Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2010

109

Setembro ∞ Outubro

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Setembro 2010
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S.A.
Fonte Santa, Paúl
2530–250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222

Porte Pago

Sobre a capa

A «filigrana» que é descrita na capa deste número, foi obtida através da implementação gráfica de um L-sistema, uma noção originalmente utilizada por Aristid Lindenmayer (biólogo Húngaro), com intenção de descrever o padrão de crescimento de certas algas e fungos.

Estes sistemas, enquadram-se no âmbito das gramáticas formais e dos sistemas de re-escrita que, em última análise podem ser vistos como aspectos da teoria da recursão.

Num futuro artigo teremos ocasião de explicar em maior detalhe este conceito.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Hugo Menino, Joana Brocardo, Isabel Rocha, Leonor Santos, Manuela Ribeiro, Nuno Martins, Paula Pessoa, Paula Teixeira.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Editorial

Dificuldades ou desafios?

Leonor Santos

O que se aprende, o que se ensina e os modos como se ensina evoluem com o tempo. Decorrem de construções sociais moldadas pela herança cultural e pelo conhecimento que se vai construindo. Hoje, como no passado, há sempre aqueles que querem, a todo o custo e contra toda a evidência, que o mundo pare, pare no seu tempo de referência. Mas, felizmente, a história nunca lhes dá razão! Vivemos, assim, na actualidade, um novo período de desenvolvimento curricular no que respeita ao ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Básico.

As novas orientações curriculares expressas no Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico têm vindo a ser objecto de análise. Gostaria aqui apenas de destacar a importância que hoje se reafirma de se desenvolver uma aprendizagem com compreensão. Por outras palavras, da necessidade de não só se saber, mas ser-se capaz de mobilizar esse conhecimento na resolução de novas situações. Assim, são definidas capacidades específicas associadas a cada tópico matemático, bem como capacidades transversais a todos eles. Estas orientações, naturalmente, implicam novas formas de trabalhar dos professores. Exigem o recurso a diversos tipos de tarefas, de forma a constituírem-se experiências de aprendizagem adequadas aos fins a que se destinam, um ambiente de aprendizagem onde se valorizam, após um trabalho desenvolvido pelos alunos, momentos de discussão bem explorados pelos professores de forma a clarificar e dar significado ao que foi trabalhado, e sínteses das principais ideias e conceitos em presença. O papel do professor deverá ser moldado pela intencionalidade de promover, no decurso dos contextos de aprendizagem criados, uma intervenção avaliativa reguladora e propiciadora de aprendizagem.

O ano lectivo 2010/2011 é um ano marcante! Nele se generaliza, em todas as escolas do país, este novo programa de Matemática, a iniciar-se nos 1.°, 3.°, 5.° e 7.° anos de escolaridade. Mas, ao contrário do que acontece habitualmente no nosso país, mais de 400 agrupamentos de escolas ou escolas não agrupadas já anteciparam em um ano esta generalização. Existe, ainda, um conhecimento já construído no âmbito da experimentação deste programa, iniciado há dois anos em 40 turmas, concluída para os 1.° e 2.° ciclos, e em fase de conclusão no 3.° ciclo de escolaridade. Esta variedade de situações, de vivências distintas, poderá, se os professores de Matemática assim o entenderem, constituir um contexto muito favorável para aqueles que apenas agora começam efectivamente a fazer a sua gestão curricular por este novo programa.

É de relembrar que embora apenas este ano lectivo aconteça a generalização do novo programa, o trabalho com os professores de Matemática do Ensino Básico em torno das suas orientações começou já uns anos antes. Este é o caso do acompanhamento feito pelos professores acompanhantes do Plano da Matemática I e, posteriormente, do Plano da Matemática II e da primeira fase de generalização do Novo Programa, junto dos respectivos coordenadores dos agrupamentos de escolas ou escolas não agrupadas. Associadas a estas medidas, as instituições escolares puderam contar com algumas condições que geriram de acordo com a forma que encontraram mais adequada às suas especificidades. Do mesmo modo, há a referir o trabalho desenvolvido, ao longo dos últimos anos, no âmbito do Programa de Formação Contínua para Professores de Matemática dos 1.° e 2.° ciclos. Já a formação dirigida ao 3.° ciclo foi menos abrangente, cobrindo um número mais reduzido de professores.

