão da modelação matemática na aprendizagem desta disciplina.

Recentemente, a investigação tem vindo a apontar a necessidade de considerar novas perspectivas teóricas que rompam com um certo isolamento que o trabalho sobre a re-

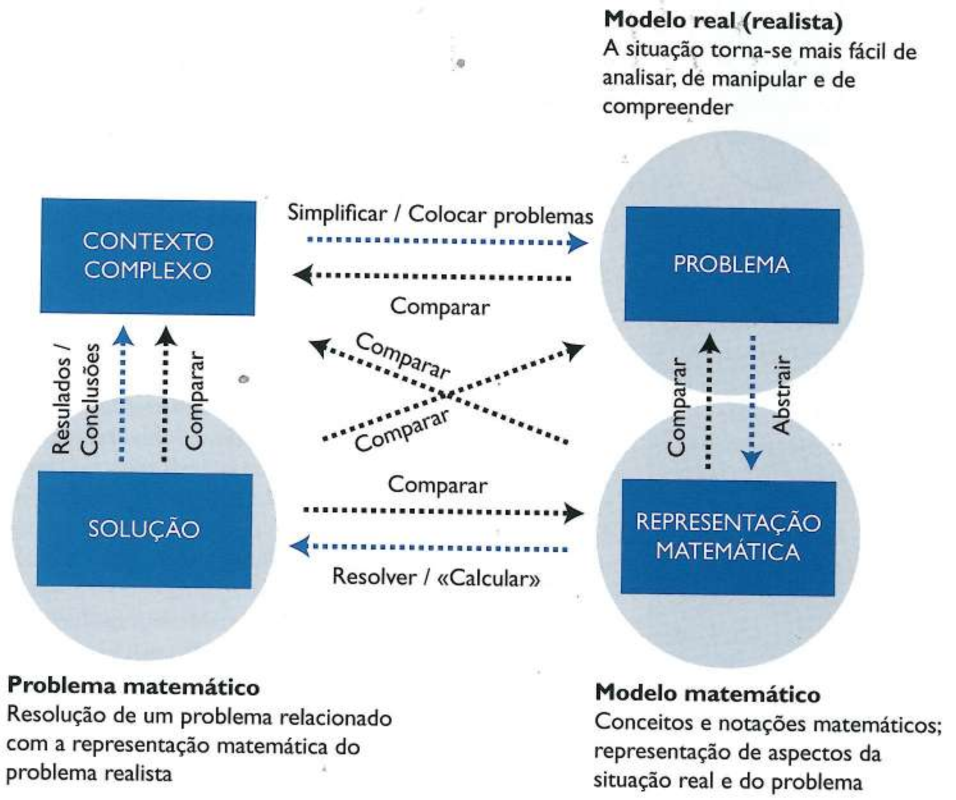


Figura 1. Um esquema da actividade matemática — a resolução de problemas como um elemento de conexão

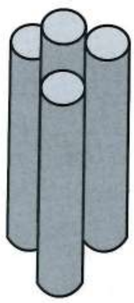


Figura 2. Espargos são cilindros

solução de problemas foi acusando. Isto passa pela conceptualização da resolução de problemas como uma faceta da prática matemática que toca e se difunde noutros aspectos da actividade matemática escolar. Lester e Kehle (2003) são claros proponentes desta visão, ao sugerirem que se pense de forma *diferente* sobre a resolução de problemas de Matemática. A ideia central é a de que a resolução de problemas deixe de ser a unidade central — sob a qual podemos albergar a compreensão de conceitos, a metacognição, a aprendizagem de estratégias, as aplicações da Matemática, etc. — mas que passe a constituir parte essencial de uma nova unidade a que os autores chamam de actividade matemática. Por actividade matemática deve entender-se uma mescla entre tarefa, pessoa, compreensão matemática, compreensão não-matemática, aprendizagens novas, utilização de aprendizagens prévias, uma imagem mais próxima daquilo «que acontece em salas de aula activas» (Lester e Kehle, 2003, p. 517). Assim, um possível esquema de actividade matemática seria semelhante ao apresentado na figura 1.

Colocar o foco na actividade matemática, em vez de o fixar na resolução de problemas, sugere uma importância redobrada das conexões matemáticas. Mas, acima de tudo, aproxima e integra processos como a interpretação e a construção de significados, a utilização de representações, a análise de padrões, a construção de modelos e a exploração e aplicação de conceitos matemáticos.

Actividade matemática e conexões

A ideia que se segue tenta ilustrar alguns dos elementos essenciais da actividade matemática, integrando a resolução de problemas como uma das linhas de força mas abrindo espaço a um conjunto de outros elementos cruciais para lidar com uma situação real[1]:

O Sr. Arlindo vende molhos de espargos, enrolados num cordel com 20 cm de comprimento, a 4 euros cada molho.

O Sr. Eugénio enrola os molhos de espargos num cordel com 25 cm de comprimento e vende cada molho a 5 euros.

Parece-te que ambos estão a vender os espargos ao mesmo preço?

Sobre os espargos que são vendidos pelos dois vendedores nada se sabe; podem ser muito diferentes em qualidade, em frescura, em tamanho, em origem, etc. Portanto, a pergunta colocada remove-nos imediatamente de uma situação genuína de escolha entre produtos. Por outras palavras, uma parte da interpretação está implicitamente a ser feita, mas requer a consequente explicitação: tratar os espargos como «objectos ideais», matematizáveis. Suponhamos que os espargos são «aproximadamente» cilindros; suponhamos que os cilindros são «suficientemente» iguais em altura e diâmetro. Deste modo, chegamos a uma certa «representação» de espargos (Figura 2).

Figura 3. Um molho de espargos é um cilindro

Ora, os espargos são atados em molho com um cordel. Portanto, ficam todos juntos, encostados uns aos outros, e esse molho pode ser «representado» por um novo cilindro que circunscreve o conjunto dos espargos (Figura 3).

E surge o primeiro problema: Como se arrumam os espargos (aproximadamente cilindros) dentro do molho? Como se dispõem?

Os cilindros que encontramos por esse mundo fora são tubos, lápis, cigarros (passe o exemplo pouco pedagógico)... Podemos observar como estes objectos se empilham ou se arrumam em molhos. Uma primeira interpretação para o problema em análise é a de que os cilindros se dispõem de uma determinada forma porque é aquela que ocupa menos espaço. E assim, chegamos a um problema de empacotamento ou de empilhamento. E construímos um primeiro modelo de empacotamento, como se vê na figura 5.

Começa portanto a abrir-se um espaço para uma certa matematização. Todos os círculos têm o mesmo raio, organizam-se de modo a ficarem tangentes uns aos outros, as camadas sucessivas têm uma estrutura hexagonal: 1 espargo, 6 espargos, 12 espargos... O cordel que rodeia os espargos é «quase» uma circunferência, mas não coincide com uma circunferência (figura 6).

Chegamos, então, à representação da linha que corresponderá ao cordel. Trata-se de uma linha que é uma espécie de hexágono de «cantos arredondados».

Interessa obviamente estabelecer uma relação entre o comprimento da linha e o diâmetro dos cilindros. Alguma geometria e o reconhecimento de um padrão triangular (triângulos equiláteros de lados iguais ao diâmetro de cada cilindro), leva-nos a concluir que a parte rectilínea do cordel mede $6nd$, sendo d o diâmetro de cada círculo e n o número de camadas em torno do círculo interior. A parte curva do cordel mede exactamente um comprimento igual ao perímetro de um círculo (seis vezes um sexto do perímetro). (Ver figura 8).

E de volta aos molhos de espargos, sabemos quanto medem os cordéis em cada caso (20 cm e 25 cm). Como «serão», afinal, os molhos de espargos de cada um dos vendedores? Terão ou não o mesmo número de espargos?

Um outro problema vem colocar-se: de que tamanho são os espargos «normais»? Como não é de admirar, os espargos passam por uma normalização para serem comercializados. Uma informação rápida obtida na Internet mostra como são embalados, classificados e porventura congelados (Figura 9). Percebe-se que existem vários comprimentos (L) a considerar e vários diâmetros (D). Mas, ao que parece, um diâmetro entre 6 e 22 mm será normal.

Passemos a definir a função que exprime o comprimento do cordel à custa do diâmetro médio do espargo ($C(d)$),

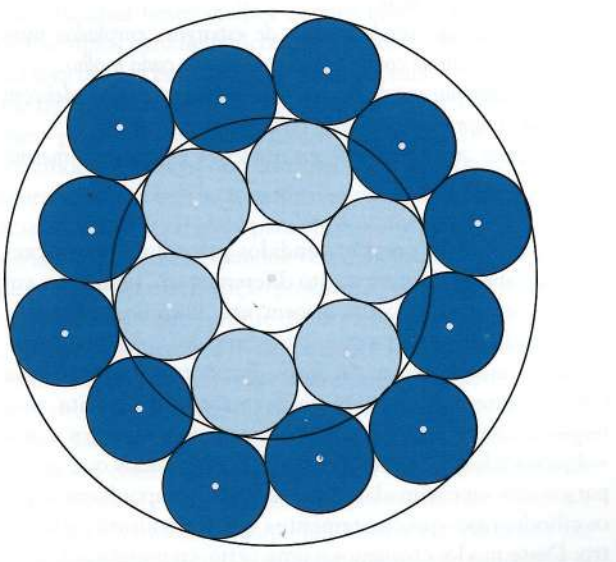


Figura 6. O cordel não forma uma circunferência

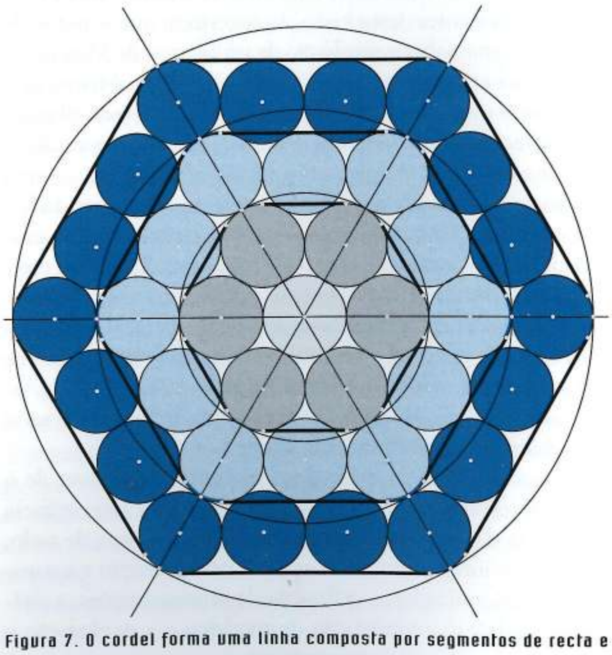


Figura 7. O cordel forma uma linha composta por segmentos de recta e arcos de circunferência

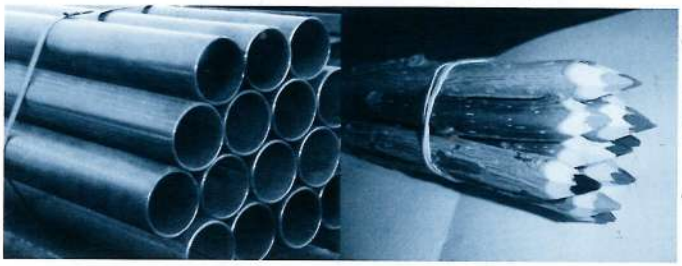


Figura 4. Protótipos de cilindros encostados uns aos outros

Figura 5. Cilindros empacotados

admitindo que as diferenças entre os diâmetros, num mesmo molho, não são relevantes.

$C(d) = 6nd + \pi d = (6n + \pi)d$, sendo n o número de camadas em torno do espargo interior.

Por outro lado, o número de espargos no molho é dado por (usando a soma de uma progressão aritmética de razão 6):

$N = 3n^2 + 3n + 1$, sendo n o número de camadas em torno do espargo interior.

Na medida em que estamos a lidar com funções que dependem de n, podemos definir:

Parâmetro: diâmetro da base do espargo.

Variável independente: número de camadas de espargos.

Variáveis dependentes: número de espargos por camada, número de espargos no molho, comprimento do fio.

O recurso ao Excel permitirá realizar simulações para gerar molhos de espargos, atribuindo um valor ao diâmetro da base do espargo. Admitamos, para simplificar, que o Sr. Arlindo e o Sr. Eugénio vendem espargos do lote médio (10 a 16 mm). Algumas experiências no Excel levam-nos aos resultados descritos na tabela 1:

Uma conclusão possível é a de que o Sr. Arlindo vende molhos de 19 espargos, com um diâmetro médio de 13 mm e o Sr. Eugénio vende molhos de 19 espargos com um diâmetro médio de 16 mm. Neste caso, a diferença de preços justificar-se-á pelo maior volume dos espargos vendidos pelo Sr. Eugénio.

Ainda outra possibilidade será o Sr. Eugénio vender molhos de 37 espargos de 11 mm de diâmetro. O preço mais elevado dos espargos será devido ao maior número de unidades nos molhos do Sr. Eugénio (tabela 2).

diâmetro (cm)	camada	espargos/ camada	total no molho	comp fio (cm)
1,3	1	6	7	11,9
	2	12	19	19,7 (Arlindo)
	3	18	37	27,5
	4	24	61	35,3
	5	30	91	43,1
	6	36	127	50,9
diâmetro (cm)	camada	espargos/ camada	total no molho	comp fio (cm)
1,6	1	6	7	13,7
	2	12	19	23,3 (Eugénio)
	3	18	37	32,9
	4	24	61	42,5
	5	30	91	52,1
	6	36	127	61,7

Tabela 1

diâmetro (cm)	camada	espargos/ camada	total no molho	comp fio (cm)
1,1	1	6	7	10,7
	2	12	19	17,3 (Eugénio)
	3	18	37	23,9
	4	24	61	30,5
	5	30	91	37,1
	6	36	127	43,7

Tabela 2

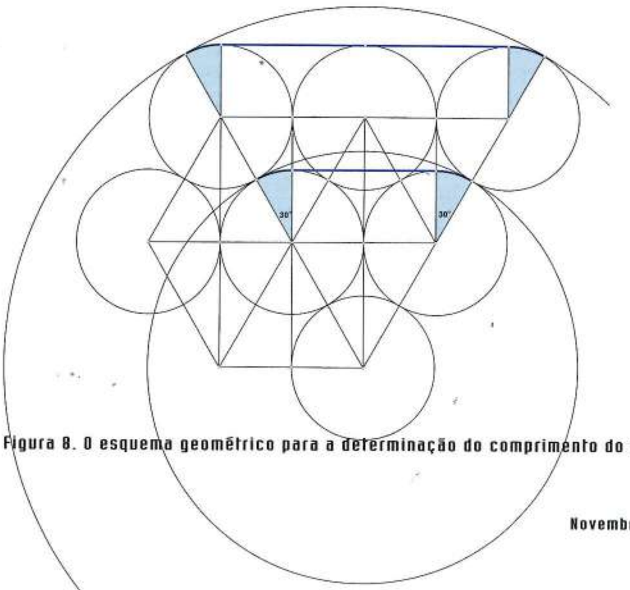


Figura 8. O esquema geométrico para a determinação do comprimento do cordel

Espargos congelados (tamanho)
L: 11 cm D: 6-10 mm;
L: 15 cm D: 10-16 mm;
L: 17 cm D: 16-22 mm

Figura 9. Dimensões dos espargos

Em qualquer das hipóteses, será difícil avaliar se estão ou não a vender os espargos ao mesmo preço. Aquilo que se compra ao Sr. Arlindo ou ao Sr. Eugénio é realmente diferente. Poderá passar a ver-se como uma questão de utilidade, isto é, depende da preferência do consumidor (por espargos mais finos ou mais grossos).

Mas se repararmos na imagem seguinte (figura 10), surge outra possibilidade: a de que os molhos de espargos não sejam regulares . E se os espargos dos dois vendedores são iguais mas o Sr. Eugénio acrescenta ao molho regular mais um ou dois espargos? E se nenhum dos molhos é efectivamente regular? Pessoalmente, prefiro comprar ao Sr. Eugénio porque ele é mais simpático mas em tempos de crise a simpatia não é tudo.

Figura 10. Um molho com 8 espargos (mais 1 do que um molho regular)

O papel das conexões

É bastante frequente pensarmos nas conexões matemáticas em termos de relações interessantes e significativas que se podem estabelecer entre tópicos curriculares: as conexões entre geometria e funções, entre sequências e funções, entre geometria e álgebra, entre números e álgebra, entre probabilidades e números, etc., etc. Trata-se de uma possível abordagem ao conceito de conexões matemáticas e configura, sem dúvida, uma preocupação válida. Importa, no entanto, perguntar se as conexões não são muito mais do que isto, se não são sobretudo uma característica essencial da actividade matemática, um elemento estruturante do fazer matemática e do pensar matematicamente. Provavelmente, nenhum verdadeiro problema é exclusivamente um problema de funções ou de geometria ou de vectores ou de expressões algébricas. Paulo Abrantes, entusiasta e defensor da actividade matemática genuína na aula de Matemática, deu-nos um precioso ensinamento sobre as conexões matemáticas que alunos e professores podem construir, trabalhar e explorar em torno de uma situação, no seu livro «A viagem de ida e volta».

Em diferentes ocasiões, já argumentei que uma distinção entre problemas abertos e fechados ou situações abertas e fechadas é francamente falível, não tanto porque sejamos incapazes de distinguir entre um exercício e uma tarefa de investigação ou outras eventuais modalidades, mas antes porque o «fechado» é muitas vezes sinónimo de não se querer abrir e de se ficar por ali. Desenvolver conexões matemáticas é, fundamentalmente, não querer ficar por ali e perceber que as coisas se ligam, não são uma colecção de ideias separadas, «não são como ervilhas soltas dentro de um saco» para usar as palavras de Vygotsky. Em certo sentido, as conexões matemáticas são o verdadeiro currículo, aquele que nenhum documento oficial pode fielmente exprimir porque corresponde a inúmeros caminhos possíveis e a tantas outras formas de tratar a Matemática, os conceitos, as ideias, as tarefas e as questões na sala de aula. Em todo o caso, a actividade matemática como território de conexões implica olhar para a Matemática simultaneamente como um sistema e como um meio.

Nota

[1] Esta situação foi proposta como tarefa na acção de formação «Orientação e desenvolvimento de projectos educativos em Matemática II», da responsabilidade do DEFCUL e da DGIDC, dinamizada pela formadoras Leonor Santos, Ana Maria Boavida, Hélia Oliveira e Susana Carreira, em Fevereiro de 2008.

Referências

Boaler, J. (2003). Exploring the nature of mathematical activity: Using theory, research and ‹working hypotheses› to broaden conceptions of mathematics knowing. *Educational Studies in Mathematics*, *51*, p. 3–21.

Fischer, R. (1993). Mathematics as a Means and as a System. In S. Restivo, J. P. Van Bendegem & R. Fischer (Eds.), *Math Worlds: Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education* (pp. 113–133). New York: State University of New York Press.

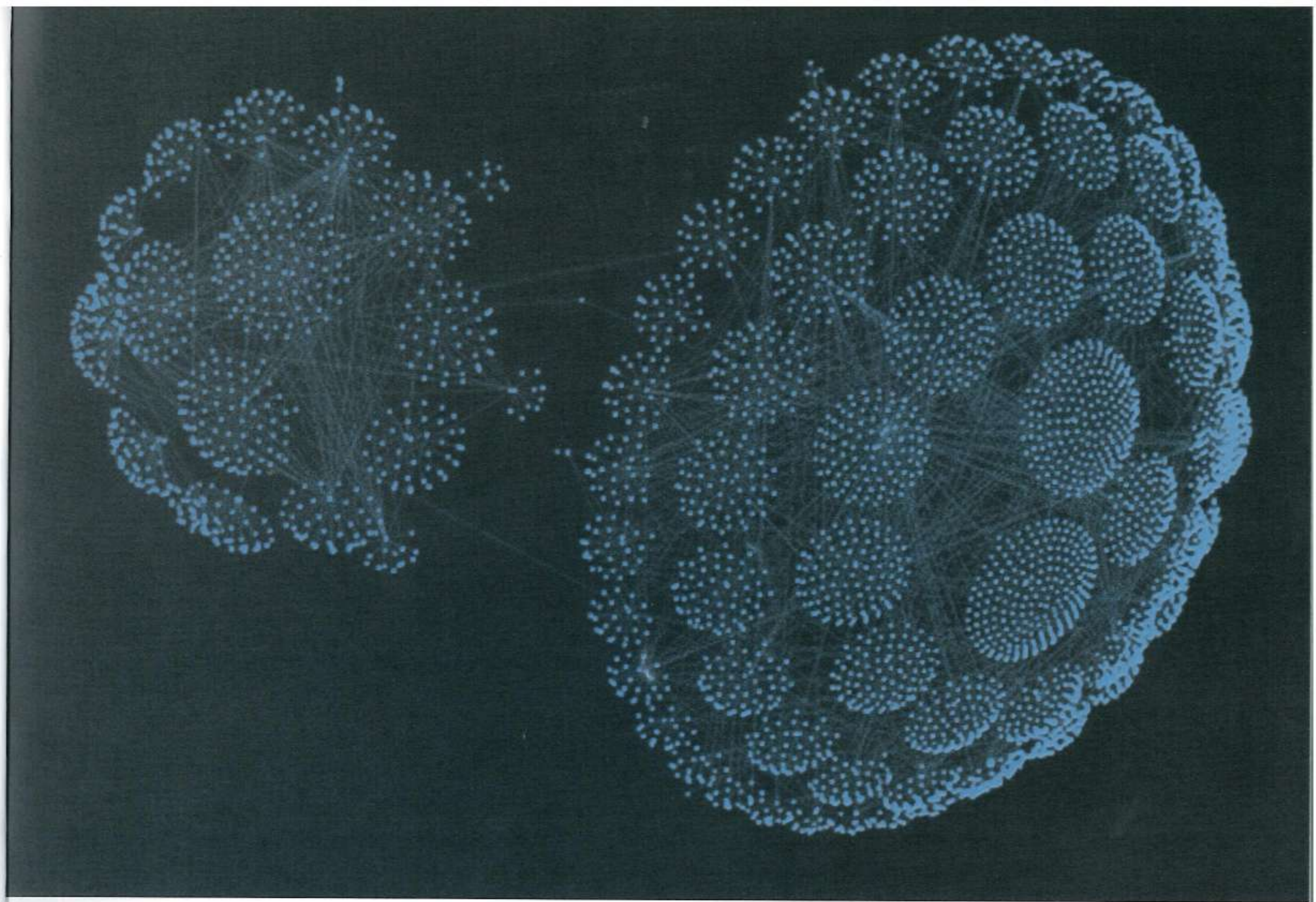
Lester, F. K. & Kehle, P. E. (2003). From Problem Solving to Modeling: The Evolution of Thinking About Research on Complex Mathematical Activity. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 501–517). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Matos, J. M. (2008). A resolução de problemas e a identidade da educação matemática em Portugal. In González, R., Alfonso, B., Machín, M. & Nieto, L. J. (Eds.), *Investigación en educación matemática XII*, (pp. 141–158). Sociedade Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

OECD (2004). *Problem Solving for Tomorrow's World: First Measures of Cross-Curricular Competences from Pisa 2003*. Paris: OECD Publications [disponível em http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/25/12/34009000.pdf].

Susana Carreira

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve e UIDEF da Universidade de Lisboa



Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática

Rita Borromeo Ferri

Resumo: No ensino e aprendizagem da Matemática é importante que os alunos não vejam a Matemática como uma disciplina na qual só aprendem fórmulas e cálculos. Com efeito, a Matemática e a prática matemática fazem parte do mundo real em diversas profissões. Muitas vezes os alunos, desde o 1° ciclo até ao secundário, não chegam a perceber o papel que a matemática desempenha no mundo real. Portanto, faz parte do papel do professor estabelecer conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. Neste artigo pretendo dar um exemplo concreto para o 1° ciclo. Mostrarei que a matemática pode ser relacionada com o mundo real e que não tem de ser muito complicado fazê-lo no quotidiano escolar.

1. O resto do Mundo + Matemática = Modelação Matemática?!

Em primeiro lugar, gostaria de caracterizar o termo «modelação matemática». Na discussão didáctica a modelação matemática significa, de uma forma pragmática, resolver problemas da vida real com a ajuda de modelos matemáticos. O que é que isto quer dizer, concretamente? A modelação matemática é um processo que liga *o mundo real* e a *matemática* nos dois sentidos: da realidade para a matemática e — isto é importante — no sentido contrário, da matemática para a realidade. Este é o aspecto chave com o qual pretendo caracterizar as «conexões com o mundo real». Podemos falar de conexões com a realidade quando um problema de modelação é apresentado na sala de aula de tal forma que os alunos deixem as estruturas matemáticas internas para estabelecerem conexões com objectos reais e com as suas próprias experiências, fazendo associações.

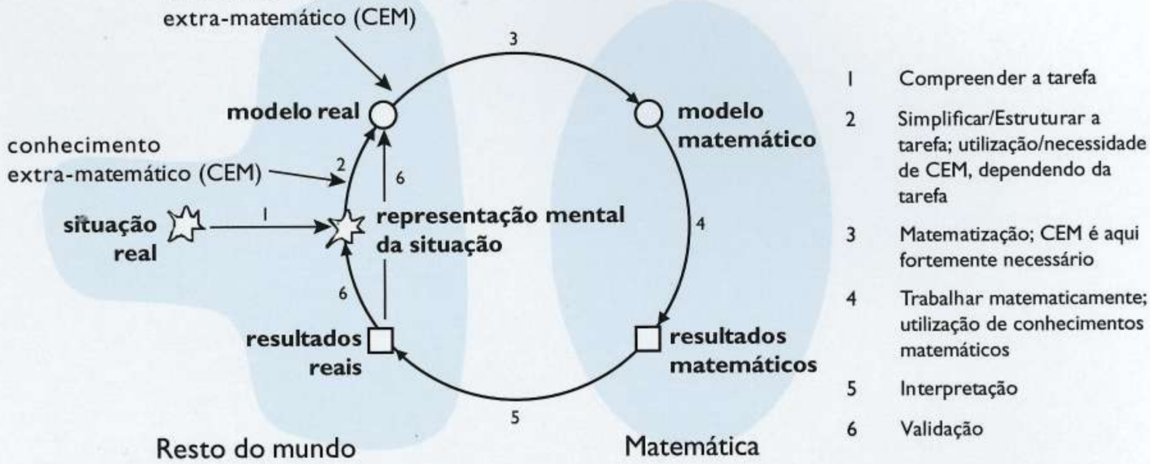


Figura 1. Ciclo de Modelação (Borromeo Ferri, 2006)

Ilustro, em seguida, o processo de modelação com o seguinte ciclo da modelação (Borromeo Ferri, 2006) e também com uma tarefa que foi trabalhada por alunos do 3° ano, sobre a qual voltarei a falar.

Olhando para este processo de modelação «ideal», parece ser muito complicado para os alunos executá-lo — mas não é. A *situação real*, tal como é designada no ciclo apresentado (figura 1), pode ser expressa de formas muito diferentes, por exemplo, com um texto escrito ou com uma imagem, porque faz parte da realidade. Para alunos do 3° ano foi criada, por mim e por alunos[1] universitários, uma imagem especial de uma situação da vida real. Chamámos a este problema «O homem e a casa» porque as questões a colocar aos alunos seriam:

1. Que altura tem o homem na realidade?
2. Qual a altura da casa na realidade?

Uma proposta adicional seria: Pensa numa questão relativa à fotografia (figura 2) e procura responder-lhe.

Decidimos que o tema «humano»seria muito interessante para alunos do 3° ano e que competências matemáticas, como medir e estimar são importantes neste contexto. Assim, tentámos desenvolver uma tarefa-com-foto, que inclui pessoas de diferentes alturas: uma criança e um adulto (em primeiro e segundo planos) um cão e, claro, uma casa. Trabalhar com fotografias como tarefas nas aulas de matemática é, em geral, muito importante porque ajuda os alunos a visualizar a situação de forma adequada. Relativamente ao problema «O homem e a casa», os alunos têm que trabalhar explicitamente com a foto, o que significa que a fotografia não é apenas decorativa. Mais do que isso, a fotografia tem um carácter visual e os alunos vêem as conexões com a realidade.

Os aspectos anteriormente descritos mostram o que significa uma *representação mental da situação*, ou seja, o segundo passo no ciclo da modelação. Os alunos têm que compreender a tarefa e o que têm de fazer com ela, mas eles próprios criam as suas próprias associações no que respeita aos elementos da realidade apresentados. A um nível muito inconsciente eles começam a simplificar e a estruturar a tarefa e constroem o chamado *modelo real*, isto é, o terceiro passo do ciclo. Nesta fase, os alunos poderiam realizar algumas acções: estimar a altura do rapaz da fotografia e compará-la com a sua própria altura. A conclusão do aluno poderia ser uma altura de 150 cm. Além disso, os alunos podem medir a altura do homem na fotografia, que é sensivelmente 6.9 cm e, claro, a altura do rapaz na fotografia que é cerca de 4.2 cm. O mesmo pode ser feito com a casa. Na fotografia, a casa tem 8.7 cm de altura e o homem que está de pé junto à casa mede cerca de 2.1 cm de altura. Ambos os dados podem ser comparados e relacionados uns com os outros. Estas acções e considerações são importantes na transição para a Matemática e, portanto, para a construção do *modelo matemático*. Um modelo[2] possível poderia ser: primeiro calcular a altura real do homem que está mais à frente (x), o que leva a medir a diferença entre as alturas do homem e do rapaz: $6.9 - 4.2 = 2.7$. O tamanho da cabeça do rapaz é, aproximadamente, 1 cm na fotografia e a altura da cabeça de uma criança na realidade é cerca de 17 cm. Portanto, o homem da imagem é maior do que a criança em 2 cabeças e meia, pelo que altura do adulto pode ser calculada da seguinte forma: $x = 150 + 17 + 17 + 9$. Agora a altura da casa (y) tem de ser determinada em conexão com o resultado obtido para a altura do homem (x). A parede da casa tem o seu ponto mais alto a cerca de 8.7 cm e o segundo homem junto à casa mede 2.1 cm na fotografia. Assim, o quociente pode ser

Figura 2

calculado para saber quantas vezes o segundo homem cabe na altura da parede da casa: 8.7:2.1 = 4.14 ...

A altura da casa é facilmente calculável multiplicando a altura do homem em frente à casa (x) pelo quociente determinado: 193 × 4.14.

É claro que os alunos têm que usar diferentes tipos de competências matemáticas quando trabalham matematicamente: estimar, medir, calcular com números decimais (na Alemanha isto faz parte do currículo do 5° ano), chegando a *resultados matemáticos* que constituem o 5° passo do ciclo de modelação: x = 193 cm = 1.93 m; y = 799.02 cm ≈ 7.99 m.

Depois, os resultados obtidos têm de ser interpretados para resultados reais. Isto significa dizer que a altura do homem é cerca de 1.90 m e que a casa mede cerca de 8 m de altura, na realidade. Obter os resultados reais não é o fim do ciclo da modelação. Um passo importante é agora a *validação*, isto porque a comparação entre a matemática e a realidade é um aspecto central na modelação. Por exemplo, se um resultado hipotético fosse 3.10 m para a altura do homem e se os alunos não tiverem oportunidade de reflectir sobre isto, a modelação não faz sentido. Através da validação as conexões com o mundo real podem ser estabelecidas explicitamente. Esta é uma parte fundamental do papel do professor na implementação da modelação na prática da sala de aula desde o início. Depois de ter descrito o ciclo de modelação e as suas etapas ao longo da tarefa «O homem e a casa» volto à questão que coloquei no início desta secção: O resto do Mundo + Matemática = Modelação Matemática?!

Se tivermos boas tarefas de modelação que apresentem um problema ou uma situação da realidade e se a matemática for necessária para resolver esse problema, então podemos falar de modelação matemática. Mas isto não é a história toda, porque os problemas de modelação podem ser de muitos tipos diferentes. Por isso existem alguns critérios, que tornam claro que resolver tarefas de modelação não é o mesmo que a bem conhecida resolução de problemas. Nas actividades de modelação matemática, os alunos aprendem a percorrer todo o ciclo da modelação. Este é um dos critérios principais para uma boa tarefa de modelação. Mas há outros aspectos que devem ser mencionados. Estes critérios podem ser observados do 1° ciclo ao secundário e foram desenvolvidos por mim, pelos meus alunos universitários e por professores nas escolas, com base em muitas experiências envolvendo a construção de tarefas de modelação e a sua implementação na sala de aula:

1. *Significado da tarefa de modelação*

   É necessário que os alunos possam lidar com a tarefa e que nela encontrem sentido quando trabalharem sobre ela.

2. *Contexto realista adequado à idade*

   Cada pessoa tem a sua visão da realidade e as suas próprias experiências, o que se torna muito heterogéneo numa turma. A vida quotidiana de uma criança de 8 anos numa escola de 1° ciclo é muito diferente da de um jovem de 18 anos do ensino secundário. Por isso, há aspectos que têm de ser tidos em conta na escolha de uma tarefa de modelação para que interesse a um determinado grupo etário.

3. *Provocação de questões*

   A tarefa de modelação deve dar oportunidade aos alunos de colocar novas questões. Estas questões podem referir-se tanto ao nível matemático como ao nível extra-matemático da tarefa.

4. *Estimulação de formas holísticas de aprendizagem*

   «Aprender com todos os sentidos» é também possível com tarefas de modelação, em particular, para aqueles problemas complexos de modelação, que são geralmente resolvidos fora da sala de aula.

5. *Nível de linguagem adequado*

   A tarefa de modelação deve ser formulada de modo que os alunos a possam compreender, tendo em conta o seu nível de ensino. Frases pouco claras impedem os alunos de construir representações mentais de um dado contexto numa tarefa.

Também Maaß (2007) apontou algumas características que podem ser tidas como típicas para as tarefas de modelação. Para esta autora as tarefas de modelação são:

- Abertas
- Complexas
- Realísticas
- Autênticas
- Problemas
- Resolúveis através do processo de modelação

2. 90 minutos de modelação matemática no 3º ano — considerações didácticas e foco de observação

Mostrarei, seguidamente, como o problema «O homem e a casa» pode ser implementado na prática de sala de aula e como a aula pode ser estruturada (tabela 1). Importa frisar que esta turma de 3° ano não estava familiarizada com a modelação matemática, por isso um dos focos de observação foi sobre a forma como os alunos lidam com este problema e como as relações com a realidade podem ser estabelecidas.

Na Alemanha uma aula tem normalmente a duração de 45 minutos, mas depende da decisão da escola, pelo que são comuns aulas de Matemática com 90 minutos. Em particular, para a implementação da modelação matemática na prática de sala de aula são recomendáveis os blocos de 90 minutos. O tempo não é apenas necessário para a resolução do problema mas também para apresentação dos resultados, para a validação e discussão. Voltarei a estes aspectos mais à frente quando descrever em detalhe os alunos do 3° ano a trabalhar no problema.

Para além do problema «O homem e a casa» levámos outros materiais para a sala de aula: *flipcharts* para apresentação das soluções, fitas e réguas, para os alunos usarem se assim o desejassem.

Na tabela 1, pode ver-se a estrutura da aula com a distribuição dos tempos e comentários didácticos.

Enquanto os alunos trabalharam no problema de modelação, nós tivemos vários focos de observação:

1. Acções e reacções dos alunos no que respeita à sua primeira experiência num problema de modelação.
2. Formas como as conexões com o mundo real apareceram durante a discussão.
3. Como foram usadas as competências matemáticas.
4. Como é que o ciclo de modelação foi percorrido pelos alunos.

No que respeita às acções e reacções dos alunos no trabalho com o problema de modelação tornou-se claro que todos estavam muito motivados porque nunca tinham resolvido um problema destes anteriormente. No início todos os grupos estavam um pouco atrapalhados relativamente à forma como resolver este problema — não foram fornecidos quaisquer números para as alturas do homem ou do rapaz na foto.

A maioria dos alunos usou os materiais e fê-lo muito bem. Um grupo mediu a altura da porta da sala de aula para ter uma ideia da altura do homem à frente na foto. Deste modo, mostraram que são capazes de relacionar tamanhos e de tirar conclusões, dado que a porta da casa na foto é da mesma altura da porta da sala de aula, na vida real. Portanto, os alunos fizeram *conexões com a vida real*. Um exemplo de uma conexão da vida real, entre muitas outras, foi formulado por Finn. Ele disse: «O homem da foto é da altura do meu pai que mede 1.85 m». Além disso, alguns grupos estimaram a altura dos andares da casa na fotografia. Consideraram que o tecto de uma divisão é um pouco mais alto que o homem ou que a porta, que tinham medido anteriormente. Assim, a altura da casa foi calculada por alguns grupos usando a adição como uma competência matemática: primeiro piso + segundo piso + empena da casa. Outros grupos usaram a multiplicação porque o homem da foto cabe três vezes na altura da casa. Outros ainda usaram a divisão e, por último, um grupo usou fracções embora estas não sejam ensinadas de forma sistemática antes do 5° ano, na Alemanha. Uma série de competências matemáticas foram usadas pelos alunos para resolver o problema.

Durante a resolução do problema tornou-se visível que alguns grupos não validaram os seus resultados matemáticos e, portanto, não passaram por todas as fases do ciclo de modelação. Por exemplo, um grupo calculou a altura da casa em 4.50 m. Então foi necessária uma intervenção do professor, bastando perguntar aos alunos se a casa pode ser realmente duas vezes mais alta do que o homem da fotografia. Os alunos voltaram ao seu modelo real e modificaram o seu modelo matemático, obtendo um resultado adequado para a altura da casa.

A seguir ilustram-se e discutem-se os resultados de alguns grupos seleccionados.

Processo de modelação do grupo 3 (figura 3):

A: O homem mede 1.78

R: a porta mede 2.12 m e depois calculamos menos 23 cm e depois obtivemos 1.78 m

A: A casa é 4 vezes mais alta que o homem

$4 \times 1.78 = 7.12$

$4 \times 100 = 400$

$4 \times 70 = 280$

$4 \times 8 = 32$

$400 + 280 + 32 = 712$

A altura da casa é 7.12 m.

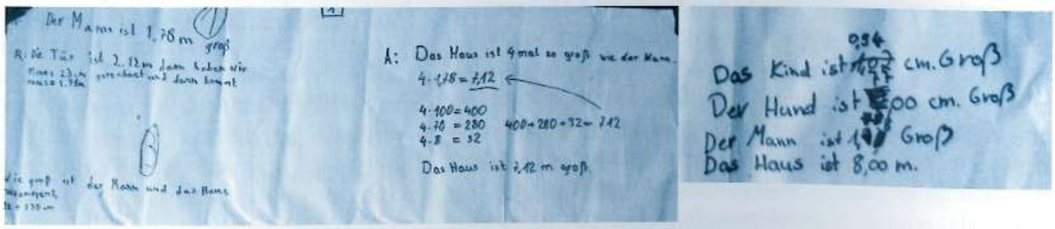


Figura 3

Fases	Tempo	Actividades do professor/ intervenções	Considerações relativas aos alunos/ actividades dos alunos	Objectivo
Introdução	0-15 min	Introdução do problema «O homem e casa»; clarificação do problema com os alunos e apresentação de materiais disponíveis, constituição de grupos de 4 alunos usando cartões coloridos (desta maneira os alunos que habitualmente não trabalham juntos podem ficar misturados).	Os alunos colocam questões sobre a tarefa, porque se sentem confusos sobre o formato da tarefa (não são dados números); os alunos já se encontram em grupos de 4.	Os alunos têm o primeiro contacto com o problema e devem ficar motivados para trabalhar com o grupo.
Trabalho de grupo no problema	30 min	O professor vai acompanhando o trabalho dos diferentes grupos; o professor intervém adequadamente.	Os alunos trabalham em grupo, usam os materiais e escrevem as suas soluções no *flipchart*.	Os alunos estabelecem conexões com a realidade e usam as suas competências matemáticas; competências sociais também são promovidas.
Em grande grupo	5 min	O professor pede aos alunos que se sentem de frente para o quadro.	Os alunos podem estar um pouco agitados depois do trabalho de grupo.	Os alunos devem ter uns minutos para se concentrarem.
Apresentação	25 min	O professor pede aos grupos para apresentarem os seus resultados. Aos grupos que não estão a apresentar são dadas «instruções de audição». Isto significa que eles têm que estar atentos aos aspectos centrais das soluções dos outros grupos para as comparar com as suas (este é um método simples que gera uma atmosfera calma enquanto decorrem as apresentações).	Vários grupos põem o seu *flipchart* no quadro e explicam as suas soluções. Os alunos seguem as instruções de audição e comparam as soluções dos outros grupos com as do seu grupo para posterior discussão.	Os alunos apresentam e comunicam as suas soluções.
Validação e discussão	15 min	O professor começa a discussão com uma intervenção do tipo: «Temos diferentes soluções. Qual estará certa?» O professor será aqui apenas um moderador da discussão.	Os alunos discutem as soluções e também os processos de resolução. Clarificam a autenticidade das soluções.	Os alunos têm a possibilidade de reflectir sobre os seus resultados matemáticos e de como estes podem ser ou não realistas.
Síntese e *feedback*	5 min	O professor sintetiza os resultados da discussão e deixa claro que os problemas de modelação não conduzem a um resultado único mas a vários resultados que têm que ser confrontados com a realidade. O professor pede aos alunos *feedback* sobre a aula e sobre o problema de modelação.	Os alunos dão *feedback* ao professor.	

Tabela 1

Qual a altura da casa mais o homem?

712 + 178

A criança mede 94 cm

O cão mede 77 cm

O homem mede 1.78

A casa mede 8.00 m.

Os alunos constataram que o homem em 2° plano na foto é da altura da porta da casa. A partir daí, mediram a porta da sala de aula (2.12m). Com base nesse valor a altura do homem foi estimada. Para chegar à altura da casa, os alunos pensaram quantas vezes a altura do homem em 2° plano na foto caberia na altura da casa (4 vezes). Um dos rapazes do grupo multiplicou por 4 a altura do homem (4 × 1.78).

Processo de modelação do grupo 1 (figura 4):

Cálculo:

A criança 1.50

A criança mede 3 quartos da altura do homem.

Portanto, homem mede 2.00 m.

A casa é 4 vezes mais alta que o homem

Portanto, a casa tem 8 m de altura.

Um aluno deste grupo mediu a sua própria altura e assim obteve a altura da criança da foto. Considerando que a criança da foto mediria 3/4 da altura do homem, os alunos chegaram à conclusão de que o homem «real» mediria cerca de 2.00 m. Os alunos aperceberam-se que os dois homens da foto deveriam ser da mesma altura. A altura da casa foi calculada com base na ideia de que a casa será quatro vezes mais alta do que o homem que está em 2° plano na foto.

Síntese dos resultados de todos os grupos:

	Altura do homem	Altura da casa
Grupo 1	2.00 m	8.00 m
Grupo 2(a)	2.02 m	7.50 m
Grupo 2(b)	1.70 m	4.50 m
Grupo 3	1.78 m	7.12 m
Grupo 4	2.12 m	7.49 m
Grupo 5	2.13 m	7.07 m

Todos os resultados são mais ou menos realistas. Olhando para a altura do homem podem ver-se resultados entre 1.70 m e 2.13 m. Devido ao facto de terem considerado a al-

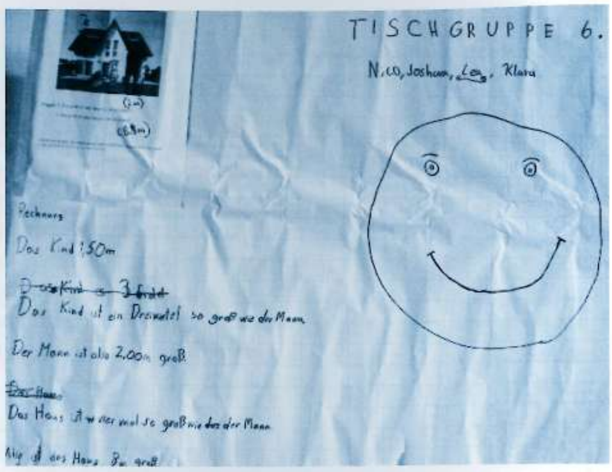


Figura 4

tura da porta da fotografia, os grupos 4 e 5 obtiveram os resultados 2.12 e 2.13 m que não são muito vulgares na vida real. Para a altura da casa foram encontrados valores realistas pelos 5 grupos. O grupo 2(b) cometeu um erro no seu modelo matemático e por isso obteve um valor improvável: 4.50 m. Este resultado foi criticamente discutido com o professor durante a fase de validação. Um aluno mencionou, por exemplo, que a altura de 4.50 m é irrealista porque um jogador de basquetebol mede, por vezes, 2 m de altura. Assim, a fase de validação e de discussão com os alunos é extremamente importante para lhes demonstrar que estas tarefas não têm apenas um resultado e, em particular, que o resultado matemático tem que ser interpretado e validado face à realidade.

Acima de tudo, este problema de modelação foi muito motivador para os alunos apesar de ser a primeira vez que lidavam com uma tarefa aberta como esta. Mas há um outro aspecto que foi importante. Os alunos revelaram, no seu *feedback*, que utilizaram «eles próprios» a matemática — eles aplicaram matemática. Outros alunos referiram que adquiriram uma sensibilidade para as diferentes alturas na realidade, em particular, para a altura de vários edifícios, uma vez que poderão usar figuras de referência, como pessoas, para as calcular.

3. Estabelecendo conexões com a vida real — uma possível noção para a prática da sala de aula

Com um exemplo concreto mostrei como um problema de modelação, já no 3° ano, pode ser um ponto de partida para o estabelecimento de conexões com o mundo real na prática da sala de aula. Do meu ponto de vista, é importante começar nos primeiros anos (ver também Blum & Borromeo Ferri, 2009) com a modelação matemática e com o recurso a tarefas que cumpram tanto quanto possível os critérios mencionados, de modo a que os alunos ganhem sensibilidade para problemas abertos e resultados diferentes (ver secção 1).

Da minha experiência em muitos *workshops* e conversas com professores, considero importante que os professores tenham muitos problemas de modelação disponíveis para implementarem a modelação na sala de aula. Na Alemanha existem já algumas colecções com problemas de modelação para o ensino básico e secundário. Contudo, a utilização destas tarefas na aula de Matemática nem sempre acontece embora a modelação matemática seja uma das principais competências presentes nos Princípios Educativos Alemães. A criação de problemas de modelação não deve ser difícil para os professores e eu testemunho que os professores sabem criar problemas de modelação.

Portanto, dar uma «receita» para estabelecer conexões com a vida real não é um procedimento adequado, mas será útil oferecer uma noção que envolve várias sugestões:

Sugestão 1: Comece com problemas de modelação não demasiado complexos e pense em temas que poderão ser interessantes para os seus alunos.

Sugestão 2: O trabalho de grupo nas aulas de matemática é uma metodologia que usa com frequência? A modelação matemática é uma actividade de grupo e, simultaneamente, promove competências como a argumentação e a comunicação. Pense como pode melhorar as actividades em grupo na aula para que os alunos trabalhem eficazmente no problema e sejam capazes de apresentar os seus resultados.

Sugestão 3: No início da implementação de problemas de modelação na aula procure discutir com os seus alunos os resultados e pratique com eles a validação dos memos. Mais tarde, os alunos fá-lo-ão por si, sem a sua ajuda, porque saberão que têm de perguntar a si próprios: Será este resultado matemático realista? Se eles fizerem isto, estão no bom caminho para compreenderem o que é a modelação matemática e, além disso, estabelecerem conexões com o mundo real.