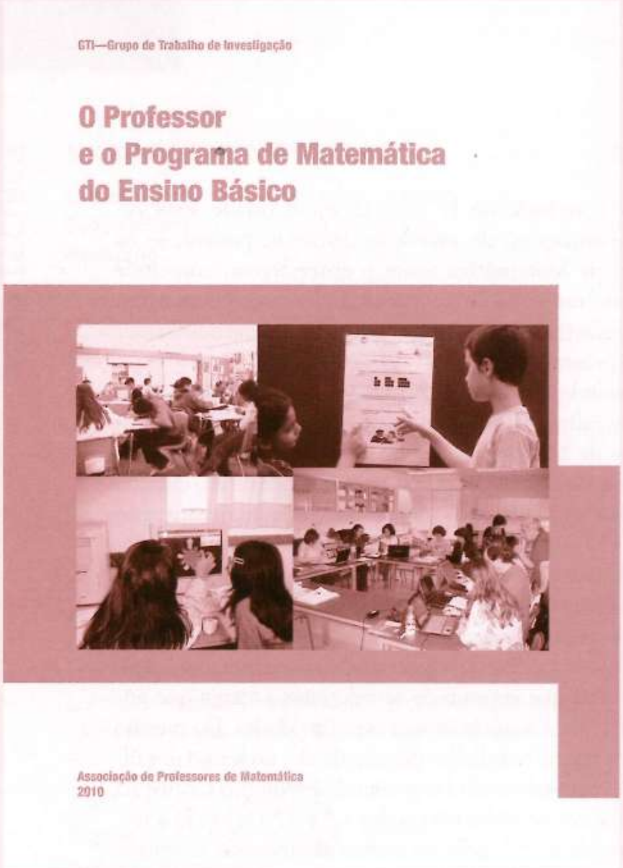
Embora a realidade aqui descrita seja claramente mais facilitadora para uma mudança de práticas quando comparada com anteriores momentos de renovação curricular, não tenhamos dúvidas que muitas serão as situações que os professores de Matemática do Ensino Básico terão de enfrentar, diferentes do que era o seu habitual no trabalho com os seus alunos. A questão que aqui vos deixo é se devemos entender estas situações como dificuldades ou antes como desafios a enfrentar. Não é apenas uma questão de terminologia, mas antes de atitude face à inovação. Quem as entender como desafios estará, certamente, mais disponível para aproveitar este momento para o seu próprio desenvolvimento profissional. Ganharão estes professores e, consequentemente, os seus alunos.

Leonor Santos
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Publicações APM