Sugestão 4: É sempre importante pensar numa perspectiva a longo prazo. Estabelecer conexões com o mundo real é uma coisa, conservá-las é outra. Portanto, é necessário implementar problemas de modelação não como acontecimentos especiais nas aulas de matemática mas fazer deles actividades normais para si e para os seus alunos. Não só as competências de modelação melhorarão como as competências matemáticas também. Ao fazer isto, pode dialogar com os seus alunos sobre o ciclo de modelação, de forma a que eles pensem sobre os seus processos a um meta-nível. Isto já é possível no final do 4° ano e daí em diante.

Penso que esta possível noção pode ser muito útil e gostaria de obter o seu *feedback* sobre a sua forma de estabelecer conexões com o mundo real na sua prática de sala de aula.

Nota

[1] Os meus agradecimentos a Eike Deutschmann, Jette Irle, Franziska Kirchner, Simon-Claudio Lemmel, Henrike Puskeppel e Alice Schwennicke (futuros professores de Matemática, estudantes da Universidade de Hamburgo).

[2] O modelo apresentado é uma das formas possíveis de resolver a tarefa.

Referências bibliográficas

Blum, Werner und Borromeo Ferri, Rita (2009). Modellieren — Schon in der Grundschule? In: Peter-Koop, Andrea, Lilitakis, Georg und Spindeler, Brigitte (Eds.), Lernumgebungen — Ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule. Offenburg: Mildenberger, 142–153.

Borromeo Ferri, Rita (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38 (2) S. 86–95.

Maaß, Katja (2007). Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe I. Cornelsen: Skriptor.

Rita Borromeo Ferri
Universidade de Hamburgo, Alemanha

Tradução: Ricardo Amado Correia
Revisão: Ana Luísa Paiva e Susana Carreira

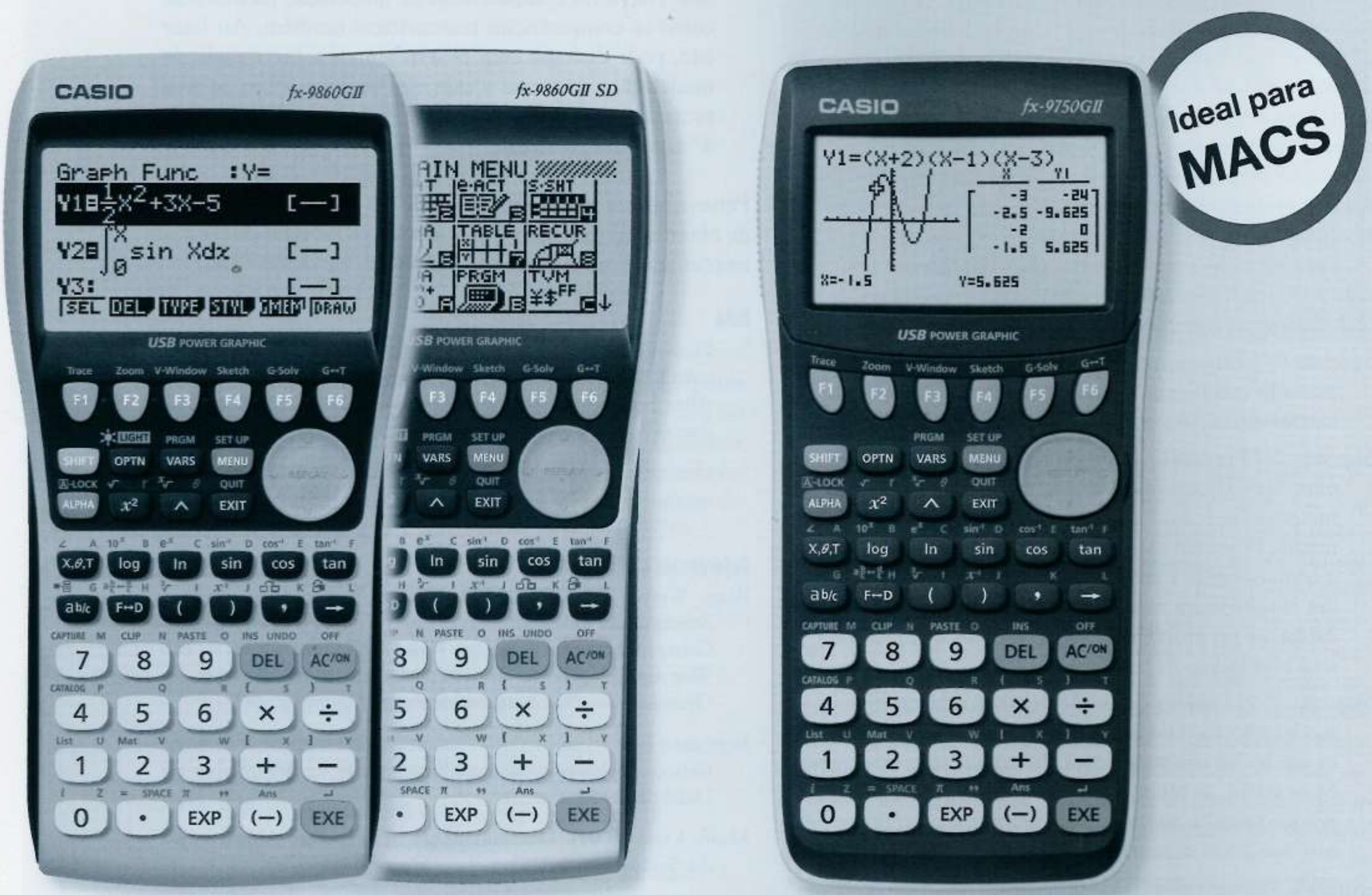
Matemática à espreita

A ideia de que a Matemática está presente em muitas situações e em muitos aspectos do que nos rodeia, inspirou esta pequena secção que, nesta revista temática sobre conexões, está «à espreita» nas páginas 63 e 90.

Gostaríamos que esta ideia fosse inspiradora para os nossos leitores encontrarem e partilharem outras «matemáticas à espreita» que poderão ser pontos de partida de tarefas matemáticas ou enriquecer uma aula pela sua exploração e/ou aprofundamento.

CASIO

As calculadoras para o ensino secundário



Modelo FX-9860GII (SD)

- Luz no visor
- Input e Output de expressões em formato natural (como no livro de texto)
- Menu por ícones – fácil utilização
- Estatística avançada com diferentes gráficos estatísticos
- Funções cartesianas, paramétricas e inequações
- Estudo do gráfico muito intuitivo
- Cabo USB incluído
- Possibilidade de ligação directa ao videoprojector
- Ligação ao analisador de dados
- Folha de cálculo incluída
- Geometria

Modelo FX-9750GII - ideal para M.A.C.S.

- Estatística avançada com diversos gráficos estatísticos
- Regressões estatística
- Menu de funções com inequações e estudo do gráfico
- Catálogo com todas as funções para uma rápida busca
- Menu Financeiro
- Sistema de equações e resolução de equações polinomiais

E MUITO, MUITO MAIS !

Os nossos contactos:

Parque das Nações Rua do Pólo Sul, lote 1.01.1.1, 4ºA - 1990-273 LISBOA

T: 218 939 170 F: 218 939 179 - www.casio.pt

Um olhar sobre a construção de conexões matemáticas no estudo das Sucessões

Helena Paradinha
Tamara Leuca

O matemático Hung-Hsi Wu, professor na Universidade da Califórnia em Berkeley, na conferência realizada em Janeiro de 2010 no departamento de educação da FCUL, defendeu a importância de os alunos captarem a essência da Matemática: «(...) a Matemática é uma tapeçaria na qual os conceitos e as capacidades se interligam, formando um todo (...)» (Wu, 2008, p. 5). Após a conferência, a que ambas assistimos, conversámos sobre as nossas motivações para explorar o tema das conexões em diferentes etapas do nosso percurso profissional. Partilhámos a nossa experiência como alunas que estudámos em países e décadas diferentes, e o facto de termos identificado conexões matemáticas tardiamente. Enquanto professoras gostamos de poder proporcionar aos nossos alunos experiências que relacionem representações matemáticas e respectivos processos, de modo a quebrar o isolamento entre temas matemáticos.

As orientações curriculares para o ensino — aprendizagem da matemática no ensino secundário têm vindo a dar maior ênfase às conexões. Neste artigo incidiremos sobre as conexões entre tópicos matemáticos e entre diferentes representações matemáticas.

Segundo as normas (NCTM, 2008), os alunos devem:

- Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas;
- Compreender a forma como as ideias matemáticas se inter-relacionam e se constroem umas a partir das outras para produzir um todo coerente;

Um dos aspectos que se alterou das Normas de 1991 para 2008 foi que, para todos os níveis de ensino, os quatro temas transversais deram lugar a cinco, sendo as representações o quinto tema agora introduzido. Para além de valorizar as múltiplas representações de um conceito, esta decisão é fundamentada, segundo Jones (1999), em três argumentos:

— mover-se com flexibilidade entre diferentes representações é uma base para criar conceitos e pensar matematicamente;

— a forma como são representadas as ideias matemáticas pelos professores tem impacto na forma como a matemática é aprendida;

— os alunos necessitam de prática na construção das suas próprias representações para se tornarem bons resolvedores de problemas.

Referem ainda que: «grande parte do poder da matemática advém da capacidade de observar e operar com objectos sob diferentes perspectivas.» (NCTM, 2008, p. 423) e «Quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente.» (NCTM, 2008, p. 75)

Investigadores em Educação Matemática, defendem que as múltiplas representações são um suporte para a compreensão de conceitos e relações matemáticas. Representações distintas focam, geralmente, aspectos diferentes de relações ou conceitos complexos. Como tal, para os alunos conhecerem em profundidade um conceito matemático necessitam de uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão.

Por outro lado, valorizar as diferentes representações usadas pelos alunos pode revelar aspectos da compreensão dos conceitos que de outra forma não emergiriam (Aspinwall e Shaw, 2002).

No entanto, segundo Athanasios, Iliada e Nikos (2006), a maioria dos alunos do ensino secundário e universitário apresentam grande dificuldade para se moverem da forma flexível no conjunto das representações duma dada função e em seleccionar as representações mais apropriadas para a resolução de problemas. Os resultados das investigações neste domínio mostraram que a utilização de software matemático sugeriu pistas para ajudar os alunos a superar com sucesso estas dificuldades.

Schultz (2000) refere-se às múltiplas representações enunciando a representação verbal, por tabela, por gráfico, algébrica e por matriz. Com base num estudo, em sala de aula, este autor procura responder às seguintes questões: Qual das representações promove melhor a compreensão conceptual? Que representação generaliza melhor os conteúdos matemáticos? Que representação se aplica melhor para encontrar soluções aproximadas? Que representação se aplica melhor para encontrar soluções exactas? Que representação é melhor para um tipo dado de tecnologia? Que representação se adequa melhor ao nível de aprendizagem e ao conforto do estudante?

Nas indicações metodológicas do programa de Matemática A para o 11.° ano pode ler-se: «As sucessões aparecem com uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída)» (Silva *et al.*, 2002, p. 8). No entanto, «A resolução de problemas permite chegar ao conceito de sucessão, aceder à compreensão de propriedades importantes de sucessões particulares e especialmente úteis, bem como à necessidade de elaboração de representações formalizadas» (Silva *et al.*, 2002, p. 8). A procura de padrões é uma actividade importante na construção de conexões matemáticas.

Sendo as sucessões reais funções de variável natural, cujo contradomínio está contido em IR, as sequências infinitas de números reais estudadas no ensino básico não são mais do que os contradomínios das sucessões reais. Tornando-se cada vez mais conscientes das conexões entre diversos tópicos estudados no ensino básico e diferentes áreas, os estudantes desenvolvem a capacidade de aplicar os conhecimentos sobre as sequências no estudo das sucessões, olhando para a matemática como um todo integrado.

No capítulo Sucessões Reais, propusemos[1] às duas turmas do 11° Ano do Curso Científico — Humanístico de Ciências e Tecnologias um conjunto de tarefas que enfatizam as conexões entre vários tópicos da Matemática no ensino — aprendizagem das sucessões. De entre as tarefas realizadas seleccionámos duas que envolvem conceitos de geometria ou de álgebra e múltiplas representações (geométrica, gráfica, analítica, verbal, pictórica) de forma a estudar: o papel das conexões na aprendizagem das sucessões; as representações utilizadas pelos alunos e as dificuldades manifestadas pelos alunos face às tarefas.

A Tarefa 1 permitiu aos alunos explorar o método descoberto por Arquimedes para chegar a um valor aproximado de π.

Um dos objectivos da tarefa foi a introdução dos conceitos de sucessão limitada, majorantes e minorantes.

Um dos grupos de trabalho, estabeleceu algumas relações entre amplitudes de ângulos e medidas dos lados como se pode observar na figura seguinte (Figura 1).

Estabelecendo conexões com conceitos já estudados observa-se que alguns alunos do grupo calculam o lado do quadrado aplicando o teorema de Pitágoras, enquanto outros aplicam conhecimentos de trigonometria. O grupo avança para o cálculo da área do pentágono dividindo-o em triângulos e tenta classificar os triângulos quanto aos lados. A seguir os alunos do grupo relacionam os ângulos, tentando chegar a uma generalização:

Filipe: Temos 360 a dividir por 5.

Carlos: Agora divide-se isso por dois. Isso dá 54. Este ângulo aqui é 54.

João: Ah, Ok. Mas porquê temos que relacionar?

Ana: Para chegar ao termo geral.

Filipe: Olhem, o $\cos 45° = \sin 45°$ que é $\sqrt{2}/2$. Então temos $4(\cos 45°)(\sin 45°)$.

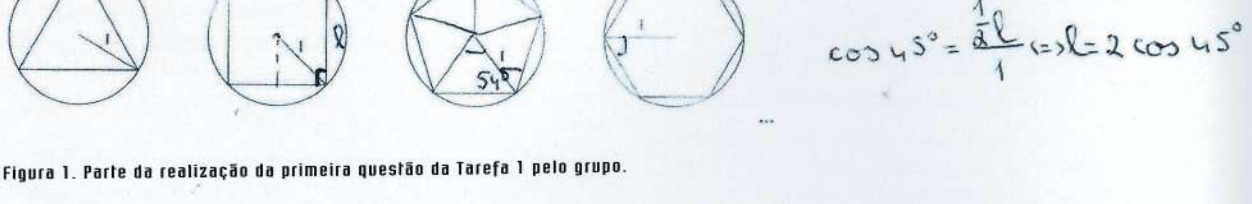


Figura 1. Parte da realização da primeira questão da Tarefa 1 pelo grupo.

Tarefa 1

1. Observa a seguinte sequência de polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio 1.

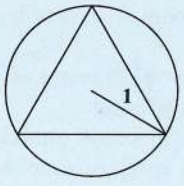


Fig. 1

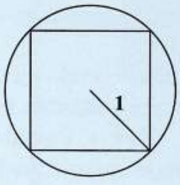


Fig. 2

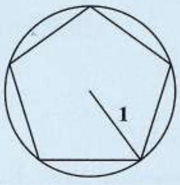


Fig. 3

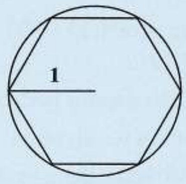


Fig. 4

...

a) Mostra que ao valor exacto da área do triângulo equilátero é de $3 \cos 30° \sin 30°$.

b) Calcula a área exacta de cada polígono da figura e seguidamente para polígonos com 10, 12, 60, 100 e 180 lados. Regista os valores numa tabela, apresentando também um valor aproximado arredondado às décimas de milésimas na última coluna.

n	Valor exacto da área	Valor aproximado da área
3	$3 \cos 30° \sin 30°$	1.2990
...		

c) À medida que o n cresce de que valor se aproxima a área? Justifica a tua resposta.

2. Considera agora os polígonos regulares circunscritos a uma circunferência de raio igual a um, como mostra a figura.

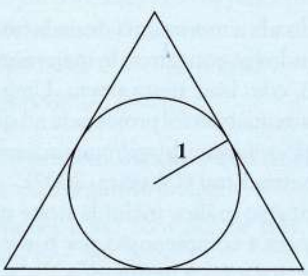


Fig. 1

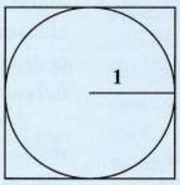


Fig. 2

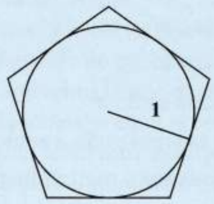


Fig. 3

...

a) Mostra que ao valor exacto da área do triângulo equilátero é de $\dfrac{3}{\text{tg}\, 30°}$.

b) Calcula a área exacta de cada polígono da figura e seguidamente para polígonos com 10, 12, 60, 100 e 180 lados. Regista os valores numa tabela, apresentando também um — valor aproximado arredondado às décimas de milésimas na última coluna.

n	Valor exacto da área	Valor aproximado da área
3	$\dfrac{3}{\text{tg}\, 30°}$	5.1962
...		

c) Para que valor se aproximam as áreas à medida que o n aumenta? De que forma as aproximações dos polígonos circunscritos diferem das aproximações obtidas no ponto 1 para os polígonos inscritos? Explica a tua resposta.

Adaptado de: National Council of Teachers of Mathematics (2008), http://illuminations.nctm.org

Percebendo que deve haver uma relação entre o número de lados e a amplitude dos ângulos que os ajudará a elaborar uma expressão para todos os polígonos, continuam a procurar relações entre os ângulos e os lados para elaborar uma expressão semelhante à do triângulo:

Filipe: Eu acho que aqui vai dar 5 vezes qualquer coisa.

João: Pois, eu também acho.

Carlos: Olhem aqui vai dar $6(\cos 60°)(\sin 60°)$.

Ana: Aqui é 30°, ..., aqui é 45°. Aqui...

Carlos: É 54°. Ana, percebes?

Ana: Não estou a perceber. Esta expressão é para o triângulo.

Carlos: Sim. Olha aqui é $30 = 60/2$.
Depois $45 = 90/2$.

João: Mas ainda não fizemos para $n = 5$?

Carlos: Então, vamos ter $5(\cos 54°)(\sin 54°)$.

João: Então isto vai ser sempre vezes o número de lados. Reparem numa coisa...aqui será sempre a dividir por dois.

Carlos: Portanto vai ser

$$n\left(\cos\frac{180° - \frac{360°}{n}}{2}\right)\left(\frac{180° - \frac{360°}{n}}{2}\right)$$

Na segunda parte da primeira questão, o grupo observa que os valores aproximados das áreas tendem para π. Concluem assim que a sucessão das áreas se aproxima de π de forma crescente, nunca atingindo este valor. Os alunos tentam substituir mais uns valores na expressão analítica elaborada, para testar a conjectura estabelecida em relação às aproximações ao valor de π. O grupo encontra a justificação para esta aproximação, estabelecendo conexões com a área do círculo de raio 1 e tenta relacionar esta aproximação com as amplitudes dos ângulos dos polígonos:

Filipe: Tem alguma coisa com o π.

Ana: Olham, isso aqui é o π.

Filipe: Vai se aproximando-se do π.

Carlos: Do π, é? Então as áreas estão a aumentar.

Filipe: A área esta a aumentar e nunca chega a π.

João: Só quando chega ao infinito. É engraçado.

Carlos: É, não é? Agora faz para 360, para ver se ainda se aproxima mais?

João: Pois, aproxima-se, porque a área do círculo de raio um é π.

Carlos: Pois, isso aqui aproxima-se cada vez mais de 90. Quando for 90?

Filipe: A medida que n cresce, o ângulo aproxima-se cada vez mais de 90, então...

Carlos: A área vai se aproximando cada vez mais de π.

Na segunda questão, verifica-se que o grupo tenta passar logo para as expressões das áreas exactas, baseando-se no que fizeram na questão anterior. Dispondo de pouco tempo, o grupo avançou e escreveu a expressão para o termo geral:

João: Aqui, em vez de multiplicar é dividir.

Ana: Já sei, aqui será 4 a dividir por $\tan 45°$.

Carlos: Então o termo geral será

$$\frac{n}{\tan\left(\frac{180° - \frac{360°}{n}}{2}\right)}.$$

Analisando o comportamento dos termos da sucessão, verifica-se o seguinte diálogo:

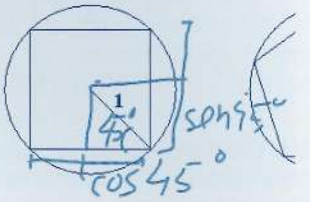
Filipe: Então, de que valor se aproximam as áreas?

Ana: Aproximam-se também do π, mas decrescendo.

Estabelecendo relações entre conceitos estudados, todos os grupos chegaram à expressão geral.

Para a segunda questão conjecturando e testando as conjecturas, conseguiram completar rapidamente a tabela, generalizando o valor exacto da área para n lados, e chegar ao termo geral.

Numa fase de discussão com toda a turma, pediu-se aos alunos para mostrarem as estratégias elaboradas para chegar à generalização. Um dos grupos explicou a estratégia elaborada para calcular a área do quadrado ilustrada.



Depois de analisada a monotonia de cada uma das sucessões, foram introduzidos os conceitos de majorantes e minorantes duma sucessão, com base nesta tarefa. Uma ilustração mais clara destas aproximações foi projectada no quadro (Figura 2) com o apoio do *software*: http://matematicadinamica.com/ficheiros/geometria.html (Oliveira, 2009).

A representação gráfica incluída neste programa foi outro benefício para a compreensão por parte dos alunos, dos conceitos de majorantes e minorantes das sucessões.

As expressões analíticas foram construídas para todos os valores da variável natural n, sem considerar os primeiros dois termos. Assim, o termo geral obtido verificava-se para $n \geq 3$. Na discussão em grande grupo, levantando esta questão, os alunos perceberam que para que o termo geral fosse válido para todos os valores de n teria que ser alterada a expressão, substituindo-se n por $n + 2$.

A Tarefa 2 tinha como objectivo a construção de expressões analíticas para as sucessões apresentadas.

Tarefa 2

Indica um termo geral para cada uma das seguintes sucessões, considerando que se mantém a lei de formação. Se for possível encontra vários processos que te conduzam a outros termos gerais.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, \ldots$

b) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

c) $0, 0, 0, 0, \ldots$

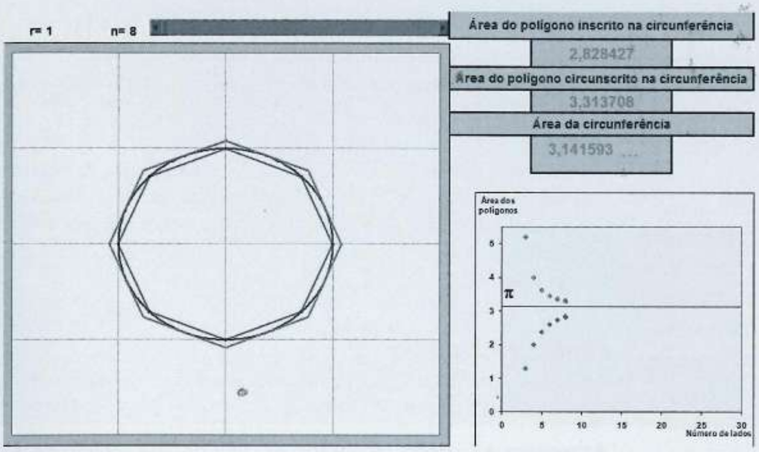


Figura 2

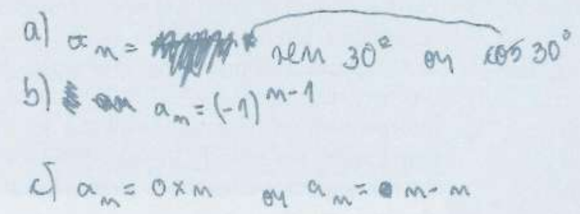


Figura 3

Um dos grupos, apresentou o seguinte (Figura 3). Na passagem da representação numérica da sucessão para a analítica, os alunos relacionaram a ordem com o termo e introduziram no termo geral da última sucessão a variável natural, como faziam no caso das funções. Evidencia-se neste discurso, o estabelecimento de conexões com as funções e a elaboração de algumas expressões equivalentes:

Ana: O último pode ser $0 \times n$ ou não é?

Carlos: Também pode ser $n - n$?

Relativamente à primeira sucessão que os alunos acharam desafiante, ocorreu o seguinte diálogo.

Filipe: Tem qualquer coisa com raiz de três. Tem qualquer coisa a dividir por dois, não?

Ana: Não sei!

Filipe: Zero a dividir por dois, zero. Menos um a dividir por dois, menos um meio, menos dois a dividir por dois, menos um.

Carlos: Eu vou escrever qualquer coisa sobre dois.

Filipe: O que é aquela coisa não sei.

A conexão com as funções trigonométricas apoiou o grupo na elaboração do raciocínio:

Ana: Olhem, pode ser co-seno ou seno. E tem de ser sempre de 30.

Carlos: Vou escrever: $\cos(30°)$ é igual à raiz de três sobre dois. E depois?

Numa outra turma na mesma tarefa o Afonso expôs as expressões trigonométricas,

$$v_n = \cos\frac{n\pi}{6} \text{ e } v_n = \cos(30°)$$

que traduziam a sequência. O Joaquim pediu para apresentar a sua expressão afirmando que era diferente da do Afonso. Assim, escreveu no quadro, $v_n = \sin(90° - 30°n)$. Maria imediatamente pediu a palavra e afirmou: «Mas é a mesma coisa!» e justificou a sua convicção. Maria escreveu: $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ e afirmou: «Trata-se de uma das relações entre as razões trigonométricas». Explicou a sua teoria ajudando os colegas a reconheceram-na como tal.

Reflexão sobre a nossa experiência

Observou-se que os alunos durante a realização das tarefas passam por várias etapas, até chegarem à representação simbólica. A variedade de representações e a ordem como são utilizadas, depende do problema matemático em si e do modo como é apresentada aos alunos. Nos problemas em que os termos da sucessão eram apresentados pela representação geométrica, os alunos normalmente passavam desta representação para a numérica e depois para a analítica. Verificou-se em alguns casos que os alunos tentaram passar logo da representação geométrica para a simbólica. Se num problema os termos da sucessão eram apresentados através de uma representação numérica, os alunos tinham tendência de passar para a representação analítica, elaborando em algumas tarefas uma diversidade de expressões analíticas por vezes equivalentes, outras vezes não válidas.

No estudo da monotonia da sucessão, as representações analítica e gráfica são as que os alunos aplicam mais vezes. Para o estudo das sucessões limitadas, os alunos recorrem mais vezes às representações geométrica e gráfica. As conexões entre estas representações permitiram em várias situações obterem múltiplas perspectivas do problema, chegando com maior facilidade às soluções do problema. Os alunos que construiram estas conexões conseguem compreender com maior profundidade os conceitos matemáticos.

As representações geométricas facilitaram o estudo da monotonia das sucessões e permitiram descobrir novos tipos de relações, como aconteceu na Tarefa 1.

A representação geométrica facilita a elaboração dos raciocínios, mas a mesma deverá ser utilizada em conexão com outras representações para conseguir generalizar uma determinada situação problemática.

A abordagem analítica das sucessões contribuiu para evidenciar a relação entre a ordem e o termo da sucessão. Esta representação, permitiu aos alunos chegarem às propriedades abstractas das sucessões. A abordagem analítica permitiu aos alunos fazer, com rigor, o estudo da monotonia duma sucessão. As conexões entre a representação analítica e gráfica permitiram esclarecer as dúvidas em relação à monotonia. É importante mencionar que a expressão algébrica sugerida na Tarefa 1, permitiu aos alunos estabelecerem conexões entre a representação geométrica e a representação analítica dos termos da sucessão. Os alunos compreenderam a forma como as ideias matemáticas se inter-relacionam e construíram um modelo matemático para as áreas dos polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência de raio 1.

As maiores dificuldades apresentadas pelos alunos devem-se à falta de integração dos conceitos estudados, de construção de conexões entre diversos tópicos matemáticos incluindo as várias representações. Outra dificuldade manifestada pelos alunos foi o de se moverem de uma representação para a outra. A construção de conhecimento deve ser feita estabelecendo conexões entre representações, o que não se verificou no caso do João, aluno que se limitava à representação numérica. O grupo tentou em várias etapas ajudar o João a superar as dificuldades, recorrendo às representações verbal, geométrica ou gráfica. Algumas dificuldades apresentadas pelos alunos foram superadas pela análise das conjecturas elaboradas, na discussão em grupo, na turma e também com o apoio do professor. A interacção entre os alunos e as conexões estabelecidas facilitaram a ultrapassagem das dificuldades.

As dificuldades apresentadas pelos alunos na construção de conexões sugerem a necessidade de implementar na sala de aula tarefas de natureza diversificada que envolvem várias representações e que possibilitam o estabelecimento de conexões entre elas. É importante também implementar tarefas que englobam vários conceitos matemáticos e conteúdos estudados que permitem a integração dos conceitos e processos na construção de conexões.

Observámos que cada aluno tem a sua própria forma de pensar e devemos valorizar os raciocínios de cada um, sem ignorar as resoluções menos comuns que, por vezes, são as mais importantes. As produções do aluno podem fornecer informação importante sobre o seu raciocínio, as dificuldades que ele manifesta e ainda como pode ser ajudado para as ultrapassar. Pensamos que as aprendizagens realizadas pelos alunos serão essenciais para os tornar mais confiantes ao enfrentar novos problemas.

Ao reflectir sobre a experiência de sala de aula acima descrita partilhamos interrogações e aspectos a que vamos ficar mais atentas. Destacamos a forma de como podemos desenvolver nos alunos as capacidades de:

— estabelecerem conexões entre diferentes representações;

— construirem as suas próprias representações;

— seleccionarem representações adequadas aos problemas propostos.

Como professoras sentimo-nos gratificadas se agora (e futuramente) mais alunos nos digam o que um explicitou: Professora, finalmente agora já faz sentido... .

Nota

1 Trabalho desenvolvido no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática em 2010 da Universidade de Lisboa de Tamara Leuca, nas turmas de Helena Paradinha, sob a orientação de: Professora Doutora Leonor Santos e Professora Doutora Suzana Napoles.

Referências bibliográficas:

Aspinwall, L e Shaw K. (2002). Representations in Calculus: Two constrasting Cases. *Mathematics Teacher*, Set 02, 434–439.

Athanasios, G., Iliada, E., Nikos, M. (2006). *Are registers of representation and problem solving processes on functions compartmentalized in students, thinking? Revista Latinoamericana de Investigação en Matemática Educativa, número especial Comité Latinoamericano de Matemática Educativa* (pp.197–224). México: Universidad Autonoma del Estado de México.

Jones, A. (1999). *The Fifth Process Standard: An argument to Include Representation in Standards 2000.* (http://www.math.umd.edu/~dac/650old/jonespaper.html em 10/08/2006).

Leuca, T. (2010). *Conexões no ensino e aprendizagem das sucessões.* (Relatório da Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino da Matemática, Universidade de Lisboa).

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.* APM e IIE.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática Escolar* (2ª ed.). (M. Melo, Trad.). Lisboa: APM. (Obra original em inglês, publicada em 2000).

Oliveira, M. (2009). *Aplicações computacionais dinâmicas.* Acedido em 19 Abril, 2009, de www.matematicadinamica.com.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. M. (2002). *Programa de Matemática do Ensino Secundário. Matemática A 11°Ano.* Lisboa: Ministério da Educação — Departamento do Ensino Secundário.

Schultz, J. E. & Waters, M. S. (2000). *Concern has been growing about the role of representations in teaching mathematics. Discuss with your colleagues.* (Vol. 93, 6, pp.448–453). Easa: Copyright.

Wu, H. (2008) *The Mathematics K-12 Teachers Need to Know.* Acedido em 30 Janeiro, 2010, de http://math.berkeley.edu/~wu/Schoolmathematics1.pdf

Yerushalmy, M. (2000). *Understanding teachers' understanding of algebra taught With the support of graphing technology.* Israel: Faculty of Education, University of Haifa. Final research report. Submitted to the Spencer Foundation Small Research Grants.

Helena Paradinha
Esc. Sec. Vergílio Ferreira,Lisboa
Tamara Leuca
Esc. Sec. 2+3 Passos Manuel, Lisboa

Padrões e conexões matemáticas no ensino básico

Isabel Vale
Teresa Pimentel

Introdução

Este artigo desenvolve-se no âmbito do projecto *Matemática e padrões no ensino básico: perspectivas e experiências curriculares de alunos e professores*, que visava estudar o impacto de uma intervenção didáctica centrada no estudo de padrões quer ao nível do desenvolvimento de conceitos numéricos, algébricos e geométricos, quer ao nível de processos matemáticos transversais como a resolução de problemas, raciocínio e argumentação, comunicação e conexões. Como resultado deste projecto identificaram-se grandes potencialidades dos padrões ao nível do desenvolvimento curricular, em particular ao possibilitar uma variedade de conexões dentro e fora da matemática.

Padrões e Conexões no currículo

Entender a matemática como a ciência dos padrões é uma ideia que não é nova e tem sido defendida por vários investigadores (e.g. Devlin, 1994; Orton, 1999; Sawyer, 1955; Steen, 1988), tendo subjacente a noção de que, desde que se identifique um padrão, haverá sempre possibilidade de fazer matemática a partir desse padrão. Esta ligação entre padrões e matemática pode ser facilmente desenvolvida na sala de aula, através de algumas das tarefas que propomos, ficando os estudantes com uma ideia mais precisa do que é a matemática, mas também mais sensíveis ao mundo em que vivem.

O estudo dos padrões tem tido um forte desenvolvimento nos currículos de matemática de vários países devido às suas potencialidades, podendo afirmar-se que, mais do que um conteúdo a ensinar, fornece um contexto propício para que os alunos pensem matematicamente.

A procura de padrões é inerente à mente humana (Baratta-Lorton, 2003). Na verdade, em qualquer interacção a nossa mente procura padrões e estabelece relações quer estejamos a fazer compras, a ler ou a fazer uma construção com cubos, independentemente do tipo de questões que pretendemos resolver.

Por seu lado, estabelecer conexões é um processo cognitivo que envolve criar activamente ligações entre conceitos, procedimentos, pessoas e experiências (Ewell, 1997). Com efeito, sem conexões os estudantes ficam limitados a recordar um conjunto de factos, conceitos e procedimentos de forma isolada. O estabelecimento de conexões vai permitir-lhes construir novo conhecimento sobre os conhecimentos previamente adquiridos, mas de forma integrada. Por outro lado, os estudantes obtêm um conhecimento mais profundo e duradouro, assim como desenvolvem a curiosidade e a criatividade, quando se realçam as conexões entre as ideias matemáticas que estão a ser trabalhadas e os conhecimentos matemáticos já adquiridos, e também os da vida de todos os dias.

Muito do insucesso em matemática deve-se ao facto de os alunos recorrerem apenas à memorização e não à compreensão. O primeiro passo para aprender a pensar matematicamente é aprender a descobrir padrões e a estabelecer conexões. A procura de padrões deve constituir o núcleo das aulas em todos os temas, já que eles surgem nas fórmulas que descobrimos, nas formas que investigamos, nas experiências que fazemos.

Compete ao professor realçar esta dimensão de padrões e conexões de modo a tornar a matemática mais compreensível a todos. Esta finalidade só pode ser atingida com uma cuidada selecção de tarefas que evidenciem o modo como os padrões permitem estabelecer conexões entre vários temas e diferentes formas de representação, e como podem proporcionar situações interessantes para explorar matemática dentro e fora do contexto escolar. Esta abordagem vai de encontro ao nosso entendimento de que a finalidade do ensino da matemática é preparar os estudantes para aprendizagens futuras, para o mundo do trabalho e para que sejam cidadãos críticos.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) salienta a importância, para os estudantes deste nível, quer dos padrões e regularidades quer das conexões. Em relação a estas refere-se por exemplo: «Os alunos devem ser capazes de estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas» (p. 6). Esta capacidade desdobra-se em três aspectos fundamentais: estabelecer conexões entre ideias matemáticas, compreender as ideias matemáticas inter-relacionadas como um todo e aplicar ideias matemáticas a contextos não matemáticos. Esta formulação está em consonância com as ideias expressas pelo NCTM (2000).

No primeiro aspecto é de realçar o reconhecimento e uso de conexões entre os diversos temas matemáticos como o número, a geometria e medida, a álgebra e a organização e tratamento de dados. Só assim é possível ultrapassar a ideia corrente de que a matemática é uma colecção dispersa de regras e procedimentos. Este aspecto interliga-se com o segundo na medida em que a matemática só poderá ser apreciada se for vista como um todo, em que conteúdos e processos estão relacionados e as novas aprendizagens constituem um aprofundamento ou uma nova visão das anteriores mas abrangem-nas duma forma coerente. O terceiro aspecto apela à necessidade de reconhecer e aplicar a matemática em contextos exteriores, designadamente em fenómenos da vida real ou em outras áreas curriculares.

No que diz respeito aos padrões refere-se por exemplo: «Os alunos devem ser capazes de fazer matemática de modo autónomo. Isto é, devem ser capazes de: (...) explorar regularidades e investigar conjecturas matemáticas (p. 6).

No estabelecimento de conexões os padrões podem constituir um pano de fundo de grandes potencialidades. De facto, o trabalho com padrões pode desenvolver-se em situações matemáticas e não matemáticas e a procura de padrões numa dada situação mobiliza frequentemente vários conceitos e capacidades matemáticas, nomeadamente os números, a forma, a álgebra e a prova (Orton, 1999). O uso de múltiplas representações, tão importante para a descoberta e generalização de padrões, é também um aspecto fundamental na descoberta de conexões e numa consequente aprendizagem da matemática com compreensão. Procurar-se-á de seguida apresentar alguns exemplos de tarefas que ilustrem as ideias referidas anteriormente.

1. Padrões de repetição

Estes padrões podem ser trabalhados desde o pré-escolar, e a ideia predominante é a de que envolvem um trabalho muito incipiente, desadequado para crianças mais velhas. No entanto, os padrões de repetição podem ser explorados de forma aprofundada incluindo tópicos como a multiplicação, múltiplos e divisores, as relações numéricas e o raciocínio proporcional, e sobretudo processos de generalização, proporcionando assim a entrada no domínio da álgebra. Neste aspecto, mais do que uma abordagem procedimental ou mesmo rítmica, é muito importante levar o aluno a identificar o grupo de repetição, pois só assim poderá abordar questões sobre a globalidade abstraindo dos objectos concretos. Deste modo poderá analisar aspectos relativos a termos distantes, como por exemplo na questão: «Qual é o 20º elemento da sequência?» (Threlfall, 1999). Por outro lado, pelo uso de múltiplas representações da mesma relação cria-se uma sinergia entre o padrão visual e as tabelas de valores, por exemplo, permitindo verificar a importância que cada um desempenha na expressão da generalização (Warren & Cooper, 2008). São ainda mobilizados processos como a comunicação, a argumentação e a justificação. Na tarefa «O colar da mãe», um evento — o dia da mãe — está na origem de um projecto de turma que envolve a elaboração e a análise de custos de uma prenda a oferecer por cada aluno.

Tarefa 1. O colar da mãe

Cada grupo deve elaborar uma proposta de colar começando por utilizar o material disponível com imaginação e passar depois ao desenho do padrão. Apresenta-se um exemplo:

De seguida há uma votação de toda a turma para escolherem o colar de que mais gostam.

Mais tarde discute-se o número de peças a utilizar para formar um colar com dimensões adequadas.

Por fim, conhecendo o preço unitário de cada peça, do fio e do fecho, calcula-se o preço de cada colar.

Pode ainda fazer-se uma extensão deste problema desafiando os alunos a seleccionar as peças a utilizar no colar de modo a minimizar o seu custo.

Depois de feita a votação o professor deve trabalhar com toda a turma no modelo de colar escolhido de modo a aprofundar alguns aspectos essenciais. Por exemplo, pode colocar as seguintes questões iniciais:
Continua a sequência. Qual é o grupo de repetição?

É também muito útil construir uma tabela com os valores:

Nº de grupos repetidos	Nº de bolinhas	Nº de losangos	Nº de estrelas	Nº total de peças

E colocar mais algumas questões:

Considera sempre filas de grupos de repetição completos.
Numa sequência de 20 peças em linha, quantas bolinhas há? E losangos?
Qual será a forma da 36ª peça da sequência?
Se num colar como este houvesse 15 losangos, quantas peças haveria ao todo?
Que posição ocupa a 21º estrela a aparecer na fila?
Escreve frases que traduzam relações que descobriste entre os vários números de peças.

Realça-se a última questão pela necessidade de verbalização pelos alunos do que vêem, já que vai permitir o estabelecimento de relações estruturantes. Por exemplo, «o número de bolinhas é igual ao número de estrelas» ou «o número de losangos é metade do número de bolas» ou ainda «o número total de peças é directamente proporcional ao número de grupos que se repetem». As últimas questões colocadas acima já envolvem processos complexos de generalização por se tratar de números maiores para os quais se torna incómodo o desenrolar da sequência.

Esta tarefa tem potencial para mobilizar e aplicar vários conceitos e capacidades matemáticas simultaneamente. De facto, inclui a construção e exploração de padrões, a organização e tratamento de dados, o estabelecimento de relações e, por fim, todo o trabalho com números e operações com vista à análise de custos. Esta situação problemática, partindo dum contexto não matemático, permite envolver os alunos em actividade matemática significativa valorizando o raciocínio. É também de realçar o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas de modo flexível, de comunicação, de trabalho cooperativo, da tomada de decisões e de atitudes de civismo e respeito pelas regras democráticas.

2. Padrões de crescimento

Nos padrões de crescimento, cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior. Na análise dessa mudança podem ser utilizados vários modos de ver que conduzem a outras tantas representações numéricas e/ou algébricas. O processo de generalização é também condicionado por esse modo de ver, relacionando cada termo com o(s) anterior(es) ou com a ordem que ocupa na sequência. Esta distinção é feita por Stacey (1989) usando as designações *generalização próxima* e *distante*, respectivamente. São usadas por Radford (2006) as designações equivalentes de *generalização aritmética* e *algébrica*. A primeira, que utiliza o raciocínio recursivo, é mais habitual, mesmo entre os professores, mas é mais pobre por não permitir descrever o que se passa com um termo de qualquer ordem. Assim, deve ser feita esta aprendizagem, tanto por professores como por alunos, do uso do raciocínio funcional que permite relacionar qualquer termo com a respectiva ordem, e que fornece de imediato uma descrição sobre o modo de conhecer qualquer termo da sequência. Esta aprendizagem é facilitada por:

— tarefas prévias de contagens visuais, recorrendo a arranjos rectangulares, à simetria e às propriedades das operações[1];

— Uso inicial de padrões de crescimento figurativos, de modo a poder rentabilizar a aprendizagem visual prévia e facilitar a compreensão;

— Utilização de material manipulável na representação dos primeiros termos da sequência;

— Identificação clara do número de cada figura, por exemplo com a colocação de cartões numerados por baixo da figura construída;

— Uso de uma tabela para organização dos dados;

— Descrição oral e/ou escrita, por parte de cada aluno, do modo como vê cada figura, de modo a evitar apenas o registo do número total de objectos em cada figura, que conduziria a uma abordagem puramente numérica dificultando o processo de generalização distante;

— Registo na tabela, para cada figura, não (ou não apenas) do número total de objectos mas antes da expressão numérica correspondente ao modo como a figura é vista e traduzindo a descrição verbal efectuada anteriormente.

Neste trabalho é evidente a ligação entre conceitos e capacidades matemáticas e o desafio colocado aos alunos de desenvolverem a sua compreensão das conexões entre tópicos e ideias que vão aflorando ou aprofundando. Por seu lado, a utilização de padrões figurativos incentiva as conexões entre os números, a álgebra e a geometria, suscitando diferentes representações e a abordagem de tópicos como características de figuras bi e tridimensionais e conceitos como perímetro, área e volume. São vários os investigadores que referem que o conhecimento matemático pode ser desenvolvido através do estudo de problemas envolvendo padrões, e a álgebra surge como o modo de representar e generalizar esse conhecimento (Blanton & Kaput, 2005; Radford, 2006; Usiskin, 1999). A tarefa escolhida — Rectângulos — procura ilustrar este ponto de vista.

Tarefa 2. Rectângulos

Observa a seguinte sequência de rectângulos.

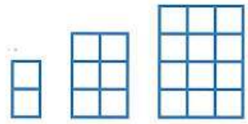


fig. 1 fig. 2 fig. 3

1. *Para cada figura da sequência determina o perímetro, considerando como unidade de comprimento o lado do quadradinho.*
2. *Constrói as duas figuras seguintes.*
3. *Organiza numa tabela os valores do perímetro de cada um dos rectângulos, traduzindo por meio de uma expressão numérica o modo como os vês.*
4. *Qual será o perímetro do 18° rectângulo da sequência?*
5. *Tira uma conclusão sobre o modo de calcular o perímetro de um rectângulo qualquer da sequência. Explica como pensaste.*

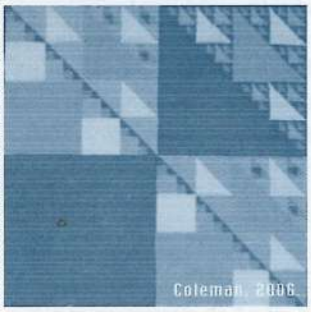
Os alunos podem utilizar palitos para construir algumas das figuras. Nesta tarefa é explorado o perímetro mas também podia ser invocada a área, utilizando-se para isso fichas quadradas. O modo de ver mais habitual é descrito como segue: «Na 3ª figura vejo no perímetro duas vezes 3 palitos na horizontal e duas vezes 4 palitos na vertical». Assim, a expressão numérica do perímetro da 3ª figura será $3 + 3 + 4 + 4$ ou $2 \times 3 + 2 \times 4$. Mas também podia ser visto, por exemplo, como o dobro de $3 + 4$.

É possível fazer a generalização para o perímetro da 18ª figura representando-o pela expressão numérica $2 \times 18 + 2 \times 19$. A resposta à última questão pode ser dada em linguagem corrente: «O perímetro de qualquer figura da sequência é a soma do dobro do número da figura com o dobro do número seguinte»; ou, por meio do simbolismo algébrico, usando a letra n para representar o número da figura: $2 \times n + 2 \times (n + 1)$.

3. Problemas de padrão

As tarefas anteriores podem também constituir problemas, mas utilizamos essa designação especialmente quando a estratégia de descoberta de padrão se apresenta como uma ferramenta poderosa de resolução, embora esse facto não seja explicitado e tenham de ser os próprios alunos a mobilizá-la e a descobrir a sua utilidade. Nesse sentido, apresentam-se de seguida três problemas estabelecendo conexões dentro da própria matemática e ainda entre a matemática e a vida real, o jogo e a arte.

Tarefa 3. O tapete



A Inês tem em casa o tapete apresentado.
Um dia pôs-se a olhar para ele e descobriu o modo como foi construído o desenho. Serás capaz de o fazer também?
Centra-te nos quadrados amarelos (azul claro). A região formada por estes quadrados que parte é da tapeçaria?
Dá agora atenção aos triângulos.
Que relação existe entre o triângulo amarelo (azul claro) e o triângulo laranja (azul médio)?
De que cor são os triângulos que em conjunto correspondem a 1/32 da tapeçaria?
Que percentagem da tapeçaria está pintada em vermelho (azul escuro)?

Esta tarefa parte de uma situação real e, através da descoberta de padrões, estabelece conexões entre vários tópicos numéricos.

Um objecto real como um tapete pode ter uma exploração matemática. O objectivo inicial é a descoberta do padrão geométrico usado na construção do desenho. A diagonal visível do quadrado que forma o tapete divide-o em dois triângulos com dois tipos de padrão diferente mas que obedecem à mesma lei de formação. O trabalho evolui de seguida para conexões com tópicos numéricos como as fracções, razão, proporção, potências, percentagem e área, desocultando relações eventualmente invisíveis a uma primeira abordagem. Por exemplo, pedir ao aluno que identifique a fracção do quadrado original representada pelo quadrado vermelho (azul escuro) ou indicar a área do quadrado vermelho (azul escuro) tomando por unidade de área o quadrado original são questões equivalentes apesar de envolverem conceitos diferentes.

Tarefa 4. O jogo de Euclides[2]

N° de jogadores: 2
Material:
— uma tabela dos 100
— canetas de acetato ou discos translúcidos
Desenvolvimento:

Tirar a sorte quem é o 1° jogador

O 1° jogador escolhe um número de 1 a 100 e marca esse número na tabela (com a caneta ou usando uma ficha transparente).

O 2° jogador escolhe e marca qualquer outro número.

À vez, o jogador subtrai quaisquer dois números marcados de modo a encontrar uma diferença que não tenha sido ainda marcada.

Os jogadores jogarão alternadamente até não conseguirem marcar nenhum número da tabela.

O jogador que marcar o último número possível ganha.

Sendo um jogo, esta é uma tarefa muito desafiante e através da qual os alunos podem desenvolver uma maior motivação para o trabalho matemático. É por vezes surpreendente e inesperada a ligação do jogo com a matemática: o facto de um simples jogo ter uma explicação matemática e do seu conhecimento implicar a possibilidade de ganhar proporciona um bom meio de apreciar a matemática, a sua beleza e sobretudo o seu poder. O jogo de Euclides é um jogo numérico em que, com persistência e trabalho sistemático de investigação, os alunos serão capazes de descobrir padrões na estrutura numérica e estabelecer relações de modo flexível por forma a chegar a uma estratégia ganhadora.

A tabela, que no enunciado é indicada com 100 números, pode ser reduzida a uma tabela de 6×6, por exemplo, de modo a facilitar e não tornar enfadonhos os vários cálculos a realizar.

A conclusão geral sobre o jogo é complexa, podendo apresentar-se como segue:

Sejam n e s os números escolhidos, respectivamente, pelo 1° e pelo 2° jogador.
Seja $d = \text{mdc}\ (n, s)$.
Seja $m = \text{Max}\ \{n, s\}$
Então o jogo acaba ao fim de m/d passos.[3]

A paridade de m/d é que determina qual o vencedor. Assim, se o 2° jogador souber jogar, o 1° não tem qualquer possibilidade de ganhar: se o 1° escolher um número par, basta ao 2° escolher a sua metade para ter vitória imediata; se o 1° escolher um número ímpar, basta ao adversário escolher o dobro, se existir, para obter vitória imediata, ou então o par seguinte para garantir a vitória ao fim dum número de passos igual a esse número par escolhido.

Contudo, podem ser tiradas pelos alunos conclusões parciais baseadas na particularização com vários números resultante de vários jogos. Para esse efeito é útil a colocação de questões como por exemplo:

Guarda todas as tabelas dos 100 depois dos diferentes jogos efectuados. Compara os padrões de números marcados em cada um dos jogos. Podes explicar porque é que alguns jogos têm tão poucos números marcados e outros têm tantos?

Se o primeiro jogador escolher o 26, que número devo eu escolher para ter a certeza de ganhar?

Se eu iniciar o jogo escolhendo um número ímpar será que posso ganhar? Como?

Tarefa 5. O friso de Siena

Este friso, em mármore, pode observar-se na Catedral de Siena.

Neste friso destaca-se uma flor, que dá sempre origem à flor consecutiva através de uma rotação de 180°. Quais as simetrias desta figura, ou seja, as isometrias (translação, rotação, reflexão, reflexão deslizante) que mantêm a figura globalmente invariante?

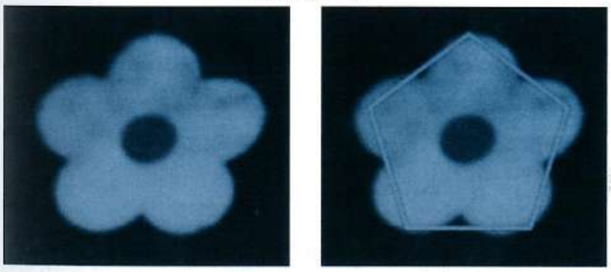
Identifica o motivo mínimo do friso. Descobre simetrias do friso, isto é, isometrias que o deixem globalmente invariante. Nota que o friso, matematicamente, é uma figura ilimitada, que se prolonga indefinidamente para ambos os lados.

Faz uma síntese escrita das descobertas que realizaste. Podes usar papel vegetal e/ou recortar flores idênticas à dada.

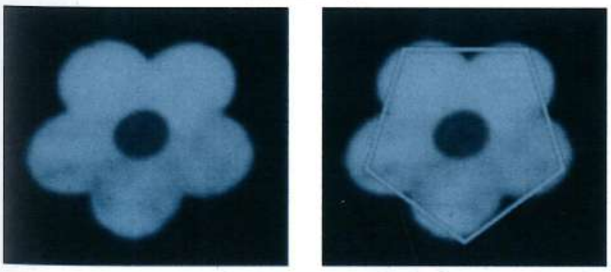
Pode ainda fazer-se uma extensão deste problema desafiando os alunos a imaginar que as flores apareciam, não na posição dada, mas rodadas de 90° como pode ver-se nas figuras seguintes.

Situação inicial

Flor superior

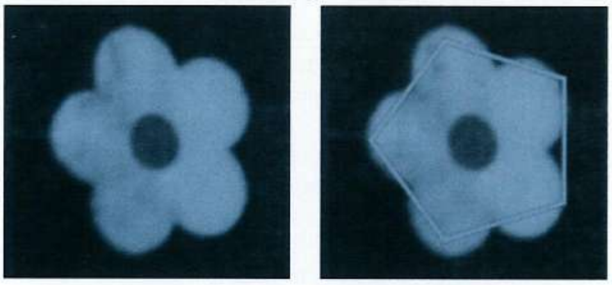


Flor inferior

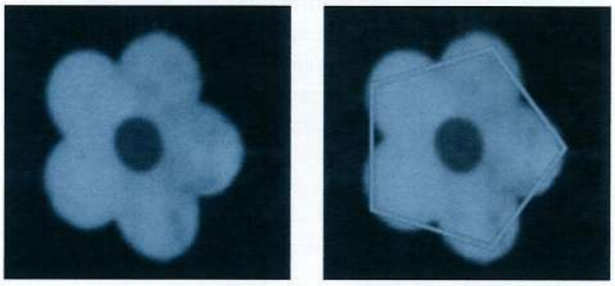


Posição da flor depois da rotação de 90°.

Flor superior



Flor inferior



Nessas circunstâncias quais seriam as alterações em termos das simetrias do friso?

Esta tarefa procura desvendar conexões da matemática com a arte através de um padrão geométrico. Alguns dos padrões abordados até agora permitem fazer conexões com tópicos geométricos, como por exemplo o perímetro e a área, ou a classificação de polígonos. No entanto, as regularidades que estão no seu cerne são numéricas, por consideração da medida da área ou do perímetro, por exemplo. Na tarefa apresentada exploram-se regularidades geométricas, e, neste campo, o termo padrão adquire um significado próprio, específico, diferente daquele que é entendido nos padrões numéricos. Aqui um padrão é caracterizado pela disposição de cópias de um motivo que se repete (Veloso, 1998). A tarefa apresentada envolve um friso, que é uma figura que se mantém invariante por translações efectuadas numa só direcção. Aproveita-se para investigar as simetrias de uma figura presente no friso, a flor, podendo concluir-se que possui 5 simetrias de reflexão e outras tantas de rotação. Em relação ao friso, as suas simetrias são de translação, rotação (meia volta) reflexão de eixo vertical e reflexão deslizante. Explora-se como extensão o facto de uma eventual mudança da posição da flor trazer consequências em termos das simetrias do friso. De facto, já que a flor perde a simetria vertical por efeito da rotação de 90°, o friso mantém simetrias de translação e também de rotação (meia volta) mas deixa, em consequência, de ter simetrias de reflexão vertical e de reflexão deslizante.

Conclusão

Quando os estudantes entram na escola possuem um forte potencial que o professor deve rentabilizar se se pretende que estes jovens, mais do que treinar um conjunto de técnicas matemáticas, venham a gostar de matemática e a apreciar a sua utilidade. Nesse sentido, o professor deve estar atento e recorrer a diferentes caminhos que permitam explorar esse potencial em cada um dos seus alunos e com cada uma das tarefas que utiliza, de modo a que aprendam matemática com compreensão.

As tarefas apresentadas como exemplo evidenciam a procura de padrões e permitem estabelecer conexões entre várias áreas dentro e fora da matemática, levando os alunos a compreender e relacionar vários aspectos da matemática. Procurou-se mostrar que as tarefas de descoberta de padrões numéricos conduzem à generalização cuja expressão pode ser explorada a diferentes níveis e utilizando diferentes representações. A aritmética generaliza-se permitindo fazer emergir um tema que tradicionalmente era tratado de modo muito formal e desprovido de sentido a álgebra. Por outro lado, quis-se ainda evidenciar que a matemática está presente nas situações concretas do dia-a-dia, no jogo, e também na arte. Estes e outros temas fornecem um contexto favorável não só para motivar os alunos mas para realçar e aprofundar diferentes tópicos matemáticos.

Notas

1 Para uma descrição mais pormenorizada consultar Vale *et al.* (2009)

2 Adaptado de http://letsplaymath.net/2008/01/26/euclids-game-on-a-hundred-chart/

3 Não é possível apresentar a demonstração por falta de espaço.

Referências

Baratta-Lorton, B. (2003). Patterns & Connections in mathematics (manuscript). Center for Innovation in Education. Retirado em 2 de Outubro de 2008 de http://www.center.edu/Patterns_Connections.shtml.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446.

Ewell, P. T. (1997a). Organizing for learning: A new imperative. *AAHE Bulletin*, 3–6.

Ministério da Educação (ME) — DGIDC (2007). *Programa de matemática do Ensino Básico*. Retirado em 10 de Março, 2009 de www.min-edu.pt/outerFrame.jsp?link=http%3A//www.dgidc.min-edu.pt.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Orton, A. (Ed.) (1999). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In J. Alatorre, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Vol. 1*, pp. 2–21.

Sawyer,W. (1955). *Prelude to Mathematics*. Harmondsworth: Penguim Books.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147–164.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In Anthony Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 18–30). London: Cassell.

Usiskin, Z. (1999) Conceptions of school algebra and uses of variables, in Barbara Moses (ed), *Algebraic thinking*, pp. 7–13. Reston: NCTM

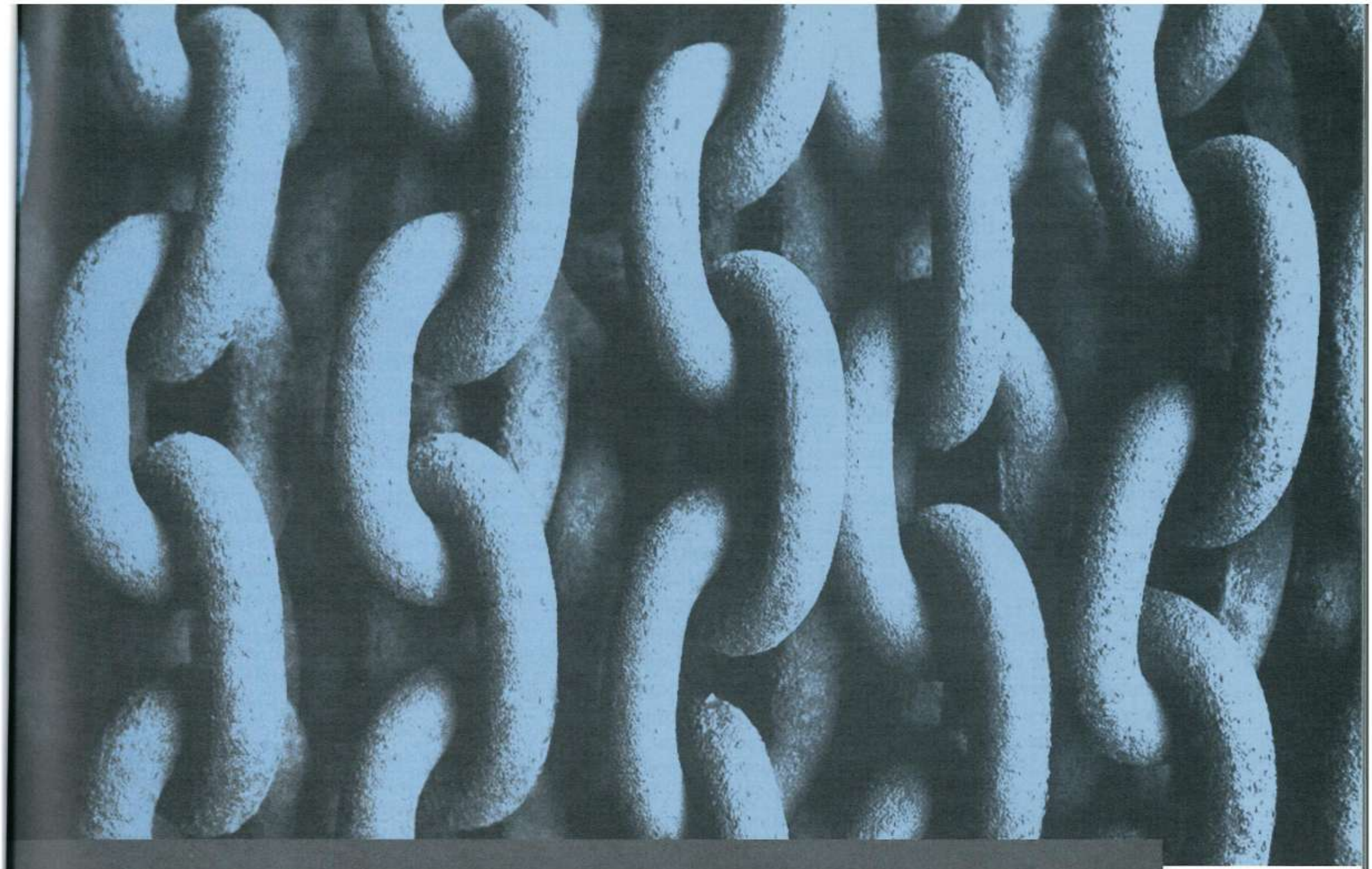
Vale, I. (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. XX SIEM. Em J. Fernandes, H. Martinho & F. Viseu (Org.). *Actas do Seminário de Investigação Matemática*, pp. 35–63. VC: APM.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática — propostas curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: ESEVC Projecto Padrões

Veloso, E. (1998). *Geometria. Temas actuais. Materiais para professores*. Lisboa: IIE.

Warren, E. & Cooper, T. (2008). Patterns That Support Early Algebraic Thinking in the Elementary School. In Carole Greenes & Rheta Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics Seventieth Yearbook* (pp. 113–126). Reston: NCTM.

Isabel Vale
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
Teresa Pimentel
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo



Cadeias de problemas, conexões matemáticas e articulação curricular entre ciclos de ensino — uma experiência em par pedagógico

Margarida Raquel Neves
Nélia Amado
Susana Carreira

Introdução

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) considera que o ensino da Matemática deve ser orientado por duas finalidades fundamentais:

a) Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua mobilização em contextos diversificados;
b) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.

A estas finalidades está associado um conjunto de objectivos gerais que contemplam múltiplas dimensões da aprendizagem, tais como: a representação, a comunicação, o raciocínio, a resolução de problemas, as conexões, a compreensão e o uso da Matemática em contextos diversificados.

A resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática constituem eixos centrais deste programa e importantes orientações metodológicas na estruturação das actividades a dinamizar pelo professor em sala de aula. A resolução de problemas é considerada uma capacidade matemática fundamental; os alunos devem ser capazes de lidar com problemas matemáticos e também com problemas ligados a contextos do seu dia-a-dia e a outros domínios do saber. Trata-se de saber resolver e formular problemas, analisar diferentes estratégias e efeitos de alterações no enunciado de um problema. A resolução de problemas é, não somente, um importante objectivo de aprendizagem como ainda uma actividade fundamental para a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos (ME, 2007).

As orientações curriculares presentes neste programa trazem claramente novos desafios ao papel do professor. Neste contexto, o trabalho colaborativo entre os professores reveste-se de uma importância crescente, ao contribuir para gerar momentos de partilha e discussão, que permitam responder a esses desafios.

O presente artigo ilustra uma experiência desenvolvida em par pedagógico entre duas professoras, valorizando a resolução de problemas e as conexões matemáticas e explorando oportunidades de articulação entre tópicos matemáticos dos 2.° e 3.° ciclos.

Breve fundamentação

Ensinar através da resolução de problemas ajuda o aluno a comunicar ideias, a investigar relações e a estabelecer conexões entre conceitos matemáticos, o que favorece o surgimento de relações matemáticas significativas e um conhecimento mais profundo da Matemática. Vale (2000) defende que o ensino da resolução de problemas deve incluir a possibilidade de aprendizagem de conceitos e ideias matemáticas. A perspectiva é a de que estes surjam a partir de problemas através dos quais possam ser compreendidos e explorados.

Neste tipo de abordagem, torna-se essencial dar atenção às tarefas seleccionadas, reflectir sobre as suas potencialidades e criar um ambiente de constante questionamento que leve os alunos a clarificar os seus processos de pensamento, a analisar os erros e a aprimorar as respostas (Lloyd, 1997).

Como se pode perceber, no programa de Matemática coloca-se em destaque a importância de desenvolver a compreensão da Matemática, o significado dos conceitos, algoritmos e procedimentos, o reconhecimento de regularidades e a análise de raciocínios ou estratégias matemáticas (Serrazina & Oliveira, 2010). É neste contexto que faz sentido pensar em cadeias de tarefas, ricas e articuladas, e em considerar a ideia de trajectória de aprendizagem como base de organização do trabalho em sala de aula.

Tarefas matemáticas significativas devem, em geral, encorajar uma variedade de soluções e abordagens, focar conceitos matemáticos relevantes e requerer justificação para as soluções apresentadas. Entre outros recursos a encarar, o computador terá um lugar importante, ao incentivar a curiosidade e encorajar os alunos a descobrir padrões e regularidades e a utilizar diferentes representações matemáticas. Ao aluno está a atribuir-se, indiscutivelmente, o papel de participante activo na construção do pensamento matemático. E o cenário da utilização de recursos tecnológicos é, como há muito se sabe, um dos que poderá conduzir a situações novas e imprevistas, o que vem reforçar a necessidade e a pertinência do trabalho em par pedagógico (Santos, 2000; Almiro, 2005).

Uma experiência em par pedagógico

A experiência que descrevemos foi desenvolvida numa turma do 6.° ano pela primeira autora (professora do 3.° ciclo) e por Maria, professora do 2.° ciclo da mesma escola.

O trabalho em par pedagógico envolveu uma colaboração activa na preparação das aulas, na selecção e análise das tarefas, na utilização a dar ao computador, na discussão acerca das conexões matemáticas possíveis e da articulação vertical entre os tópicos dos dois ciclos. Esta colaboração pautou-se pela existência de objectivos comuns relativamente ao trabalho com os alunos e também de uma perspectiva partilhada do currículo e do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

As duas professoras partilharam, ao longo de um ano lectivo, a tarefa de selecção de um vasto conjunto de problemas e a sua aplicação em sala de aula.

No 2.° e no 3.° período foram implementadas três cadeias de problemas que previam o estabelecimento de conexões matemáticas e a articulação entre tópicos leccionados no 2.° e 3.° ciclos, com recurso ao computador.

A primeira cadeia — *Sequências numéricas, regularidades e funções* — era composta por quatro problemas: 1) Peças hexagonais; 2) Sólidos com cubos; 3) Sobram sempre cinco!; 4) Uma escada com cubos. A exploração de cada problema englobou dois momentos distintos em sala de aula. O primeiro consistiu na resolução do problema, individualmente, com papel e lápis, seguida da apresentação do processo de resolução e do confronto de ideias com toda a turma. O segundo, em grupos, ocorreu quando se realizou a exploração adicional de cada problema na folha de cálculo. Este foi o momento mais utilizado para abordar novos conhecimentos matemáticos e introduzir conceitos tratados no 3.° ciclo: representação de pontos no plano cartesiano, termo de uma sequência e ordem do termo, função, objecto e imagem, variável independente e variável dependente, representação gráfica e expressão analítica das funções linear, afim e quadrática.

Apresentam-se, na página seguinte, os quatro problemas propostos na 1.ª cadeia.

Passamos a relatar alguns episódios de aulas que surgiram no decurso da exploração dos problemas com recurso à folha de cálculo.

Na questão 4 do problema 1 (peças hexagonais), pretendia-se que os alunos chegassem à expressão analítica da função $y = 3x$ e compreendessem o seu significado no contexto do problema. Para isso, passaram pela construção de uma tabela, representaram pontos no referencial cartesiano, construíram o gráfico e encontraram a expressão.

Episódio: A função de proporcionalidade directa

Maria: Observem as coordenadas dos vários pontos representados no referencial. Podemos afirmar que existe uma situação de proporcionalidade directa?

Grupo 4: Sim.

Maria: Porquê?

Grupo 4: Na tabela, os números das peças são três vezes os números da figura.

Margarida: E por que será que isso acontece?

Grupo 6: Porque cada figura precisa de mais três peças.

PROBLEMA 1

A Beatriz construiu a seguinte sequência de figuras com as peças hexagonais que retirou do seu baú de brinquedos.

1.ª figura 2.ª figura 3.ª figura

1. De quantas peças hexagonais a Beatriz necessita se quiser construir a 4ª figura da sequência? E a 10ª figura?

2. Desenha a 6ª figura da sequência.

3. Qual é a figura que precisa de 30 peças hexagonais para ser construída?

4. A Beatriz decidiu construir uma nova sequência de figuras utilizando as mesmas peças.

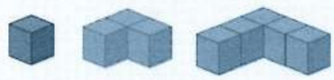
1ª figura 2ª figura 3ª figura

4.1 De quantas peças hexagonais a Beatriz necessita se quiser construir a 4ª figura da sequência? E a 6ª figura?

4.2 Qual é a figura que necessita de 27 peças para ser construída?

PROBLEMA 2

O Carlos construiu vários sólidos geométricos utilizando somente cubos e formou uma sequência, da qual se apresentam os três primeiros termos:



1.º sólido 2.º sólido 3.º sólido

1. Quantos cubos são necessários para construir o 5.º sólido da sequência?

2. Qual é a ordem do sólido na sequência se necessita de 15 cubos para ser construído?

3. Algum sólido desta sequência tem 36 cubos no total?

4. Qual dos sólidos A, B ou C é equivalente ao sólido representado na 6.ª figura da sequência?

A B C

PROBLEMA 3

O Rodrigo tem quase uma centena de berlindes. Foi colocá-los em caixas de 10 e sobraram-lhe 5! Tentou colocá-los em caixas de 15 e sobraram-lhe novamente 5!

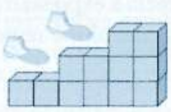
Quantos berlindes tem o Rodrigo?

Campeonato de Resolução de Problemas SUB12
Edição 2007/2008 – Problema 12

PROBLEMA 4

A Raquel pretende construir uma escada, empilhando cubos como se mostra na figura.

Se ela quiser que a altura da escada seja de 7 cubos, quantos cubos irá precisar para construir essa escada? E se a altura for 11 cubos?



Campeonato de Resolução de Problemas SUB12
Edição 2008/2009 – Problema 5 (Adaptado)

Margarida: E isso acontece sempre? Cada figura precisa de mais três peças do que a figura anterior para ser construída?

Alunos: Sim. [responderam a maioria dos alunos da turma]

Maria: Recordam-se de, na aula passada, quando resolvemos as questões 1, 2 e 3 deste problema, termos referido tratar-se de uma situação de proporcionalidade directa?

Alunos: Sim.

Maria: O acréscimo, por figura, era sempre igual! E de quantas peças hexagonais?.

Alunos: Duas.

Margarida: Agora o acréscimo é de…? [Pausa]

Alunos: Três.

Margarida: Será que o gráfico que contém os pontos é uma recta ou uma curva?

Grupo 2: Uma recta.

Margarida: Porquê?

Grupo 2: Porque é de proporcionalidade directa.

Margarida: Vamos confirmar então. Cliquem sobre um dos pontos, pressionem o botão do lado direito do rato e, em seguida, seleccionem adicionar linha de tendência.

Os alunos foram seguindo as orientações dadas.

Margarida: Coloquem o cursor sobre a recta e pressionem o botão do lado direito do rato. Seleccionem formatar linha de tendência e, em seguida, mostrar equação do gráfico.

A certa altura, visualizaram o gráfico no ecrã (figura 1). Seguidamente, Maria colocou uma nova questão à turma.

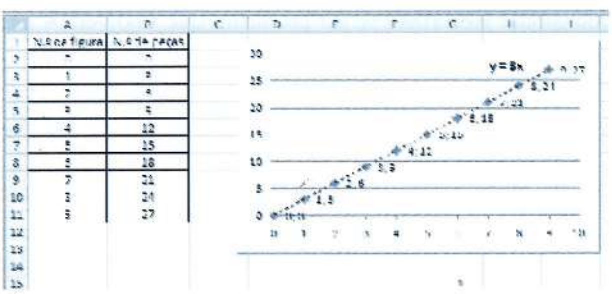


Figura 1. Tabela, coordenadas, gráfico e expressão analítica da função $y = 3x$.

Número da figura	Número de peças	Número de cubos
1	2	1
2	4	3
3	6	5
4	8	7
5	10	9
6	12	11

Figura 2. Tabela construída no quadro

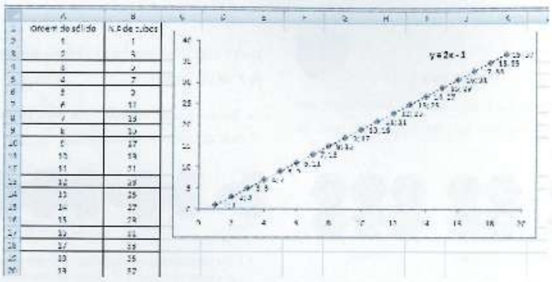


Figura 3. Gráfico da função y = 2x − 1

Maria: Por que razão aparece o três na expressão da recta $y = 3x$?

Grupo 1: Porque aumenta de três em três.

Maria: E se o número de peças aumentasse quatro de cada vez? Como é que aparecia a expressão da recta?... y igual a ... [Aguardou que algum aluno respondesse].

Grupo 4: Quatro.

Grupo 1: Não, é $4x$?.

Grupo 4: Porque é que não pode ser só 4?

Grupo 1: Porque as figuras não têm todas quatro peças.

Margarida: Isso mesmo.

Maria: Observem de novo o gráfico. A recta $y = 3x$ contém o ponto $(0,0)$?

Alunos: Sim.

Maria: Posso afirmar que o gráfico representa uma situação de proporcionalidade directa?

Alunos: Sim.

Margarida: Porquê?

Grupo 7: Porque tem o zero.

Margarida: E o gráfico é uma recta ou uma curva?

Grupo 5: É uma recta.

O segundo episódio ocorreu após os alunos terem construído na folha de cálculo uma tabela de valores para responder às questões do problema 2 (sólidos com cubos).

Episódio: O conceito de função afim

Margarida: Recordam-se do problema que resolvemos das peças hexagonais?

Alunos: Sim.

Margarida: O gráfico que obtivemos era uma recta ou uma curva?

Alunos: Uma recta.

Maria: E o que tinha essa recta de especial?

Grupo 6: O zero.

Margarida: Passava na origem do referencial. E porquê, alguém sabe?

Grupo 5: Porque era de proporcionalidade directa.

Margarida: E este problema que estamos a resolver, será de proporcionalidade directa?

Grupo 7: Não.

Maria: Porquê?

Grupo 2: No problema das peças era sempre vezes dois ou vezes três.

Maria: E neste problema o que é que acontece?

Grupo 2: Nenhum número a multiplicar pela figura dá o número de cubos.

Um grupo de alunos, após consultar a resolução do problema das peças hexagonais, nos seus apontamentos, afirmou:

Grupo 1: Professora, o número de cubos é igual ao do das peças se tirarmos um.

Maria: Expliquem melhor a vossa ideia.

Aluno: Posso ir ao quadro explicar?

Maria: Sim.

O aluno dirigiu-se ao quadro e construiu uma tabela (figura 2). O diálogo gerou-se em seguida.

Aluno: O número de peças é vezes dois o número da figura e o número de cubos é o número de peças menos um.

Maria: Muito bem! E que números são estes? [Pausa] 2, 4, 6, 8, 10?

Alunos: Os pares.

Maria: E estes? 1, 3, 5, 7, 9, 11?

Alunos: Os ímpares.

Margarida: Qual foi a expressão que apareceu na recta que representámos no gráfico do número de peças hexagonais?

Maria: Consultem os vossos apontamentos.

Grupo 4: $y = 2x$.

Maria: O grupo 1 afirmou que o número de cubos era igual ao número de peças menos um. Todos concordam? Observem a tabela!

Alunos: Sim.

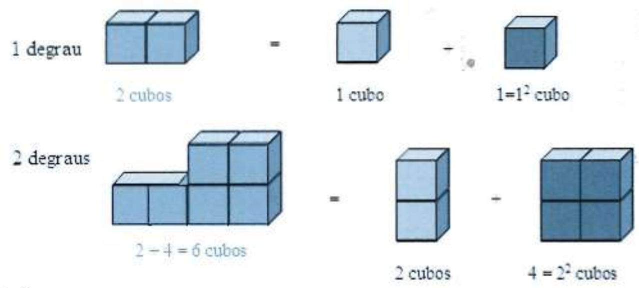


Figura 4. Esquema de contagem dos cubos por decomposição

Maria: E a expressão que obtivemos no problema das peças foi $y = 2x$?

Alunos: Sim.

Maria: Alguém sabe qual poderá ser a expressão que dá o número de cubos?

Grupo 5: O número de cubos é igual ao número de peças menos um.

Margarida: Exactamente. Logo a expressão é...?

Maria: y igual a ...[Pausa]

Grupo 1: $y = 2x - 1$.

Maria: Muito bem! É isso mesmo. Sinal de mais para o grupo 1!

A conclusão obtida pelo grupo 1 foi confirmada com a visualização do gráfico da função $y = 2x - 1$ na tela branca (figura 3).

Antes do final da aula, houve ainda oportunidade para introduzir o conceito de função afim.

Maria: O gráfico representa uma situação de proporcionalidade directa?

Alunos: Não.

Margarida: Muito bem. No entanto o gráfico é uma recta, dizemos que representa uma função afim.

Grupo 3: Sempre que é uma recta é afim?

Margarida: Sim. Mas irão aprofundar este assunto no oitavo ano.

Maria: Neste momento, apenas é importante que tomem conhecimento que nem todos os gráficos que são rectas traduzem uma situação de proporcionalidade directa.

A resolução do problema 3 (sobram sempre 5!) constituiu uma outra oportunidade para a comparação entre funções: $y = 10x$ e $y = 10x + 5$. Os alunos representaram os gráficos das duas funções na folha de cálculo e ocorreu uma discussão interessante acerca do significado dos parâmetros presentes nas duas expressões, tendo em conta o problema.

O último episódio que apresentamos surgiu durante a exploração do problema 4 (uma escada com cubos). Foi sugerido aos alunos um esquema de contagem dos cubos (figura 4). Com base no esquema, construiu-se, no quadro, uma tabela (figura 5).

Seguidamente, os alunos ligaram os computadores e fizeram a tabela na folha de cálculo. Foi-lhes pedido que seleccionassem as duas primeiras colunas da tabela e criassem o gráfico da respectiva função. O episódio desenrola-se a partir daqui.

Episódio — O gráfico de uma função quadrática

Maria: O gráfico é uma recta ou uma curva?

Alunos: Uma recta.

Maria: Por que é que aparece $y = x$?

Alunos: Porque o número de degraus é igual à altura da escada.

Margarida: Seleccionem agora os valores da primeira coluna e os da terceira coluna e construam o gráfico.

As duas professoras circularam pela sala, auxiliando os alunos, até que todos conseguiram construir o gráfico da função $y = x^2$. Maria colocou questões:

Maria: O gráfico é uma recta?

Número de degraus	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Altura das escadas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Número de cubos que restam	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
Total de cubos	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132

Figura 5. Tabela construída no quadro

Alunos: Não, é uma curva.

Maria: Por que será que isto acontece?

Grupo 2: Porque não aparece x.

Margarida: Não aparece x, como?

Grupo 2: É um x com um 2 em cima.

Maria: Querem dizer que aparece x ao quadrado?

Grupo 2: Sim. Se fosse só x era uma recta.

Margarida: E $y = x + 2$ também era uma recta?

Grupo 3: Sim, só que não passava no meio.

Maria: Quando o gráfico de uma função é uma curva e a função é do tipo $y = x^2$, ela classifica-se como ... [Maria fez um sinal a Margarida]

Margarida: Função quadrática.

Maria: Irão estudar este assunto quando chegarem ao nono ano. [Pausa] Atenção turma! Outra coisa nova que aprenderam hoje é que nem todos os gráficos de funções são rectas. [Pausa] Também podem aparecer curvas.

Conclusão

A exploração adicional dos problemas, com recurso à folha de cálculo, possibilitou introduzir novos conceitos matemáticos, recorrer a várias representações, estabelecer conexões entre tópicos matemáticos, formular e testar conjecturas, bem como, generalizar. Contribuiu para que os alunos desenvolvessem o seu pensamento matemático, percebendo que a Matemática pode ser construída.

No decurso desta experiência o currículo foi interpretado e recriado pelas duas professoras, em torno de propósitos comuns. Os próprios problemas possibilitaram estabelecer várias conexões matemáticas entre conceitos e articular tópicos abordados nos 2.º e 3.º ciclos. A exploração dos problemas implicou analisar questões, investigar diversas estratégias de resolução, bem como comunicar e discutir essas estratégias. Note-se que, numa fase inicial, os alunos usaram as suas concepções anteriores sobre como realizar a tarefa mas, numa fase posterior, após a reflexão e a comparação dos diferentes processos deram passos cruciais para o desenvolvimento de uma nova concepção (Serrazina & Oliveira, 2010). Através do recurso ao computador, os alunos envolveram-se activamente na realização das tarefas, experimentando, explorando, investigando, escolhendo e decidindo, revendo e avaliando os resultados alcançados.

O trabalho na resolução dos problemas envolveu sempre três períodos de acção: 1) abordagem inicial ou preparação; 2) desenvolvimento; 3) revisão global. Inicialmente, os alunos tentaram resolver individualmente o problema, recorrendo a processos distintos de resolução que foram apresentados por escrito e oralmente; seguiu-se o momento da discussão colectiva que incidiu sobre os vários processos de resolução utilizados; posteriormente, procedeu-se à validação dos resultados, ao estabelecimento de generalizações e à formulação de novas questões que foram aprofundadas com recurso à folha de cálculo.

Muitos dos conceitos matemáticos emergiram da exploração dos próprios problemas, tendo sido possível estabelecer uma variedade de conexões matemáticas, além de numerosas ligações entre tópicos do 2.º e do 3.º ciclo do ensino básico.

Referências

Almiro, J. (2005). Materiais manipuláveis e tecnologia na sala de aula de Matemática. In GTI — Grupo de Trabalho e Investigação (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, (pp. 275–315). Lisboa: APM.

Lloyd, C. T. (1997). Mathematics is process education. In A. L. Costa & R. M. Liebmann (Eds.), *Envisioning Process as Content: Toward a Renaissance Curriculum*, (pp. 95–106). Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. (disponível *online*)

Santos, E. (2000). O computador e o professor: um contributo para o conhecimento das culturas profissionais dos professores. *Quadrante*, 9(2), p. 55–81.

Serrazina, L. & Oliveira, I. (2010). Trajectórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In GTI — Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *O professor e o programa de matemática do Ensino Básico* (pp. 43–59). Lisboa: APM.

Vale, I. (2000). *Didáctica da matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e de materiais manipuláveis*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: APM.

Margarida Raquel Neves.
E.B. 2,3 D. Afonso III, Faro

Nélia Amado.
FCT da Universidade do Algarve

Susana Carreira.
FCT da Universidade do Algarve

Problemas e Conexões, com Tecnologia

Adelina Precatado

Nos «Princípios e Normas para a Matemática Escolar», do NCTM, refere-se para os anos 9–12, que «Quando os alunos conseguem ver conexões entre diversas áreas e conteúdos matemáticos, desenvolvem uma visão da Matemática como um todo integrado». Neste artigo valorizo a resolução de problemas e a utilização de tecnologia porque penso que podem facilitar a observação por parte dos alunos de conexões entre diversas ideias e tópicos matemáticos e contribuir para que observem esta visão da Matemática como um todo integrado. Apresento três problemas, abordados sobre mais do que uma perspectiva e onde penso que a tecnologia desempenha um papel significativo.

Problema 1: O Triângulo rotativo

Este problema é apresentado em http://nrich.maths.org/266, sob a forma de uma aplicação interactiva e com o seguinte enunciado:

Os círculos interiores são tangentes um ao outro e tangentes também ao círculo exterior. Se alterarmos o raio dos círculos interiores ou se mudarmos a posição destes círculos, como varia o perímetro do triângulo definido pelos centros dos três círculos?

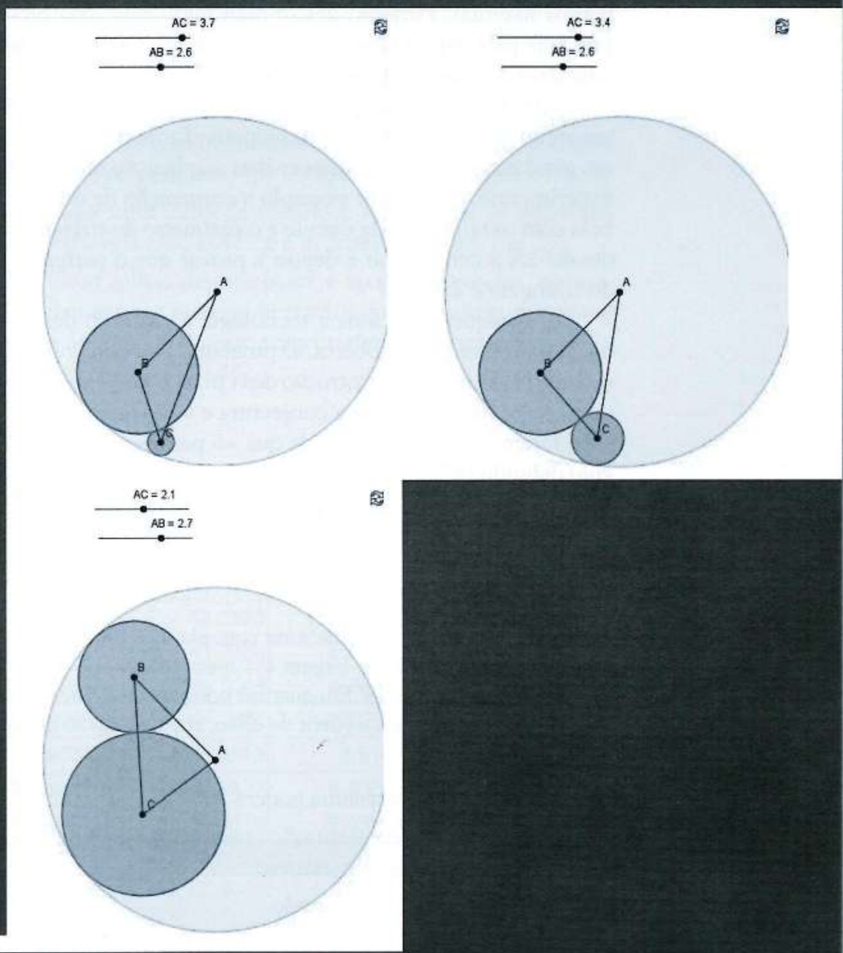


Figura 1. Triângulo rotativo

Apresentei-o a alguns dos meus alunos , no final do 10° ano, na forma: construir, com um programa de geometria dinâmica, os círculos nas condições apresentadas «círculos interiores tangentes um ao outro e tangentes também ao círculo exterior». Estes alunos estavam habituados e manipulavam razoavelmente o Geogebra, por isso, à partida, pareceu-lhes fácil o que lhes estava a pedir. Na verdade não foi assim, depois de algum desespero, fui-lhes dando umas «dicas» que os levaram a perceber que nos pontos de contacto os círculos têm uma tangente comum, perpendicular tanto ao raio do círculo exterior como ao círculo interior e que lhes permitiu, depois, provar que o perímetro do triângulo é igual ao dobro do raio do círculo maior.

De facto, sendo R o raio do círculo maior, r_1 e r_2 os raios dos outros círculos, então o perímetro do triângulo será $(R - r_1) + (R - r_2) + (r_1 + r_2) = 2R$. A partir daqui a construção torna-se fácil. Tal como foi colocado, o desafio revelou-se, para alguns alunos, interessante, talvez porque menos habitual. Primeiro descobriram/provaram uma propriedade para depois fazerem uma construção, um pouco ao contrário do que acontece a maioria das vezes.

Outra forma de abordar o problema, mais simples para a generalidade dos alunos e mais compatível com o tempo que em geral dispomos, será fornecer-lhes a aplicação, deixá-los experimentar, sugerir por exemplo a construção de uma tabela com os raios de cada círculo e o perímetro do triângulo, desafiá-los a conjecturar e depois a provar que o perímetro do triângulo é $2R$.

Em qualquer dos casos a tecnologia é parte do desafio ou o facilitador da descoberta. O problema *conecta* conhecimentos para chegar à construção dos círculos tangentes. Por outro lado, a experiência, a conjectura e a prova articulam-se e fazem sentido. A prova de que «o perímetro do triângulo definido pelos centros dos três círculos é igual a 2 vezes o raio do círculo maior» tornou-se indispensável para fazer «a simples construção».

Problema 2: A escada

Uma parede tem à frente uma zona com plantas, limitada por um muro com 1 metro de largura e 1 metro de altura. Temos uma escada com 3 metros. Em quantas posições diferentes será possível colocar a escada a partir do chão, encostando ao muro e chegando à parede?

Uma abordagem do problema poderá ser:

— Construir uma representação geométrica da situação, deslocar a escada e conjecturar.

— Provar o que foi conjecturado.

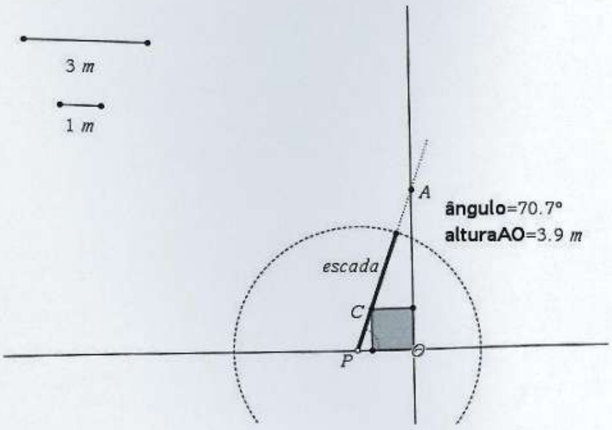


Figura 2. A escada

Na figura 2 apresenta-se uma abordagem possível . É uma simulação com a calculadora Ti-nspire, facilmente construída pelos alunos ou em alternativa fornecida pelo professor e que permite experimentar, deslocando o ponto P, e procurando as possíveis posições da escada.

Nos dois slides da figura 3 apresenta-se parte da resolução apresentada por dois alunos do 11° ano. Os alunos experimentaram e encontraram a resposta, com o Geogebra. Depois resolveram o problema algebricamente e recorreram à calculadora gráfica para encontrarem as raízes da equação

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\beta} + \frac{1}{\cos\beta} = 3.$$

Para o mesmo problema outros alunos recorreram à semelhança dos triângulos FDE e FGB.

Fazendo $\overline{CG} = x$, estudaram a igualdade

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{3} = \frac{x}{x+1}.$$

e determinaram os valores possíveis para $x + 1$.

Concluíram que só há duas posições possíveis, para ângulos da escada com o solo de aproximadamente 34° e 56°, sendo esta última posição a que permite uma altura maior, de aproximadamente 2,5m.

Também neste problema o uso da tecnologia foi importante, não só para possibilitar a experimentação, mas também como meio auxiliar para encontrar as soluções aproximadas .

Quando temos tempo para deixar que os alunos procurem o caminho para a resolução de um problema e não os encaminhamos demasiado, raramente todos resolvem da mesma forma e a apresentação à turma e/ou a discussão permite muitas vezes fazer conexões entre ideias e entre temas matemáticos diferentes já estudados.

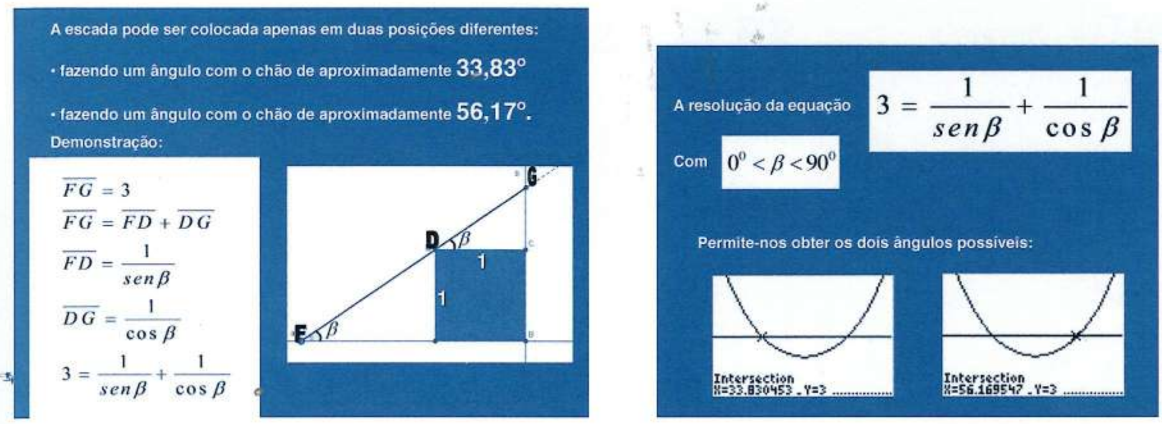


Figura 3. Resolução do problema da escada

Problema 3: Funções no triângulo isósceles

ABC é um triângulo isósceles, com $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ cm. Seja x a medida, em cm, da base do triângulo ABC e α a amplitude, em graus, do ângulo BAC. Quais são as características do triângulo de área máxima? Como varia a área do triângulo em função de x e em função de α? Como varia o perímetro do triângulo em função de x e em função de α?

Este problema foi adaptado de http://illuminations.nctm.org. É um problema simples, quer do ponto de vista do enunciado quer do ponto de vista da construção/experimentação com geometria dinâmica.

Se deixarmos que os alunos recolham e analisem os dados relativos à base, ângulo, perímetro e área e que depois procurem as funções que modelam esses dados encontraremos um conjunto diversificado de funções — polinomiais, irracionais, trigonométricas. Para além disso, teremos oportunidade de relacionar a construção, a experiência, a recolha e tratamento dos dados, a conjectura e a procura das funções que modelam as diversas situações (área ou o perímetro em função do ângulo ou da base). Podemos ainda fazer o confronto entre estes modelos e os dados recolhidos através da sobreposição dos gráficos das funções com as nuvens de pontos e ainda usar derivadas para provar, por exemplo, que o triângulo de área máxima é mesmo o triângulo rectângulo.

Calculadoras e *software* de computador estão cada vez mais próximos , começamos a pensar que apenas usamos o «pequenino ecrã» porque não são permitidos computadores nos exames.

Para este problema, deixo o que poderia ser uma exploração com a calculadora ou *software* Ti-nspire:

1. Construir o triângulo ABC e medir o lado BC, o ângulo BAC, o perímetro (p) e a área (a) do triângulo. (fig. 4)
2. Criar uma folha de cálculo e «Capturar» os dados das variáveis BC, BAC, p e a, antes definidas. (fig. 5)
3. Criar folhas de estatística e analisar os dados, nomeadamente as nuvens de pontos que permitem relacionar a área e o perímetro respectivamente com a base BC e com o ângulo BAC.