O Professor eo Programa de Matemática do Ensino Básico

Edição APM, 2010 | PVP: 12,00€ Sócio: 8,50€

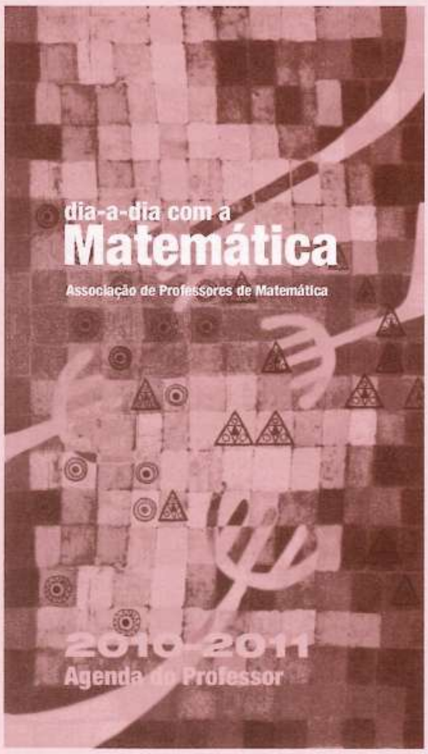


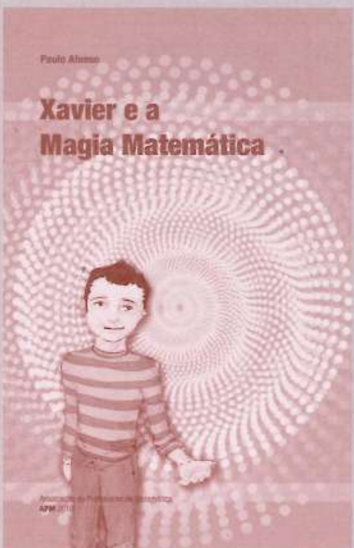
São diversos os desafios que são colocados à escola e aos professores, quer na sua capacidade de acompanhar as constantes mudanças da sociedade, quer ao nível do desenvolvimento curricular, como o que presentemente ocorre associado à generalização do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB), publicado em 2007. Assim, este livro, que intitulámos *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*, inclui uma colecção de experiências realizadas por professores e formadores dos diferentes níveis de ensino (do 1.º ciclo do ensino básico ao ensino superior). Mais importante do que cada experiência em si mesma é perceber de que forma ela pode contribuir em termos do conhecimento para a profissão, e que mais valia traz para a vida das escolas, em particular para o grupo de professores de Matemática.

Ao divulgar estas experiências, procuramos contribuir para uma melhor compreensão das questões associadas às mudanças curriculares preconizadas pelo PMEB, nomeadamente como interpretar e concretizar na prática as indicações desse programa, como delinear e percorrer os percursos necessários, como caracterizar os papéis que o professor pode assumir e como conceber estratégias para concretizar ao longo do ano uma grande variedade de objectivos curriculares.

Agenda Dia-a-Dia com a Matemática 2010/2011

Edição APM, 2010 | PVP: 7,50€ Sócio: 5,00€





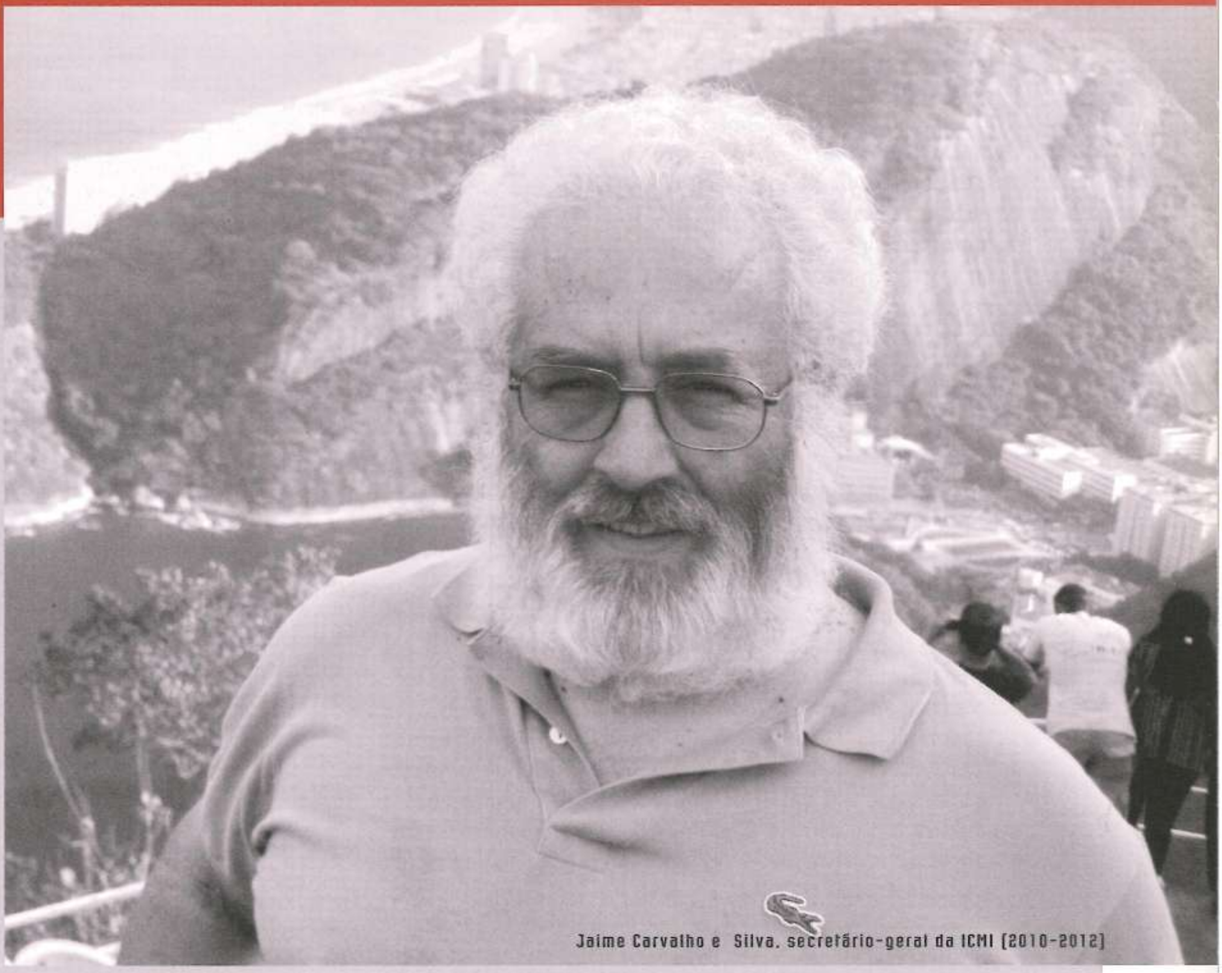
Xavier e a Magia Matemática

Autor: *Paulo Afonso*
Edição APM, 2010
PVP: 10,00€ Sócio: 7,00€

«Assim, temos todos — professores, alunos ou simples entusiastas da magia — oportunidade de nos intrigar, encantar, aprender e, quem sabe, começar também a ser como o Paulo: Magos da Matemática.»

José Paulo Viana, in Prefácio

Entrevista



Jaime Carvalho e Silva, secretário-geral da ICMI (2010-2012)

Jaime Carvalho e Silva, Professor Associado do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, iniciou funções em Janeiro de 2010 como secretário-geral da Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI). Esta Comissão foi criada no Quarto Congresso Internacional de Matemáticos realizado em Roma em 1908. Talvez a iniciativa que mais se destaca seja a organização, de 4 em 4 anos, do Congresso Internacional de Educação Matemática (ICMEs), durante o qual se realiza a Assembleia Geral da ICMI, onde actualmente são eleitos os membros da direcção.

É a primeira vez que esta prestigiada organização, que desenvolve a sua acção através de encontros internacionais e publicações cujos objectivos são a promoção da reflexão, colaboração, trocas de experiências e disseminação de ideias e informações da teoria e prática da educação matemática contemporânea, é dirigida por um matemático português. Sócio activo da APM, onde integra grupos de trabalho, como o GT do Secundário e o grupo T3, muito tem contribuído para a discussão de ideias no seu seio.

A Educação e Matemática (EM) pediu a Jaime Carvalho e Silva (JCS) que nos falasse desta sua experiência, numa entrevista via mail conduzida por Manuela Pires e Isabel Rocha. Agradecemos-lhe a sua disponibilidade, com a certeza de que o turbilhão de ideias contagiará os professores de Matemática e que não serão necessários mais 100 anos para outros portugueses assumirem papéis na ICMI, com ganhos para a Educação Matemática em Portugal, pois os portugueses podem ir até onde quiserem.

A Comissão Executiva da ICMI para o triénio 2010–2012

EM: Jaime, o que significa para ti ser secretário-geral de tão prestigiada Comissão? O que faz o secretário-geral?

JCS: Como eu fiz parte durante 3 anos da Comissão Executiva da ICMI, já estava a par de muitas actividades da ICMI e não foi um grande choque passar a desempenhar as funções de secretário-geral. Estar 6 anos na direcção da ICMI é para mim uma grande honra pois nenhum português tinha aí estado em 100 anos, mas também mostra que os portugueses podem ir até onde quiserem, a sua formação não é inferior à dos demais. Claro que passar de membro da Comissão Executiva a secretário-geral significa essencialmente uma coisa: mais trabalho! O secretário-geral organiza todas as tarefas básicas da ICMI, edita o Boletim da ICMI, gera a página internet da ICMI, faz parte *ex-officio* de todas as comissões da ICMI e representa a ICMI quando o Presidente não está presente.