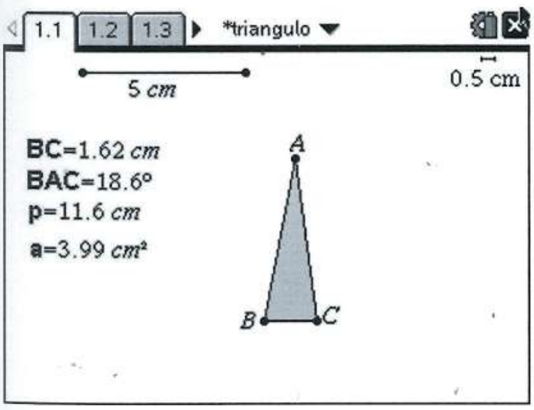
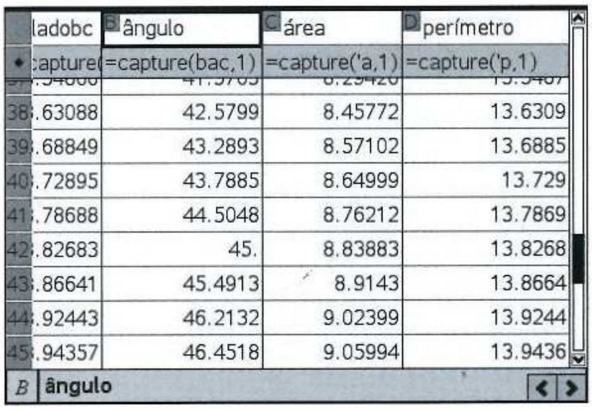


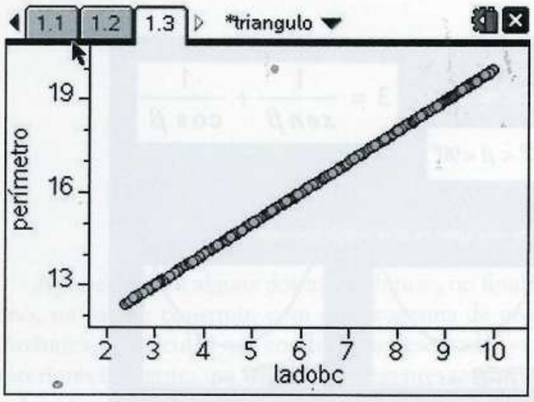
Figura 4



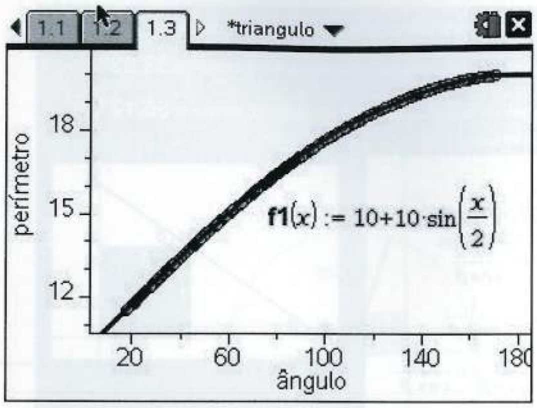
	ladobc	ângulo	área	perímetro
•	capture(	=capture(bac,1)	=capture('a,1)	=capture('p,1)
38	.63088	42.5799	8.45772	13.6309
39	.68849	43.2893	8.57102	13.6885
40	.72895	43.7885	8.64999	13.729
41	.78688	44.5048	8.76212	13.7869
42	.82683	45.	8.83883	13.8268
43	.86641	45.4913	8.9143	13.8664
44	.92443	46.2132	9.02399	13.9244
45	.94357	46.4518	9.05994	13.9436

B ângulo

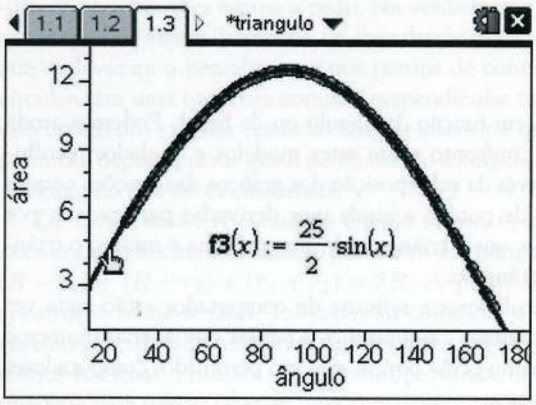
Figura 5



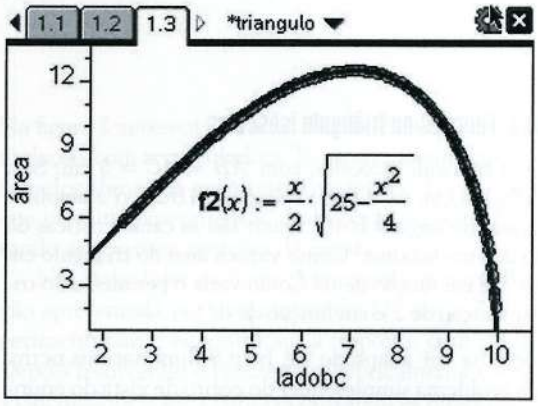
Figuras 6



Figuras 7



Figuras 8



Figuras 9

4. Traduzir a área do triângulo em função de x (medida de BC) e confirmar que essa função se ajusta à respectiva nuvem de pontos. Fazer o mesmo para a área em função do ângulo BAC e para o perímetro em função do lado ou do ângulo. (Fig. 6 a 9)

Poderemos ainda pedir aos alunos que generalizem para o triângulo isósceles de base x, lados iguais l, e ângulo oposto à base α. Obteremos para a área e perímetro, em função de x e de α, respectivamente:

$$a(x) = \frac{x}{2}\sqrt{l^2 - \frac{x^2}{4}}; \quad a(x) = \frac{l^2}{2}\operatorname{sen}\alpha;$$

$$p(x) = 2l + x \quad \text{e} \quad p(x) = 2l\left(1 + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Em síntese, parece-me que a resolução de problemas e a oportunidade de usar ferramentas diversificadas nomeadamente as tecnológicas são importantes para que os alunos estabeleçam conexões entre ideias e temas matemáticos. Para que isto aconteça é também indispensável algum tempo, o tempo para trabalhar em sala de aula, o tempo para o professor poder ajudar os alunos com as tais «dicas» e desafios em vez de responder à velha pergunta «stora o que é que é para fazer?» Mas, é preciso, também, menos alunos nas turmas, pelo menos algumas vezes. Reivindiquemos o desdobramento (perdido) em Matemática!

Nota: Os problemas apresentados neste artigo foram trabalhados na escola e numa sessão prática do ProfMat 2009, com a colega Teresa Moreira.

Referências

Materiais do Projecto T3 da APM

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Adelina Precatado

E. S. de Camões, Lisboa

Video meliora proboque, deteriora sequor
[Vejo e aprovo o melhor caminho, mas sigo o pior]
— Ovídeo [*Metamorfoses*, 7, 20–21]

Arte e Matemática — Conexões

António M. Fernandes

A citação acima marca o tom deste artigo: procurar-se-á ser rigoroso apenas o estritamente necessário, para que as ideias essenciais possam ser veiculadas sem deturpações. O próprio título, contém o termo «arte» de forma abusiva, já que aqui não se tratarão de todas as formas de arte, onde as conexões do tipo que se preconiza podem ser reconhecidas. (Notoriamente não se dirá aqui uma só palavra acerca da Música.)

Várias razões concorrem para esta opção, a ignorância do autor será talvez a mais fácil de constatar e enunciar.

Uma segunda restrição será ainda introduzida: os objectos artisticos são muitas vezes considerados objectos matemáticos. Exemplos típicos são as *pavimentações do plano* e as *figuras impossíveis*. Quanto às primeiras, nelas se pode ilustar uma vasta gama de noções matemáticas, desde a *simetria*, à sofisticada *geometria não comutativa*. Quanto às segundas, Roger Penrose sugeriu o seu estudo e classificação em termos de uma ferramenta matemática importante: a *co-homologia*. Outras conexões deste tipo, envolvendo matemática mais elementar são igualmente observáveis, mas nem dumas nem doutras falaremos aqui. Essas considerações ficarão, talvez, para outra ocasião, quem sabe, contando com a contribuição de outros autores.

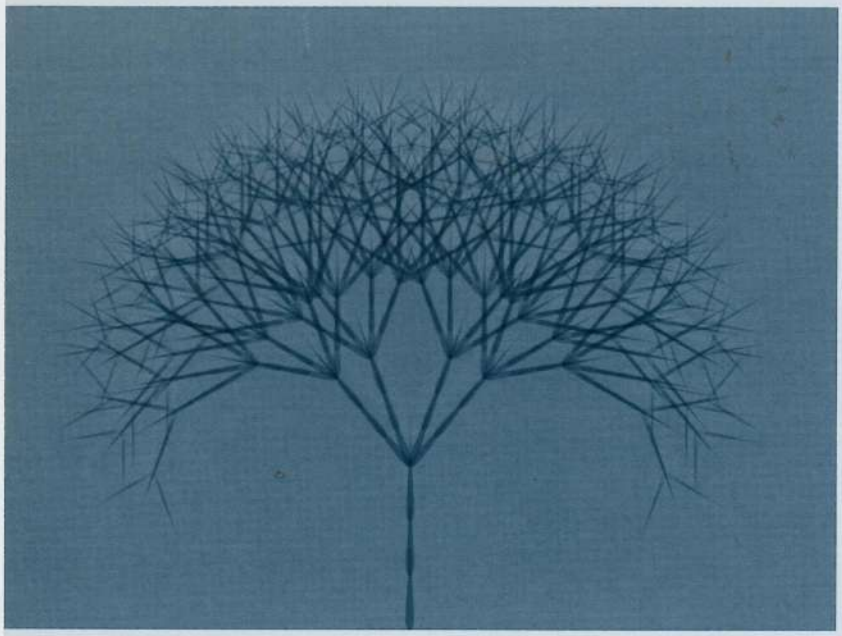


Figura 1. Exemplo de uma árvore gerada por um L-sistema

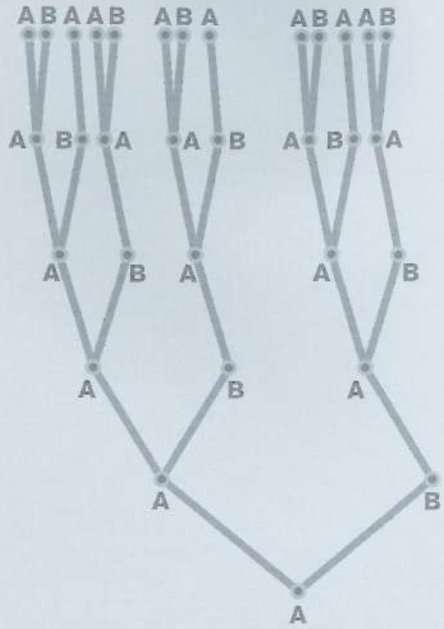


Figura 2

L-sistemas

Em 1968, Aristid Lindenmayer (1925–1989), um botânico húngaro, então na Universidade de Utrecht, abordou com uma perspectiva radicalmente inovadora a descrição dos padrões de crescimento de certas populações de algas e bactérias. Iniciava-se nessa ocasião o estudo dos *L-sistemas*.

Do ponto de vista estritamente matemático, um L-sistema é simplesmente um triplo $\mathbb{L} = (\Sigma, \omega, P)$ onde, Σ é um *alfabeto*, ou seja, um conjunto finito de símbolos; ω é uma *palavra*, ou seja, uma sequência finita de símbolos do alfabeto. Esta palavra especial designa-se de *axioma* ou *estado inicial* do L-sistema. (O conjunto de todas as palavras de um alfabeto Σ, denota-se por Σ^*.) Finalmente, P é um conjunto de *regras produtivas*.

De modo a tornar mais claro o papel de cada um destes elementos, consideramos um primeiro exemplo. Seja então $\mathbb{L} = (\Sigma, \omega, P)$ o triplo onde $\Sigma = \{A, B\}$; $\omega = A$ e P consiste nas regras $A \rightarrow AB$ e $B \rightarrow A$. Qual é o papel de ω e P? Já se disse que ω representa o «estado inicial do sistema». A partir desse estado inicial esse mesmo sistema «evolui» através da aplicação das regras produtivas, cada uma delas descrevendo uma substituição de símbolos. No nosso caso, da aplicação das regras resulta a substituição simultânea de qualquer «A», pela palavra «AB», e de qualquer «B» por «A». O processo evolutivo que mencionamos é descrito na figura 2.

Continuamos a ilustar a potencialidade dos L-sistemas através de um exemplo com cariz mais matemático: a *sequência de Fibonacci*. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{A, B\}$, o axioma A e as regras produtivas $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow AB$ obtemos, iterando a utilização dessas regras a partir do estado inicial A, a seguinte sequência de palavras (até à quinta iteração):

Iteração 0:	A
Iteração 1:	B
Iteração 2:	AB
Iteração 3:	BAB
Iteração 4:	$ABBAB$
Iteração 5:	$BABABBAB$

Como se devia esperar o resultado é uma sequência de palavras do alfabeto descrito. De que modo se relacionam estas palavras com a sequência de Fibonacci? Essa relação é feita através dos comprimentos dessas palavras. Registando esses comprimentos ao longo das sucessivas iterações obtemos: 1,1,2,3,5,8,..., a sequência de Fibonacci, precisamente.

Como este último exemplo ilustra, não são as palavras que resultam da iteração de um L-sistema os objectos que, em última análise, nos interessam. Na maior parte dos casos, o que nos interessa é algum tipo de informação que está relacionada com essas palavras. Ao processo de extracção dessa informação damos o nome de *interpretação* do L-sistema.

Os L-sistemas podem ser usados de forma mais «artística». Para esse efeito, precisamos de os interpretar de modo que descrevam conteúdo gráfico (ou musical, ou outro mas, como já se referiu, destes não nos ocuparemos aqui).

Um terceiro exemplo ilustrará como podemos extrair esse conteúdo. David Hilbert (em 1891) concebeu uma maneira de mergulhar a recta no plano de forma contínua (Giuseppe Peano fez o mesmo, um ano antes.). (Esta afirmação pode traduzir-se de modo mais rigoroso na existência de uma bijecção $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, contínua, i.e., satisfazendo a propriedade: dado $\varepsilon > 0$, para obter $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$, basta considerar $d_1(x, y) < \delta$ para um certo $\delta > 0$ [que existe]. Dito de forma menos rigorosa, para obtermos valores suficientemente próximos da função, basta que consideremos valores suficientemente proximos dos argumentos.) Aqui d_1 e d_2 representam as funções «distância» em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente, que se definem através das relações:

$$d_1(x, y) = |x - y| \text{ e},$$

$$d_2((x, y), (u, v)) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}.$$

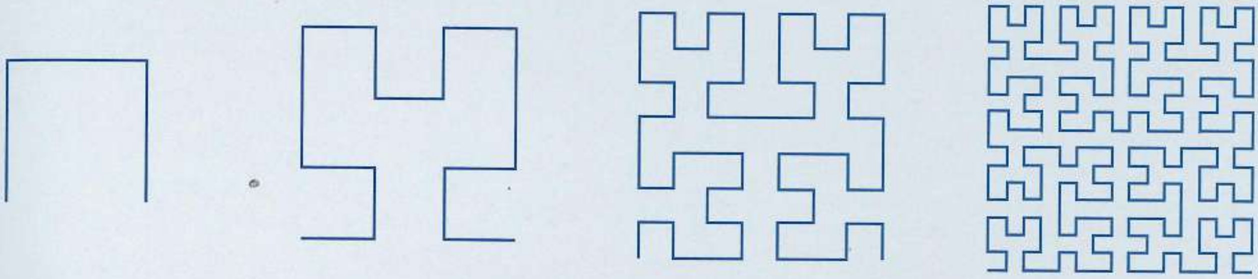


Figura 3. As primeiras quatro iterações do L-sistema que produz as aproximações da curva de Hilbert. Desafia-se o leitor a escrever as palavras geradas pelo L-sistema nestas primeiras iterações e a verificar que correspondem, através da interpretação, às figuras acima. [A tarefa torna-se entediante a curto prazo: é por isso que os computadores e as linguagens de programação são interessantes nestas circunstâncias.]

Se a função inversa de f também fosse contínua, então a recta e o plano seriam *topologicamente equivalentes*. De facto, nenhuma bijecção $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser contínua. Deste modo, o plano e a recta não são topologicamente equivalentes: um resultado conhecido como *invariância dimensional*.

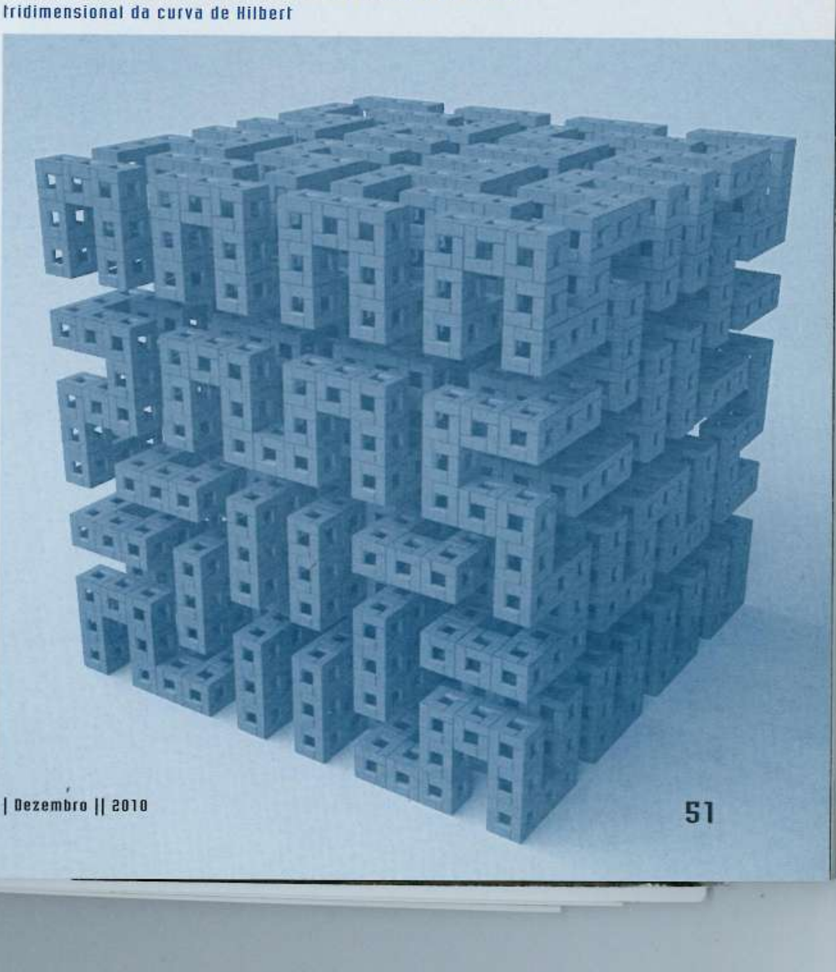
Esta função, conhecida como *curva de Hilbert* pode ser descrita através da interpretação de um L-sistema: consideremos o alfabeto $\{L, R, F, +, -\}$, o axioma L e as regras produtivas $L \rightarrow +RF - LFL - FR+$ e $R \rightarrow -LF + RFR + FL-$. Os símbolos $F, +, -$ serão interpretados da seguinte forma: o símbolo F corresponde a deslocarmo-nos em frente, uma distância fixa, desenhando ao mesmo tempo um segmento de recta com correspondente comprimento; ao símbolo «+» corresponde «rodar para a esquerda 90°» e, ao símbolo «−» corresponde «rodar para a direita 90°». Os restantes símbolos não são interpretados, o que significa que quando os encontramos numa palavra, não lhes corresponde nenhuma acção. (Enfatizamos aqui um aspecto importante: embora certos símbolos não sejam interpretados isso não significa que possamos dispensá-los na descrição de um L-sistema; de facto, eles têm um papel imprescindível na formação das palavras.) Iterando este L-sistema obtemos a sequência de curvas descritas na figura 2, que são aproximações da curva de Hilbert.

Temos vindo a descrever a forma mais simples de um L-sistema. Versões mais sofisticadas (onde existe uma *dependência do contexto*) admitem regras que se modificam consoante o contexto em que as letras surgem nas palavras, ao longo das iterações. Por outro lado, a liberdade quase infinita de produzir interpretações de L-sistemas, confere a estas estruturas uma enorme potencialidade para gerar objectos gráficos abstractos. Objectos, como os que descrevemos aqui, podem ser mais interessantes do ponto de vista matemático (embora a versão tridimensional da curva de Hilbert [figura 3] possua um valor estético inegável), mas noutros casos, como o da capa do número anterior da EeM, as imagens geradas são esteticamente muito interessantes.

Recursão—um «pincel» matemático

A recursão é um processo fundamental na descrição de objectos matemáticos. Paralelamente pode ser explorado de modo a produzir imagens fascinantes. Não vamos aqui abordar o conceito de forma metódica e rigorosa. Basta-nos a

Figura 3. Representação artística de uma iteração da versão tridimensional da curva de Hilbert



noção de que iterar uma função f num ponto x (um caso particular de recursão), corresponde a construir a sequência infinita: $\langle x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots \rangle$. Para simplificar a notação, introduzimos a seguinte definição

$$f^{0}(x) = x, f^{1}(x) = f(x), f^{2}(x) = f(f(x)), f^{3}(x) = f(f(f(x))), \ldots$$

à luz da qual iterar uma função num ponto corresponde a formar a sequência (infinita),

$$\langle f^{0}(x), f^{1}(x), f^{2}(x), f^{3}(x), \ldots \rangle.$$

(Se notarmos que as regras produtivas de um L-sistema, determinam uma função que transforma palavras em palavras, facilmente nos convencemos que a iteração de um L-sistema não é mais que a iteração de uma função na palavra que corresponde ao axioma desse mesmo L-sistema.)

Precisamente, utilizando este conceito, podemos descrever imagens especialmente interessantes, impossíveis de obter por outros processos.

O corpo dos números complexos (denotado por $\mathbb{C}$) é uma extensão do corpo dos números reais. A multiplicação e adição complexas são uma extensão das suas congéneres reais e, os números complexos podem representar-se na forma $\alpha + \beta i$, onde α, β são números reais e i é um novo objecto (denominado *unidade imaginária*) cuja principal propriedade é descrita pela igualdade $i^2 = -1$.

A representação dos números complexos que mencionámos antes permite-nos identificar cada número complexo $\alpha + \beta i$ com o ponto do plano de coordenadas (α, β), facto este que pode ser explorado para definir imagens no plano. Isso mesmo foi feito por Benoît Mandelbrot ao produzir a primeira visualização de um objecto fractal. Para que possamos descrever esse objecto temos que considerar os polinómios de coeficientes complexos da forma $p_c(z) = z^2 + c$ (onde $c \in \mathbb{C}$). Quando iteramos estes polinómios no ponto $z = 0$, obtemos a sequência infinita:

$$\langle p_c^0(0), p_c^1(0), p_c^2(0), p_c^3(0), \ldots \rangle = \langle 0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \ldots \rangle.$$

A cada número complexo $c = x + yi$ pode associar-se um número real que se designa o seu *módulo*, que se denota por $|z|$ e que se calcula através da seguinte definição: $|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Quando iteramos um polinómio $p_c(z)$ em $z = 0$, duas coisas podem acontecer: (1) ou existe um número positivo k tal que para qualquer n se tem $|p_c^n(0)| < k$ ou; (2) $|p_c^n(0)| \to \infty$, ou seja, as iteradas possuem módulos arbitrariamente grandes. Pode demonstrar-se que a condição (1) pode ser substituída por uma mais favorável: (1') para qualquer n tem-se $|p_c^n(0)| < 2$.

Figura 4 Conjunto de Mandelbrot

A figura 4 é resultado da visualização deste processo. Obtém-se da seguinte forma: depois de fixarmos um limite para o número de iterações, digamos k iterações, os pontos do plano que correspondem a números complexos $c \in \mathbb{C}$ para os quais se tem $|p_c^k(0)| < 2$ são coloridos com uma cor, e os que não verificam esta propriedade são coloridos com outra cor.

A figura é assim uma aproximação de um subconjunto do plano conhecido como *conjunto de Mandelbrot*. São muito conhecidas variações mais coloridas deste objecto onde, as cores adicionais são atribuídas em função de uma noção designada por *velocidade de divergência* que, grosso modo, é uma medida de quão rápido $|p_c^n(0)|$ tende para infinito.

As características de auto-semelhança do conjunto de Mandelbrot tornam-no num objecto esteticamente atraente. Mas, pode fazer-se melhor, e a figura 5 mostra uma variação tridimensional do conjunto de Mandelbrot, cujo valor estético nos escusamos a comentar.

Mas, como generalizar o modo como se obteve o conjunto de Mandelbrot ao espaço? Poderíamos pensar em re-

Figura 5

produzir todo o processo, passando do corpo $\mathbb{C}$ (que também é uma *álgebra normada de dimensão 2 sobre* $\mathbb{R}$) para um corpo $\mathbb{K}$ que, enquanto álgebra normada sobre $\mathbb{R}$ fosse desta vez de dimensão 3, fornecendo-nos assim informação acerca de pontos do espaço. Acontece que não existem muitos tipos de álgebras normadas sobre $\mathbb{R}$. Efectivamente, um resultado de Hurwitz estabelece que as possíveis dimensões de tais álgebras são 1, 2, 4 e 8. As duas primeiras dimensões correspondem a $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$: os corpos dos números reais e dos números complexos. As estruturas que correspondem às dimensões 4 e 8 são constituídas por números hipercomplexos e correspondem aos quaterniões ($\mathbb{H}$) e aos octoniões ($\mathbb{O}$). Temos: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$, mas, na passagem de $\mathbb{C}$ para $\mathbb{H}$ a multiplicação deixa de ser comutativa e, na passagem de $\mathbb{H}$ para $\mathbb{O}$ deixa de ser associativa.

Os quaterniões podem representar-se como expressões formais do tipo $a + bi + cj + dk$ onde os a, b, c, d são números reais e i, j, k são unidades hiper-imaginárias. A adição de quaterniões é a generalização óbvia da adição de números complexos. No caso da multiplicação o procedimento é semelhante ao caso complexo, uma vez que conheçamos o modo como operar as unidades hiper-complexas, algo que se descreve na tabela seguinte que contém as famosas *igualdades de Hamilton*.

$$\begin{array}{lll} ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Tal como os complexos se podem identificar com pontos do plano, os quaterniões podem identificar-se com pontos do hiper-espaço de dimensão 4. Por outro lado, a álgebra subjacente a esta estrutura permite que se considerem polinómios sobre os quaterniões, em particular que se considerem polinómios do tipo $p_c(w) = w^2 + c$ (onde $c \in \mathbb{H}$) que, são precisamente os polinómios do tipo considerado na definição original do conjunto de Mandelbrot. Isso permite-nos definir uma versão a quatro dimensões do conjunto de Mandelbrot considerando os pontos $c \in \mathbb{H}$ para os quais existe $k > 0$ de modo que $|p_c^n(0)| < k$ para todos os possíveis $n \in \mathbb{N}$. (O módulo de um quaternião é definido através de

$$|a + bi + cj + dk| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.)$$

Esta construção, no entanto, gera um hiper-volume. A respectiva visualização só é possível através de fatias tridimen-

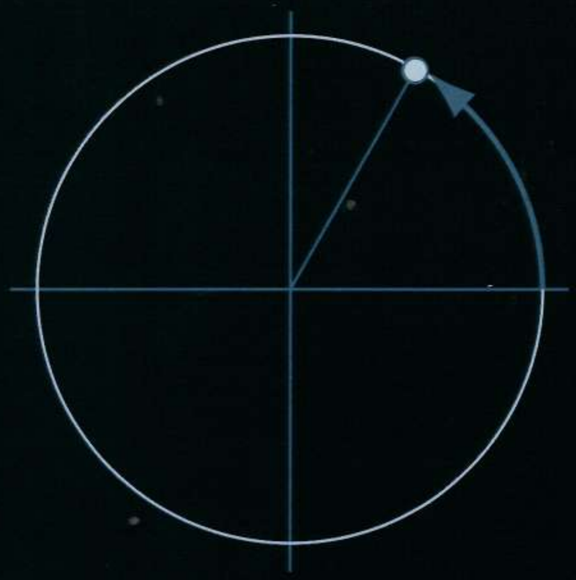


Figura 6A Um número complexo representado no plano de Argand

Figura 6B Potências de um número complexo

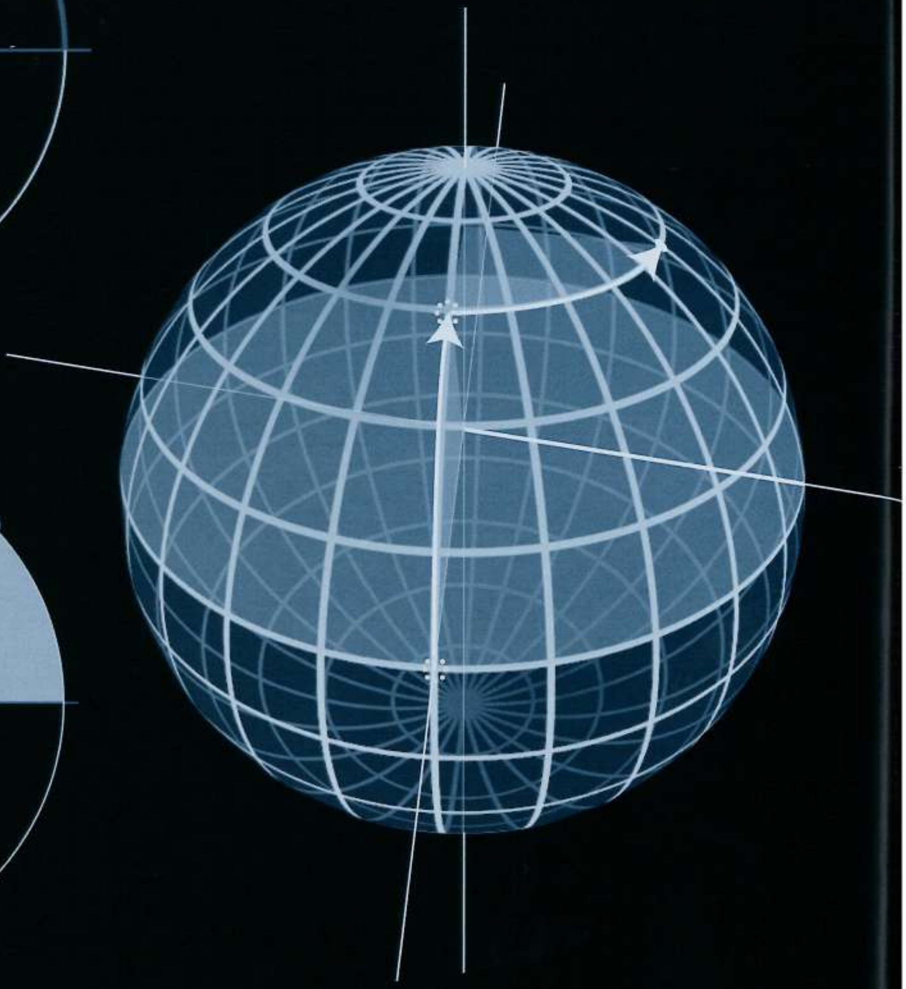


Figura 7

sionais desse objecto. A figura 5, mostra uma dessas fatias, para uma versão *quaterniónica* do *conjunto de Julia*.

Mas o que dizer de uma versão genuinamente tridimensional (não obtida por via indirecta) do conjunto de Mandelbrot? O facto não podermos impor sobre $\mathbb{R}^3$ uma estrutura algébrica «semelhante» a $\mathbb{C}$ não é razão para desistir imediatamente. Em $\mathbb{R}^3$ existe uma estrutura aditiva dada pela usual adição de vectores:

$$(x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c).$$

Existe igualmente uma *norma*, definida por

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A estrutura aditiva e normada dos complexos pode ser «embebida» na estrutura aditiva e normada de $\mathbb{R}^3$ usando a «identificação» $z = x + yi \overset{f}{\mapsto} (x, y, 0)$ que possui as propriedades seguintes:

$f(z_1 +_{\mathbb{C}} z_2) = f(z_1) +_{\mathbb{R}^3} f(z_2).;$

$\|f(z)\| = |z|.$

O problema envolve a multiplicação.

Sem multiplicação, não podemos calcular quadrados e, sem isso, os polinómios $p_c(z) = z^2 + c$ são inúteis neste contexto. Mas isto, em si mesmo, não constitui obstáculo para um matemático. Porque não interpretar «quadrado de …» de forma conveniente, usando uma função $\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ considerando, desta forma, os «polinómios» $p_c(z) = \theta(z) + c$? Matematicamente não há nada de errado com esta opção, mas se θ for uma translacção, i.e., do tipo $\theta(z) = z + k$ então, a iteração de $p_c(z)$ no ponto $0 = (0, 0, 0)$ resulta na sequência

$$\langle 0, k + c, 2(k + c), 3(k + c), \dots \rangle$$

que só produz uma iteração limitada se $k = -c$, ou seja, num único caso. Assim a imagem resultante seria um ponto de

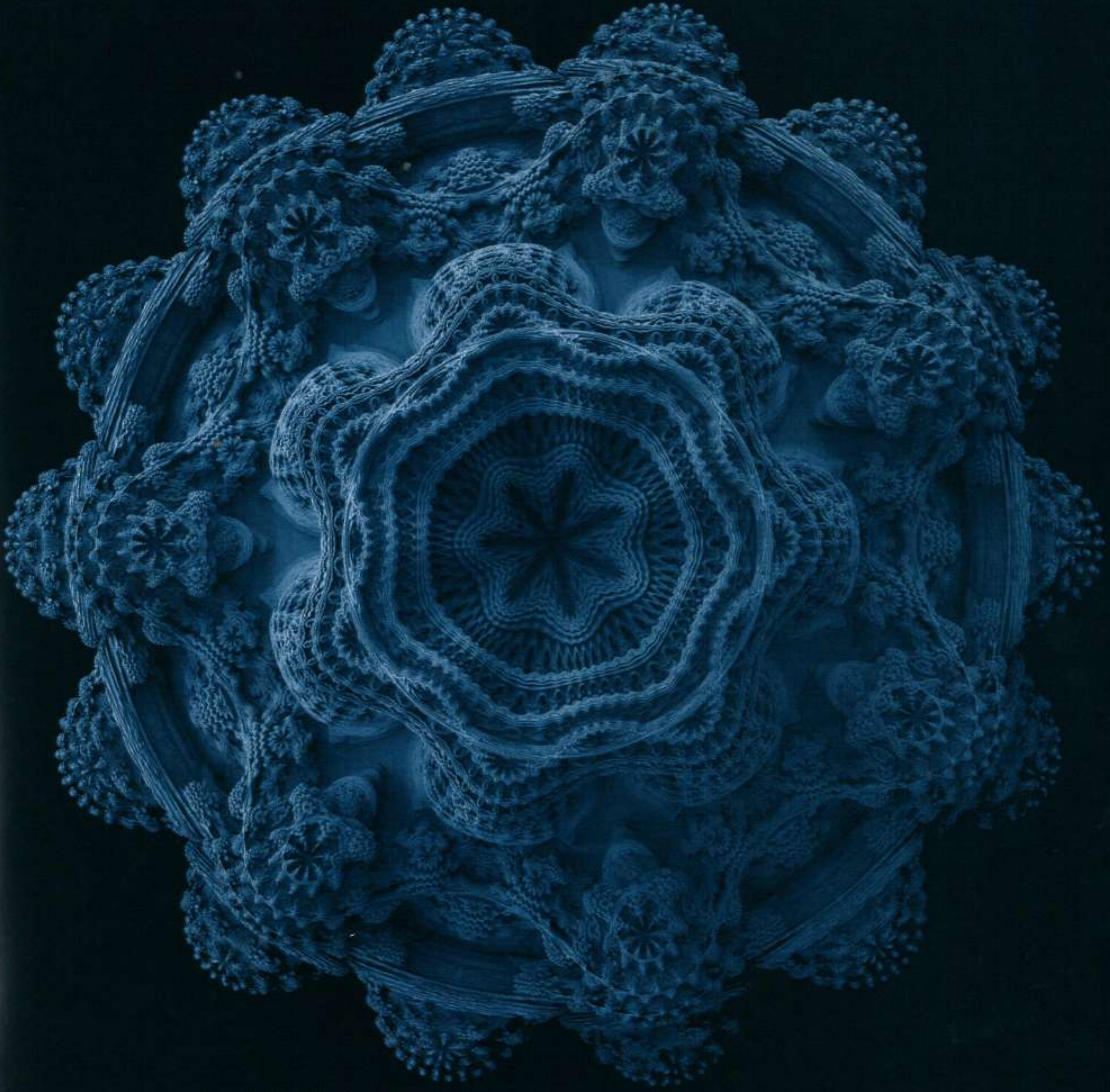


Figura 8 Versão 3D do Conjunto de Mandelbrot

uma cor e o resto do espaço de outra—absolutamente desinteressante! Uma melhor escolha para θ foi feita por Daniel White e Paul Nylander que, conceberam θ de modo a reproduzir em $\mathbb{R}^3$ o «efeito geométrico» da álgebra dos números complexos. Um número complexo $z = x + yi$ pode ser identificado com o ponto (x, y) do plano ($\mathbb{R}^2$). Os pontos do plano podem, por sua vez (com a excepção de $(0, 0)$) ser descritos na forma $(r\,\mathrm{sen}(\alpha), r\cos(\alpha)) = r(\mathrm{sen}(\alpha), \cos(\alpha))$, um facto que está na base da representação trignométrica dos números complexos (figura 6a). O efeito de elevar um complexo z à sua n-ésima potência é o seguinte: se $z = r(\mathrm{sen}(\alpha), \cos(\alpha))$ então $z^n = r^n(\mathrm{sen}(n\alpha), \cos(n\alpha))$ (figura 6b).

Acontece que todo o ponto do espaço possui uma representação trignométrica semelhante a esta. Mais precisamente, todo o ponto do espaço (excepto $(0, 0, 0)$) possui uma representação do tipo $r(\mathrm{sen}(\psi)\cos(\varphi), \mathrm{sen}(\psi)\mathrm{sen}(\varphi), \cos(\psi))$ (onde φ, ψ são como na figura 7.

Estamos finalmente prontos para proceder à generalização anunciada. Muito naturalmente definimos:

$$\theta_n(r(\mathrm{sen}(\psi)\cos(\varphi), \mathrm{sen}(\psi)\mathrm{sen}(\varphi), \cos(\psi))) =$$
$$= r^n(\mathrm{sen}(n\psi)\cos(n\varphi), \mathrm{sen}(n\psi)\mathrm{sen}(n\varphi), \cos(n\psi)).$$

O resultado é surpreendente! (Figura 8.)

Paradoxo e auto-referência

Temos descrito formas de acordo com as quais «arte» pode ser produzida usando conceitos matemáticos. Sabe-se que noções que foram em primeiro lugar exploradas e experimentadas pelos artistas, se tornaram objectos da sistematização matemática: a geometria projectiva é um exemplo extraído (à pressa), entre outros igualmente fundamentais. Talvez menos evidente é o facto de certas noções constituirem tema comum, para a Arte e a Matemática. Mencionaremos dois exemplos: paradoxos e «auto-referência».

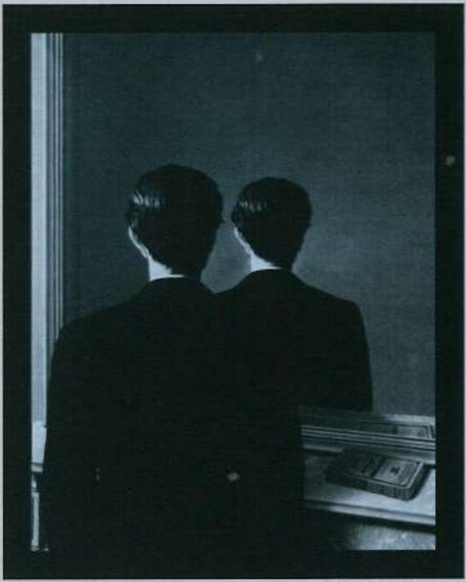


Figura 9. René Magritte — La reproduction interdite, 1937

Figura 10. M. C. Escher — Waterfall, 1961

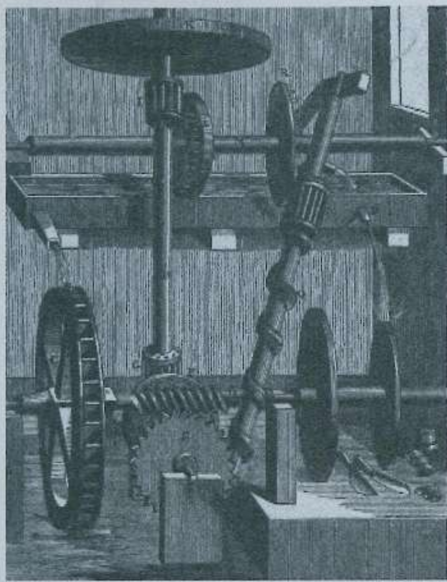


Figura 11. Robert Fludd — Parafuso de Água, 1618

Paradoxos

A Matemática, como é do conhecimento geral existe, enquanto corpo do conhecimento, na mesma medida em que consegue evitar o paradoxo. Isto significa apenas que o *corpus mathematicum* deve ser livre de paradoxos, mas não significa que a respectiva *praxis* possa viver livre dele. De facto a histótria revela que os grandes avanços da Matemática se deram a partir de conceitos aparentemente paradoxais, ou mesmo paradoxais quando formulados de forma ingénua.

A Matemática actual encontra-se fundada na noção de *conjunto*. Com isto deve entender-se que qualquer noção matemática, por mais elaborada e abstracta que seja pode, em última instância, ser descrita à custa da noção de conjunto. Georg Cantor, o fundador da teoria de conuntos definiu a noção de conjuntos de tal modo que seria sempre concebível, como conjunto, a colecção de todos os objectos que possuissem uma dada «propriedade»: o conjunto dos portugueses que não gostam de pagar impostos, por exemplo. Esta concepção, aparentemente «inofensiva» é, apesar de tudo, paradoxal. Esta natureza exibe-se através do famoso *Paradoxo de Russell*. Considerando o conjunto A de todos os conjuntos que não são elementos de si próprios temos, por um lado que, se A é elemento de A então, uma vez que possui a propriedade de não ser elemento de si próprio, resulta que A não é êlemento de A. Por outro lado, se A não é elemento de A então, tendo em conta a propriedade que define os elementos de A, resulta imediatamente que A é elemento de A. Acabámos de verificar que A é elemento de A se e só se A não é elemento de A (uma situação evidentemente paradoxal). Dos esforços para contornar este paradoxo surgiu uma das mais (senão a mais) pujante das teorias matemáticas.

Esta «vitalidade» inerente à noção de paradoxo não escapou aos artistas. Apresentamos aqui dois exemplos, um de René Magritte (figura 9), outro de M. C. Escher (figura 10). O exemplo da autoria de Escher recorre a uma ilusão de perspectiva de modo a descrever uma espécie de «movimento perpétuo». Nesse sentido, é de certa forma semelhante ao «Parafuso de água» descrito por Robert Fludd em 1618 (figura 11). Na gravura surge um mecanismo que supostamente deveria assegurar um tipo de movimento perpétuo. Este género de acção viola as leis da Termodinâmica sendo também ele paradoxal, à luz da Física estabelecida.

Auto-referência

Um segundo «tema» comum à Matemática e à Arte é a «auto-referência». No que respeita à primeira, os exemplos mais paradigmáticos serão constituídos pelos famosos teoremas da incompletude de Gödel. No caso da Arte, apesar de muitos exemplos se poderem aqui descrever a exploração dessa noção (com exemplos particularmente interessantes no caso da Música), no contexto deste artigo apresentamos dois deles da autoria dos «suspeitos» do costume: Escher e Magritte. No caso do «cachimbo de Magritte» (figura 12) o tema é a separação entre a *referência* e o *referente*. Já na obra de Escher o quadro exposto na galeria contém a propria realidade envolvente de que, por outro lado, ele próprio é parte (figura 13).

A auto-referência ocorre quando, numa linguagem (natural ou formal), uma sentença se refere a si própria. Num sentido mais lato quando um predicado se aplica a si próprio (no caso da língua natural, quando um adjectivo se aplica a si próprio: um adjectivo *autológico*). (Por exemplo «comum» é ele próprio um predicado comum.)

Não é incomum ver associadas as noções de «auto-referência» e «paradoxo»: o denominado *Paradoxo de Grelling–Nelson* é obtido através da noção de «adjectivo autológico». (A situação apresenta notáveis semelhanças com o paradoxo de Russel, a que nos referimos anteriormente.)

Em rigor, o paradoxo obtém-se considerando a noção oposta: um adjectivo é *heterológico* se não for autológico. Deixamos ao cuidado do leitor verificar que «‹heterológico› é heterológico» se e só se «‹heterológico› é autológico» (uma contradição). (O paradoxo de Russel será certamente uma boa inspiração ...)

Figura 12. René Magritte — Ceci n'est pas une pipe. 1968

Figura 13. M. C. Escher — Print Gallery. 1956

Mas, existem utilizações mais construtivas desta noção, tal como foi demonstrado pelos resultados de Kurt Gödel. De forma um tanto ou quanto simplista o «primeiro teorema da incompletude» estabelece a existência de «verdades» que não podem ser demonstradas. Não sendo este o lugar para expor estes resultados fundamentais em detalhe é possível, ainda assim, exibir a sua essência através de um «puzzle gödeliano» (descrito originalmente por Raimond Smullyan).

Consideremos uma máquina $\mathfrak{M}$ que, ao executar um certo tipo de programação, produz uma lista de palavras (sequências finitas) usando símbolos do alfabeto $\neg, I, N,$ (e). A máquina trabalha indefinidamente pelo que (potencialmente) produz uma lista infinita de palavras $\langle W_0, W_1, W_2, \dots W_n, \dots\rangle$ (onde $n \in \mathbb{N}$). Diremos que uma palavra W é imprimível se, mais tarde ou mais cedo surge na lista produzida pela máquina, ou seja, se para certo $n \in \mathbb{N}$ se tem $W = W_n$. Neste caso escrevemos $\vdash W$. (Se W não for imprimível escrevemos $\nvdash W$.)

Introduzimos agora um tipo «especial» de palavras: as *sentenças*. As sentenças são palavras dos tipos que se descrevem a seguir: $I(W)$, $\neg I(W)$, $PN(W)$ e $\neg PN(W)$, onde W é uma palavra arbitrária. O que é interessante é que o funcionamento da máquina $\mathfrak{M}$, fornece uma forma de atribuir um valor de verdade a cada sentença: interpretando os símbolos «$\neg$», «I», «N» como sendo «não», «imprimível» e «norma de...», respectivamente, onde a norma de uma palavra W é a expressão $W(W)$. (Os símbolos «(» e «)» não possuem nenhuma interpretação especial funcionam como os usuais parêntesis, destinando-se apenas a facilitar a leitura.)

À luz desta interpretação, todas as sentenças podem ser consideradas verdadeiras ou falsas. Escrevemos $\models S$ para indicar que a sentença S é verdadeira e $\not\models S$ para indicar que é falsa, onde: (1) $\models I(W)$ se e só se a palavra W é imprimível; (2) $\models \neg I(W)$ se e só se a palavra W não é imprimível; (3) $\models IN(W)$ se e só se a norma de W, ou seja, a palavra $W(W)$ é imprimível e, finalmente; (4) $\models \neg IN(W)$ se e só se a norma de W não é imprimível.