EM: Estás há meio ano no exercício de funções. Como têm sido as vivências face às expectativas e ao projecto que tinhas quando te candidataste?

JCS: Devo dizer que não me candidatei, nem agora nem quando entrei na Comissão Executiva. Há uma Comissão de Nomeação (conjunta da União Matemática Internacional e da ICMI), que faz contactos prévios com as pessoas, tanto para ter a certeza que há candidatos disponíveis, como para garantir uma distribuição internacional equilibrada. Todos os países podem propor candidatos à eleição e a Comissão de Nomeação pode adicionar outros nomes. E para a Comissão Executiva tem obrigatoriamente de encontrar 7 candidatos para apenas 5 lugares. Por outro lado, a Assembleia Geral da ICMI pode considerar outros candidatos alternativos. Este é um processo muito longo que vai já começar de novo em Setembro próximo para as eleições de 2012, altura em que será eleita a direcção da ICMI para o período 2013–2016.

Em face deste modo de eleição não há «programa eleitoral». Por isso as expectativas eram essencialmente de ir ter mais trabalho, mas também de estar mais directamente envolvido nas actividades da ICMI, nomeadamente o congresso ICME, os estudos ICMI e os projectos da ICMI (como o projecto KLEIN). Anuncia-se uma possível colaboração com a UNESCO, aparece a possibilidade do projecto KLEIN incluir uma forte colaboração na área da língua portuguesa a começar com Portugal e o Brasil, etc. Tem sido um período muito carregado, mas também muito enriquecedor.

EM: E já nos podes dar mais ideias dessa possibilidade de colaboração no âmbito do projecto Klein? Até mesmo explicando o que é o projecto Klein que pode não ser do conhecimento de todos.

JCS: O Projecto Klein inspira-se na obra de Felix Klein (um grande matemático alemão dos fins do séc XIX, princípios do séc. XX, talvez mais conhecido por causa da garrafa de Klein e do programa de Erlangen que modificou a visão que temos da Geometria). Klein, o primeiro presidente da ICMI, muito preocupado com o ensino e a formação de professores de Matemática (por causa do que observou sobre o desconhecimento da Matemática Aplicada e do fosso entre o secundário e o superior, entre outros) enveredou por uma intervenção activa na formação de professores. Deu vários cursos na Universidade de Gottingen e dessas aulas nasceram os livros da série «Matemática Elementar de um ponto de vista superior» que a SPM começou agora a traduzir para língua portuguesa. Em particular Klein critica o facto de a formação superior dos professores não ter nada a ver com o que era suposto ensinarem, criando-se o que chamou «dupla descontinuidade»:

O jovem estudante universitário sentia-se, logo de início, confrontado com problemas que não tinham qualquer relação, por pequena que fosse, com os temas que tinha tratado na escola.

Naturalmente, esquecia estes rápida e completamente. Quando, depois de ter acabado o curso, se tornava um professor, percebia que se esperava que ele ensinasse a matemática tradicional à antiga maneira; e, como era incapaz, sem ajuda, de descobrir qualquer ligação entre esta tarefa e a sua matemática universitária, recaía rapidamente no modo habitual de ensinar, e dos seus estudos universitários restava apenas uma mais ou menos agradável memória, que não tinha qualquer influência no seu ensino.

Os livros escritos por Klein (em 1908) são muito inspiradores pois acabam por retratar uma situação que em larga medida se mantém por todo o mundo. Os livros de Klein não tiveram grande difusão fora da Alemanha (o terceiro volume nunca foi traduzido sequer para inglês), mas talvez fosse preciso actualizar um empreendimento como o de Klein pois a Matemática modificou-se muito em 100 anos (basta pensar no desenvolvimento da matemática discreta e da computação e no desenvolvimento das ferramentas automáticas de cálculo). Assim, a ICMI quer desenvolver um livro de 300 páginas (a ser publicado em 10 línguas diferentes pelo menos), um DVD e uma página Wiki, com o fim de disponibilizar conhecimentos, que sejam um estímulo para o ensino, tal como Klein propôs:

Deste modo espero tornar fácil para vós adquirir aquela capacidade que considero como o verdadeiro objectivo dos vossos estudos académicos: a capacidade de retirar (em larga medida), do amplo corpo de conhecimentos que a universidade coloca diante de vós, um estímulo vivo para o vosso ensino.

A cooperação Portugal-Brasil ainda está no seu início, mas a ideia é alargar tanto quanto possível este empreendimento à língua portuguesa, não só traduzindo todos os documentos internacionais para língua portuguesa (de modo a que possam ter a maior divulgação possível), como produzindo documentos suplementares ou chamando a atenção para bons documentos já produzidos em língua portuguesa (eventualmente reeditando documentos esgotados).

EM: Os estudos da ICMI, permitem-te, com certeza, ter uma visão aprofundada dos currículos de Matemática dos vários países. Comparativamente com os nossos, básico e secundário, quais as analogias e diferenças que destacas?

JCS: É difícil ter uma visão aprofundada de tantos currículos diferentes em tantas partes do mundo. Ainda por cima a situação internacional é muito diferente de país para país (e nos estados federais como os EUA, Canadá, Alemanha ou Austrália há grandes diferenças de estado para estado). Tentando apanhar uma visão geral muito sumária: o ensino básico tem normalmente 6 anos e o ensino secundário 6 anos (podendo ser dividido em médio e secundário ou em secundário inferior e secundário superior), mas há obviamente muitas excepções: desde os Estados Unidos em que todas as disciplinas no secundário são opcionais até ao Canadá em que os currículos são únicos até ao 8º ano, sofrem uma diversificação no 9º ano e uma segunda diversificação no 11º ano. No Japão, pelo contrário, há um currículo comum até ao 10º ano e depois há apenas duas vias nos dois últimos anos. Muitos países têm ensino secundário até ao 13º ano (Alemanha, Inglaterra, Itália, por exemplo). Muitos têm exames nacionais no fim do secundário, outros não. Os estudos internacionais provam que os países com melhor desempenho nesses estudos não têm um conjunto fixo de «boas» características, pois cada uma dessas características também aparece associada a países com desempenho menos bom.

Conhecer a situação internacional é contudo muito pertinente, pois surge um turbilhão de boas ideias que funcionam (sob certas condições) e outras que não funcionam de todo (sob outras condições). Só para dar um exemplo: em Portugal muita gente reclama com a existência de exames nacionais que, com a pressão de entrada em cursos como Medicina ou Arquitectura, induz uma pressão tremenda sobre o ensino secundário. Uns dizem que os exames são necessários pois é indispensável que os alunos aprendam um mínimo para entrar no superior = errado = nos EUA ou nalguns estados da Austrália não há exames no final do Secundário = como fazem então as Universidades? Criam cursos de complemento («remedial courses» nos EUA, «bridging courses» na Austrália) para garantir esse nível mínimo. Outros dizem que se os exames se processarem apenas no ensino superior, os exames já não exercem pressão sobre o secundário = errado = em Espanha ou na Índia a pressão existe na mesma, para os alunos o que conta é o «tal exame» com a agravante de a exigência de «cumprimento do programa» variar e estar dispersa pelos diferentes centros de exame.

EM: No ensino básico, o professor generalista lecciona até que nível de ensino?

JCS: A situação é muito variável. Falando dos bons exemplos: o professor generalista pode leccionar os primeiros 4, 5 ou 6 anos, mas há na escola ou no agrupamento professores especialistas de Matemática que trabalham com, e ajudam, os seus colegas.

EM: Quantas horas curriculares são atribuídas à Matemática e quem faz a gestão dessas horas?