Observe-se que as sentenças, à luz desta interpretação, reflectem uma certa auto-referência da própria máquina e, admitindo agora que todas as palavras imprimíveis são verdadeiras, reflecte até uma certa «auto-consciência».

Admitamos então que a nossa máquina $\mathfrak{M}$ é tal que se S é uma sentença imprimível então, é forçosamente verdadeira, i.e., se $\vdash S$ então $\models S$. Coloca-se a questão: será a recíproca necessariamente verdadeira, i.e., sendo S verdadeira será ela imprimível pela máquina?

A resposta é negativa!

Se considerarmos a sentença $S = \neg IN(\neg IN)$ temos duas hipóteses: (1) $\models S$, o que significa que a norma da palavra $\neg IN$ não é imprimível, ou seja, que a palavra $\neg IN(\neg IN)$ não é imprimível. Neste caso ter-se-ia: $\models S$ e $\nvdash S$.

A segunda alternativa é: (2) $\not\models S$, o que significa que a norma de $\neg IN$ é imprimível, ou seja que $\neg IN(\neg IN)$ é imprimível, donde: S é imprimível. Como estamos a admitir que a nossa máquina só imprime palavras verdadeiras, S seria então, ao mesmo tempo, verdadeira e falsa, o que é impossível. Assim, (2) não pode acontecer e, consequentemente, acabámos de exibir *uma sentença verdadeira que não é imprimível.*

Esta é a essência do primeiro teorema da incompletude de Gödel, «bastando» para isso substituir «imprimível» por «demonstrável».

Estes resultados modificaram decisivamente o curso da Matemática e até da Filosofia. Dir-se-á até, sem exagero, que modificaram definitivamente o pensamento humano. Simultaneamente revelam que algo que poderia ser considerado, à primeira vista, como uma idiossincrassia linguística, é afinal uma noção matematicamente significativa (dito de outra forma: «há mais matemática em cada objecto ou conceito que, aquela que é à primeira vista imaginável»).

António Fernandes
Instituto Superior Técnico

A importância do trabalho de projecto para promover a competência matemática dos alunos

Ana Paula Mestre e Susana Carreira

Nota Prévia

Desde há muito que se reconhece a importância de práticas de ensino que tornem os nossos alunos matematicamente competentes e que lhes permitam a mobilização de saberes na sua vida futura. Apesar desta intenção, não tem sido unânime o sentido que se deve atribuir à noção de matematicamente competente. «Ser matematicamente competente na sociedade actual é algo de caracterização complexa mas implica de certeza capacidades e modos de usar pontos de vista matemáticos sobre as situações que não é possível aprender à priori» (Matos, 2005, p. 78).

A ligação da matemática ao real apresenta-se, aos nossos alunos, como algo de pouco palpável. Um olhar mais amplo sobre a realidade, contemplando a inclusão de problemas e «histórias» concretas, permite uma maior identificação dos jovens com a matemática, coloca uma tónica mais apelativa sobre o saber matemático e ajuda à estruturação daquilo a que chamamos de pensamento matemático.

Tendo por base aspectos das vivências dos alunos e apostando na metodologia de trabalho de projecto, desenvolveu-se, no 6.° ano do ensino básico, uma experiência de desenvolvimento curricular denominada «Histórias com a Matemática». O propósito deste trabalho consistiu na concepção de histórias contendo ideias matemáticas, a partir da contribuição dos alunos e com base nas suas experiências, descobertas, conhecimentos e imaginação. Estas histórias foram sustentando e originando a exploração dos conteúdos matemáticos, de uma forma bastante flexível e inter-conectada, uma vez que os conceitos e métodos surgiram ao longo do desenrolar da história, numa perspectiva em que as conexões matemáticas predominaram.

1. O Trabalho de Projecto

Um primeiro ponto a realçar sobre a temática do trabalho de projecto prende-se com o facto de não encontramos uma definição única para o descrever. Diversas formulações são propostas por investigadores e teóricos e, devido à sua complexidade, torna-se particularmente difícil enquadrar esta pedagogia numa teoria ou num movimento específico. Importa, contudo, compreender a sua origem, conceitos-chave, fases, objectivos e características.

A origem do trabalho de projecto

Os embriões da pedagogia do projecto aparecem expressos pelo pensamento pragmático dos norte-americanos, nos anos de 1915 a 1920 — Dewey (1916) e Kilpatrick (1918). Boutinet (1990) menciona que estes pedagogos «procuraram opor à pedagogia tradicional, que se relevava demasiado dispendiosa em relação aos ganhos obtidos, uma pedagogia progressista, ainda denominada de pedagogia aberta, na qual o aluno se tornava actor da sua formação, por intermédio de aprendizagens concretas e significativas para si» (p. 193). Sob este desígnio, Dewey utilizava frequentemente a expressão *learning by doing*. Um pensamento como este é corroborado por defensores da nova educação; refira-se Freinet, Montessori, Decroly, Makarenko que «valorizavam a liberdade da criança, as suas necessidades de actividades, numa palavra, a escola ligada à vida: são experiências que o próprio aluno realiza num meio educativo apropriado que são factores de aprendizagem (Boutinet, 1990, p. 193).

Mas foram as investigações levadas a cabo por William Kilpatrick que vieram a ter uma importância crucial na pedagogia do trabalho de projecto. Este autor procurou sistematizar vários aspectos importantes relativos ao processo de ensino-aprendizagem intrinsecamente ligados ao conceito de «projecto». Identificou três elementos centrais: (i) uma acção, que é passível de se realizar com empenhamento pessoal, (ii) a intencionalidade dessa acção, que pressupõe um objectivo ou propósito, e por último, (iii) a inserção num contexto social.

Kilpatrick foi fortemente criticado por não referir explicitamente nos seus escritos a integração da resolução de problemas no trabalho de projecto, especialmente no contexto educativo americano. Contudo, muitos defendem que a resolução de problemas estará sempre implícita no trabalho de projecto e é indissociável deste. Paulo Abrantes ilustra este pensamento na sua tese de doutoramento, advogando que:

> «O objectivo de um projecto pode ser considerado um problema no sentido em que se está perante uma situação para a qual se pretende encontrar uma resposta sendo necessário desenvolver a estratégia para o fazer. Mesmo quando não está à partida (ainda) formulado como problema, um projecto gera necessariamente problemas que correspondem a questões colocadas no início ou que surgem no desenvolvimento do trabalho» (Abrantes, 1994, p. 79–80).

No entender de Nunes e Ponte (2008), um projecto pode ser dividido em cinco fases. A primeira, denominada de *concepção do projecto*, engloba a formulação de um problema e a definição de objectivos a atingir. Uma segunda fase centra-se na *planificação do trabalho*, pressupõe a definição, distribuição e orientação de tarefas, culminando com a avaliação do trabalho realizado. A terceira fase é de *intervenção ou desenvolvimento*, incluindo momentos de reflexão e discussão com vista à auto-regulação do projecto. O processo de análise deverá ser sistemático, construindo-se e adaptando-se novos materiais, reflectindo-se sobre os obstáculos e sucessos obtidos. A quarta fase refere-se à *finalização e avaliação* dos produtos do projecto. A elaboração de um relatório escrito final com a recolha e análise de dados e os resultados conseguidos é recomendável nesta fase. Por fim, a quinta fase diz respeito à *divulgação e disseminação de resultados*. A divulgação do projecto à comunidade permite que as experiências sejam apropriadas e se tornem num factor de melhoria de acções futuras.

Características fundamentais do trabalho de projecto

Nas palavras de Paulo Abrantes (1994), destacam-se alguns elementos basilares na pedagogia do projecto: *a actividade intencional; a responsabilidade e a autonomia dos alunos; a autenticidade do projecto; a complexidade e as actividades de resolução de problemas; o carácter faseado e prolongado do projecto.*

Todas estas características não devem ser entendidas como únicas e definitivas e, muito menos, como garantias de resultados particulares. Por isso, Paulo Abrantes defendeu o trabalho de projecto «como uma *filosofia* ou uma *perspectiva pedagógica*, tanto mais que o seu valor educativo reside essencialmente no carácter aberto, flexível e contextualizado das situações de aprendizagem» (Abrantes, 1994, p. 85).

2. Relato de uma Experiência

A partir das suas vivências e das suas contribuições autênticas, pretendeu-se conceber com os alunos uma história que permitisse a exploração de conteúdos e conexões matemáticas, envolvendo tarefas experimentais e seguindo uma metodologia de trabalho de projecto. Centrando-se o primeiro capítulo da história no tema de Geometria, exploraram-se áreas, perímetros e sequências e estabeleceram-se diversas conexões matemáticas.

Apresentam-se de seguida algumas das tarefas desenvolvidas na sala de aula, ilustrando-se o trabalho realizado por vários alunos de uma turma.

Uma história

O protagonista da história é um adolescente chamado Henrique. Ao efectuar o percurso de carro até ao centro comercial, Henrique encontra relações entre a Matemática e o meio circundante. Através da janela, observa algo que lhe desperta a atenção — um caniçal. Na escola e nas aulas de Matemática ele andava a estudar as formas cilíndricas. E gostava de brincar com canas. Chegado ao *shopping*, reconhece o tecto revestido com canas, isolamento habitualmente utilizado nos tectos das antigas casas algarvias. Achou que seria interessante cobrir o tecto do seu sótão daquela forma...

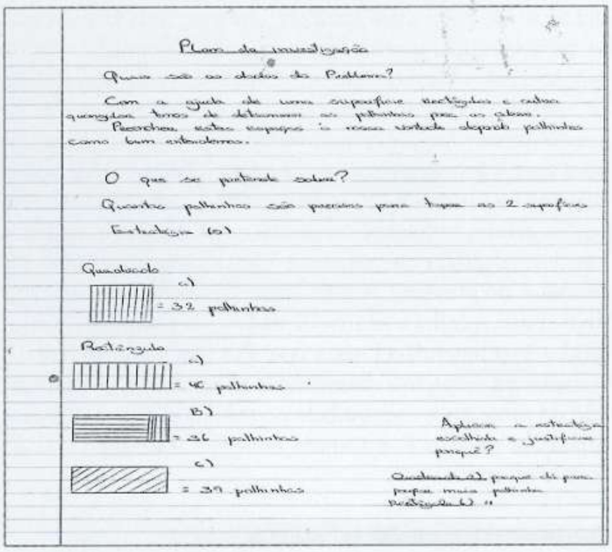


Figura 1. Registo do Grupo A relativo à primeira tarefa

O problema das canas...

Como forma de introduzir a situação na sala de aula utilizou-se um *PowerPoint* com algumas imagens sugestivas de canas, bambus e cilindros presentes no quotidiano de todos nós. A seguir, foi apresentado o ponto de partida para o episódio da ida ao *shopping*.

Os alunos levaram canas para a aula e o tecto do sótão começou por ser o tampo de uma mesa da sala de aula, de forma rectangular. Numa primeira fase, os alunos simularam o preenchimento dessa superfície. A dada altura, a questão evoluiu para preencher a superfície, desperdiçando o mínimo de canas possível.

Em seguida, a turma foi dividida em grupos de trabalho, de quatro a cinco elementos, e colocaram-se duas situações problemáticas. A primeira, de carácter experimental, propunha que, com o auxílio de materiais manipulativos, se efectuassem diversos ensaios de forma a optimizar o preenchimento de uma superfície. Os alunos receberam duas placas de *musgami*, uma rectangular e outra quadrada e um conjunto de 20 palhinhas. As placas simulariam a superfície do tecto e as palhinhas representavam as canas. Embora esta situação fosse semelhante à tratada no grupo-turma dava-se, agora, a possibilidade de todos os alunos efectuarem ensaios com os materiais disponíveis para resolver o problema. A segunda tarefa subsequente apelava ao trabalho com medidas e valores reais e implicava a realização de cálculos. Davam-se as dimensões do tecto do sótão, pedindo-se para encontrarem o menor número de canas possível para forrar a superfície.

Desenvolvimento do pensamento matemático

Muito prontamente, começaram os ensaios de preenchimento. A figura 1 ilustra uma das produções realizadas por um dos grupos de trabalho.

Depois de algum trabalho de experimentação, um dos alunos apresentou uma proposta à turma: «Professora, a superfície quadrangular é fácil de preencher pois as palhinhas têm 20cm de comprimento e a placa é de 20cm por 20cm.»

E acrescentou: «O mais complicado será agora preencher a outra superfície, gastando o mínimo de palhinhas possível.»

A actividade decorreu com a apresentação das diferentes estratégias, o que contribuiu para discutir várias possibilidades de resolução.

Ao fim de algum tempo, um grupo apresentou a sua proposta que consistia na melhor forma de optimização encontrada.

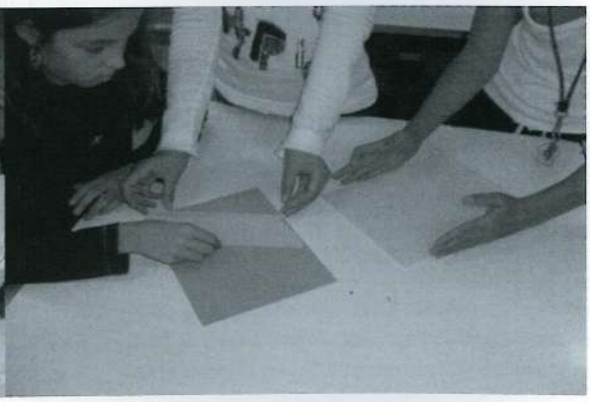
A3: Foi mais complicado, mas depois de algumas tentativas compreendemos... Compreendemos que os bocadinhos das palhinhas....

Professora: Bocadinhos, como assim?

A3: Sim, professora, o comprimento da palhinha é maior do que o comprimento da placa. O comprimento da placa é inferior ao da palhinha. Assim, se cortarmos este bocadinho é possível preencher os restantes espaços com os excessos das palhinhas.

A turma concordou com a exposição deste grupo, constatando que aquela era a maneira mais económica de usar as palhinhas.

Já na segunda tarefa, alguns grupos optaram por seguir um plano de investigação mais minucioso. Mediram uma cana e anotaram as suas medidas. Com os dados, realizaram esquemas e cálculos complementados com explicações.



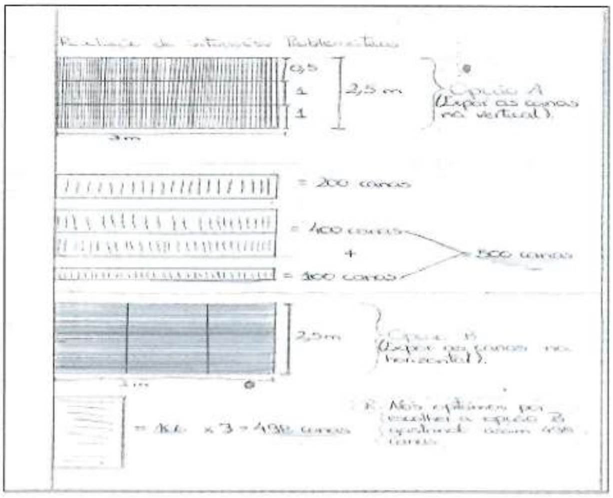


Figura 2. Registo do Grupo B relativo à segunda tarefa

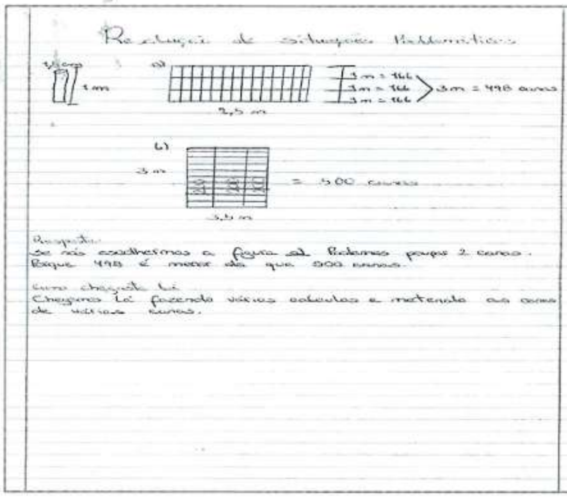


Figura 3. Registo do Grupo C relativo à segunda tarefa

A figura 2 mostra um desses planos de investigação.

O grupo C procurou apresentar o seu plano, exemplificando todos os cálculos efectuados:

C1: Bem, professora.... Nós começámos por desenhar uma cana. (Pega no giz e desenha no quadro uma cana). Depois colocámos as medidas. Tinha de altura 1m e de largura 1,5cm... estão a perceber?

Turma: Sim.

Desenhou no quadro as canas na vertical. Em seguida um colega do grupo predispôs-se a ajudar.

C2: Olhe professora, achámos que com as canas na vertical conseguiríamos colocar duas barras de canas, cada uma contendo 200 canas, e na outra seriam apenas 100 canas. O que, somando tudo, daria um total de 500 canas. Mas, depois, achámos que seria fácil de mais para ficar por aí. Foi então que o [aluno] B1 nos deu uma ideia. Então, achámos que, colocando as canas na horizontal, poderíamos dispor 3 filas de canas completas sem ter que cortá-las ao meio. E, aí... conseguimos fazer filas horizontais de 166, portanto conseguimos fazer três filas com 166 canas cada uma. O que nos deu um total de 498 canas. Comparando a estratégia A com a estratégia B, conseguimos poupar cerca de 2 canas. Não é muito, mas pelos menos são menos do que na situação anterior.

3. Conexões Matemáticas

São actualmente muito veementes as referências às conexões matemáticas no desenvolvimento de capacidades e competências matemáticas.

Segundo o NCTM (2000), «pensar matematicamente envolve a procura de conexões, e o seu estabelecimento cimenta a compreensão e os conhecimentos matemáticos. Se não se estabelecerem conexões, os alunos têm de aprender e memorizar demasiados conceitos e desenvolver capacidades de forma isolada. Através das conexões, poderão alargar a sua compreensão, baseando-se em conhecimentos prévios» (p. 324).

O problema das *canas* foi motivo para diversas extensões, criando oportunidades de ligar conhecimentos geométricos e numéricos, mediante a exploração de regularidades e sequências.

Uma extensão para As Canas: O tecto do Henrique

Henrique decidiu pintar o tecto do seu sótão, tal como se pode ver pela figura acima. Dando-lhe um colorido agradável, pintou as canas com 3 cores diferentes. A sequência de cores obedece à seguinte disposição: 1 de cor azul, 2 de cor vermelha e 3 de verde. Quando termina uma fila de canas, a próxima dá continuidade à sequência, até ao preenchimento de todo o tecto com as 3 cores.

Observa as imagens da sequência de cores utilizadas e responde:

Seguindo a sequência apresentada, ao fim de quantas canas se repetirá a cor verde (azul escuro), a cor vermelha (azul médio) e a cor azul (azul claro)?

Imagina que o Henrique já pintou 50 canas de uma zona do tecto. Qual será a cor da cana número 50, mantendo a sequência escolhida: 1 azul (azul claro), 2 vermelhas (azul médio) e 3 verdes (azul escuro)?

Utilizando as 50 canas e mantendo a mesma sequência de cores, que regularidades podes encontrar? Investiga.

A visualização da imagem permitia que os alunos, de uma forma simples, descobrissem de quantas em quantas canas era necessário repetir as cores verde (azul escuro), vermelha (azul médio) e azul (azul claro). Facilmente constataram que as cores se repetiam da seguinte forma:

- azul (azul claro) — 1, 7, 13, 19, 21, ...

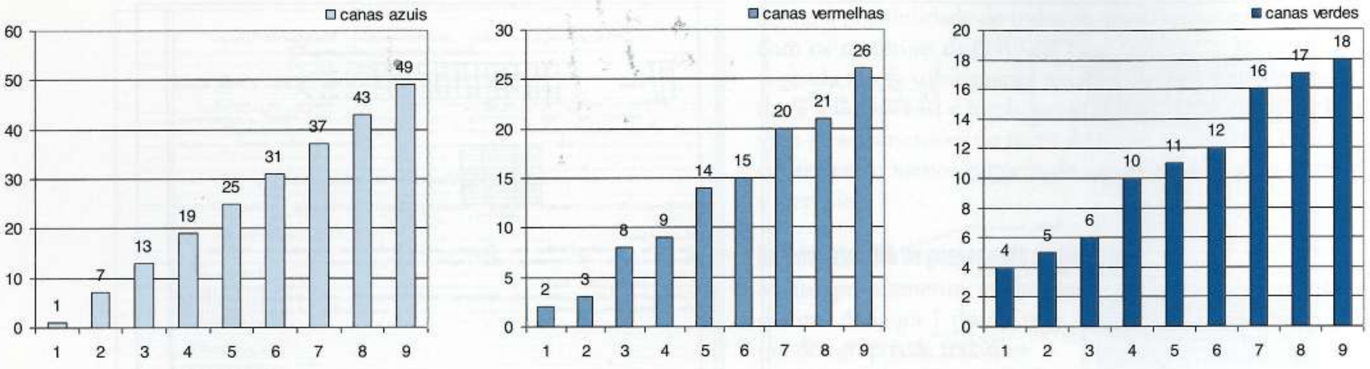


Figura 4. Uma representação das sequências de canas pintadas, utilizando o Excel

- vermelha (azul médio) — 2, 3, 8, 9, 14, 15, 20, 21, ...
- verde (azul escuro) — 4, 5, 6, 10, 11, 12, 16, 17, 18, ...

As três sequências eram suficientemente diferentes para permitirem muitas questões. A situação revelou alguma complexidade quando se tentou descobrir a cor da quinquagésima cana. Observaram-se algumas propriedades interessantes: a sequência verde (azul escuro) é formada por grupos de três números consecutivos, começando no 4 e obtendo-se o grupo seguinte pela adição de 6 unidades ao grupo anterior; a sequência vermelha (azul médio) é formada por grupos de dois números consecutivos, começando no 2 e obtendo-se o grupo seguinte pela adição de 6 unidades ao grupo anterior; a sequência azul (azul claro) começa em 1 e cada um dos seguintes é o resultado de adicionar 6 ao anterior. Portanto, os números, isoladamente ou em «grupos», dão saltos de 6 em 6. Por isso, faz sentido dividir o 50 por 6, isto é, notar que $50 = 6 \times 8 + 2$. Ora isto significa que a 50ª cana vai estar na sequência vermelha (azul médio), que começa no 2. Se, por exemplo, pensássemos na 100ª cana, a sua cor obter-se-ia, dividindo 100 por 6 e olhando para o resto: $100 = 6 \times 16 + 4$. A cana número 100 será de cor verde (azul escuro). E assim por diante (figura 4).

Aproveitando a tarefa da sequência de cores foi possível a exploração de mais regularidades. Eis um dos exemplos apresentados por um aluno (figura 5).

Por ter pensado em várias filas de 10 canas, pelo modo de organização dos dados e pelas descobertas feitas por este aluno, justificou-se plenamente a sua apresentação à turma. Ao explicar o seu processo, deu a conhecer diversas regularidades encontradas.

Este tipo de tarefas, por não serem fechadas e completamente definidas, e por apelarem à experimentação e descoberta, dá aos alunos maior liberdade, contribuindo para que desenvolvam o seu pensamento matemático. Progressivamente, aprendem, por exemplo, a organizar os dados, a estabelecer relações e a encontrar resultados portadores de coerência e relevância matemática.

Segundo os pressupostos em que Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) apoiam a sua perspectiva acerca da Matemática na Educação Básica, «o reconhecimento de regularidades em matemática, a investigação de padrões em sequências numéricas e a generalização através de regras que os próprios alunos podem formular permitem que a aprendizagem da álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstracção. Esta capacidade é essencial no desenvolvimento da competência matemática.» (p. 49).

4. Reflexões Finais

A visão tendencialmente negativa manifestada por muitos alunos no ensino básico é fruto da deficiente compreensão dos conceitos matemáticos, constituindo, não raramente, um bloqueio à aprendizagem. Transpor este bloqueio passará por considerar o ambiente e as experiências de aprendizagem em sala de aula e a sua eventual extensão para além da aula de matemática. O tipo de experiências matemáticas próprias do trabalho de projecto possibilitou um envolvimento significativo dos alunos. Traduziu-se por um aumento da autonomia dos alunos, já que a matemática não se apresentava de forma espartilhada e alinhada com os conteúdos, mas decorria da necessidade de mobilizar aprendizagens novas ou anteriores e era tratada no sentido de promover um espírito crítico e investigativo.

A implementação desta pedagogia de trabalho levou a que os alunos assumissem, com grande responsabilidade, as tarefas propostas e favoreceu o seu crescimento em termos de desenvolvimento de competências matemáticas. Em particular, foi visível a evolução da sua capacidade de produzir pensamento matemático, de analisar o mundo real e de interligá-lo com a matemática. O aumento gradual da competência de resolução de problemas contribuiu para um aumento da auto-confiança dos alunos e para um maior à-vontade ao enfrentarem situações problemáticas novas.

Esta abordagem experimental e realista permite que as conexões matemáticas surjam de uma forma natural e não forçada. A oportunidade de encontrar e aprofundar conexões matemáticas, integrando-as com situações e ideias presentes no quotidiano, permitiu aos alunos perceber que, na realidade envolvente, muito se justifica e descreve por relações e conceitos matemáticos. Entenderam que se podem trabalhar diversos conteúdos e tópicos a partir de uma dada situação e que a sua abordagem não tem de ser feita isoladamente e de forma compartimentada.

	1ª Coluna	2ª Coluna	3ª Coluna	4ª Coluna	5ª Coluna	6ª Coluna	7ª Coluna	8ª Coluna	9ª Coluna	10ª Coluna
1ª Linha	Az	Vm	Vm	Vd	Vd	Vd	Az	Vm	Vm	Vd
2ª Linha	Vd	Vd	Az	Vm	Vm	Vd	Vd	Vd	Az	Vm
3ª Linha	Vm	Vd	Vd	Vd	Az	Vm	Vm	Vd	Vd	Vd
4ª Linha	Az	Vm	Vm	Vd	Vd	Vd	Az	Vm	Vm	Vd
5ª Linha	Vd	Vd	Az	Vm	Vm	Vd	Vd	Vd	Az	Vm

Figura 5. A organização dos dados em tabela por um dos alunos.

Referências

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática — A experiência do Projecto Mat789*. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Colecção Teses. Lisboa: APM.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1991). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação — Departamento de Educação Básica.

Boutinet, J-P. (1990). *Antropologia do projecto*. Lisboa: Instituto Piaget.

Dewey, J. (1916/1966). *Democracy and education*. New York: Macmillan Publishing Company.

Kilpatrick, W. H. (1918). The project method. *Teachers College Record*, Vol. XIX, N.º 4, p. 319–335.

Matos, J. F. (2005). Matemática, educação e desenvolvimento social – questionando mitos que sustentam opções actuais em desenvolvimento curricular em matemática. In L.Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Orgs.), *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas — Encontro Internacional em Homenagem a Paulo Abrantes* (p. 69–81). Lisboa: APM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Nunes, C. & Ponte, J. P. (2008). Os projectos de escola e a sua liderança. In GTI (Org.), *O professor de matemática e os projectos na escola*, (p. 11–37). Lisboa: APM.

Ana Paula Mestre

EBI Prof. Doutor Aníbal Cavaco Silva, Boliqueime

Susana Carreira

Universidade do Algarve e UIDEF, Universidade de Lisboa

Matemática à Espreita: A geometria da mão e a biometria

Existem hoje diversos sistemas de verificação de identidade baseados em aspectos biológicos que são únicos de pessoa para pessoa e razoavelmente permanentes. Um dos mais simples baseia-se na geometria da mão. Um dispositivo óptico faz um scanner da mão do indivíduo e armazena um conjunto de dados obtidos a partir da imagem: ângulos de curvatura acentuada (pontas dos dedos e vales de união das bases dos dedos), comprimento dos dedos, largura dos dedos, largura da palma, são alguns dos múltiplos dados que permitem gerar um biocódigo do indivíduo.

A Matemática tem o seu papel nesta forma de identificação. Em Victoria, na Austrália, estuda-se a hipótese de usar leitores da geometria da mão nas escolas para controlar o acesso à entrada (figura 1).

Medir a mão implica torná-la «geométrica» como se evidencia na figura 2. O comprimento de cada dedo é dado pelo comprimento da mediana do triângulo que é definido pela ponta de um dedo e pelos dois pontos da base (os vales entre os dedos). Por seu turno, a largura é dada pelo valor médio dos segmentos perpendiculares à mediana, compreendidos entre o contorno, medidos desde a base até à ponta do dedo.

Por seu turno, o Desenho também faz da mão um elemento muito importante. Considera-se a mão como uma das partes do corpo humano mais difíceis de desenhar. E a geometria dá uma ajuda.

A palma da mão é um pentágono! (figura 3)

Os dedos são definidos por segmentos de recta que concorrem no ponto médio da base do pentágono e seguem proporções relativamente aceites, repare-se que a linha do polegar une o ponto médio da base do pentágono ao segundo vértice mais próximo e não esqueçamos.

Figura 1. Um leitor da geometria da mão

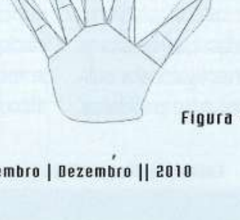


Figura 2

Figura 3

Conexões matemáticas e tecnologias

Introdução

As tecnologias digitais, como os computadores e as calculadoras gráficas, com a sua dinamicidade e interactividade, vieram colocar em evidência as conexões matemáticas, pelas imagens visuais das ideias matemáticas que oferecem e pelas diferentes formas de representação e facilidade de transição entre elas que proporcionam.

O trabalho que relaciona as diferentes janelas gráficas e algébricas num Ambiente de Geometria Dinâmica, a construção e exploração de modelos numa folha de cálculo, a recolha de dados reais através de sensores ou o desafio de resolver um problema com uma linguagem de programação, podem ser pontos de partida para boas discussões com os alunos quando o professor quer evidenciar conexões.

Como é sugerido por algumas orientações curriculares internacionais, «a tecnologia permite ainda esbater algumas das fronteiras artificiais existentes entre os diversos tópicos da álgebra, da geometria e da análise de dados, possibilitando que os alunos utilizem as suas ideias sobre uma determinada área para melhor compreenderem uma outra área da matemática» (NCTM, 2007, p. 28).

Para esta secção convidei cinco professores de Matemática: Elisabete Mariano, Cláudia Lança, João Grácio, Teresa Marques e Sandra Nobre. Todos aceitaram o desafio, contribuindo com artigos que caracterizam diferentes experiências, reflexões e investigações, conduzidas por eles na sala de aula de Matemática, em diferentes níveis de ensino, salientando o papel que diferentes tecnologias digitais têm no desenvolvimento de conexões matemáticas. Como não há espaço nesta revista temática para todos os testemunhos, incluímos apenas dois deles, saindo os restantes na próxima revista. A todos os autores agradeço a colaboração.

Referências

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM. (Trabalho original publicado em 2000).

Apresentação

O artigo que segue é da responsabilidade da Cláudia Lança, professora do 3° ciclo da EB de Santa Clara de Évora, e envolve a recolha de dados reais através de sensores e a sua modelação com o auxílio da calculadora gráfica, com vista ao estudo da função de proporcionalidade inversa numa turma do 9° ano.

Os alunos são envolvidos em várias tarefas que passam pela recolha de dados reais através de sensores ligados a calculadoras gráficas, procurando que desenvolvam modelos matemáticos e os comparem com a realidade, permitindo estabelecer conexões e usar a matemática para interpretar e melhorar a compreensão sobre os fenómenos.

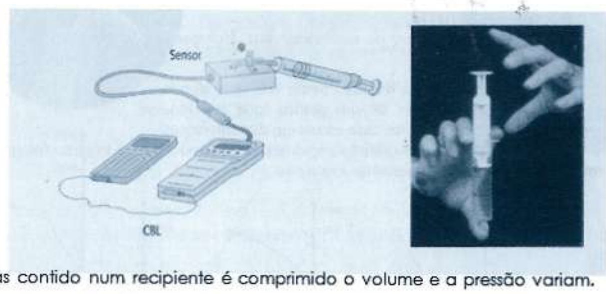
Descrição da experiência

Este artigo reporta-se a um trabalho de investigação desenvolvido no âmbito do mestrado em Educação Matemática, na Universidade de Évora. Foi realizado um estudo de caso tomando como protagonistas um grupo de quatro alunos de 9° ano de escolaridade de uma turma de uma escola do Alentejo, sujeitos a uma intervenção didáctica preparada com o professor da turma. Esta intervenção consistia numa sequência de tarefas de modelação («Pilhas em série», «Sob Pressão», «Até onde vemos?», «Descida de carrinhos pela rampa», «Espelhos e reflexões», e «Uma luz à distância») vocacionada para fazer emergir a função de proporcionalidade inversa como um modelo matemático necessário e poderoso. As tarefas foram variadas e corresponderam a autênticas situações reais. Neste texto é dado destaque a uma das questões do estudo — *Como é que a tecnologia, calculadoras gráficas e sensores, contribui para o desenvolvimento da actividade de modelação matemática pelos alunos?* — e discute-se o papel e as potencialidades dos sensores, interligadas com as da calculadora gráfica, na intervenção didáctica realizada. Em particular, apresentam-se os resultados do estudo que sugerem que os sensores proporcionaram uma estreita conexão entre o modelo matemático e o modelo real e a calculadora permitiu que os modelos fossem tratados como objectos concreto-abstractos, influenciando de forma determinante o desenvolvimento da actividade dos alunos.

Alguns dos objectivos da proposta pedagógica que evidenciam conexões matemáticas foram os de levar os alunos, nomeadamente, a: usarem dados e explorar que tipos de funções melhor se ajustam ou modelam esses dados; representarem relações funcionais de vários modos e passar de uns para outros; efectuarem uma interacção dinâmica entre o modelo e a situação real; e interpretarem, compreenderem e reconhecerem utilidade na relação entre a Matemática e a realidade.

Neste estudo, a actividade de modelação foi indissociável da tecnologia. A calculadora gráfica permitiu aos alunos verem, identificarem e explorarem, em grupo: as relações numéricas existentes entre os valores de uma variável e/ou de duas variáveis; as relações entre os dados recolhidos através das várias listas construídas (do produto, quociente, da média, etc.); as várias e distintas representações de uma relação funcional entre duas variáveis; os vários tipos de gráficos gerados por diferentes realidades; e construírem, interpretarem, explorarem, aperfeiçoarem e ajustarem os modelos matemáticos propostos, através da manipulação e interpretação grá-

"Sob Pressão"



Situação:

Quando um gás contido num recipiente é comprimido o volume e a pressão variam. Se exerceres pressão sobre o êmbolo de uma seringa tapando o orifício com o dedo de modo a não deixar sair o ar, aumentas a pressão (em atmosferas – atm). Então e o volume (em cm³) contido na seringa dependerá dessa pressão exercida? O que acontece ao volume à medida que a pressão aumenta?

Figura 1

Pressão p (em atm)	0,9?	1,04	1,11	1,2?	1,25	1,3?	1,4?	1,5?	1,7?	1,8?	2,1	2,3?
Volume v (em cm³)	[illegible]	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
$p \times v$	17,8?	17,6?	17,7?	17,7?	17,5	17,?	17,5?	17,2	17,1	16,9?	16,8	16,1?

Figura 2

Distância da fonte luminosa aos sensores **d** (m) L6	0,5	0,6???	0,8029	0,956 16	1,1792	1,93 81	1,655 4
Intensidade da luz **i** (w.sr⁻¹) L2		0,96???	0,60???	0,44 52	0,33055	0,200 35	0,176 06
		0,59 65	0,487	0,42 573	0,389 79	0,28 227	0,29 145

Figura 3

fica destes com a situação real modelada, a fim de validarem o melhor. Além disso, teve um papel fundamental na construção de várias e distintas representações matemáticas de uma mesma realidade e de uma mesma função modeladora dessa realidade, e desenvolveu a capacidade de os alunos passarem de umas representações para outras. Os alunos efectuaram bastantes traduções entre a tabela e o gráfico da situação real e entre o gráfico e a expressão algébrica da função modeladora. A calculadora gráfica ajudou os alunos a confrontar o gráfico da função modeladora com o da situação real, e a dar um contexto a cada gráfico de cada função modeladora. Em vez de os gráficos serem encarados, pelos alunos, como uma «linha» passaram a estar interligados com fenómenos reais que rodeiam o quotidiano do aluno.

No estudo realizado, a calculadora gráfica serviu de suporte para que os alunos conseguissem, de uma forma mais simples, «visualizar» o comportamento do fenómeno real, formular conjecturas sobre os dados recolhidos, validar raciocínios e resultados, argumentar as constantes interacções entre os modelos e as suas respectivas situações reais modeladas, e experimentar os modelos matemáticos ao nível concreto, ou seja, permitir que aqueles objectos abstractos — por serem representações de relações entre variáveis — possam ser manipulados directamente.

Já no que diz respeito aos sensores, nesta investigação foram usados para medirem com grande precisão, de forma directa, as grandezas em estudo, possibilitando o estudo de situações inacessíveis de outro modo. Recolheram com grande precisão de forma organizada os dados da situação real e introduziram-nos nas listas da calculadora gráfica. Note-se que os sensores conseguem efectuar a recolha de dados com grande precisão, uma vez que os erros que cometem ao efectuarem as medições são ínfimos.

No estudo realizado, de um modo geral, nas tarefas com recurso a sensores, tanto na situação de proporcionalidade directa (tarefa das «Pilhas em série»), como nas situações de proporcionalidade inversa (tarefas «Sob pressão» e «Uma luz à distância», figura 1), os valores calculados das respectivas constantes de proporcionalidade eram muito precisos. No primeiro caso, os resultados da divisão dos valores da variável dependente pelos valores da variável independente eram idênticos ao valor 1,6, na unidade e primeira casa decimal, só se distinguindo a partir das centésimas, enquanto no segundo caso, os resultados dos produtos entre os valores das variáveis alternavam, aumentando e diminuindo, de forma muito próxima à volta de um determinado valor, respectivamente de 17 (figura 2) e de 0,41 (figura 3), ou seja na primeira tarefa só se diferenciavam pelas casas decimais e na segunda, a partir das milésimas.

Pelo rigor da recolha, os sensores, como instrumentos de modelação, ao terem permitido que os dados recolhidos de cada situação real se aproximassem bastante dos valores do *mundo real*, contribuíram de forma decisiva para que os alunos fizessem uma interpretação mais correcta, fácil e rápida da situação real em estudo. É de salientar, por exemplo, o facto de que a utilização dos dados recolhidos pelos sensores, ao ter proporcionado um menor desvio das constantes associadas aos modelos, levou a que os alunos se sentissem mais seguros a construir um modelo matemático e a desenvolverem a sua actividade de modelação.

A análise empírica dos dados obtidos neste estudo parece reforçar a ideia de que os sensores influenciaram o desenvolvimento da actividade de modelação dos alunos, uma vez que ao filtrarem com grande precisão as informações da realidade, permitem uma conexão mais estreita entre o modelo matemático, idealizado pelos alunos para a representação da situação real, e o modelo real, simplificado para sala de aula.

Referência

Lança, C. (2007). *Potencialidades das tarefas de modelação matemática com recurso a calculadoras gráficas e sensores na aprendizagem matemática dos alunos* (Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação e na Especialidade de Educação Matemática, Universidade de Évora).

Apresentação

A Teresa Marques, professora de Matemática do 2° ciclo, na EB 2,3 de Azeitão, enviou-nos este artigo que integra três pequenas histórias de aprendizagem da Matemática com alunos do 5° ano, quando trabalham em projectos que visam a resolução de problemas, com a linguagem de programação *Scratch*[1].

Os alunos do 5° ano, perante uma ferramenta que permite criar projectos animados — o *Scratch*, dão largas à sua imaginação e põem em acção um currículo que vai para além do estabelecido e que se traduz inicialmente por aprendizagens informais. A professora envolve-os em desafios e é simultaneamente desafiada, alimenta e orienta a discussão sobre temas e conteúdos que surgem, entre a experimentação e o erro, dá atenção aos processos e constitui o elemento mediador que ajuda a estabelecer as conexões facilitadoras da compreensão.

Descrição da experiência

O trabalho de investigação e aperfeiçoamento das linguagens e ambientes de programação para jovens, desenvolvido no Massachusetts Institute of Technology, produziu a ferramenta Scratch inspirada nas linguagens LOGO e Squeak (Etoys), mas pretendendo ser diferente de outros ambientes: mais simples, ambiente gráfico, mais fácil de utilizar e mais intuitivo. Possibilita a criação de histórias interactivas, animações, jogos, músicas e a partilha dessas criações na Internet. Foi concebido com a intenção de ajudar os jovens (desde os oito anos, ou menos desde que com mediação apropriada) a desenvolver competências de aprendizagem para o século XXI (destacando-se a competência transversal de resolução de problemas). Os seus criadores acreditam que, com o *Scratch*, podem aprender-se noções matemáticas e informáticas importantes, aprofundando simultaneamente o conhecimento e a compreensão do processo de concepção/criação (*design*) e despertando a sensibilidade crítica para os vários tipos de *media* que nos rodeiam.

Quando em 2007 iniciei o trabalho com alunos (na sala de aula e no *Clube Scratch time*) usando esta ferramenta (em combinação com outras), estava longe de ter compreendido todo o seu potencial. De surpresa em surpresa, os acontecimentos imprevistos foram-se/vão-se sucedendo. As histórias em que o Scratch foi catalizador de reacções e conexões importantes, sempre ligado à acção do Professor, são tantas que não é fácil seleccionar os momentos mais significativos. Seguem-se, pois, apenas algumas Histórias de Conexões e Reacções catalizadas pelo *Scratch* e pelo Professor (HCRSP). Muito ficará de fora … para ser contado um dia!

HCRSP 1. Ainda mal havíamos começado a trabalhar com o Scratch e eu balbuciado umas coisas sobre um certo *x* e *y* que permitiam conhecer a posição dos objectos programáveis no ecrã e colocá-los onde desejássemos, o Fábio — 5.° ano, 9 anos — apareceu com um projecto feito em casa (o primeiro da turma) em que combinou a Geometria — Sólidos (unidade em que estávamos a trabalhar), a utilização do referencial cartesiano e… o som da sua voz! Eu nem havia ainda percebido que se podia gravar directamente a voz no Scratch e incluir esses elementos (ou outros) nos projectos. Na aula de Matemática, a turma entusiasmada… o Fábio explicando aos colegas tudo o que tinha feito, eu calada a beber com eles e a adivinhar o que estaria para vir com um começo daqueles… http://kids.sapo.pt/scratch/projects/bocas/164 .

HCRSP 2a. *E que tal fazermos um projecto com aquele problema do Caracol que sobe de dia e desce de noite? Se fizerem em Scratch o «filme» da história, conseguem chegar à solução…* Não podia prever o que se seguiu. E só ficarão aqui registados dois momentos. A Sara (5.° ano, 10 anos) produziu um bloco longo de programação que dava erro. Já desesperava quando a fui ajudar: *Sara, parte o bloco em porções mais pequenas… é o que devemos fazer com os problemas, e vai analisando cada segmento tentando descobrir em que local está o erro.* Rapidamente encontrou um erro nos valores usados e corrigiu-o. Uns meses mais tarde, durante a realização de uma prova global (a Sara era uma aluna com algumas dificuldades), exclamou em voz alta: *Oh professora! Estava aqui aflita mas vou usar uma coisa que aprendi no Scratch!* Mais tarde quis saber do que se tratava. *A professora disse para dividir o problema do Scratch porque havia aqui um erro… aquilo do caracol… e eu dividi o problema... lembrei-me de dividir também o problema da área da sala do capítulo que estava no teste… E eu separei, dividi o rectângulo, depois dividi o quadradinho, dividi não, calculei a área de cada um e depois juntei as duas áreas e deu logo a área certa!*

HCRSP 2b. Ainda às voltas com o problema do Caracol, ao olhar para a marcação das linhas no muro (simbolizando os passos) percebi que as distâncias não eram idênticas e perguntei à Bia e à Inês (5.° ano) como haviam feito. *Com centímetros!… Centímetros? Sim, usámos a régua em cima do ecrã! Hummmmmm… e que tal pensar numa forma correcta de proceder que garanta realmente o mesmo valor para as distâncias?*

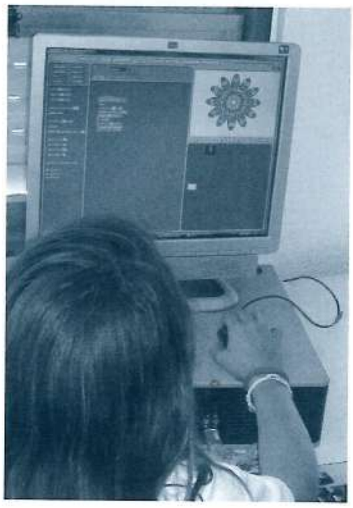


Figura 1

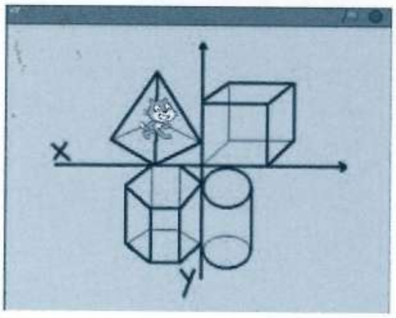


Figura 3

Desafiei-as a encontrar uma forma de corrigir a situação...

Mas como?... Digam-me lá, ao longo de que eixo é que se distribuem as vossas linhas de marcação? Do y.... E o y não tem valores marcados sobre ele tal como uma régua?... Ah! Pois tem. ... Então pensem. Se aqui, por exemplo, forem −240 e tiverem de subir 40 passos para a linha ficar a essa distância da primeira, para onde a enviam?... Fica no −280, professora?... Olhem novamente para o eixo ... (uma delas foi buscar ao caderno, sem eu pedir, a ficha de trabalho sobre referencial cartesiano)... *aqui é zero, e aqui?* (fui descendo) *Ah, é −1. E aqui? −2. Então, quando descemos acontece o quê?* Lá perceberam (sem eu referir o termo valor absoluto) que o número aumentava o valor, embora fosse cada vez mais pequenino (por serem negativos). *Então voltemos ao problema... −240... se eu subir 40?... Ah! Fica no −200. Ok e depois?... Se colocarmos a outra linha à mesma distância?... Então... Tira-se 40 e fica −160... não é professora?... Ora bem, estes valores são exemplos: agora coloquem o rato para ver a posição da primeira linha, mantenham o x constante e vão subindo, mantendo sempre a distância.* Avançaram. Passado algum tempo chamaram-me. *Oh professora! A gente fez tudo certinho e esta distância não ficou igual! Veja a conta* (vi... era um erro daqueles...). *Meninas... 4 para 13? Ai professora, pois é... tem um erro. Já perceberam que têm de estar com atenção a fazer os cálculos? Qualquer distracção...* Continuaram. Passado algum tempo chamaram novamente: *Ai professora... e agora? Estamos no −17 e como é que ele anda 40 para cima? Para onde é que vai?* Desafio difícil. Operar com números relativos no 5.° ano é algo ainda um pouco fora do alcance... enquanto estamos apenas nos números negativos (ou nos positivos) a coisa vai... cruzar o zero, passar de negativos a positivos... é algo diferente. Mais uma vez tomei consciência de como este desafio do Caracol tem permitido os mais diversos tipos de situações problemáticas. Sem soluções formatadas ou definições, apenas levando-as a pensar como seria possível cruzar o zero gastando os 17 e passando aos positivos, a Bia propôs algo como: *17 − 40?... Não. É ao contrário... Ah! Tem de ser 40 − 17... Fazem a conta. Dá 23. Mas agora é nos positivos!... Então professora, agora fazemos mais... Agora é sempre mais!... Fazemos 40 mais 23?... Claro!*

(...) tantas histórias mais como estas... e sempre o imprevisto, o improviso, a surpresa, o professor como orquestrador, ele próprio outra (possível) enzima ajudando a facilitar as reacções induzidas pelo trabalho com o Scratch. Catalizadores que funcionam apenas se conectados: as tecnologias e o elemento humano. É isto que o Scratch permite, especialmente se combinado com outras ferramentas e com a mediação oportuna e adequada do Professor. Acresce que, para desenvolver projectos em Scratch por si imaginados ou resultando de desafios, os alunos precisam de outros recursos e de aprofundar com rigor conteúdos «clássicos» (Matemática, Língua Portuguesa, outras línguas, qualquer tema... qualquer assunto). Aprender assim faz mais sentido: o conteúdo surge por necessidade. Depois é possível trabalhar esse conteúdo separadamente, de forma mais clássica com exercícios de consolidação de procedimentos e conectando-o com outros e com o trabalho do aluno, sempre... O referencial cartesiano é disso um bom exemplo. Nunca começo por «ensiná-lo» formalmente para trabalharem no Scratch. Eles aprendem, ao programar, que o *x* e o *y* determinam a posição de cada objecto. Muito antes de saberem o que isso significa ou como funciona, usam-no com mestria e transportam os objectos para onde desejam. Só mais tarde trabalho na aula o conceito e nem me tinha apercebido da importância do que fazemos (o referencial cartesiano é um conteúdo de 7.° ano que antecipo no 5.°) até há alguns dias atrás, quando uma aluna de uma turma com muitas dificuldades (que apenas conheci já no 6.° ano, mas que frequentava em peso o *Clube Scratch time* uma vez por semana) me contou isto: *Ontem a nossa professora de Matemática — 7.° ano — deu o referencial cartesiano e ficou muito espantada porque a nossa turma é fraca mas nós do Clube Scratch time sabíamos tudo o que ela estava a ensinar!*

Nota

1 Sobre esta linguagem de programação, ver números anteriores da Revista.

Aveiro, ProfMat — Uma certa saudade... Uma imbatível confiança...

Lembrar Aveiro, recordar o ProfMat 2010 (1, 2 e 3 de Setembro), é mergulhar nas raízes da nossa existência profissional, revisitar experiências e projectos e ... respirar fundo, com os olhos postos no futuro.

Proposta irrecusável.

Vamos a isso!

Dia I

Uma espécie de saudade surgiu logo no primeiro momento. Quando se evocou algo que integra o inestimável património da cidade de Aveiro no que diz respeito ao movimento associativo docente — a revista Labor, fundada em 1926 por dois professores aveirenses, José Pereira Tavares e Álvaro Sampaio. Um legado importante que serviu de abrigo e bandeira ao debate entre professores e aos movimentos pela reforma do ensino, nomeadamente da Matemática. Um passado que conta, que pesa e que nos estimula. Àqueles, de nós, que, ao longo de décadas, «não puderam ser contemporâneos de si próprios»... Foi o Arsélio Martins quem nos trouxe esta mensagem, sobre Aveiro, sobre a força do associativismo, sobre o nosso trabalho e a nossa luta. Ele, o presidente cessante, o que nos deixa aquela espécie de saudade... do futuro... Até sempre, Arsélio, aí em qualquer recanto da vida, do trabalho, da luta!

O professor Júlio Pedrosa falou-nos da importância de um mais estreito relacionamento das escolas com as famílias e as comunidades locais e Jaime Carvalho e Silva, o professor português, sócio da APM, que é secretário-geral do ICMI, apresentou-nos uma perspectiva da dimensão internacional do ensino da Matemática.

Antes do sol se pôr, houve «espumante de honra», com os ovos-moles que haveriam de nos «desafiar» todos os dias, enquanto o Encontro durou...

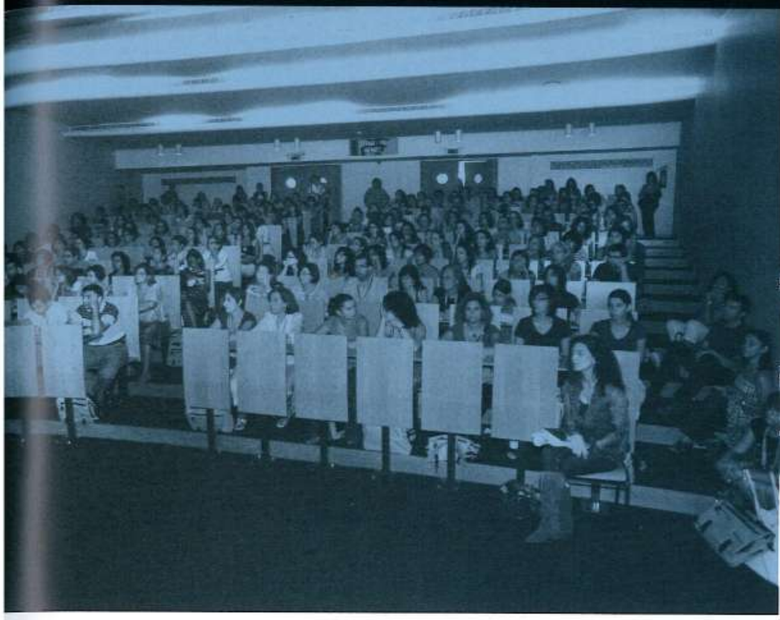
À noite, no Rossio, houve música ao vivo que rompeu o frio e fez vibrar, e mesmo dançar, quem respondeu à chamada para ir ouvir música tradicional de vários pontos do globo, pelo grupo Ósmavati. E, no fim, fogo-de-artifício, também para a cidade ver. Bela surpresa!

Dia II

Jorge Nuno Silva foi o nosso guia pela história e interpretação dos jogos matemáticos ao longo de séculos de História e Henrique Guimarães revisitou a vida e obra de George Pólya, quando se completam 25 anos sobre a sua morte. Uma obra dedicada, em grande parte, a quem aprende e a quem ensina Matemática e que nos deixa a inquietude da busca permanente... «How to solve it»?...

Gary Martin trouxe-nos, dos EUA, notícias do último trabalho, realizado no âmbito do NCTM, que aponta a escolha do «raciocinando e dando sentido» («reasoning and sense making») como enfoque para o próximo passo na busca de melhores resultados para a Educação Matemática. E pudemos observar vários exemplos da possibilidade de apelo transversal ao «reasoning and sense making» ao longo de diversos conteúdos curriculares. Cremos que é possível encaixar aqui, também, um apelo à exploração das «conexões» que sabemos tão valiosas do ponto de vista pedagógico...

Uma vez mais, o Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico (NPMEB) foi tema forte no ProfMat. O empenho dos docentes na inovação tem sido enorme e a vontade de que os resultados de facto se façam sentir não é me-



nor. Houve debate em torno das linhas caracterizadoras do Programa, relatos de experiências no terreno e algumas conclusões possíveis quanto à avaliação do primeiro ano de implementação experimental. E o trabalho vai prosseguir...

Houve Assembleia-Geral, abriu a urna para as votações... e fomos jantar, em Aradas. Óptimo jantar o deste ProfMat. Escorreu pela noite dentro, com som de cavaquinhos e cantares colectivos, com reencontros, conversas quentes, laços sólidos prometendo durar sempre mais um ano...

Dia III

Em versão portuguesa, a obra «Matemática Elementar do Ponto de Vista Superior» está agora acessível a todos nós. A riqueza e a actualidade do pensamento de Felix Klein foram-nos apresentadas por José Francisco Rodrigues, numa conferência em que a análise das perspectivas didácticas de Klein conduziu à grata evocação do grande pedagogo português José Sebastião e Silva.

E foi também o tempo de dar voz ao Ensino Secundário, esse Secundário que até parece como que «abafado» pela «turbulência» causada pelas novidades dos últimos anos no Ensino Básico... Houve comunicações sobre abordagens inovadoras em sala de aula e um painel em que se fez a história dos Programas agora em vigor e do processo que envolveu a sua implementação e o balanço quanto àquilo que se conquistou e, depois, se conservou ou se perdeu. Sentiu-se a determinação com que os docentes do secundário pretendem exigir para a disciplina de Matemática o reconhecimento de que tem uma vertente experimental e deve, portanto, recuperar uma aula desdobrada em turnos e em salas (laboratórios) devidamente equipadas. Um tópico a requerer acompanhamento no imediato, com reflexão e acção...

Depois da animada sessão «Física Viva» pela equipa da Fábrica — Centro de Ciência Viva e Universidade de Aveiro, veio o quase encantamento pela simplicidade das coisas belas da natureza e da vida que a Matemática envolve. Pela mão e pelo pensamento de Eduardo Veloso. Foi o (re)descobrir das simetrias, em todas as suas potencialidades, na perspectiva da sua abordagem ao longo da educação básica.

O ProfMat 2010 chegava ao fim.
É inevitável a sensação de termos deixado escapar muitas outras sessões carregadas de interesse, muitas intervenções importantes, muitos outros bons momentos... O ProfMat é também isso: um mundo de escolhas e de opções.

Antes do encerramento, pudemos ouvir «a tutela» reconhecer o valor do contributo da APM e agradecer-nos... Não somos de ficar à espera de agradecimentos, mas ... sabe bem!

Aveiro, o céu claro, o sol, as boas instalações da Universidade que nos acolheu, o excelente e dedicado trabalho da Comissão Organizadora, tudo isso recordaremos e transportaremos para o futuro. Renovados caminhos a percorrer, a mesma determinação, a mesma dedicação...
E a APM prosseguirá, forte!

Ana Maria Brito Jorge
Maria Graziela Fonseca

O Problema do ProfMat 2010

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2010 de Aveiro consistiu na resolução do problema

As Seis Bisbilhoteiras:

Naquela cidadezinha havia seis grandes amigas que gostavam muito de partilhar todas as bisbilhotices entre si. Sempre que uma ligava a outra, no final do telefonema as duas estavam a par de tudo o que cada uma sabia previamente. Certo dia, cada uma delas soube de um mexerico, daqueles que é mesmo «preciso» partilhar.

Qual é o número mínimo de telefonemas que terão de fazer para que as seis fiquem a saber de todas as novas coscuvilhices? Se cada telefonema demorar cinco minutos, qual é o mínimo de tempo necessário para que isto aconteça?

Recebemos 24 respostas. Nem todos conseguiram chegar ao mínimo de telefonemas, 8, nem ao tempo mínimo, 15 minutos. Uma boa parte das resoluções opta por fazer um esquema que se vai preenchendo ou completando de acordo com as opções tomadas. Vamos seguir, com pequenas alterações, a proposta apresentada pela equipa Eduardo Veloso, Rita Bastos, Ana Vieira & Inês Alegria.

Sejam A, B, C, D, E e F as seis pessoas (*homens ou mulheres, para evitar conflitos*, como diz a Emília Castro) e designemos por 1, 2, 3, 4, 5 e 6 os respectivos mexericos. Vamos pô-los numa tabela de dupla entrada onde, em cada célula, colocaremos o tempo necessário para a pessoa ficar a par do mexerico. A situação inicial está representada na tabela 1.

Nos primeiros cinco minutos realizam-se três telefonemas: A–B, C–D e E–F, ficando cada uma a conhecer dois mexericos (tabela 2).

O objectivo é preencher a tabela completamente, num tempo mínimo. Nos cinco minutos seguintes, realizam-se dois telefonemas: A–F e B–C. A situação passa a ser a representada na tabela 3. Nos cinco minutos seguintes, realizam-se mais três telefonemas: A–D, E–B e F–C, ficando todas as bisbilhoteiras a conhecer todos os mexericos em 15 minutos (tabela 4).

Foram necessários 8 telefonemas e 15 minutos. É fácil mostrar que não é possível obter o mesmo resultado em menos tempo porque:

— nos primeiros 5 minutos, cada bisbilhoteira conhece, no máximo 2 mexericos,

— nos segundos 5 minutos, cada bisbilhoteira conhece, no máximo 4 mexericos,

— nos terceiros 5 minutos, cada bisbilhoteira conhece, no máximo 8 mexericos.

Finalmente, dois aspectos a salientar. Primeiro, a original e bela forma como Iva & Nuno Angelino entregaram a resolução. Segundo, uma objecção levantada por Gisela Araújo e Sofia Coelho: *com as actuais tecnologias, um telefonema em conferência seria suficiente para, em 5 minutos, pôr todas as amigas ao corrente de tudo...*

Lista de participantes

Individuais: Alexandra Carneiro, Alice Bárrios, Alice Pereira, Ana Sofia Caseiro, Avelino Sousa, Catarina Ferreira, Cláudia Domingues, Daniel Castanho, Emília Castro, Florinda Costa, Gisela Araújo, Irene Fernandes, Isabel Leite, Isabel Viana, José Artur, José Fernandes, Mª de Fátima Silva, Mª da Graça Figueiredo, Mónica Fernandes, Ricardo Alves e Sofia Coelho. *Em equipa:* Ana Sofia Oliveira, Fátima Coelho & Teresa Pinto; Eduardo Veloso, Rita Bastos, Ana Vieira & Inês Alegria; Iva & Nuno Angelino.

Premiados e Prémios

Dada a dificuldade em seriar sete das resoluções, os prémios do 2.º ao 8.º foram atribuídos por sorteio.

1º Eduardo Veloso, Rita Bastos, Ana Vieira & Inês Alegria (*Unidade TI-Nspire, oferta Texas Instruments*)
2º Catarina Ferreira (*ClassPad Manager, oferta Casio + 1 livro ASA*)
3º Sofia Margarida Coelho (*Desafios 10, oferta Afrontamento + Ecografias do Porto, oferta Areal*)
4º Ricardo Maurício Alves (*Desafios 10, oferta Afrontamento + 1 livro ASA*)
5º Ana Sofia Oliveira, Fátima Coelho & Teresa Pinto (*3 livros, oferta ASA*)
6º Isabel Viana (*2 livros, oferta ASA*)
7º José Artur (*2 livros, oferta ASA*)
8º Iva & Nuno Angelino (*1 livro, oferta ASA*)

Nota: Os prémios devem ser levantados até 30 de Julho de 2011. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira

Tabela 1

Bisbilhoteira	Mexerico 1	2	3	4	5	6
A	**0**					
B		**0**				
C			**0**			
D				**0**		
E					**0**	
F						**0**

Tabela 2

Bisbilhoteira	Mexerico 1	2	3	4	5	6
A	0	**5**				
B	**5**	0				
C			0	**5**		
D			**5**	0		
E					0	**5**
F					**5**	0

Tabela 3

Bisbilhoteira	Mexerico 1	2	3	4	5	6
A	0	5			**10**	**10**
B	5	0	**10**	**10**		
C	**10**	**10**	0	5		
D			5	0		
E					0	5
F	**10**	**10**			5	0

Tabela 4

Bisbilhoteira	Mexerico 1	2	3	4	5	6
A	0	5	**15**	**15**	10	10
B	5	0	10	10	**15**	**15**
C	10	10	0	5	**15**	**15**
D	**15**	**15**	5	0	**15**	**15**
E	**15**	**15**	**15**	**15**	0	5
F	10	10	**15**	**15**	5	0

Conexões: um olhar etnomatemático

Joana Latas

Actualmente, um pouco por todo o mundo, a heterogeneidade surge como um denominador comum nas turmas do Ensino Básico. Os alunos evidenciam percursos de vida e expectativas de futuro muito distintos, bem como modos de vida que reflectem diferentes necessidades. O reconhecimento desta diversidade nas nossas salas de aula é uma realidade com que nos confrontamos diariamente e que exige de cada um de nós uma postura de reflexão sobre o decorrer dos processos de ensino e de aprendizagem.

É consensual que a cultura influencia a percepção que temos do mundo e consequentemente a forma como apreendemos e aprendemos os mais diversos saberes. Para vários autores (e.g. D'Ambrosio, 2008; Gerdes, 2007 e Zaslavsky, 2002), a Matemática é uma actividade que se desenvolve de forma própria por todo o mundo, em todas as culturas, pela actividade humana. Assumir a natureza cultural e humana da Matemática nos processos de ensino e na aprendizagem pode contribuir para que os professores desenvolvam uma abordagem etnomatemática em contexto de sala de aula. Isto é, uma abordagem que contemple a exploração de experiências culturais de um ponto de vista matemático e, consequentemente, o desenvolvimento de capacidades matemáticas transversais.

Etnomatemática

Numa primeira abordagem o entendimento de Etnomatemática é associado a uma Matemática Étnica pelo grafismo da palavra, contudo, este é um conceito bem mais abrangente que relaciona Matemática e Cultura. Também a noção de cultura pode ser entendida de forma mais ou menos abrangente, mais ou menos dinâmica, e por isso a necessidade de esclarecer em que sentido é aqui utilizada. Por cultura entenda-se a partilha de experiências comuns a um grupo de pessoas. Neste sentido, um grupo de jovens de determinada idade, um grupo de trabalhadores do mesmo ofício, um grupo social ou um grupo étnico são exemplos de grupos culturais.

O modo como a cultura é explorada em sala de aula revela-se crucial na obtenção dos resultados esperados. Acontece, por vezes, assistirmos à utilização de elementos culturais como uma estratégia para captar o interesse dos alunos, uma forma de motivar e facilitar a aprendizagem dos alunos que revelam dificuldades, ou até um meio para estimular a atenção de alunos mais distraídos. Esta abordagem, com uma regularidade maior que o desejável, subvaloriza o potencial de uma abordagem cultural por simplificar demasiado os contextos, ignorar a complexidade dos fenómenos reais e as fortes relações que existem entre as experiências prévias vivenciadas pelos alunos, os objectivos e as crenças matemáticas (Boaler, 1993).

Aplicadas ao contexto educacional, as práticas etnomatemáticas não se esgotam na aprendizagem de práticas matemáticas características do um grupo cultural específico. Aliás, sob prejuízo de limitar a consciência e o crescimento matemáticos dos alunos, tentando *encerrá-los dentro dum frasco* na sua própria cultura, tais práticas devem passar pelo questionamento das necessidades reais dos alunos a nível local, mas perspectivando o mundo global em que vivemos. Deste modo, podemos considerar duas dimensões distintas da matemática: a um nível *local* a matemática cultural repleta de significados, predominantemente contextualizada, e a um nível *global*, uma linguagem universal caracterizada por um carácter formal e predominantemente descontextualizada, igualmente importante por permitir a comunicação entre diferentes comunidades. Além destas duas dimensões da matemática, local e global, Moreira (2008) salienta igualmente a importância da articulação entre elas com vista a um entendimento da Matemática.

Conexões (etno)matemáticas

As actividades que as crianças, movidas pelos seus interesse e curiosidade, desenvolvem ao longo do dia, proporcionam-lhes o desenvolvimento de capacidades matemáticas e conhecimento informal que apresentam um forte potencial para o estabelecimento de conexões com a Matemática trabalhada em contexto escolar (Boavida, A. M.; Paiva, A. L.; Vale, I. & Pimentel, T.; 2008). Esta ideia do desenvolvimento de uma *matematização espontânea* em contexto extra-escolar é partilhada por outros educadores matemáticos (e.g. Bishop, 2005; D'Ambrósio, 2001; Gerdes, 2007). Segundo estes autores, quando é sujeito à *matematização* aprendida em contexto escolar, o aluno incompatibiliza-se com o pensamento matemático desenvolvido informalmente até então, criando um conflito psicológico.

Numa tentativa de aproximar os saberes matemáticos culturais com os saberes matemáticos como são apresentados em contexto escolar, as conexões matemáticas e a Etnomatemática podem complementar-se, na medida em que as primeiras relacionam ideias matemáticas com situações resultantes de experiências do dia-a-dia e a segunda procura explorar essas ideias para construir «caminhos» entre diferentes representações de conhecimento matemático. Segundo Begg (2001) as conexões assim entendidas podem ser estabelecidas: com o mundo quotidiano do aluno; com o conhecimento prévio do aluno; com os contextos familiares dentro e fora da escola; com outros tópicos matemáticos; com outras disciplinas; com o passado e com o futuro. No que respeita ao passado, será necessário compreender e aceitar diferentes *backgrounds* dos alunos, contudo, a conjugação desta informação com as oportunidades que cada um anseia para o seu futuro e a forma como lida com essas expectativas no seu contexto social — *foreground* — são determinantes na predisposição e no envolvimento do aluno no seu processo de aprendizagem (Alrø, Skovsmose & Valero, 2009; Vithal & Skovsmose, 1997). Claro que, para se fazerem conexões com o *background* e com o *foreground* dos alunos, a análise cultural não poderá ser efectuada apenas do ponto de vista matemático, devendo ser incentivado o aprofundamento do conhecimento cultural local com base em princípios matemáticos. A compreensão e a interacção de ambos deverão ser tidas em consideração nas decisões pedagógicas que tomamos.

Uma possível abordagem etnomatemática em contexto de sala de aula

Para tornar reais as relações entre o mundo exterior e a sala de aula, ou de forma mais abrangente, entre o mundo exterior e a escola, uma possível operacionalização de uma abordagem etnomatemática será promover uma visão integradora entre os conceitos, as práticas culturais matemáticas dos alunos e a matemática predominantemente formal (Adams, 2004).

Com base nos pressupostos já apresentados foi delineado um projecto adequado aos alunos de uma turma de 7.° ano de escolaridade de uma escola do barlavento algarvio.

O projecto foi desenvolvido em cinco fases: 1) procura de significados locais; 2) emergência de práticas e conexões com práticas culturais distintas; 3) experiência matemática cultural; 4) formalização matemática e 5) aprofundamento de conhecimento cultural com base em princípios matemáticos.

As primeiras duas fases caracterizaram-se pelo diagnóstico dos conhecimentos prévios e das expectativas dos alunos, pela identificação de práticas culturais significativas para os alunos e pela criação de contextos atractivos e estimulantes para o trabalho de conceitos e desenvolvimento de capacidades matemáticas. Neste âmbito foi elaborado um conjunto de 5 tarefas, contemplando conexões entre as práticas culturais identificadas e os conteúdos matemáticos trabalhados ao nível do 7.° ano de escolaridade. A implementação das primeiras quatro tarefas em sala de aula constituiu a 3.ª fase do projecto. Na 4.ª fase foram formalizados os conceitos de Geometria (trabalhados implicitamente durante a fase anterior) a partir dos produtos escritos dos alunos. Finalmente a implementação da 5.ª tarefa, coincidente com a 5.ª fase do projecto, voltou a focar os significados culturais, desta feita, numa reflexão em que os alunos foram confron-

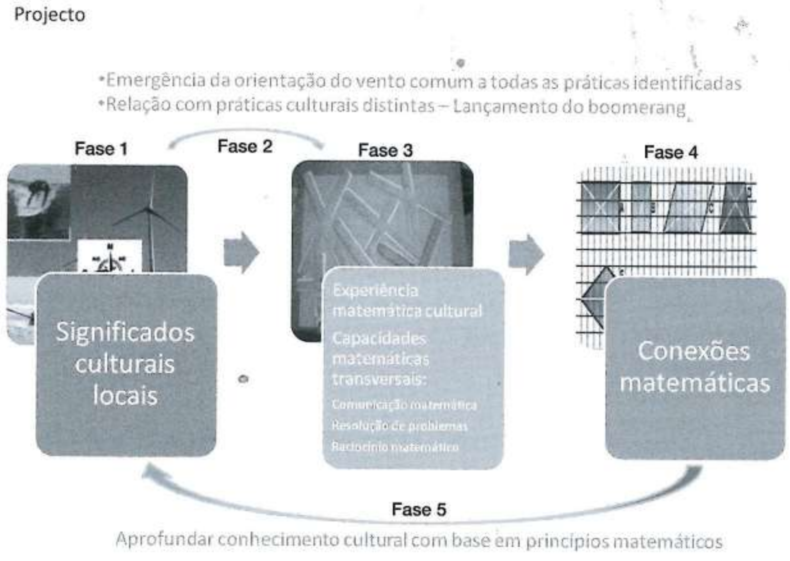


Figura 1: Inter-relação entre as fases do projecto

Tarefa: De onde sopra o vento?

1. Como podem verificar se há vento?
2. Qual a orientação do vento no dia de hoje?
3. Para que serve saber a orientação do vento?

Estrutura do relatório

- Qual a estratégia utilizada para identificar a orientação do vento? (Utiliza palavras, esquemas, desenhos, símbolos, …)
- Quais as características que vos permitem caracterizar o vento?
- Em que situações é que esta informação pode ser útil?
- Que conhecimentos foram utilizados para desenvolver esta actividade?
- Quais as dificuldades sentidas?

Figura 2: Tarefa De onde sopra o vento?

tados com práticas do seu quotidiano onde a utilização das ferramentas matemáticas ao seu dispor lhes «facilitou» uma tomada de decisão.

O processo descrito permite uma leitura, numa lógica de ciclo, onde o ponto de partida e o final coincidem com o estudo de significados locais. A figura 1 ilustra a inter-relação entre as referidas fases do projecto em causa.

A experiência: De onde sopra o vento?

A tarefa *De onde sopra o vento?* (figura 2) foi a primeira, do conjunto de cinco tarefas, realizada pelos alunos. Decorreu durante um bloco de 90 minutos, onde 45 minutos foram de trabalho de campo e 45 minutos destinados à elaboração do relatório de grupo e preparação das apresentações dos grupos.

A discussão da actividade desenvolvida pelos alunos teve lugar no bloco seguinte, durante a apresentação dos trabalhos elaborados pelos diversos grupos de alunos, utilizando como base os procedimentos realizados pelos alunos durante a saída de campo e registados posteriormente no relatório.

A discussão incidiu em duas categorias distintas: por um lado a caracterização do procedimento escolhido do ponto de vista matemático que permitiu valorizar o *background* dos alunos com os objectivos de: i) averiguar a predisposição dos alunos reconhecerem matemática em práticas do quotidiano; ii) compreender se os alunos estabelecem conexões entre a matemática escolar e a vida na sociedade local e iii) reconhecer aprendizagens que os alunos tenham realizado no âmbito da actividade; por outro lado foi focalizado também o *foreground* dos alunos de acordo com as suas expectativas face à utilização de capacidades matemáticas transversais no dia-a-dia, com base nos objectivos: i) perceber de que modo as aprendizagens escolares influenciam as suas práticas; ii) percepcionar se os alunos reconhecem matemática fora do contexto de sala de aula e iii) reconhecer se os alunos estabelecem conexões da matemática com situações da vida real.

Desempenho geral dos alunos

A estratégia de apresentação dos trabalhos à turma promoveu discussão e comunicação matemática oral entre os alunos. O nível de participação dos alunos foi também intensificado pela segurança que revelaram quanto aos seus conhecimentos empíricos do vento. A referência à experiência familiar esteve presente nestes trabalhos, nomeadamente no que diz respeito à pesca, actividade local para a qual conhecer a orientação do vento pode ser útil na previsão de uma «boa pescaria». Tais saberes populares foram transmitidos aos colegas com mais ou menos convicção, de acordo com o receio da aceitação dos colegas perante actividades pouco valorizadas socialmente entre os mais jovens (figura 3).

- O vento pode ser útil para a pesca, quando o vento está de sudeste traz as areias para terra, e quando as areias vêm para terra o peixe também vem.

Figura 3. Extracto do relatório apresentado pelo grupo D

Esta informação pode ser útil para fazer vários desportos como:
· surf;
· kitesurf;
· barco à vela;
· skate.
pode também ser útil para sabermos os sítios certos para construir os moinhos eólicos e para confirmar podemos consultar sites na internet como o windguru e o magic sea weed. Nestes sites o vento é representado por setas para a direcção e a intensidade é representada em nós. Estas informações vêm de estações meteorológicas e essas recebem informações dos seus satélite que andam à volta da Terra e para saber estas informações é utilizada muita matemática.

Figura 4. Extracto do relatório apresentado pelo grupo A

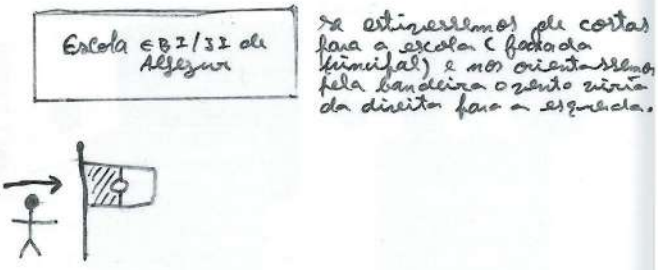


Figura 5. Extracto do relatório apresentado pelo grupo B

A valorização gradual do contexto familiar dos alunos da turma favoreceu a sua postura, que se foi tornando mais espontânea, aceitando as diferenças entre colegas como algo natural. Tal postura permitiu também uma relação mais positiva em relação ao erro no que respeita à participação geral dos alunos da turma nestes e noutros contextos.

As actividades do mundo quotidiano dos alunos, assim como as suas experiências prévias foram também integradas no desenvolvimento da tarefa. A familiaridade dos alunos com desportos onde a orientação do vento assume um papel preponderante é uma realidade tão vincada neste grupo, que alguns alunos consultam regularmente *sites* de Internet onde consta a previsão da orientação do vento. A análise e interpretação da informação desses sites foi, mais tarde, designada por «nomes» compreensíveis por todos, como foi o caso das setas que passaram a vectores!

O *foreground* cultural deste grupo de alunos [grupo A] levou-os a relacionarem a Matemática com as suas práticas diárias e a reconhecerem a utilização de conhecimentos matemáticos a nível global, embora as ferramentas matemáticas disponíveis não lhes tenham permitido concretizar as conexões entre a Matemática e o funcionamento dos satélites (figura 4).

Durante as apresentações foi ainda evidente a utilização de sistemas de referência de orientação locais a partir do ambiente escolar, nomeadamente a partir da bandeira da escola (figura 5), contudo, outros grupos tiveram a necessidade de utilizar um sistema de referências de orientação que fosse compreendido por todos (figura 6), utilizando para tal os pontos cardeais estudados previamente na disciplina de Geografia.

A equivalência da informação transmitida pelos grupos A e B gerou uma discussão dos conceitos matemáticos de direcção e sentido:

António: Orientámo-nos pela bandeira e pelos moinhos e sabemos que o sol nasce em este e se põe em oeste. Vimos que a bandeira estava virada para este. Logo o vento sopra de oeste para este.

(…)

Professora: No exemplo deste grupo [referindo-se à estratégia apresentada pelo grupo B], o que define então a direcção do vento?

Rodrigo: De costas para a escola.

Professora: E o sentido?

Rodrigo: Da direita para a esquerda.

No final da discussão os alunos concluíram que, apesar de terem utilizado termos de linguagem distintos, identificar a orientação do vento «de oeste para este» é exactamente o mesmo que «estar de costas para a fachada principal da escola e o vento soprar da direita para a esquerda», embora a última só seja compreensível «para quem conhece esta escola». Esta negociação de significados enriqueceu o *foreground* cultural dos alunos que, numa primeira abordagem, limitaram a sua análise a referências locais, abrindo-lhes perspectivas globais a partir do seu conhecimento local.

Nas conexões com outras disciplinas, a relação mais evidente foi com a disciplina de Geografia, em particular na utilização da rosa-dos-ventos, contudo, outros grupos associaram o vento às forças estudadas em Ciências Físico-Químicas, atribuindo-lhes as mesmas características que os vectores (figura 7).

Algumas considerações

O exemplo apresentado evidencia a sensibilização dos alunos para o estabelecimento de conexões com o seu mundo quotidiano e conhecimento prévio, o que cria potencialidades para a apropriação e para a atribuição de significado a conceitos matemáticos, como foi o caso do conceito de vector e das características nele envolvidas. Em tarefas posteriores verificou-se ainda que os alunos, ao reconhecerem a orientação do vento, recorreram espontaneamente à utilização de vectores para a sua representação, arriscando mesmo a soma intuitiva geométrica de vectores no estudo da trajectória de um barco sujeito a determinadas forças, aprofundando assim o seu conhecimento cultural com base em princípios matemáticos. As conexões com outras disciplinas foram igualmente estabelecidas pelos alunos, como

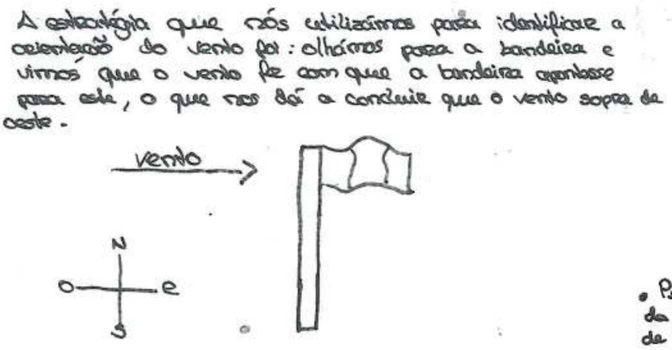


Figura 6. Extracto do relatório apresentado pelo grupo A

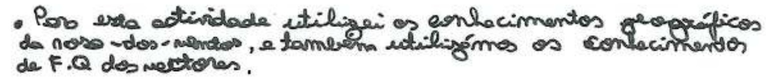


Figura 7. Extracto do relatório apresentado pelo grupo D

foi salientado nos trabalhos desenvolvidos para apresentação à turma. Destacam-se ainda as potencialidades que as conexões estabelecidas com contextos familiares exteriores à escola relevaram no desenvolvimento de um ambiente de aprendizagem assinalado pela aceitação de diferentes vivências dos alunos em contexto extra-escolar. De facto, a partilha gerada na discussão dos trabalhos foi muito rica e participada pela turma, por um lado, pela necessidade de mostrar a equivalência de resoluções distintas e, por outro, pela necessidade dos alunos transmitirem segurança aos colegas em relação aos seus conhecimentos, porque afinal «até sabem umas coisas...». A utilização do *background* cultural na partilha de ideias matemáticas e não matemáticas revelou-se um elemento catalisador de um ambiente confortável para os alunos levando-os assim a arriscar mais na comunicação oral. A interacção entre alunos gerou ainda potencial influência no *foreground* cultural dos alunos pela expectativa e curiosidade causadas pela partilha de informações culturais dos outros grupos.

Para além de incentivar os alunos a estabelecerem conexões matemáticas dentro e fora da Matemática, a exploração da matemática cultural em contexto de sala de aula, aponta, numa primeira análise, para o desenvolvimento de capacidades matemáticas transversais[1], nomeadamente do raciocínio matemático dos alunos aplicado a um contexto não matemático e da comunicação matemática oral dos alunos revelada na apresentação do trabalho à turma e na argumentação utilizada durante a discussão em grande grupo.

A implementação de uma abordagem etnomatemática surgiu não como um novo conteúdo ou contexto, mas antes como uma valorização do reconhecimento matemático do ambiente social e cultural que, por sua vez, permitiu estabelecer conexões matemáticas em sala de aula, revestidas de maior significado por parte dos alunos. Aliás, estas considerações reforçam os resultados dos estudos de Adam, Alangui & Barton (2003), Bishop (2005), Boaler (1993) e Zaslavky (2002), para os quais a integração de aspectos culturais nos currículos contribui para um entendimento da Matemática como parte do quotidiano, incentiva a predisposição para estabelecer conexões com significado e, consequentemente, desenvolve a compreensão da Matemática que desmistifica a visão desta Ciência como o somatório de conhecimento compartimentado por temas ou tópicos matemáticos.

Ao planificar o seu trabalho, o professor deve assim ter consciência da necessidade de promover o estabelecimento de relações e fazer uma gestão do currículo agindo na inte-

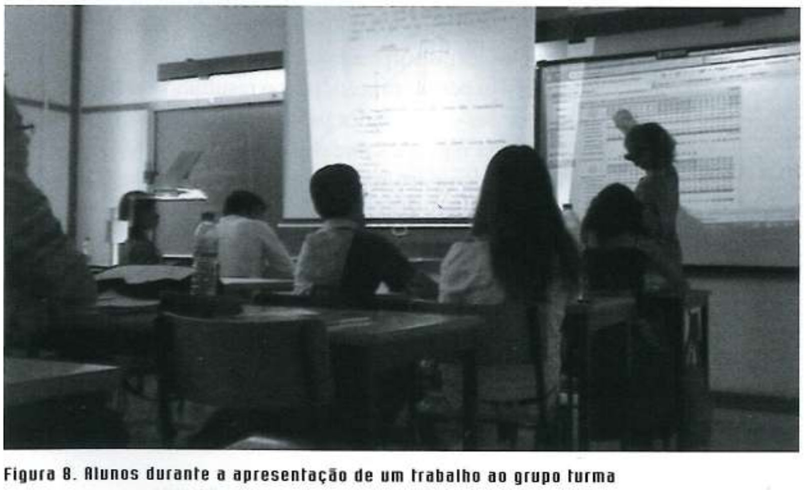


Figura 8. Alunos durante a apresentação de um trabalho ao grupo turma

racção entre o *background* e *foreground* dos seus alunos. Neste sentido, será necessário, por um lado, que alunos e professores estejam cientes da existência de matemática implícita nos conhecimentos adquiridos pelos alunos no seu contexto cultural e, por outro, sensibilizar os professores para o papel que a matemática cultural pode desempenhar no desenvolvimento de capacidades matemáticas transversais, nomeadamente no estabelecimento de conexões e na sua relação com a matemática formal. Assim encarada, a Etnomatemática surge como um desafio mundial, potencializada pela acção dos cidadãos de cada país ou região na sua área de actuação, em geral, e pela acção dos educadores no campo educacional, em particular.

Nota

1 Neste estudo, capacidades matemáticas transversais referem-se à resolução de problemas, ao raciocínio matemático e à comunicação matemática entendidas tal como no Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007.

Referências

Adam, S. (2004). Ethnomathematical ideas in the curriculum. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 49–68.

Adam, S., Alangui, W., & Barton, B. (2003). A comment on Rowlands and Carson ‹Where would formal academic mathematics stand in a curriculum informed by ethnomathematics? A critical review›. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 327–335.

Alrø H., Skovsmose, O. & Valero P. (2009). Inter-viewing foreground: students' motives for learning in a multicultural setting. In M. César & K. Kumpulainen (Eds.), *Social interactions in multicultural settings* (pp. 13–37). Rotterdam: Sense publishers.

Begg, A. (2001). Etnhomathematics: why, and what else? [Versão electrónica]. *ZDM — The International Journal on Mathematics Education*. *33*(3), 71-74.

Bishop, A. (2005). Aproximación sociocultural a la educación matemática. Colombia: Universidad del Valle.

Boaler, J. (1993, Junho). The role of contexts in the mathematics classroom: do they make mathematics more «real»?. *For the Learning of Mathematics*, *13*(2), 12–17.

Boavida, A. M.; Paiva, A. L.; Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico*. Lisboa: ME–DGIDC.

D'Ambrosio, U. (2001, Fevereiro). What is ethnomathematics, and how can it help children in schools? [Versão electrónica]. *Teaching Children Mathematics* 7(6)

D'Ambrosio, U. (2008, Abril). Ethnomathematics: Perspectives [Versão electrónica]. *News NAGEm*, 2(2), 2.

Gerdes, P. (2007). *Etnomatemática — Reflexões sobre a diversidade cultural*. Ribeirão: Edições Húmus.

Moreira, D. (2008). Educação matemática para a sociedade multicultural. In P. Palhares (coord.). *Etnomatemática — Um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem da Matemática* (pp. 47–65). Ribeirão: Edições Húmus.

Vithal, R. & Skovsmose, O. (1997). The end of innocence: a critique of ethnomathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *34* (2), 131–157.

Zaslavky, C. (2002, Fevereiro). Exploring world cultures in math class. [Versão electrónica]. *Educational Leadership*, 66–69.

Joana Latas

EBI/JI de Aljezur

Materiais para a aula de Matemática

Enchendo um octaedro...

A tarefa que se apresenta foi adaptada de uma desenvolvida por professores da Esc. Sec. Braamcamp Freire em 2000, que no Ano Mundial da Matemática produziram diversas actividades envolvendo o octaedro.

Para os professores é sempre um desafio construir tarefas onde sejam os alunos a estabelecer conexões. Deparámonos, de entre outras, com as seguintes questões:

- Qual o papel de um *software* de Geometria Dinâmica no apoio ao estabelecimento de conexões na exploração das tarefas?
- De que modo as tarefas propostas estimulam os alunos a estabelecerem conexões matemáticas?

Esta tarefa foi pensada de forma a permitir que os alunos estabeleçam conjecturas a partir de gráficos e construam conexões entre diferentes representações de funções, promovendo assim uma visão mais integrada da Matemática. Partindo da análise de figuras, os alunos analisam a variação do perímetro e da área de polígonos e ainda do volume de líquido num octaedro.

A implementação da tarefa revelou-nos que as surpresas dos alunos deram origem a aprendizagens significativas e que a argumentação teve por base as conjecturas estabelecidas por eles. Estas surpresas criaram expectativas e motivações para a experimentação, pois o resultado era inesperado. «Este pode ser o detonador para nutrir a necessidade dos estudantes para reflectir sobre o seu conhecimento e conjecturas, originando oportunidades para uma aprendizagem significativa.» (Arcavi, 2000, p.26)

Esta tarefa está disponível no sítio da APM nas *Actividades e Recursos* onde se pode encontrar também o ficheiro de apoio (em GSP), extensões e sugestões metodológicas.

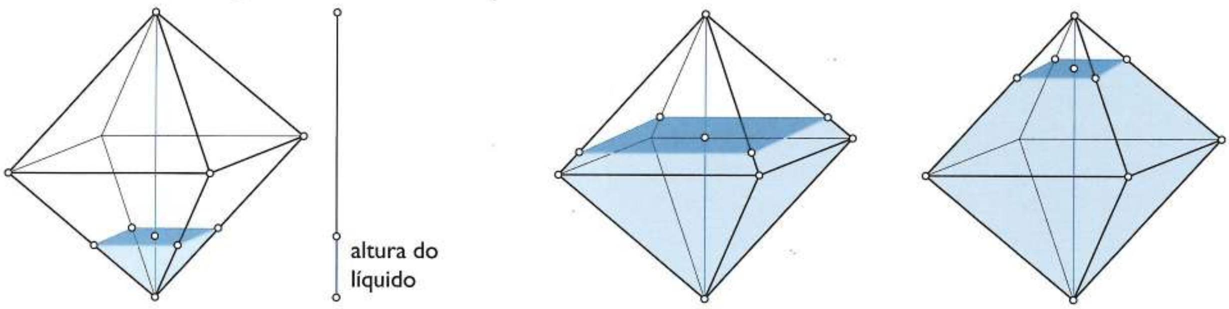
Referências bibliográficas:

Arcavi, A. Hadas N. (2000) El computador como medio de aprendizage: Ejemplo de un enfoque, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 25–45

Helena Paradinha, Josefa Costa, Maria da Conceição Mesquita

Enchendo um octaedro...

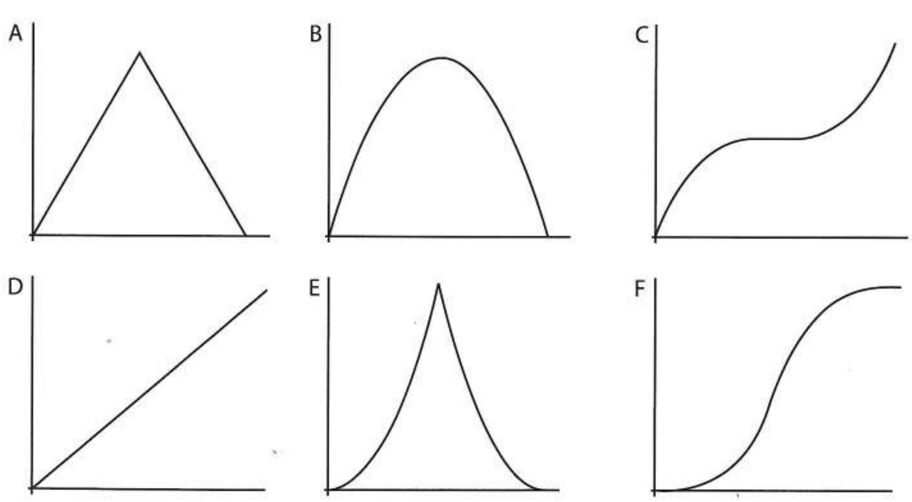
Um octaedro regular está apoiado num dos vértices, de modo que uma diagonal espacial fica na vertical. Supõe que o vamos enchendo de um líquido colorido até ficar cheio.



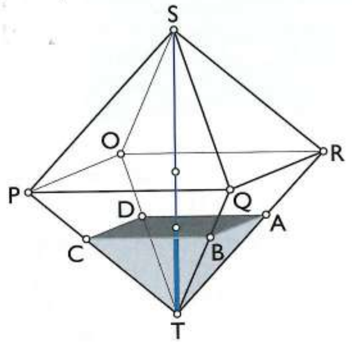
Na figura podes observar os polígonos definidos na superfície do líquido quando varia a altura do líquido.

1. Pretende-se estudar, em função de *h* (altura do líquido), as seguintes funções:
   — *P*, perímetro dos os polígonos definidos na superfície do líquido;
   — *A*, área dos polígonos definidos na superfície do líquido;
   — *V*, volume do líquido no octaedro.

   Sem efectuares quaisquer cálculos, escolhe dos gráficos em baixo, qual o que representa cada uma das funções referidas anteriormente. Explica o teu raciocínio.



2. Qual o polígono formado pelos vértices do octaedro O, P, Q e R? Indica outros polígonos iguais a este, definidos por vértices deste octaedro.



3. Que tipo de polígonos se formam na superfície de líquido, à medida que se vai enchendo o octaedro de líquido?

4. Supõe que a aresta do octaedro é 10 cm.
   - **4.1.** Mostra que a altura de líquido varia entre zero e $10\sqrt{2}$.
   - **4.2.** Para que valores de h a área do polígono é máxima?
   - **4.3.** Haverá polígonos iguais para diferentes alturas do líquido? Que relação existirá entre essas alturas?

5. Exprime $\overline{AC}$, em função de h (altura do líquido).

6. Mostra que a área A do polígono [ABCD], em função de h (altura do líquido), é definida por $A(h) = 2h^2$, para $0 \leq h \leq 5\sqrt{2}$.

7. No gráfico da função A, área dos polígonos definidos na superfície do líquido, da questão 1. regista os valores das abcissas dos extremos da função.

8. Define um modelo matemático para a função A, para $5\sqrt{2} < h \leq 10\sqrt{2}$.

9. Calcula as taxas de variação média da função A, nos intervalos [0, 1] e [5, 6]. Interpreta os valores obtidos.

Conexões matemáticas

Graça Cebola

Introdução

Neste artigo procura-se discutir e reflectir sobre aspectos relacionados com as conexões matemáticas, tendo subjacente e fazendo a sua interligação com o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) e o Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico (PFCM).

Como é referido em Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008), o estabelecimento de conexões matemáticas pode surgir, ao longo do ensino e aprendizagem formal, como um processo que tem por objectivo primordial a ligação da Matemática às outras áreas curriculares, à realidade do mundo que nos rodeia e também a relação entre os diferentes tópicos matemáticos. Quando resolvemos problemas cujo contexto faz apelo à vida real estamos a realçar as conexões matemáticas com a realidade. Quando combinamos as outras áreas curriculares com a Matemática enaltecemos não só a Matemática mas também as áreas envolvidas.

Também Bamberger e Oberdorf (2007) realçam a importância de os alunos, desde o pré-escolar até ao 12.° ano de escolaridade, reconhecerem e utilizarem relações entre os diferentes conceitos matemáticos e perceberem que a construção de alguns conceitos matemáticos é realizada em função de outros — conexões dentro da própria Matemática, reforçando o que já era mencionado nos *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2000).

O PMEB destaca o desenvolvimento de três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática — resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática. No entanto, o Programa assume, também, a importância das conexões ao referir, explicitamente, que «valoriza também outras capacidades como as de representação e de estabelecimento de conexões dentro e fora da Matemática». (Ponte, *et al.*, Programa de Matemática do Ensino Básico, 2007)

Escolheram-se duas situações de sala de aula do 1.° ano, de acordo com o PMEB, onde se realça o papel do professor e o trabalho dos alunos em termos das suas produções escritas a partir das tarefas propostas, e com as quais se evidencia o estabelecimento de conexões matemáticas em algumas das vertentes anteriormente mencionadas. Todos os episódios de sala de aula fizeram parte de sessões de acompanhamento do PFCM e, como tal, foram objecto de discussão antes e depois da sua concretização. Por fim, reflecte-se sobre a importância das conexões matemáticas na sala de aula e da sua pertinência, em termos globais, no ensino e na aprendizagem da Matemática do ensino básico.