JCS: Também relativamente a esta questão a situação é variável. As horas podem ser menos ainda que em Portugal mas em muitos países é maior com diversificações: mais horas para os alunos com mais dificuldades (Bélgica e Finlândia, por exemplo), mais horas para disciplinas de Matemática complementares e opcionais (França, Austrália, ...), diferentes disciplinas com diferente carga horária conforme as opções dos estudantes, etc. Por vezes, como em França, as horas da disciplina são divididas por horas para matéria nova, para exercícios e para revisões por imposição legal, noutros as aulas são preparadas minuciosamente por cada grupo de professores (na China, cada professor gasta em média 4 horas para preparar cada hora de aula).

EM: Relativamente ao currículo do ensino secundário há alguma orientação que aconselhe alguma mudança?

JCS: No caso do ensino secundário o nosso currículo é olhado com bastante simpatia, sendo mesmo muito elogiada a orientação da disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais. Pessoalmente (mas sou suspeito...) não vejo necessidade de grandes mudanças curriculares, apenas acho que todos os alunos deviam ter alguma Matemática (que inclua Estatística) no secundário; as 4 disciplinas essencialmente diferentes actualmente existentes são mais do que suficientes para todos os alunos, basta que passem de opcionais a obrigatórias (mas esse é um problema com que muitos outros países se debatem...) e que a disciplina de «Matemática Aplicada às Artes» substitua a de Matemática B no caso dos alunos de Artes. Seria bom ainda ter uma disciplina opcional como «Tópicos de Matemática Contemporânea» no 12° ano mas se a Área de Projecto do 12° ano for bem aproveitada já será muito bom.

EM: Na generalização de novos programas montaram-se em Portugal dispositivos de acompanhamento. Todos eles visam, em última instância, a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática. Parece-te que fazem parte do conjunto de boas ideias que funcionam? Que medidas propões e que recomendações fazes para se melhorarem as aprendizagens?

JCS: A ideia de ter professores que recebem formação especial e que depois replicam essa formação aos restantes professores visitando todas as restantes escolas não é nova (em Israel chamam a esses professores os «leaders») mas nem sempre é fácil de implementar de modo a chegar a todos os professores; em países como o Brasil, a extensão territorial é tão grande que o investimento é feito sobretudo no ensino a distância para conseguir chegar a todos os professores (foi lançado recentemente o programa PROFMAT de formação contínua que pretende oferecer um Mestrado Profissional em regime semi-presencial dirigido aos professores de Matemática da Escola Básica). Parece ser uma das ideias que resulta e portanto deverá ser continuada e melhorada. Em termos gerais, há um grande consenso: a qualidade do sistema educativo depende em grande medida da qualidade dos professores e a formação contínua é essencial para manter e melhorar essa qualidade. Mas ainda nos falta muito para atingir um dinamismo de grande nível e qualidade: a dinâmica a nível de escolas é muito insatisfatória (a colaboração activa de professores do mesmo grupo disciplinar ainda é a excepção e não a regra) falhando redondamente a coordenação entre ciclos. Também se deveria investir muito mais no acompanhamento a alunos com dificuldades (o mais cedo possível no sistema educativo) e no estímulo dos alunos mais interessados pela Matemática.

EM: É evidente o teu entusiasmo pelo projecto Klein. Que recomendações farias no que diz respeito à formação de professores?

JCS: A primeira recomendação que faria está nos próprios objectivos da ICMI: é essencial a colaboração de matemáticos, educadores matemáticos e professores. Em Portugal e noutros Países tem havido dificuldades na colaboração eficaz e completa dos dois primeiros grupos. O falecido Miguel de Guzmán, ex-presidente da ICMI, já há muito lamentava «la escisión profunda que tiene lugar en muchos lugares del mundo entre las personas de la comunidad matemática que tienen su actividad centrada en la educación y aquellas otras en las que su ocupación principal es la promoción de la investigación matemática, ya sea en su vertiente más teórica como en la más aplicada.» que prejudica a «salud de una sana comprensión del quehacer matemático y de la educación matemática».

A segunda recomendação tem a ver com o reforço da Didáctica da Matemática na formação inicial e na formação contínua de professores; as questões pedagógicas e didácticas precisam de ser muito mais estudadas em Portugal e precisamos de incentivar muito mais publicações dirigidas a questões práticas da sala de aula ou próximas da sala de aula. Precisamos de muitos mais livros como o «Geometria — Temas actuais» do Eduardo Veloso e muitas mais publicações sobre avaliação (desde a prática de testes em duas fases até às provas de aferição e aos exames nacionais passando por estudos internacionais como o PISA e o TIMSS). Espero que o impacto do Projecto Klein em Portugal permita colocar muitas destas questões na agenda política e levar os responsáveis a tomar mais medidas consequentes (que pena o efémero desdobramento nas aulas de Matemática não ter vingado!).

Materiais para a aula de Matemática

Sistema de duas equações

Esta tarefa foi trabalhada pelos alunos do 8.° ano das turmas piloto do programa de Matemática do ensino básico e relaciona-se com o artigo que publico nesta revista. É a quinta tarefa de uma sequência sobre *Funções e Equações*, da autoria dos professores experimentadores, que brevemente estará disponível digitalmente nos materiais da DGIDC. Neste documento aparecerá também versão da tarefa para ser realizada com o apoio do Geogebra.

Com esta tarefa os alunos resolvem sistemas utilizando o método gráfico e só em tarefas seguintes aprendem o método de substituição. Pretende-se que os alunos interpretem geometricamente sistemas de duas equações e dêem significado às suas soluções. Trata-se de uma opção importante, pois como referem Ponte, Branco, e Matos, em Álgebra no ensino básico disponível em `http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/algebra03.htm`, «Esta interpretação da representação gráfica de um sistema de equações é fundamental para uma efectiva compreensão tanto da noção de sistema de equações como da natureza da respectiva solução» (Ponte *et. al*, 2009).

Na exploração da tarefa em sala de aula, no final do item um é recomendável organizar com os alunos uma discussão em grande grupo para clarificar o significado geométrico das soluções de um sistema, bem como fazer uma primeira alusão à existência de sistemas impossíveis e sistemas indeterminados.

Paula Teixeira

Sistema de duas equações

1. Cada uma das equações que se segue tem duas incógnitas.
$y = 3x + 4$ e $y = -2x - 1$

O par ordenado (1,7) é solução da equação $y = 3x + 4$ porque $7 = 3 \times 1 + 4$.
O par ordenado (4, −9) é solução da equação $y = -2x - 1$ porque $-9 = -2 \times 4 - 1$.

1.1. Preenche as tabelas com várias soluções de cada uma das equações.

$y = 3x + 4$		
x	y	(x, y)
1	7	

$y = -2x - 1$		
x	y	(x, y)
4	−9	

1.2. Representa no mesmo referencial cartesiano os pontos (x, y) que encontraste.
1.3. Há alguma solução comum às duas equações?
1.4. No mesmo referencial cartesiano, representa as rectas que correspondem a cada uma das equações.
1.5. Qual o ponto comum às rectas representadas? Que representa esse ponto para as equações?

2. Resolve graficamente cada um dos seguintes sistemas de equações:

2.1. $\begin{cases} x + y = 8 \\ y = 2 - x \end{cases}$ 2.2. $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x + y = -9 \end{cases}$ 2.3. $\begin{cases} 2y - 3x = 2 \\ y = 1{,}5x + 1 \end{cases}$

3.
3.1. Num referencial, traça a recta $y = 2x + 1$.
3.2. Traça outra recta de modo que o sistema constituído pelas equações dessas rectas seja um sistema impossível.
3.3. Que alterações deverás fazer à segunda recta traçada para encontrar um novo sistema possível e indeterminado?
3.4. Procede de modo análogo de forma a obteres um sistema possível e determinado e explica como pensaste.

O significado do sucesso

Educação Na Finlândia, só três por cento dos estabelecimentos têm mais de 600 alunos

Ao contrário de Portugal, lá fora aposta-se no regresso a escolas mais pequenas

Em Nova Iorque, a taxa de sucesso entre os alunos que foram transferidos para escolas mais pequenas é superior à dos que permanecem nos velhos estabelecimentos

Clara Viana

A criação de grandes agrupamentos escolares que irá começar a tomar forma em Portugal no próximo ano lectivo está em queda noutros países, que já viveram a experiência e tiveram maus resultados. Na Finlândia, a pequena dimensão é apontada como uma