Uma história e muitos caminhos

Numa aula do 1.° ano, no início do 2.° período, a professora tem o propósito de explorar com os alunos uma tarefa que se enquadra no tema *Geometria*, tópico *Orientação espacial* e, mais especificamente, nos subtópicos *Posição e localização* e *Pontos de referência e itinerários*, do PMEB. Começa a aula recordando com os alunos a história — *Todos no sofá* — contada no dia anterior, que deu origem a um painel ilustrado por todos e que se encontra afixado numa das paredes da sala.

Para ela é importante sensibilizar os alunos a encarar a Matemática como uma linguagem que pode traduzir ideias sobre o mundo que nos rodeia. A dificuldade, muitas vezes, sentida por eles na tradução do real e da linguagem comum para a linguagem simbólica da Matemática levou-a a escolher a tarefa *Percurso até ao sofá*. Esta tem como principal pressuposto não só a interligação das diferentes linguagens mas também o efectuar contagens.

A professora apresenta um quadro quadriculado «gigante» e distribui a ficha da tarefa (figura 1) aos alunos, que são convidados a, livremente, indicarem o percurso que os amigos têm que percorrer, não para sair do sofá, como refere a história, mas para lá chegar. Em diálogo com eles introduz as regras de registo, através de um código de setas: para cima, ↑, para baixo, ↓, para a direita, →, e para a esquerda, ←.

Os alunos estão agora atarefados a assinalar os seus percursos — e há-os para todos os gostos. De seguida, a professora solicita-lhes que contem os passos indicados. Há quinze alunos com percursos de 11 passos, um aluno com um percurso de 13 passos e um outro com um de 15 passos.

A professora aproveita estes resultados para, com a ajuda oral dos alunos, representar no quadro um gráfico de barras (figura 2). Todos percebem bem, antes do registo concluído, que a barra a que corresponderão os 11 passos vai ser a mais alta e as outras duas irão ter a mesma altura.

Na discussão que se estabelece em torno dos diferentes percursos construídos, os alunos chegam à conclusão que há uns mais longos e outros mais curtos, que um percurso mais longo é mais demorado de percorrer e um mais curto é mais rápido (no 1.° ano a apreensão deste tipo de vocabulário é importante), que nem todos os percursos de 11 passos são iguais, uns vão por um lado, outros por outro.

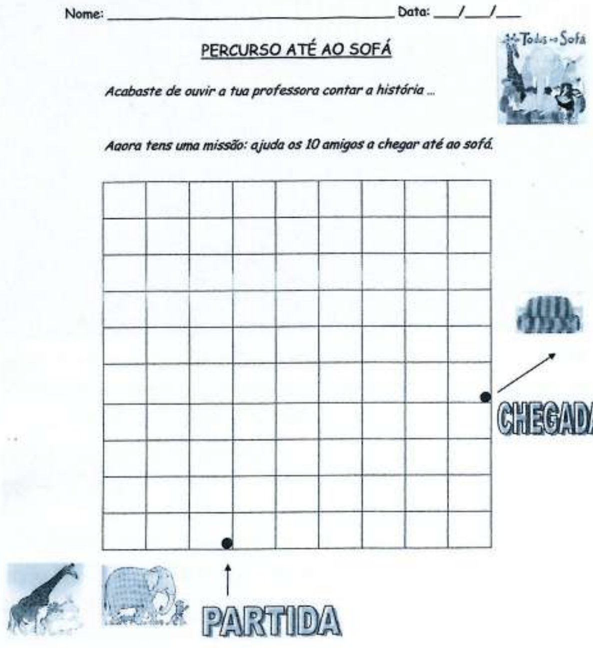


Figura 1

Posteriormente, um aluno indica oralmente o seu percurso — cinco para cima, dois para a direita, um para cima, três para a direita, um para baixo, um para a direita — e duas colegas registam-no no quadro, uma no quadro quadriculado e a outra unicamente através das setas. Todos estão com atenção para ver se não há enganos e, no final, contam o número total de passos:

↑↑↑↑↑→→↑→→→↓→ (13 passos)

A professora faz também um registo no quadro

5↑2→1↑3→1↓1→

onde os números surgem já como resultado da contagem por grupos e não da contagem um a um.

Todos no sofá

Estão dez amigos todos
num sofá.
Mas estão apertados que
não cabem lá.

O rato guloso
salta do sofá.
São nove amigos
que ainda lá estão.

O coelho manso
salta do sofá.
São oito amigos
que ainda lá estão.

O gato tigrado
salta do sofá.
São sete os amigos
que ainda lá estão.

O pato marreco
salta do sofá.
São seis os amigos
que ainda lá estão.

O porco, roncando,
salta do sofá.
São cinco os amigos
que ainda lá estão.

O burro, aos coices,
salta do sofá.
São quatro os amigos
que ainda lá estão.

A vaca leiteira
salta do sofá.
São três os amigos
que ainda lá estão.

A alta girafa
salta do sofá.
São dois os amigos
que ainda lá estão.

O grande elefante
salta do sofá.
Já só um amigo
ainda lá está.

João Preguição
fica no sofá.
Deita-se a dormir
e não sai de lá.

Luísa Ducla Soares

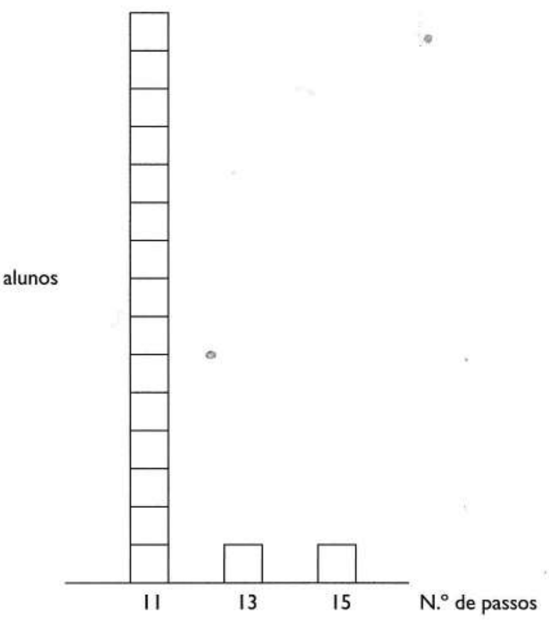


Figura 2. O registo em forma de gráfico

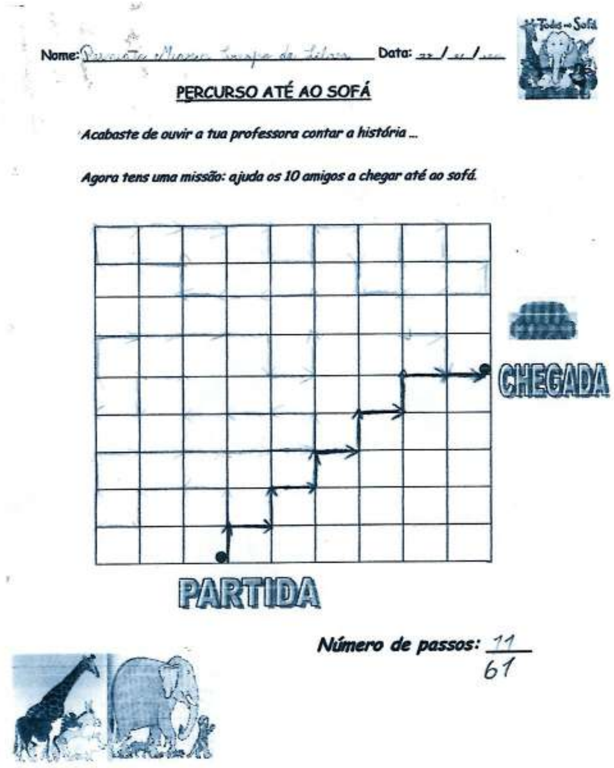


Figura 3. Os percursos de Renata

A aula prossegue com um outro desafio construir um percurso mais longo do que o maior indicado até ao momento (15 passos). Os alunos esforçam-se por construir percursos compridos, contando os passos: 21, 25, 26, 27, 33, 35, ..., 61 — este foi o maior percurso que apareceu na turma. Renata indica a vermelho o seu menor percurso (11 passos) e a azul o seu maior percurso (61 passos) (figura 3).

Em seguida, os alunos identificam estes números na recta colada na parede e falam sobre eles: «26 é mais 1 do que 25», «27 é mais 1 do que 26», «33 é mais 6 que 27», ...

Quando no final, a professora pergunta «O que aprenderam hoje?» uma das respostas que surge é: «Percursos. (...) Quando venho para a escola com a minha mãe faço um percurso. Quando venho com a minha avó faço outro percurso!»

Sem dúvida que este episódio de sala de aula ilustra como se interligou a Literatura Infantil e a Matemática. A história foi o mote de partida para todo um trabalho ligado à Matemática. A escolha de uma história que os alunos já conheciam e que já tinham explorado de uma outra forma motivou-os ao ponto de, perante a apresentação do quadro quadriculado, imediatamente dizerem que «O quadro é para saber o caminho dos animais até ao sofá». A relação da Matemática com a realidade surge aqui não sob a forma de resolução de um problema, mas de uma transposição do que tinha sido aprendido na aula para a vida do dia a dia — o conhecimento adquirido pode servir precisamente para esta ligação, para que tenha sentido para os alunos.

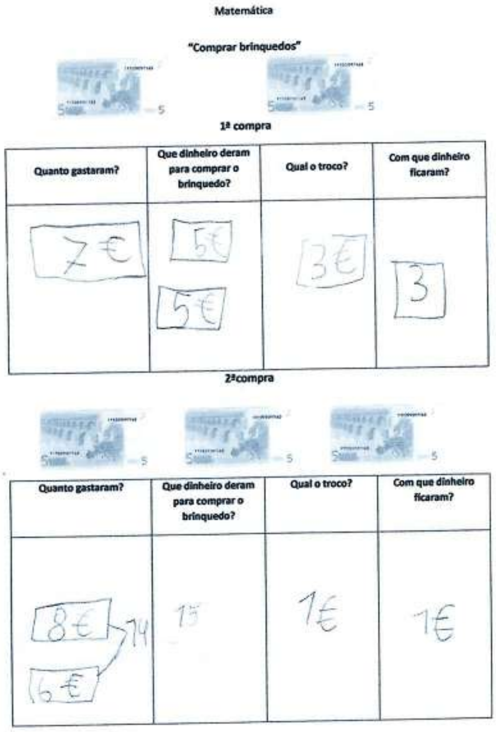
O estabelecimento de conexões dentro da própria Matemática é evidente, o tema era a *Geometria* contudo, um outro tema, *Números e operações*, surgiu naturalmente. Durante a aula foi feito todo um trabalho em volta não só dos percursos, onde as questões da lateralidade são fundamentais, mas também dos números, através das variadíssimas contagens e da maneira como se relacionam uns com os outros. Também o tema *Organização e tratamento de dados* foi trabalhado, através do registo da informação, em forma de gráfico de barras, na grelha, e na utilização de códigos de setas e de números e setas.

Esta aula terminou, mas a tarefa, ampliada com novas questões, tem potencialidades para permitir aprofundar outros subtópicos que não foram ainda tratados. Concretizando, podem, por exemplo, atribuir-se nomes às colunas e às linhas para termos um referencial que possibilita a identificação correcta de determinados pontos da grelha e, a partir daí, distinguirem-se deslocações diferentes.

Vamos às compras!

As crianças, nesta faixa etária (1.º ano), gostam imenso de sentir que podem imitar os adultos em algumas das suas funções, por exemplo, ir às compras. O dinheiro é algo que as fascina e se lhes dermos a possibilidade de ir às compras, nem que seja a fingir, elas entusiasmam-se, sentem-se responsáveis e podem, sem qualquer tipo de pressão, praticar o cálculo mental.

Figura 8. Os brinquedos que se podem comprar


Matemática

"Comprar brinquedos"

1ª compra

Quanto gastaram?	Que dinheiro deram para comprar o brinquedo?	Qual o troco?	Com que dinheiro ficaram?
7 €	5€ 5€	3€	3

2ªcompra

Quanto gastaram?	Que dinheiro deram para comprar o brinquedo?	Qual o troco?	Com que dinheiro ficaram?
8 € 6 € 14	15	1€	1€

Figura 9. Uma compra

Na tarefa[2], apresentada em meados de Abril, há um painel de brinquedos disponíveis para comprar (figura 8) e a cada aluno são, inicialmente, distribuídas duas notas (falsas) de 5€.

Todos os alunos são convidados pela professora a escolher um peluche que gostariam de comprar, ou melhor, que poderiam comprar com o dinheiro que lhes foi dado. A primeira parte da aula é recheada de diálogos do género:

Prof.ª: Que brinquedo podes comprar com duas notas de cinco euros?

Aluno: O urso. (5€) Dou uma nota de cinco euros e fico com a outra.

Aluno: O elefante. (10€)

Prof.ª: Que dinheiro dás ao dono da loja?

Aluno: Dez euros.

Prof.ª: Recebes troco?

Aluno: Não.

Prof.ª: Com que dinheiro ficas?

Aluno: Com nada.

Aluno: O esquilo. (14€)

Prof.ª: Tens dinheiro para comprar o esquilo?!

Aluno: Não.

Prof.ª: Quanto falta?

Aluno: Quatro euros.

Terminada esta abordagem oral das compras, do dinheiro gasto, do troco recebido e do dinheiro com que ficam, a professora distribui uma folha de registo onde os alunos transcrevem os valores relacionados com a conversa que tiveram (figura 9).

Prof.ª: Com o dinheiro que vocês têm será que podem comprar mais do que um brinquedo?

Alunos: O urso. (5€) Podemos comprar dois ursos.

Prof.ª + Alunos: 5€ + 5€ = 10€.

Prof.ª: Há mais possibilidades?

Aluno: Não. Não temos dinheiro que chegue.

Prof.ª: Se quisermos comprar um urso (5€) e uma ovelha (6€), quanto dinheiro falta? Quanto custa o urso mais a ovelha?

Aluno: 11€. Falta um euro.

Nesta altura a professora enceta novo diálogo com os alunos, com o propósito de lhes fazer sentir que se tivessem mais dinheiro podiam fazer compras diferentes.

Prof.ª: Com que quantia ficaram?

Alunos: 15€.

Prof.ª: Que brinquedos podem comprar?

Alunos: Todos.

Prof.ª: Que brinquedos queres comprar?

Aluno: A ovelha e a coelha.

Prof.ª: Quanto gastas?

Aluno: 6 mais 7 … 13.

Agora os alunos juntam-se dois a dois e a professora distribui mais uma nota de 5€ a cada um e diz-lhes para comprarem dois brinquedos. Mais uma vez, o diálogo é elucidativo

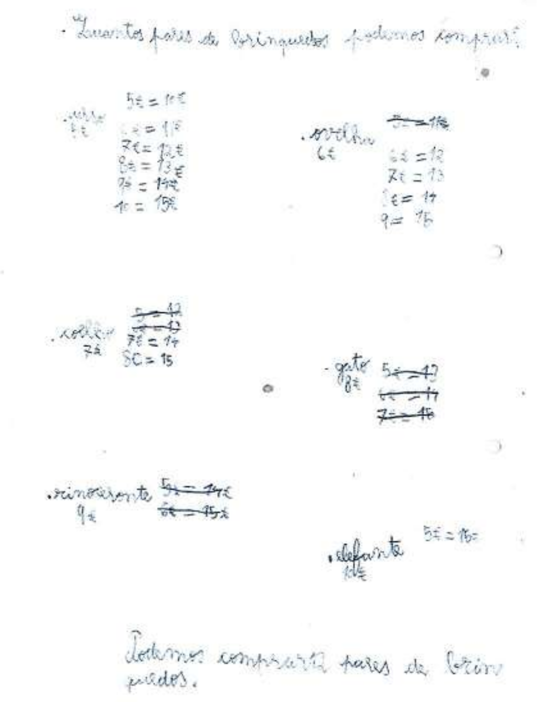


Figura 10. O registo

sobre as compras que podem efectuar. Para ajudar no cálculo são distribuídas as réguas e com elas os alunos justificam oralmente os seus cálculos.

No final da aula, como súmula, reforçam-se as ideias e o entusiasmo mantém-se, por vontade deles talvez não fosse necessário ir ao intervalo!

Prof.ª: O que é que aprendemos hoje?

Aluno: Aprendemos a ir às compras.

Prof.ª: No faz de conta ...

Aluno: Só podemos comprar se tivermos mais dinheiro ou o dinheiro certo.

Aluno: Aprendemos a pagar.

Aluno: Aprendemos a destrocar.

Prof.ª: O que é o troco?

Aluno: É o dinheiro que damos a mais...

Numa outra aula, com outra professora, outros alunos e a mesma tarefa, surgem também vários diálogos semelhantes mas o registo escrito dos cálculos efectuados é já uma constante. Por exemplo, um aluno diz que quer comprar o cão (12€) e o esquilo (14€), regista no quadro os seus cálculos e conclui que não tem dinheiro suficiente, gastava 26€ mas só tem 15€.

12 + 14 = 26

10 + 2   10 + 4

20   6

26

Após esta fase das compras a professora pergunta aos alunos «Afinal, com os 15€, quantos pares de brinquedos podemos comprar?»

Os alunos escolhem, orientados pela professora, um brinquedo e com ele vão fazendo pares, de tal forma que o valor total dos seus gastos não ultrapasse os 15€. Aparecem registos escritos como o da figura 10, onde sempre que um par surge repetido é riscado da lista. No final, têm-se os doze pares de brinquedos que solucionam a questão.

Os exemplos apresentados ilustraram o trabalho destes alunos com o sistema monetário em vigor e a maneira como eles interiorizaram a importância do dinheiro. Quer sob a forma oral, quer sob a forma escrita, parece haver todo um domínio do cálculo que aqui foi reforçado com os euros, ou seja, numa contextualização tão real quanto o possível.

Uma forma mais organizada de registar a informação resultante da questão lançada pela professora poderia ser através de uma tabela de dupla entrada (tabela 1), com a listagem, em linha e em coluna, de todos os brinquedos e do respectivo preço e onde em cada célula aparecesse o preço dos dois brinquedos escolhidos.

	Urso 5€	Ovelha 6€	Coelha 7€	Gato 8€	Rinoceronte 9€	Elefante 10€	Girafa 11€	Cão 12€	Esquilo 13€
Urso 5€	10€	11€	12€	13€	14€	15€	16€	17€	18€
Ovelha 6€	~~11€~~	12€	13€	14€	15€	16€	17€	18€	19€
Coelha 7€	~~12€~~	~~13€~~	14€	15€	16€	17€	18€	19€	20€
Gato 8€	~~13€~~	~~14€~~	~~15€~~	16€	17€	18€	19€	20€	21€
Rinoceronte 9€	~~14€~~	~~15€~~	16€	17€	18€	19€	20€	21€	22€
Elefante 10€	~~15€~~	16€	17€	18€	19€	20€	21€	22€	23€
Girafa 11€	16€	17€	18€	19€	20€	21€	22€	23€	24€
Cão 12€	17€	18€	19€	20€	21€	22€	23€	24€	25€
Esquilo 13€	18€	19€	20€	21€	22€	23€	24€	25€	26€

Tabela 1

Para além de possibilitar o estabelecimento de conexões com o tema *Organização e Tratamento de Dados*, de acordo com o PMEB, o preenchimento e a descoberta de regularidades na tabela são momentos interessantes do ponto de vista da aprendizagem associada ao tópico *Regularidades* do tema *Números e operações*.

- Os alunos podem descobrir que há uma regularidade na sequência numérica, quer dos valores das linhas quer das colunas. Se começarem por preencher uma linha ou uma coluna, percebem que os números de coluna para coluna, ou de linha para linha, aumentam em um e o seu processo de colocação na tabela torna-se bastante rápido, quase automático.
- Como só têm 15€ para gastar os alunos podem facilmente perceber que apenas os valores assinalados a verde interessam para a resposta. No entanto, a professora pode aproveitar os restantes valores para fazer apelo, mais uma vez, ao cálculo mental — *Se quisermos comprar o elefante e o rinoceronte, quanto dinheiro nos falta?*; *Se quisermos gastar exactamente 20€, quantas possibilidades temos de escolher os brinquedos?*... Algumas das respostas surgem da observação directa da tabela.
- Rapidamente os alunos identificam a existência de valores duplicados aos quais vão corresponder os mesmos pares de brinquedos (por exemplo, ovelha e urso ou urso e ovelha). Se riscarem os valores que correspondem a pares de brinquedos repetidos, ficam apenas com os doze pares que respondem à questão lançada pela professora.
- Com a ajuda da professora, os alunos podem ainda analisar a tabela e encontrar algumas particularidades. Os valores que se encontram em posições simétricas relativamente a uma das suas diagonais (da esquerda para a direita, de cima para baixo) repetem-se, o que pode tornar supérfluo o preenchimento da totalidade da tabela. Se olharmos para a outra diagonal, os valores das linhas que lhe são paralelas, surpreendentemente, repetem-se.

Numa futura sessão seria interessante colocar estes alunos num contexto real de uma loja, dar-lhes dinheiro e ver como se desenvencilham, que tipo de produtos compram e como resolvem os seus problemas monetários. A Matemática procura, desta forma, um contexto real para dar sentido ao trabalho com os números e as operações e, ao fim e ao cabo, para ela própria ter sentido para os alunos.

Em jeito de conclusão

Com os episódios de sala de aula apresentados pretendeu-se evidenciar que o estabelecimento de conexões matemáticas pode surgir no 1.° ciclo do ensino básico, logo desde o 1.° ano, relacionando diferentes temas da Matemática, a Matemática com outras áreas curriculares e ainda a Matemática com a realidade.

É importante que os alunos sintam que os conceitos matemáticos se encontram interligados e não isolados. Por exemplo, é possível estudar os números relacionando-os com conceitos geométricos, com situações do mundo que nos rodeia e até com outras áreas curriculares.

Para tal, o papel do professor é primordial quer na selecção das tarefas quer na condução da aula, principalmente, no momento de discussão dos trabalhos realizados pelos alunos e no momento de síntese. A minha experiência profissional permite-me defender que numa aula bem estruturada e orientada para o trabalho sobre os conceitos matemáticos é mais provável que aconteça uma aprendizagem matemática significativa, uma vez que também é mais provável haver um maior empenho e uma maior motivação, por parte dos alunos.

Por fim, pode referir-se que o PFCM proporcionou aos professores envolvidos nestas aulas uma discussão prévia do trabalho a desenvolver e uma reflexão baseada na análise crítica e construtiva sobre a realidade da sala de aula, perspectivando não só a melhoria da prática de cada um mas também, e sempre, a partilha de experiências com os restantes professores do grupo de formação.

Notas

1 Adaptada de Brocardo, J., Delgado, C. & Mendes, F. (2010) *Números e Operações. 1.° Ano*. Ministério da Educação. DGIDC.

2 Adaptada de Equipa do projecto Desenvolvendo o Sentido do Número: Perspectivas e Exigências Curriculares. (2005). *Desenvolvendo o Sentido do Número. Materiais para o educador e para o professor do 1.° ciclo*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Referências bibliográficas

Bamberger, H. J.; & Oberdorf, C. (2007). *Introduction to Connections*. Portsmouth: Heinemann.

Boavida, A. M.; Paiva, A. L.; Cebola, G.; Vale, I.; & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação — Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (versão portuguesa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P.; Serrazina, L.; Guimarães, H. M.; Breda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Meneses, L.; Martins, M.E.G.; & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Agradecimentos

Lurdes Pereira, Maria José Guedelha e Rosa Trigueiro, professoras do 1.° ciclo do ensino básico que comigo trabalharam no PFCM, no ano lectivo de 2009/10 e que, além disso, me facultaram as resoluções dos alunos que ilustram este artigo.

Graça Cebola

Professora Adjunta da Escola Superior de Educação
Instituto Politécnico de Portalegre

Conexões: Matemática e Física

Um caminho sempre a par

Alexandre Costa

A relação entre a física e a matemática é tão antiga como a sua existência. O aprofundamento da relação entre ambas tem vindo a evoluir de tal forma que não é possível, nos domínios de investigação de ponta, conceber o desenvolvimento de uma sem a existência da outra.

Esse facto, na física, é por demais evidente. Embora a física seja por natureza uma ciência empírica, a relação encontra-se de tal modo intrincada que há quem considere que «nos dias de hoje, tal é a obsessão com formalismo e matemática, que a física se perde de vista» (Magueijo, 2010, p. 7).

Embora exista algum exagero na afirmação anterior não deixa de ser inequívoca a relação crescente entre a investigação de ponta nas duas áreas desde o início do século XX, tendo a aplicação de novos métodos matemáticos (à época), como o cálculo tensorial (Kline, 1972, pp. 1122-1127), para o desenvolvimento da teoria da relatividade geral levado Einstein a afirmar (*ibid, ibidem*):

«Desde que os matemáticos invadiram a relatividade, eu próprio deixei de a entender».

De facto, nos últimos anos a relação entre a física e a matemática tornou-se tão intrincada que o desenvolvimento de uma está muitas vezes relacionada com os (ou condicionada pelos) desenvolvimentos na outra, o que faz com que estar na linha da frente da investigação em qualquer destas áreas implique um completo conhecimento dos desenvolvimentos da investigação na outra. Mas, embora o esforço para que tal acontecesse no passado fosse menor, assim tem sido desde sempre.

O desenvolvimento da agricultura, criou a necessidade de medir áreas e a vontade de medir a posição dos astros com precisão dia após, dia levou à necessidade de medir ângulos relativos e criar equações angulares para o movimento dos corpos celestes.

Novos problemas físicos sempre criaram a necessidade de desenvolver novos métodos matemáticos e assim continua a ser, trabalhando físicos e matemáticos conjuntamente nas questões mais complexas em que a investigação científica se encontra actualmente envolvida.

A construção do conhecimento físico e do conhecimento matemático

Independentemente de questões de notação e das diferenças no modo como os físicos e matemáticos olham para as situações, houve sempre uma interpenetração clara entre a física e a matemática que gerou a evolução destes dois domínios do conhecimento humano. Embora os biólogos tenham já demonstrado que não existe uma correspondência passo a passo entre o desenvolvimento da espécie (filogenia) e o desenvolvimento do indivíduo (ontogenia), sabe-se que existe uma relação clara entre a forma como um indivíduo se desenvolve e a forma como a espécie se desenvolveu. Também se sabe que, como foi primeiramente vislumbrado por Jean Piaget (1929, 1963), o desenvolvimento intelectual está claramente relacionado com a evolução biológica do indivíduo (Sprinthall e Sprinthall, 1993). O desenvolvimento intelectual é necessariamente lento e essencialmente qualitativo: a evolução da inteligência envolve o gradual aparecimento de diferentes fases, distinguidas pela construção de esquemas conceptuais qualitativamente diferentes. Embora Piaget compreenda a existência de processos dependentes do indivíduo, nas fases de desenvolvimento cognitivo, não considera essas diferenças individuais nem o mundo das emoções. Não estava interessado em diferenças individuais, uma vez que o seu interesse era claramente epistemológico. Para muitos, esta é a maior falha da sua teoria (Lawson, 1991) e um aspecto que não pode ser descurado por nenhum professor.

Respeitando as diferenças de desenvolvimento individuais, a aprendizagem da matemática e da física deve assentar numa progressão semelhante à que foi realizada no desenvolvimento destes domínios do saber.

E desenvolveram-se sempre a par. A física suporta-se na matemática e a matemática encontra o sentido da sua existência na análise física de fenómenos e processos, seja através da elegância dos métodos analíticos, seja pelo poder dos métodos de modelação numérica.

As primeiras operações matemáticas desenvolveram-se no sentido de acelerar o modo de contabilizar ganhos e perdas ou de contabilizar a quantidade de unidades numa dada quantidade de conjuntos de igual dimensão. Depois foi necessário aprender a medir áreas e volumes. E as situações foram crescendo em complexidade. O mesmo deve acontecer com a aprendizagem dos alunos. Reparem que não falo em ensino. Não é possível construir um prédio sem alicerces, do mesmo modo que não seria possível a Euler criar a sua matemática no século VI a.C.. De igual modo, um professor pode convencer-se que se ensinar bem cálculo tensorial a alunos eles aprenderão, mas tal só acontecerá se as fundações necessárias estiverem todas presentes na estrutura cognitiva dos alunos, ou seja, quando eles estiverem preparados para aprender.

Obviamente que, tendo que conseguir a aprendizagem, em 12 anos, por parte dos alunos, da matemática e da física fundamentais para poder possuir um pensamento físico e matemático, não se poderá deixar que os alunos tenham que tropeçar na necessidade de aprender, pois demorou ao homem actual cerca de 10000 anos para chegar ao presente estado do conhecimento por esta via. De igual modo, é necessário proceder a alguns saltos, não perdendo tempo nos erros de percurso cometidos pela espécie humana, como, por exemplo, no desenvolvimento do modelo geocêntrico, sem, no entanto, deixar de os apresentar sumariamente aos alunos.

É necessário começar pelas fundações e construir. E é preciso confrontar os alunos com problemas concretos que «forcem» a sua aprendizagem. A qualidade das aprendizagens será tanto maior quanto mais motivados estiverem os alunos, por sentirem que os conteúdos a ser estudados estão relacionados com a sua vivência pessoal.

Para muitos investigadores em educação (Gowin, 1981, Moreira e Buchweitz, 1993, Novak e Gowin, 1999, Mintzes *et al.*, 2000, etc.), uma boa aprendizagem exige a participação activa dos alunos, a fim de construir o seu próprio conhecimento. Na verdade, como o estudante, ainda que muito influenciado por factores sociais (Vygotsky, 1998), é o resultado da sua própria aprendizagem, esta constitui um processo individual e profundamente ligado à idiossincrasia do indivíduo (Gowin, 1981, p. 124 e 125), pelo que é necessária a sua participação activa em todos os processos (Papert e Harel, 1991).

Acredita-se actualmente que uma boa aprendizagem exige igualmente a criação de um ambiente de aprendizagem no qual os alunos interagem com objectos e ideias e negoceiam significados entre si e com os professores, para o que alguns autores chamam um ambiente construtivista da aprendizagem (Cunningham, Duffy e Knuth, 1993, Jonassen, 1994, Savery & Duffy, 1996, Gonçalves, 2004). Ao professor caberá um papel de facilitador da dinâmica de aprendizagem do aluno, o inverso do que acontecia na pedagogia passiva tradicional em que o professor era visto como um veículo de transmissão de conhecimentos. A aprendizagem deverá surgir da necessidade, mas essa necessidade tem que ser incentivada usando exemplos motivadores do quotidiano.

O currículo dos alunos e a concertação dos programas

No currículo dos alunos, a coordenação dos conteúdos de matemática e de física está, no essencial, bem conseguida, embora a concretização da sua leccionação nem sempre seja conseguida.

Os alunos iniciam formalmente a aprendizagem da física no 7° ano de escolaridade embora de um modo informal esse processo comece muito antes. Na altura em que iniciam a sua aprendizagem formal, existem alguns pré-requisitos matemáticos de base que são fundamentais, como as operações com potências de base 10, o trabalho com equações do primeiro grau, o trabalho com equações literais e os conceitos de proporcionalidade directa e inversa.

Até ao final do 3° ciclo do ensino básico, tornam-se necessários conhecimentos sobre equações da recta, de proporcionalidade quadrática e análise gráfica de rectas. Pode-se dizer que até este nível de ensino, sempre que os conteúdos matemáticos que constituem pré-requisitos para o ensino da física, foram sempre leccionados previamente, tal como no início do ensino secundário.

No ensino secundário, a utilização da trigonometria e das propriedades dos triângulos rectângulos encontra-se quase omnipresente no ensino da física, tendo aplicações frequentes nas definições paramétricas de vectores que têm mais do que uma dimensão espacial. Muitas vezes, porque um ou dois dos componentes de um vector não possui qualquer contribuição para a análise de um sistema e das alterações por ele sofridas, basta aos físicos, trabalhar com a componente do sistema na dimensão referida. Outras vezes, possuindo-se apenas a medida do vector e a sua orientação relativamente a um dos eixos do referencial (ou sistema de eixos de referência) é necessário obter a sua descrição cartesiana.

É frequente a utilização da decomposição do vector nos seus componentes, em particular, quando se pretende obter uma resultante da acção simultânea de vários componentes da mesma grandeza, como ocorre, por exemplo, no caso do cálculo das resultantes forças que actuam sobre um corpo (a soma vectorial). Para qualquer um vector força, $\vec{F}$, de medida F que descreva, no plano xy, um ângulo α, relativamente ao eixo dos xx, pode escrever-se o vector força em função dos seus componentes como sendo

$$\vec{F} = F.\cos(\alpha).\vec{i} + F.\sin(\alpha).\vec{j}(N) \qquad (3)$$

A utilização do círculo trigonométrico tem as mais diversas aplicações, em particular na análise de fenómenos periódicos oscilatórios, seja nos cursos científico-humanísticos, seja nos cursos profissionais. Na realidade, muitos fenómenos periódicos estudados pela física podem ser definidos como funções sinusoidais do tempo. No entanto, os máximo e mínimo das equações físicas são definidas pela amplitude da grandeza em estudo e não com +1 e −1, respectivamente, como sai das funções seno e co-seno. Por exemplo, quando se analisa a variação da corrente alternada num determinado ponto de um circuito eléctrico em função do tempo (uma função sinusoidal), a fase φ da corrente é definida em função do ângulo num círculo análogo ao trigonométrico de raio igual ao valor da intensidade máxima, Imax, onde pode ser projectado o valor da intensidade de corrente, I. Esse círculo recebe o nome de diagrama fasorial da corrente alternada (Albuquerque, 2007).

A função que define a intensidade da corrente em cada instante vem, assim,

$$I(t) = I\ \max.\sin(\varphi) = I\ \max.\sin(\varphi_0 + \omega t)(A) \qquad (4)$$

sendo φ_0 a fase inicial e $\omega = 2\pi/P$, em que P é o período, ou seja, o intervalo de tempo entre dois instantes sucessivos em que a onda se encontra na mesma fase φ.

Existem muitos exemplos de fenómenos leccionados no ensino secundário que podem ser analisados da perspectiva da sua periodicidade, como no caso anterior, nomeadamente osciladores harmónicos movimentando-se em movimento harmónico simples, o próprio movimento circular em torno de um círculo de raio R, em que o vector posição, $\vec{r}$, em cada instante pode ser definido (considerando a origem dos ângulos θ_i no eixo dos xx) como

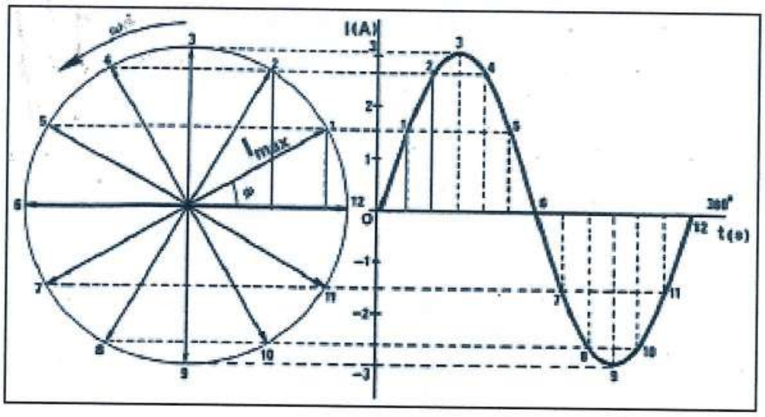


Figura 1. Representação da intensidade de corrente de uma corrente alternada em função do tempo vendo-se a projecção no diagrama fasorial.

$$\vec{r} = R.\cos(\theta_0 + \omega t).\vec{i} + R.\sin(\theta_0 + \omega t).\vec{j}(m) \qquad (5)$$

O cálculo diferencial usando derivadas é necessário apenas na Física do 12° Ano, pelo que a leccionação do conceito de derivada pela definição e de algumas regras de derivação no 11° Ano de Matemática se encontra perfeitamente adequado. Existem, no entanto, algumas escolas onde a leccionação desse conteúdo é deixada para o 12° Ano, o que cria, aos professores de física que leccionam a disciplina nesse ano, o constrangimento adicional de ter que ensinar as derivadas na disciplina de Física. Felizmente essas situações são a excepção e não a regra.

No final do ensino secundário, para a definição de grandezas envolvidas nos principais princípios de conservação, é necessário também recorrer a operações vectoriais.

Por exemplo, segundo o princípio de conservação da energia, uma das formas de alterar a energia de um sistema é através da realização de trabalho (por ele ou sobre ele). O trabalho é a medida da energia transferida para/de um sistema quando uma força actua sobre ele, enquanto ele se desloca, sendo a soma da energia fornecida/retirada pela componente da força que actua na direcção do deslocamento em cada instante e que se calcula através da equação 6 (Serway *et al.*, 2004; Tipler, 2004), onde se encontra patente o produto interno (produto escalar) de vectores

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad (6)$$

Embora, no ensino secundário, se utilizem normalmente apenas movimentos de corpos actuados por forças constantes e deslocamentos na mesma direcção ($\Delta\vec{r}$) que permitem a simplificação da expressão para

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \|\vec{F}\| \cdot \|\Delta\vec{r}\| \cdot \cos\alpha \qquad (7)$$

em que α é o ângulo entre a força e o deslocamento, no 12° Ano de Física é já comum os docentes utilizarem o conceito de produto escalar com os alunos. Normalmente, nessa altura os alunos possuem já o conhecimento matemático necessário para a realização deste tipo de operações.

Também o produto externo (produto vectorial) de vectores é utilizado, em física, na definição de diversas grandezas; no entanto, neste caso, o conceito não é leccionado no ensino secundário na disciplina de Matemática.

Embora, num esforço de concertação entre os autores dos programas, a utilização de grandezas associadas à dinâmica de rotação tenha saído dos programas do ensino secundário, o produto externo de vectores continua a ser utilizado na definição da força magnética que actua uma carga num campo magnético que é dada (Serway *et al.*, 2004; Tipler, 2004) por

$$\vec{F_m} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \qquad (8)$$

A necessidade de utilização do produto externo é muitas vezes minimizada no ensino Física, através da selecção de situações em que os exercícios possam ser resolvidos apenas utilizando a intensidade do vector força magnética

$$\|\vec{F_m}\| = q \cdot \|\vec{v}\| \times \|\vec{B}\| \cdot \sin\alpha \qquad (9)$$

definindo-se, depois o sentido do vector pela regra da mão direita, pela regra do parafuso ou pela regra do saca-rolhas. No entanto, esta não é a forma mais adequada de resolver o problema, havendo muitos professores de física que optam por ensinar o produto vectorial de vectores, já que este tópico não é leccionado, no ensino secundário, na disciplina de matemática. Esta é uma situação que deveria ser corrigida na elaboração dos programas.

Apesar de nos actuais currículos parecer ter havido uma maior tentativa de concertação entre os autores dos programas de matemática e de física, existem ainda algumas questões por resolver no que diz respeito aos currículos.

Mas também a concertação entre docentes dos dois grupos disciplinares deveria estar mais presente na prática da didáctica das duas disciplinas, conjugando os conteúdos das duas disciplinas para a utilização nos problemas colocados aos alunos. O facto de trabalharem os conteúdos em ambas as disciplinas, mantendo a visão física na matemática e a visão matemática na física, decerto contribuiria (e afirmo por experiência própria que contribui) para produzir aprendizagens mais significativas, pois em cada disciplina estar-se-ia a valorizar aquilo que o aluno sabe da outra. Citando Ausubel (1968): «O factor mais importante que influencia a aprendizagem do aluno é o que ele sabe. Averigúem aquilo que ele sabe e ensinem em conformidade.»

A preocupação de concertar esforços deve ser aliada a uma preocupação em levar os alunos a resolver problemas em que as duas disciplinas estejam envolvidas. No final, isto contribuiria para que os alunos estivessem constantemente imersos nos processos de pensamento que definem estas duas áreas do conhecimento e como diria Geary (1995, p. 33 *apud* Mathews, 1997, p. 9) «Se quiser que alguém que saiba alguma coisa, ensine-lhe ... se quiser alguém que saiba alguma coisa e mantenha um conhecimento por um longo período de tempo, então deixe-a praticar».

Uma vez que é ao aluno que cabe aprender, e é ele que deve ser o foco do ensino, ao professor cabe a tarefa de apresentar situações problemáticas concretas que impliquem a descoberta dos conceitos e o ajudar a atalhar, cabendo-lhe ainda a difícil (para não dizer quase impossível) tarefa de «corrigir» concepções «erradas», que o estudante cria durante as suas interpretações ao longo da aprendizagem, pois «o conhecimento é adquirido, não por internalização de algo exterior, mas, pelo contrario, é algo construído a partir de dentro» (Osborne e Freiberg, 1985, p.82, *apud* Mathews, 1997, p. 9). Neste tipo de ensino, o aluno tem responsabilidade pelo que é ensinado e pelo que é aprendido, tendo que ser claro o compromisso com o desenvolvimento psicológico individual dos alunos, apesar da importância do desenvolvimento potencial numa perspectiva vygotskiana. Os alunos terão de ser motivados a descobrir por si próprios (Martin, Sexton, Wagner e Gerlovich, citado por Toh *et al.*, 2003, p. 197). De uma perspectiva psicológica, é preciso parar de olhar para a mente do aluno como um vazio que deve ser preenchido pelo professor. Em vez disso, é necessário valorizar as suas concepções e trabalhar sobre elas. A aprendizagem do aluno, bem como os conteúdos indirectos que utiliza na aprendizagem têm um papel crucial na construção dos seus conhecimentos.

A necessidade de normalização no ensino das duas disciplinas

Até ao século XVI, os homens de saber eram filósofos na verdadeira acepção da palavra, ou seja eram indivíduos que tocavam todos os domínios do saber e que quando tinham uma problema físico para resolver, que requeria uma nova matemática, parte do seu trabalho de investigação passava precisamente por obter as regras matemáticas que lhes permitissem simplificar os seus cálculos. A partir do século XVI começaram a surgir investigadores que cada vez mais assumiam interesses meramente físicos ou sobretudo matemáticos e que, por ausência de uma comunicação formal, geraram algumas diferenças no modo de tratamento das questões matemáticas na física e na matemática.

Um exemplo claro disso, embora também houvesse interesses nacionalistas envolvidos, ocorreu quando Isaac Newton teve a necessidade de demonstrar que, tal como havia proposto Johannes Kepler, as órbitas dos planetas em torno do Sol eram elípticas. A matemática existente à época não permitia a definição das equações do movimento numa órbita elíptica, o que levou a que Isaac Newton desenvolvesse uma matemática equivalente ao cálculo diferencial

(Fauvel, 1990; Struik, 1987; Boyer, 1959). Criou para este fim o chamado método das *fluxiões* (em inglês, *fluxions*) (Struik, 1987), que são, no essencial, as nossas *derivadas*, sendo o caso particular das derivadas em relação ao tempo.

Consideremos por exemplo, a posição de um corpo. Os fluxiões $\dot{x}$, $\dot{y}$ e $\dot{z}$ medem a variação das coordenadas espaciais por intervalo de tempo. Considerando o vector posição, $\vec{r}$, num referencial métrico cartesiano e ortonormado (com versores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), como sendo uma consequência das suas coordenadas espaciais, pode dizer-se que a variação de posição por intervalo de tempo, que recebe o nome de velocidade, é dada por

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k}(m) \tag{10}$$

Obviamente, foi necessário desenvolver depois a operação inversa, que permitia a definição de posições dada a sua derivada e uma posição, o que levou Newton ao desenvolvimento do conceito de integração.

É provável que muitas partes dos *Principia* (Newton, 1990), tenham sido deduzidas por Newton através do método dos *fluxiões*, embora depois tenham sido convertidas ao método geométrico, por este ser mais compreensível para a comunidade científica da época.

Nessa mesma época, o alemão Gottfried Wilhelm von Leibnitz desenvolvia, por via paralela, a notação que ainda hoje é utilizada em matemática para o cálculo diferencial e integral. Note-se que as duas notações são equivalentes tendo-se

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{11}$$

Não obstante a formalização introduzida por Leibnitz, é ainda comum, para a maioria dos físicos, por simplicidade de notação, a utilização da simbologia dos *fluxiões* para as derivadas temporais de grandezas.

Situações similares ocorrem em diversos conteúdos específicos, embora a normalização tenda a eliminar as discrepâncias entre as duas áreas. Como exemplos, vou apenas citar dois casos particulares.

O primeiro refere-se à medida de um vector: enquanto em matemático a representação da medida de um vector, $\vec{a}$, é feita apenas pela sua norma, $\|\vec{a}\|$, em física pode ser representada pela norma, pelo módulo, $|\vec{a}|$, ou apenas por a, sendo neste caso difícil a sua distinção do valor da sua componente no caso de vectores unidimensionais (Costa & Rosa, 1996). Tal como no caso dos *fluxiões*, o uso das diferentes notações, quer por docentes, quer por alguns autores de manuais escolares, tem apenas por base uma diminuição dos caracteres usados na escrita.

O segundo exemplo de discrepância era o que tradicionalmente ocorria quando se falava de inclinação. Para os matemáticos os conceitos de declive e de inclinação são coincidentes; no entanto, para alguns físicos, e como se pode encontrar nalguns manuais escolares, embora o conceito de declive gráfico seja, obviamente, igual ao da matemática, o mesmo não acontece com o de inclinação, por exemplo de um plano inclinado. Enquanto na matemática a inclinação é dada pela tangente do ângulo α na base da subida, até recentemente, para a generalidade dos físicos, a inclinação era dada pela função seno do mesmo. Assim, na matemática, o ângulo $\alpha = 45°$ representa um declive igual a 1 e também uma inclinação de 100% ($\tan\alpha$); na física, o mesmo ângulo representa um declive igual a 1, mas uma inclinação de 70,7% ($\sin\alpha$).

Figura 2. Medição da distância para determinação do desnível de uma estrada pelo método tradicional. O ângulo α é determinado usando um teodolito.

A razão justificativa deste facto prendia-se com o modo como era feita a medição: com um teodolito media-se o ângulo de inclinação e com uma fita ou uma roda de medição media-se a distância entre dois pontos num plano inclinado. A partir daí era definida a inclinação como sendo a razão entre a altura que era subida (cateto oposto) e a distância percorrida na trajectória (hipotenusa) que é, deste modo, dada pelo seno do ângulo de inclinação, α (figura 2). Obviamente que com o crescente aumento de imagens de satélite o que se passa a medir são distâncias horizontais, cada vez são mais os físicos e engenheiros que começam a utilizar a função tangente.

Mas, como se pode ver dos dois exemplos anteriores, os docentes de física e de matemática devem ter uma preocupação na normalização e devem trabalhar conjuntamente nesse sentido.

Reflexão final

Como se disse, tem havido uma clara melhoria na concertação dos programas de matemática e de física, embora existam ainda algumas arestas a ser limadas no futuro.

O grande óbice encontra-se agora no estabelecimento de pontes interdisciplinares na prática quotidiana da actividade lectiva. É preciso colocar ênfase na resolução de problemas que permitam aos alunos um cimentar dos seus conhecimentos sobre as duas disciplinas. A resolução de verdadeiros problemas é morosa e não pode esperar-se que seja feita no dia do teste: requer outro tipo de trabalho.

No entanto, a resolução de problemas é a melhor forma de cimentar conhecimentos de uma forma significativa. O trabalho hercúleo de ser professor está na concepção de problemas que, de facto, façam a diferença, pois é necessário fazê-los a cada ano pois no ano seguinte os problemas do ano anterior já são conhecidos e deixam de o ser.

Mas, mais do que a informação transmitida, é o trabalho desenvolvido de modo a levar os alunos a querer vencer o desafio da sua resolução que será o grande contributo do professor para as aprendizagens significativas dos seus alunos. O resto ... depende de pequenas células cinzentas.

Bibliografia

Albuquerque, R.O. (2007) *Análise de circuitos em corrente alternada*, Ed. Erica, São Paulo.

Ausubel, D. (1968) *Educational Psychology: A Cognitive View*. Holt, Rinehart & Winston, New York.

Costa, A. J., Rosa, A. M. (1996) O módulo e a norma, *Gazeta de Física* Vol. 19 (1), pp. 11–12.

Cunningham, D, Duffy T. M., Knuth, R. (1993) *Textbook of the Future*. In C. McKnight (Ed.) *Hypertext: A psychological perspective*, Horwood Pubs, London.

Fauvel, J. (Editor) (1990), *Let Newton Be! — a New Perspective on his Life and Works*, Oxford University Press.

Gonçalves, L. (2004) Haverá lugar para afectos na gestão curricular?, *Gestão Curricular-percursos de investigação*, Universidade de Aveiro, Aveiro, p. 159–172.

Gowin, D.B. (1981) *Educating*, 1st Ed. Cornell University Press, Ithaca.

Jonassen, D.H. (1994) Thinking Technology: Toward a constructivist design model, *Educational Technology*, 34 (3), 34–37.

Kline, Morris (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*, *Vol. 3*. Oxford University Press, Oxford.

Lawson, A (1991) Is Piaget's epistemic subject dead?, *Journal of Research in Science Teaching*, *28*, 581–592.

Magueijo, J. (2010) A anarquia e as leis da física, *Gazeta de Física*, Vol. 33 (2), pp. 2–8.

Mathews, M.R. (1997) Introductory comments on Philosophy and Constructivism in Science Education, *Science & Education* 6, 5–14.

Mintzes, J., Wandersee, J., Novak, J. (2000) *Ensinando Ciência para a compreensão*, Plátano Edições Técnicas, Lisboa.

Moreira, M., Buchweitz, B. (1993) *Novas Estratégias de Ensino e Aprendizagem*, Plátano Edições Técnicas, Lisboa.

Newton, I. (1990) *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, republicação da obra de 1687, Ed. Edusp — Nova Stella, São Paulo.

Novak, J., Gowin, D.B. (1999) *Aprender a Aprender*, 2ª ed., Plátano Edições Técnicas, Lisboa.

Papert, S., Harel, I. (1991) *Constructionism*, Ablex Publishing Corporation.

Piaget, J. (1929). *The Child's Conception of the World*. NY: Harcourt, Brace Jovanovich.

Savery, J. R., Duffy, T. M. (1996) *Problem based learning: An instructional model and its constructivist framework*. In Brent G. Wilson (Ed), *Constructivist learning environments: Case studies in instructional design*. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publication.

Serway, Raymond A.; Jewett, John W. (2004). *Physics for Scientists and Engineers* (6th ed. ed.). Brooks/Cole.

Sprinthall, N.A., Sprinthall, R.C., (1993) *Psicologia Educacional*, McGraw-Hill de Portugal, Lisboa.

Struik, D.J. (1987) *A Concise History of Mathematics*, ed. Dover.

Boyer, C.B. (1959) *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, 4th Ed., Ed. Dover.

Tipler, Paul (2004). *Physics for Scientists and Engineers: Mechanics, Oscillations and Waves, Thermodynamics, 5th ed.*. W. H. Freeman.

Toh, K.-A., Ho, B.-T., Chew, C.M.K., Riley II, J.P. (2003) Teaching, Teacher Knowledge and Constructivism, *Educational Research for Policy and Practice*, *2*, 195–204.

Vygotsky, L. S. (1998) *A Formação Social da Mente*. Ed. Martins Fontes, São Paulo, Brasil.

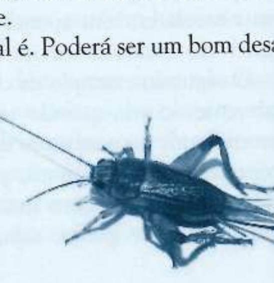
Alexandre Costa
Escola Secundária de Loulé

Matemática à Espreita: A temperatura calculada por um grilo

Os biólogos observaram que a temperatura influencia o metabolismo dos animais, acelerando-o. Por exemplo, o canto de grilos de uma determinada espécie está relacionado com a temperatura ambiente de um modo linear. Quanto maior a temperatura, maior o número de vezes que o grilo canta.

Em teoria, a relação é linear e tem uma determinada lei, diferente de espécie para espécie. Supõe-se que a primeira fórmula para a determinação da temperatura do ar a partir do canto dos grilos foi encontrada em finais do século XIX por um professor de Física. Para o verificar basta ouvir um grilo e usar um relógio. Por comodidade, regista-se o número de vezes que o grilo canta a cada período de 15 segundos. Procura-se uma média dos vários valores obtidos e, a partir daí, basta ter em conta a tal relação linear para se ficar a conhecer a temperatura ambiente.

Os grilos parecem saber qual é. Poderá ser um bom desafio para um dia de verão!



SIEM à beira Ria

Nélia Amado
Rosa Tomás Ferreira

Nos dias 4 e 5 de Setembro de 2010 realizou-se em Aveiro o XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática. Ao contrário do que era habitual, o seminário decorreu nos dias seguintes ao ProfMat.

O número de inscritos rondou os 150, incluindo participantes portugueses, espanhóis e brasileiros, que se distribuíram por 6 simpósios, com os seguintes temas: Conhecimento e práticas profissionais de professores de Matemática; Comunicação matemática; Resolução de problemas e raciocínio matemático; Formação e desenvolvimento profissional de professores; Aprendizagem da Matemática; e Questões históricas e culturais no ensino-aprendizagem da Matemática.

No primeiro dia, após a tradicional sessão de abertura, Gary Martin, da Universidade de Auburn (EUA), apresentou a Conferência Plenária intitulada *Reasoning and sense making as the focus for mathematics education: What the research tells us*. Com base no documento recentemente publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics, *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense-making* (2009), Martin debruçou-se na ênfase que os Estados Unidos da América estão a dar ao raciocínio matemático, em particular ao raciocínio algébrico, e à necessidade de os alunos darem sentido e significado aos conceitos, símbolos e procedimentos algébricos com que lidam na matemática escolar. Martin referiu-se a vários estudos relacionados com o desenvolvimento do raciocínio e do *sense-making* como constituindo os pilares fundamentais da publicação referida e enfatizou a relação mútua que existe entre estas duas noções: se, por um lado, o raciocínio deve assentar na compreensão conseguida através da atribuição de significado a uma dada situação, a procura de uma razão por que uma dada situação é verdadeira contribui para a própria compreensão dessa situação. Ainda na parte da manhã, teve lugar a primeira sessão de comunicações nos vários simpósios temáticos.

Na parte da tarde, Susana Carreira, da Universidade do Algarve, trouxe de volta o tema da Resolução de Problemas no ensino e aprendizagem da Matemática, dando uma panorâmica da investigação actual nesta área, focando-se em três revistas internacionais de referência: *ZDM — The International Journal of Mathematics Education*, *Educational Studies in Mathematics* e *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. Com o título *Fisionomias da resolução de problemas no ensino da Matemática: A «clássica», a «da tecnologia» e a «da modelação»*, esta investigadora proporcionou-nos uma imagem das várias facetas que a Resolução de Problemas tem vindo a assumir e de como se tem ramificado pelas múltiplas ligações com outros domínios, designadamente a utilização das tecnologias e a ênfase em actividades de modelação matemática. Susana Carreira evidenciou a vitalidade deste tema na investigação actual, contrastando com um anterior «apagamento» a que a Resolução de Problemas tinha sido remetida.

Seguidamente, decorreu o Espaço GTI no âmbito do qual foi apresentada a nova publicação deste grupo de trabalho da APM, *O Professor e o Programa de Matemática do*

Ensino Básico, pelas vozes de Cláudia Nunes, Sandra Nobre e Anabela Gaio. Este livro foi descrito como um importante instrumento de trabalho no momento da generalização deste Programa. Os trabalhos de sábado terminaram com mais uma sessão de comunicações em paralelo, no âmbito dos 6 simpósios já descritos.

Para concluir o dia, a organização do XXI SIEM brindou-nos com um *cocktail* ao ar livre, à beira da lindíssima Ria de Aveiro, animado com música ao vivo. Este foi um momento de convívio e de troca de ideias entre os participantes: falou-se dos vários projectos que se vão desenvolvendo pelo país e, claro, das restrições orçamentais; foram-se fazendo planos para novos encontros nacionais e internacionais. Seguiu-se um jantar de grande qualidade gastronómica onde, entre várias iguarias, não faltaram os tradicionais *ovos-moles* que foram repetidos e repetidos a pedido de vários apreciadores. Para rematar gloriosamente, os mais persistentes não perderam o «evento-surpresa» da noite: um sarau dirigido pelo «Maestro» José Duarte com a pianista Rosa Antónia Ferreira e um coro de fãs de música tradicional portuguesa. Passou-se um serão muito agradável, além de divertido, e que rapidamente ganhou popularidade no *Facebook* graças às novas tecnologias portáteis!

O domingo começou com a Conferência Plenária de Teresa Neto, investigadora da Universidade de Aveiro, subordinada ao tema *O desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do ensino secundário: recurso a geometrias planas*. Tendo como preocupação de base o desenvolvimento do raciocínio dos alunos (ao nível do ensino secundário), a investigadora debruçou-se sobre uma experiência de ensino que contemplou a abordagem de modelos de geometria plana distintos da geometria Euclideana e o papel da demonstração na aprendizagem da Matemática.

O XXI SIEM contemplou um espaço dedicado à exibição de trabalhos em *poster*, em que os participantes puderam interagir com os autores dos *posters*, trocando ideias ou clarificando aspectos do seu interesse. Em simultâneo, esteve patente a exposição *À procura dos padrões* resultante de um projecto de investigação financiado pela FCT e coordenado por Isabel Vale, da ESE de Viana do Castelo. Após o intervalo, decorreu ainda a última ronda de comunicações organizadas por simpósios.

O programa de trabalhos terminou com o painel plenário em torno das *Metas de Aprendizagem*, moderado por Ana Paula Canavarro, da Universidade de Évora, e que contou com a presença de Lurdes Serrazina (ESE de Lisboa), Jaime Carvalho e Silva (Universidade de Coimbra) e Margarida Abreu (Agrupamento de Escolas de Tondela). As expectativas em torno deste painel eram bastante elevadas dada a actualidade do tema e, como tal, foi bastante participado pelos presentes. Foram colocadas múltiplas questões, evidenciando alguma polémica em torno deste projecto transdisciplinar do Ministério da Educação.

Em jeito de balanço, deixamos algumas reflexões. O SIEM tem constituído um fórum muito importante para investigadores, jovens investigadores e professores, e tem procurado, desde sempre, proporcionar um espaço de intercâmbio entre a investigação e a prática na comunidade de Educação Matemática em Portugal. Actualmente, mercê da evolução e do desenvolvimento que a investigação tem vivido, entre nós, os padrões de natureza científica impõem-se cada vez com maior intensidade. Neste sentido, apresentar, debater e criticar trabalhos de investigação, neste seminário, tem de harmonizar um trabalho sério e construtivo de revisão pelos pares com o empenhamento activo de todos os participantes no decurso das diversas actividades que compõem o seminário, em particular os simpósios de comunicações.

Uma outra questão a ponderar é a da opção pela organização das comunicações em simpósios, uma vez que pode contribuir para um certo isolamento em termos de temáticas e de perspectivas, não conferindo à diversidade de trabalhos de investigação em Educação Matemática no nosso país a importância que ela tem. Este aspecto da organização do SIEM será talvez ainda mais relevante quando existem oportunidades para a realização de encontros temáticos de investigação em Educação Matemática em Portugal.

Nélia Amado
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve

Rosa Tomás Ferreira
Faculdade de Ciências, Universidade do Porto

Possíveis conexões no NPMEB, uma experiência em sala de aula

No passado dia 3 de Setembro, em Aveiro, durante a Sessão Especial «Conexões na revista Educação & Matemática», foram apresentadas por dois autores de programas — Jaime Carvalho e Silva, do Ensino Secundário e João Pedro da Ponte do Ensino Básico — formas de se trabalharem as conexões nos currículos. Ao assistir à sessão veio-me à memória uma aula de 7.º ano, já com o Novo Programa, que envolveu um pouco de História...

O desafio surgiu após a inscrição de três professoras (incluindo eu própria) da mesma escola numa acção de formação realizada no Instituto de Educação. Apesar de dispormos de um significativo conjunto de tarefas apresentadas pela DGIDC, queríamos fazer diferente...

O tema que não se adivinhava fácil, era as Equações, tendo já sido trabalhado com os alunos o tema Sequências.

Partimos de uma actividade proposta pela Educação Matemática n.º 27 com o título Egípcios, *Hindus, tentativas* e *aritmética*, que introduzia os alunos na resolução de problemas numéricos. Esta actividade, depois de adaptada, deu origem a outra com o mesmo nome mas com um objectivo final diferente...

Tarefa 1 — Egípcios, Hindus, tentativas e aritmética

Materiais para a sala de aula
Educação e Matemática, n.º 27, 1993

I. Os Egípcios e so problemas de tentativas

Os antigos egípcios tinham uma estratégia (caminho) especial para encontrar respostas para certo tipo de números, a que chamavam de enigmáticos. É um método de procurar a resposta por tentativas até encontrar o número enigmático.

Trata-se de um método ainda hoje utilizado para a resolução de problemas em matemática. Em grande parte dos casos acaba-se mesmo por descobrir uma regra geral para resolver problemas de um mesmo tipo, a partir de umas quantas tentativas efectuadas.

1. Repara no seguinte exemplo apresentado por um matemático egípcio:

   «O triplo de um número adicionado ao próprio número dá como resultado 24. Qual é esse número?»

   O nosso amigo egípcio começou por experimentar o número 2, ou seja, fazer uma tentativa para verificar se seria o 2 o número enigmático.

   A que conclusão terá chegado? Se o número enigmático não for o 2, tenta tu descobri-lo.

2. Tenta, agora, resolver um novo enigma, usando novamente o «método das tentativas»:

   «Se ao sêxtuplo de um número subtrairmos o dobro desse número obtemos como resultado 512. Qual é o número?»

II. Os Hindus e os problemas numéricos

Os antigos hindus adoravam problemas numéricos. Um matemático chamado Aryabhata, que viveu na Índia, durante o século VI depois de Cristo apreciava problemas deste tipo:

«Se a um certo número adicionarmos 4, o resultado for dividido por 2, o novo resultado multiplicado por 5 e ainda ao novo resultado subtrairmos 6, encontramos como resposta o número 29. Qual era o número inicial?»

Poderás experimentar vários números, por aproximações sucessivas, até encontrares uma resposta. Contudo, Aryabhata descobriu outro caminho para procurar imediatamente o número desejado. Ficou, então, conhecido por método de inversão.

Que caminho será? Por que razão terá ficado conhecido por método de inversão?

1. Depois de fazeres algumas tentativas e com a ajuda de um esquema do problema apresentado, procura descobrir, com os colegas do teu grupo, o método de Aryabhata, isto é, o método que lhe permite chegar ao número pretendido directamente sem usar o método de tentativas.
2. Aplica, agora, o método encontrado a novos problemas do mesmo género:

   2.1. Se dividirmos um número por 6, multiplicarmos o resultado por 5 e adicionarmos 8 ao novo resultado obtemos como resultado 23. Qual é o número inicial?

   2.2. Se a um número adicionarmos 10, ao resultado adicionarmos 3, dividirmos o novo resultado por 4, multiplicarmos o resultado obtido por 7 e finalmente subtrairmos 2, obtemos como resultado 40. Qual é o número inicial?
3. Verificado o método e o seu funcionamento para dois novos exemplos faz, com o teu grupo de trabalho, um pequeno relatório explicando, através de um esquema e palavras vossas, o método de inversão do matemático Aryabhata.

III. Dos problemas numéricos às equações

Muitos dos problemas numéricos, como os dos egípcios e os dos Hindus, podem ser traduzidos por expressões matemáticas a que chamamos equações.

Uma equação é uma igualdade entre duas expressões onde aparece pelo menos um valor desconhecido (incógnita), que se representa por uma letra minúscula.

1. Escreve equações que traduzam os problemas anteriormente apresentados em I e II.
2. As equações, hoje em dia, continuam a ser úteis na resolução de problemas do dia -a dia. Tenta traduzir por uma equação o seguinte problema:

   «Uma estante custa 3 vezes o preço de uma cadeira. Qual é o preço da estante se as duas mercadorias juntas custam 64 euros?»
3. Consegues resolver o problema anterior pelo método da inversão? Explica porquê.

A actividade apresentada foi aplicada nas nossas três turmas e tinha como objectivo principal levar os alunos ao conceito e até mesmo à necessidade formal de Equação.

A tarefa iniciou-se com a exploração dos «problemas numéricos egípcios» e com a discussão sobre a forma como estes os resolviam — método das tentativas.

Ultrapassados os primeiros receios da nossa parte, o método das tentativas foi facilmente compreendido pelos alunos e quiseram logo pô-lo em prática. Foi aí que surgiram as primeiras dificuldades — alguns grupos apesar da discussão que se gerou entre eles, interpretaram erradamente o enunciado. Na questão II, por exemplo, um grupo raciocinou da seguinte forma:

29-6 = 23 : 5 = 4.6 x 2 = 9.2 - 4 = 5.2

R: O numero inicial era 5.2

Na questão I.2., outro grupo, curiosamente, iniciou a actividade traduzindo o problema por uma equação! E depois atribuíram valores a *x*:

$x \times 6 - x \times 2 = 512$

100 x 6 = 600

600 - 200 = 400 → NÃO É

Seguiam-se os hindus com o seu «método da inversão». O relatar deste método, na questão II.2, pretendia ser uma abordagem facilitadora, à posteriori, da compreensão dos princípios de equivalência das equações.

Mais uma vez surgiram diferentes resoluções. Houve erros de escrita mas raciocínios certos:

Alguns dos alunos, surpreenderam-nos, traduzindo o problema na forma algébrica:

1º método	Método de inversão
? + 4 = x	29 + 6 = 35
x ÷ 2 = y	35 ÷ 5 = 7
y x 5 = w	7 x 2 = 14
w - 6 = 29	14 - 4 = 10

E surpresa ainda maior, um grupo de alunos, resumiu o método (questão II.3) utilizando as expressões numéricas. Poucas palavras mas correcto…

2. $\left[\left[\left((40+2):7\right)\cdot 4\right]-3\right]-10 = 11$ (fazer ao contrário para ter o resultado)

Ou correcto e com muitas palavras…

3. O método é utilizado para descobrir um número no início de uma conta ou equação. Temos o resultado de tudo e para descobrir o número inicial é apenas inverter a conta pegando o resultado total e fazendo a conta de trás para frente (ao contrário) invertendo o sinal, tipo, sinal de mais passa a ser menos e de multiplicar fica de dividir e ao mesmo para menos = mais e dividir = multiplicar.

Utilizamos também esse método em ângulos, quando queremos descobrir qual é o resultado de uma incógnita (letra) entre números, usamos esse método para facilitar a descobrir a letra num ângulo.

Na última parte da tarefa foram apresentados aos alunos, problemas numéricos cuja resolução se torna muito morosa pelo método egípcio e impossível pelo método da inversão…

Muitos dos alunos, após referência das professoras à escrita utilizada nas Sequências, conseguiram concluir com sucesso a última questão, chegando à formalização do problema por uma equação embora

2. x preço da estante

x x 3 preço da cadeira

(x + x) x 3 = 64

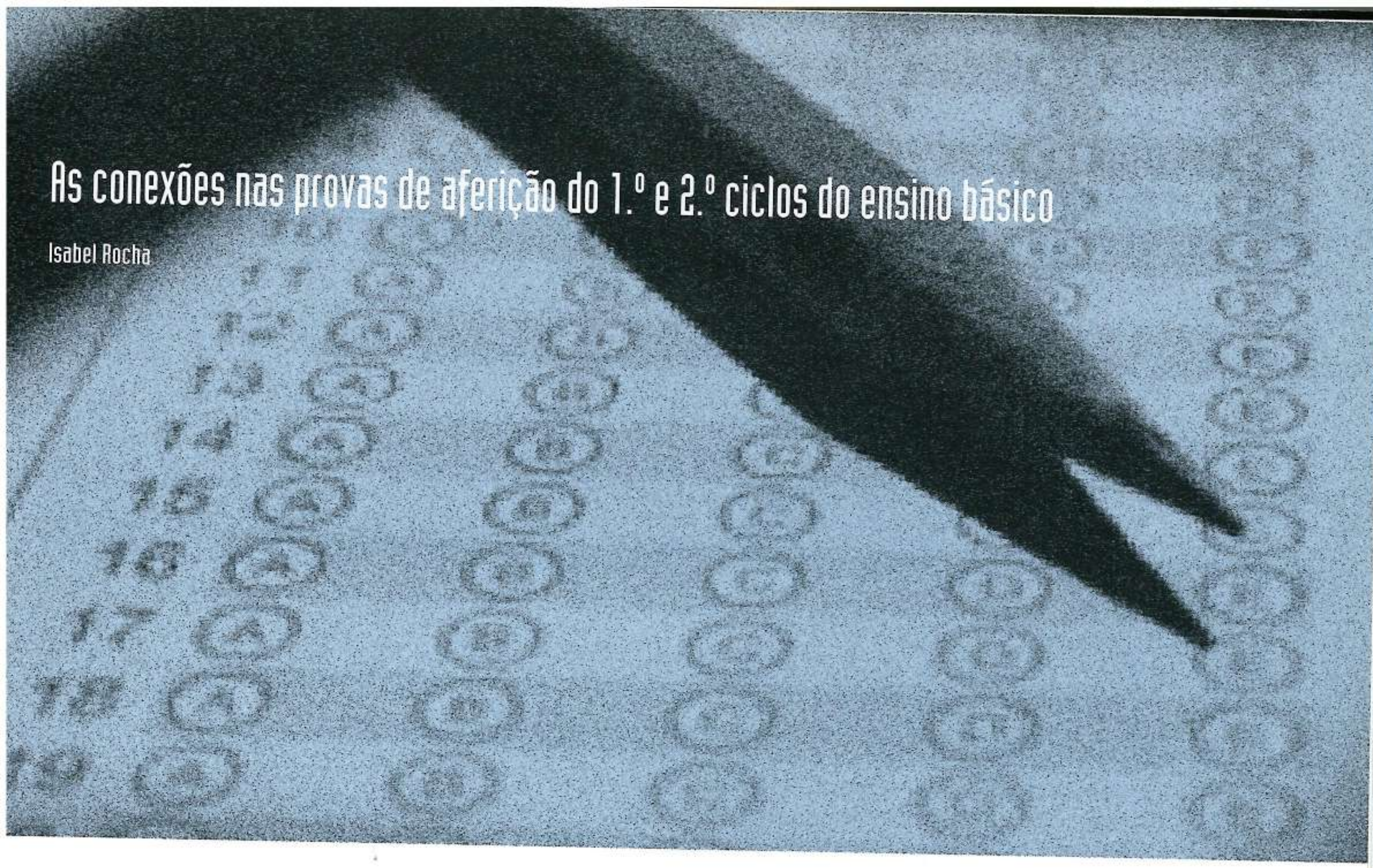
interpretando erradamente o enunciado: Foi muito importante a discussão realizada com toda a turma acerca dos métodos iniciais e da sua diferença para as equações bem como a persistente clarificação da diferença entre termo geral de uma sequência e uma equação. Toda a discussão permitiu que os alunos chegassem por eles à definição de equação. A resolução de equações foi um passo que apenas foi dado nas aulas seguintes mas, a linguagem formal e o conceito de equação estavam estabelecidos.

O facto de o tema ser introduzido informalmente permitiu uma conversa acerca da evolução dos processos matemáticos (científicos), acerca da relevância do papel das antigas civilizações no sistema numérico e na resolução de problemas numéricos, estabelecendo uma conexão com a História da Matemática. A tarefa foi apropriada pela generalidade dos alunos (mesmo os mais fracos!) e permitiu a introdução do conceito de equação de uma forma natural e produtiva para as aulas seguintes.

Olhando para trás, o balanço mais positivo foi definitivamente o nosso trabalho em equipa que permitiu analisar, trocar ideias, partilhar pontos de vista, discutir e melhorar até à exaustão a planificação, com consequências directas no processo de ensino-aprendizagem.

Teresa Moreira
Escola Secundária de Camões

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.



As conexões nas provas de aferição do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico

Isabel Rocha

Este artigo assenta numa análise das provas de aferição desde 2000 a 2009 e dos respectivos relatórios nacionais, quando existem. Nos anos em falta procurou-se seguir uma análise idêntica à existente nos relatórios de 2001 a 2004.

Avaliação aferida

A avaliação aferida era uma das modalidades de avaliação, a par da avaliação formativa, da avaliação sumativa e da avaliação especializada contemplada no Despacho Normativo n.º 98–A/92, onde se afirmava que esta avaliação se destinava «a medir o grau de cumprimento dos objectivos curriculares mínimos, visando o controlo da qualidade do sistema de ensino, a tomada de decisões para o seu aperfeiçoamento e, ainda, a confiança social no sistema escolar» (art. 41.º). No entanto, a avaliação aferida não foi logo implementada e este Despacho foi, posteriormente, revogado pelo Despacho Normativo n.º 30/2001 que apenas incide na avaliação formativa e sumativa. No mesmo ano é ainda publicado o Decreto-Lei n.º 6/2001 que aprova a reorganização curricular do ensino básico e contempla a realização de provas nacionais de aferição que constituem «um dos instrumentos de avaliação do desenvolvimento do currículo nacional e destinam-se a fornecer informação relevante aos professores, às instituições da administração educativa, não produzindo efeitos na progressão escolar do aluno» (art. 17.º). Têm constituído, simultaneamente, um instrumento de diagnóstico da aprendizagem dos alunos e um instrumento regulador da prática lectiva dos professores (Rocha, 2002).

Em Maio de 2000, realizaram-se, pela primeira vez, provas de aferição, por todos os alunos matriculados no 4.º ano de escolaridade, em Língua Portuguesa e Matemática. No ano seguinte, foram aplicadas novas provas de aferição, nas mesmas disciplinas, aos alunos no 4.º ano mas também aos alunos matriculados no 6.º ano e, em 2002, o universo de aplicação foi alargado aos alunos do 9º ano de escolaridade. Desde aí até à actualidade têm-se realizado todos os anos, nas mesmas disciplinas e anos de escolaridade, à excepção do 9.ºano em que deixaram de se realizar em 2005, quando foi instituída a realização de um exame nacional do 3.º ciclo do Ensino Básico.

Conexões

O Currículo Nacional do Ensino Básico (ME, 2000) refere que a exploração de conexões deve ser considerada como um aspecto transversal da aprendizagem da matemática, visto tratar-se de uma componente essencial da formação matemática.

Nos primeiros anos de escolaridade, a curiosidade natural das crianças e o seu interesse em explorar o mundo que as rodeia deve ser aproveitado, na escola, com a criação de contextos de aprendizagem que vão ao encontro dessa curiosidade e interesse e que estimulem a aprendizagem da Matemática de forma integrada. Ver a matemática como um todo «realça a necessidade de estudar e pensar nas conexões existentes no seio desta disciplina» (NCTM, 2007).

Áreas Temáticas	Distribuição dos itens por áreas temáticas e tipos de competência Tipos de Competência			
	Conhecer conceitos/ procedimentos	Raciocínio	Comunicação	Resolução de problemas
Números e Cálculo	1, 4, 6, 10, 12, 13, 16, 19 e 21	4, 6, 10, 13, 16 e 19	6, 10, 12 e 13	6, 10 e 13
Grandezas e Medida	8, 9, 14, 17 e 18	8, 9 e 17	8	8 e 17
Forma e Espaço	2, 7 (fig. 2) e (fig. 3), 15 e 22	5, 11, 15, 20 e 22	15	22
Organização e Recolha de Dados	3.1 e 3.2		3.1, 3.2 e 3.3	3.3

Quadro 1

Para além das conexões entre ideias matemáticas, os contextos exteriores à Matemática, sejam do quotidiano dos alunos ou de outras áreas curriculares proporcionam o reconhecimento, pelos alunos, da aplicabilidade da Matemática, da sua utilização para representar e interpretar o mundo real.

Começando por este tipo de conexões, muitas vezes designada por conexões Matemática-Realidade, ao pensarmos na sua concretização na sala de aula surgem-nos os projectos e os problemas de modelação como sendo o tipo de tarefas mais eficaz para estas conexões. Além disso, com o uso da tecnologia neste tipo de tarefas, surgem também as conexões entre representações gráficas, geométricas, numéricas e algébricas.

Este não será o tipo de conexões (Matemática-Realidade) que, pela natureza das tarefas referidas, se espere encontrar numa prova de aferição ou num exame, com as características das nossas: duração limitada e tendo o papel e lápis como únicos recursos. São o tipo de conexões que o professor, nomeadamente o dos primeiros anos que é generalista ou professor de áreas temáticas, pode (e deve) privilegiar ao longo do ano lectivo, porque além de ver a matemática como um todo, é o currículo que surge como «um todo». Não consideramos que o facto de aparecer numa questão, por exemplo, uma lata de sumo para estimar a sua capacidade, seja um problema da vida real.

Assim a análise que se segue, aproveita, por um lado, a categorização dos itens feita nos relatórios nacionais que nos permite identificar três tipos de conexões: a) conexões entre ideias/temas matemáticos; b) conexões a nível de competências (conhecimento de conceitos e procedimentos, resolução de problemas, raciocínio e comunicação); c) conexões entre temas e competências (envolvem mais que um tema e mais do que uma competência) e, por outro lado, procura ainda identificar conexões a nível de processos matemáticos como a representação, conexões com outras áreas disciplinares e com o quotidiano dos alunos.

Análise das provas de aferição

Convém analisar, nos relatórios nacionais, como tem sido feita a distribuição dos itens, que tem sofrido alguma variação. O que se tem mantido é uma distribuição por temas matemáticos e pelo tipo de competências que avalia.

Em 2000 e 2001, a distribuição, para o 4.° ano de escolaridade foi feita por quatro grandes temas: Números e Cálculo; Forma e Espaço; Grandezas e Medida; Organização e Recolha de Dados (o universo era apenas os alunos do 4.° ano de escolaridade). Assim os três primeiros temas correspondiam aos temas do próprio programa nacional, sendo que o quarto tema não estava contemplado.

As categorias definidas para o 6.° ano foram diferentes, provavelmente para corresponderem à organização do programa deste ciclo de ensino e começaram por ser, em 2001: Números e Cálculo; Geometria; Estatística.

A partir de 2003 e até ao último relatório referente às provas de 2009 as áreas temáticas passaram a ser: Números e Cálculo, Geometria e Medida, Estatística e Probabilidades, Álgebra e Funções (no 4.° ano); Números e Cálculo, Geometria, Estatística e Probabilidades, Álgebra e Funções (no 6.° ano).

Entre as competências foram consideradas quatro categorias: conhecimento de conceitos e procedimentos; raciocínio; comunicação e resolução de problemas.

As categorias de competências não variaram nos anos seguintes, mas de 2001 a 2004, os relatórios incluíam, para além do quadro em que cada item está inserido no tema e competência predominante, um quadro de distribuição dos itens por todos os temas e competências envolvidas na sua resolução. Como é referido nesses relatórios «este novo quadro permite tornar mais visível a existência de possíveis conexões matemáticas, consideradas como uma componente essencial da formação matemática» (ME/DGIDC, 2004:94).Veja-se a título de exemplo, o quadro desta distribuição relativo à prova do 4.° ano de 2001 (ME/DEB, 2002:25). (Quadro 1)

	2001		2002		2003		2004	
	4.º/25	6.º/24	4.º/25	6.º/25	4.º/24	6.º/23	4.º/26	6.º/23
Conexões entre ideias/ temas matemáticos						1	1	1
Conexões entre competências	11	10	8	10	10	11	8	10
Conexões entre temas e competências	2	5	1	1	4	3	5	4
Total	13 52%	15 63%	9 36%	11 44%	14 58%	15 65%	14 54%	15 65%

Quadro 2. Provas de 2001 a 2004

Da leitura do quadro, o que não é possível analisar são as possíveis conexões entre os temas matemáticos e outras áreas do currículo e/ou da vida quotidiana.

Não foi possível encontrar relatório sobre as provas de 2005 e os relatórios de 2006 e 2007 apresentam uma estrutura e organização muito diferente apenas com dados que dizem respeito à distribuição percentual de respostas correctas segundo o domínio temático, em que são consideradas as quatro categorias definidas em relatórios anteriores.

Nos relatórios de 2008 e 2009 a organização e estrutura volta a ser alterada, retomando alguns aspectos dos relatórios de 2001 a 2004, como seja a análise dos itens da prova por área temática e referindo a competência que está a ser avaliada, mantendo as quatro categorias de competências já anteriormente definidas. Nestes quadros, cada item está inserido apenas no tema e competência dominante, não dando visibilidade às possíveis conexões. A análise feita nestes relatórios baseia-se na Teoria de Resposta aos Itens (TRI) ou (*Item Response Theory*) que pretende encontrar soluções a que a Teoria Clássica dos Testes (TCT) não consegue dar resposta, nomeadamente, a de proporcionar medições que não dependam do instrumento de avaliação utilizado para as obter e conceber instrumentos de medida cujas propriedades não dependam dos objectos medidos (www.gave.pt: projecto IRT).

Conexões matemáticas

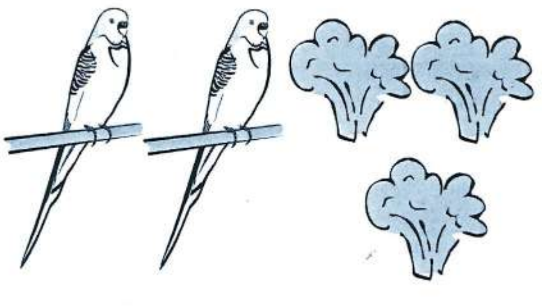
Face ao acima referido optou-se por fazer uma análise da existência de itens, nas provas, que possibilitam o estabelecimento de conexões matemáticas, por três períodos de tempo diferentes, correspondendo à variabilidade dos respectivos relatórios.

Nos anos em que os relatórios nacionais não contemplaram o quadro que evidencia as conexões, procurou-se, com a informação disponível, construir quadros idênticos, como o quadro 2.

Da leitura do quadro verifica-se que o número de questões, em cada prova, que exploram as conexões são em número superior a 8 e inferior a 16. Em cada ano, nas provas do 6.º ano, a percentagem de itens que exploram conexões é ligeiramente superior à percentagem do 4.º ano. Considerando o número total de itens, teremos em termos percentuais, um número de itens entre 36% e 65%, um intervalo com demasiada amplitude. Se excluirmos o ano de 2002, a amplitude diminui e a percentagem de itens situa-se à volta dos 50%, o que nos parece razoável. No entanto há um desequilíbrio entre o tipo de conexões, sendo muito mais elevada a percentagem de itens que exploram conexões entre os tipos de competências avaliadas, do que entre áreas temáticas ou entre temas e competências.

Escolheu-se, para exemplificar, o item 10 da prova do 4.º ano de 2001, de todos o mais rico (figura 1).

10. O Pedro tem oito periquitos. Todos os dias dá a cada dois dos seus periquitos 3 folhas de alface.
Quantas folhas de alface tem de dar, por dia, aos seus oito periquitos?



Resposta: ____________________

Explica como encontraste a resposta. Para o fazeres, podes usar desenhos, palavras ou contas.

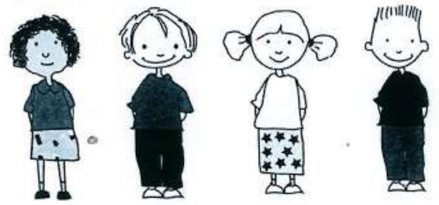
Figura 1

15. Na apresentação da festa da Escola, a professora da Flora organizou uma fila com os seus **20 alunos**.

A professora pôs:

- as crianças que tinham camisola branca, de 3 em 3;
- e os rapazes, de 2 em 2.

Na figura, a Flora está no início da fila que a professora organizou.



Quantos rapazes é que tinham camisola branca?

Explica como chegaste à tua resposta.

Podes fazê-lo utilizando palavras, esquemas ou cálculos.

Figura 2

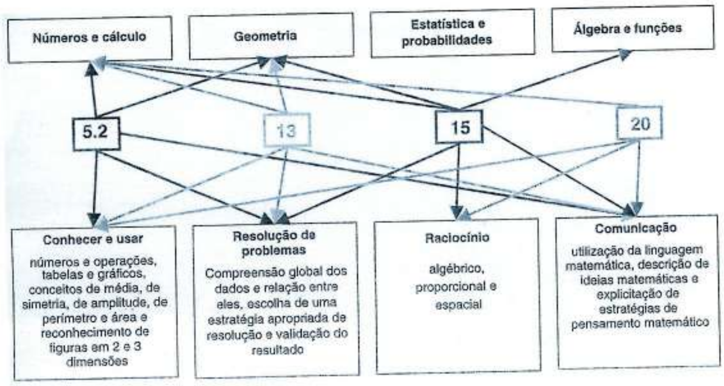


Figura 3

	2005		2006		2007	
	4.º/23	6.º/27	4.º/25	6.º/24	4.º/25	6.º/25
Conexões entre ideias/ temas matemáticos	2	1	0	0	0	2
Conexões entre competências	6	8	11	11	7	8
Conexões entre temas e competências	2	2	1	1	1	2
Total	10 44%	11 41%	12 48%	12 50%	8 32%	12 48%

Quadro 3. Provas de 2005, 2006 e 2007

2008		2009	
4.º/25	6.º/24	4.º/27	6.º/29
0	1	0	0
10	10	8	8
2	1	1	0
12 48%	12 50%	9 33%	8 28%

Quadro 4. Provas de 2008 e 2009

Embora diga respeito ao tema Números e cálculo (porque não foi considerada a área de Álgebra e funções) e a competência matemática predominante seja a Resolução de Problemas, promove as conexões porque a sua exploração permite múltiplas abordagens que se complementam. Em qualquer problema a compreensão do seu enunciado é fundamental e neste problema essa compreensão envolve o uso do raciocínio algébrico e proporcional e a estratégia de resolução passará pela organização dos dados e a utilização de procedimentos de cálculo.

Outro bom exemplo é o item 15 da prova do 6.º ano de 2003 (figura 2).

Tratando-se de um item que, fundamentalmente, pretende avaliar a competência de resolução de problemas na área temática Álgebra e Funções, promove as conexões. Desde logo a nível do raciocínio lógico e proporcional e da comunicação, na interpretação da figura que apoia o enunciado e interpretação da regra para construir a fila que permitiria um nível de resolução através de um esquema/desenho (da fila) ou da organização dos múltiplos de 2 e dos múltiplos de 3, como está evidenciado no esquema apresentado no respectivo relatório nacional (figura 3).

A partir de 2005, a percentagem de itens que exploram as conexões não ultrapassa os 50%, sendo ligeiramente inferior à percentagem de anos anteriores, baixando significativamente em 2009. E mantém-se o desequilíbrio entre o tipo de conexões, sendo muito mais elevada a percentagem de itens que exploram conexões entre os tipos de competências avaliadas, do que entre áreas temáticas ou entre temas e competências.

Conexões a nível da representação

A representação que o aluno utiliza para resolver um problema revela o seu nível de compreensão do mesmo, bem como a abordagem utilizada para o resolver. Daí que a utilização de diversas representações que surjam na resolução de um problema seja importante porque, geralmente, representações distintas focam aspectos diferentes da compreensão do problema ou dos conceitos envolvidos. E esta possibilidade de diversificar o conjunto de representações leva os alunos a compreender que há representações mais poderosas do que outras ou que são mais facilitadoras da resolução do problema ou da descoberta de relações importantes entre os dados.

24. Utiliza os números indicados a seguir para completares, na notícia, os espaços assinalados por um traço, de forma a que as frases façam sentido.

60 246 1995 2007

> Em ______, depois de ter feito ______ saltos à corda em ______ segundos, ou seja, num minuto, um professor de Educação Física português conseguiu inscrever, pela segunda vez, o seu nome no livro dos recordes. A primeira vez tinha sido no ano de ______.

Figura 4

Todas as provas têm mais do que um item em que é pedido ao aluno que explique como obteve as respostas, estimulando o uso de diferentes representações: desenhos, esquemas, escrita simbólica ou não. E em todas as provas existe pelo menos um item, em que é pedido que os alunos passem de uma representação para outra, nomeadamente, dados organizados em tabela, para o respectivo gráfico ou vice-versa.

Conexões com outras áreas disciplinares

Uma das conexões que uma prova escrita do tipo que temos pode explorar é com a Língua Portuguesa. Pode ser conseguida através, por exemplo, de uma história da literatura infantil com informação matemática necessária à interpretação da mesma, levando os alunos a ver o papel que a Matemática desempenha na história. E outra via é a utilização de textos ou excertos dos mesmos, que podem ser notícias de jornais, folhetos informativos, ..., ricos do ponto de vista matemático e de uma abordagem interdisciplinar. Neste caso, tendo em conta o tema da notícia, normalmente haverá conexões com o Estudo do Meio (alimentação, higiene, questões climáticas, questões ambientais, ...) e/ou com a educação para a cidadania.

A utilização de *diálogos* nos enunciados dos problemas tem estado presente em todas as provas mas foi em 2002, na prova do 4.° ano, que essa presença foi maior, em três itens e igual número na prova do 6.° ano de 2001, tendo vindo a diminuir e, na generalidade das outras provas surge apenas um ou nenhum item (2003, 4.° ano; 2007, 4.° e 6.° anos)

A utilização de *textos com lacunas* para serem completados com dados numéricos (figura 4) surge, pela primeira vez, na prova do 4.° ano de 2005 e, posteriormente, só na prova de 2008 (item 24). Este tipo de itens também promove as conexões, porque avalia o estabelecimento de relações entre números, identifica o seu sentido numa situação do quotidiano e surgem diferentes sentidos do número (o número como medida de comprimento, como medida de tempo, ...).

Nas provas do 6.° ano, este tipo de textos só surge em 2008, através do item 4.3 onde o texto será completado com informação apresentada num gráfico.

Não se encontram, na provas, os tais excertos de textos da literatura infantil ou de notícias de jornais/revistas, como acima foi referido.

Conexões com o quotidiano

Este tipo de conexões foi analisada a nível dos contextos das questões propostas. Um dos contextos muito frequente quer nas provas do 4.° quer nas provas do 6.° ano é a utilização de plantas de edifícios ou de salas e tabelas de preços.

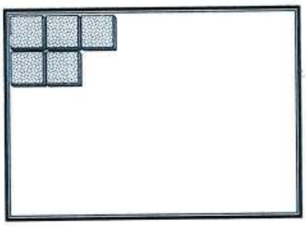
Outros contextos encontrados: a) calendários, b) horários escolares, de transportes, de espectáculos, de museus, de campos de férias, .. , c) instrumentos de medição como relógios, balanças, cronómetros de velocidade e d) sinais de trânsito.

O total de questões (não de itens) das provas oscila entre 19 e 23. Destes situam-se entre seis e oito as questões com os contextos referidos.

Desempenho dos alunos nos itens que estabelecem as conexões

É comum a todos os relatórios a referência de que «o desempenho dos alunos é mais elevado nos itens que avaliam o conhecimento de conceitos e procedimentos e vai decrescendo nos itens que avaliam o raciocínio, a comunicação e a resolução de problemas, em qualquer das quatro áreas temáticas consideradas» (Relatório 2000, 2001, 2003(1.° ciclo), Relatório 2009; 1.° ciclo, p.23; 2.°ciclo, p.8 p.13, p.18). Nas provas de 2004 e nas de 2003 (2.° ciclo), os itens que avaliavam o raciocínio tiveram resultados idênticos aos itens que avaliavam o conhecimento de conceitos e procedimentos. Como a quase totalidade dos itens que promovem as conexões, se situam a nível das conexões entre competências,

18. O António está a colocar fatias de pão num tabuleiro, em filas, como mostra a figura seguinte.



O interior do tabuleiro é um rectângulo com 42 cm de comprimento e 33 cm de largura. As fatias são todas do mesmo tamanho e a sua base tem a forma de um quadrado com 5 cm de lado. No final, todas as filas vão ter o mesmo número de fatias inteiras.

Qual é o número máximo de fatias inteiras de pão que o António vai conseguir colocar no tabuleiro, sem as sobrepor?

Mostra como chegaste à tua resposta.

Resposta: ____________________

Figura 5

pode-se inferir que nos itens que promovem as conexões, o desempenho dos alunos fica aquém do desejável.

A título de exemplo, o item 18 da prova do 6.º ano de 2009, que estabelece várias conexões, desde logo entre temas (Números e cálculo e Medida, envolvendo conceito de área e de divisão como medida) e entre competências (resolução de problemas e conhecimento de conceitos e procedimentos), foi o item com piores níveis de desempenho, em que a percentagem de respostas correctas foi inferior a 32% (figura 5)

Olhamos com preocupação este decréscimo de itens que promovem as conexões. Face às dificuldades que os nossos alunos ainda mostram neste tipo de itens (exemplificada acima) a única atitude construtiva é a persistência. Caso contrário, este pode ser um sinal para os professores descurarem o trabalho com este tipo de tarefas, mais exigente mas necessário a uma aprendizagem da matemática com compreensão e ao desenvolvimento da capacidade de apreciar o papel da matemática em diversos contextos/situações.

Notas finais

A presença das conexões matemáticas nas provas de aferição, com as excepções de 2002 e 2009, parece-nos equilibrada mas seria desejável que esse equilíbrio se verificasse a nível do tipo de conexões que explora. Nesta análise, onde se definiram três categorias de conexões matemáticas, verificou-se que não existe equilíbrio na distribuição dos itens por essas categorias.

A utilização de notícias, de informação disponível acerca de temas das outras áreas disciplinares, ricas do ponto de vista matemático, ou seja, onde os conceitos e/ou processos matemáticos são necessários na interpretação das mesmas, seriam também de considerar como contexto para algumas questões.

Por último, o modelo de relatórios utilizado de 2001 a 2004 parece-nos mais adequado para este tipo de análise.

A pesquisa feita para este artigo que evidenciou os factos referidos sobre a presença das conexões nas provas de aferição e a variabilidade no tipo de conexões, permitiu percepcionar que, nalgumas provas, outros factores, como a percentagem de itens por áreas temáticas também têm alguma variabilidade. Seria interessante analisar, com mais profundidade, estes e outros factores dos itens das provas que têm sofrido alguma variabilidade.

A presença das conexões matemáticas no trabalho a nível da sala de aula é inquestionável porque, como é referido no Programa de Matemática do Ensino Básico, este ano generalizado para alguns anos de escolaridade, «a exploração de conexões entre ideias matemáticas, e entre ideias referentes a outros campos do conhecimento ou a situações próximas do dia-a-dia do aluno, constitui uma orientação metodológica importante» (ME, 2007:9). Logo, a sua presença nas provas de aferição também o será.

Referências bibliográficas

Ministério da Educação (2000). *Currículo nacional do ensino básico — competências essenciais*. Lisboa: ME/DEB

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME/DGIDC

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM

Rocha, I. (2003). A avaliação aferida, as práticas profissionais e os projectos de escola. *Educação e Matemática*, *74*, 79–81.

www.gave.pt

Isabel Rocha
Escola Superior de Educação e Ciências Sociais de Leiria

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2011

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `http://www.apm.pt`

Assinaturas das revistas para 2011

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções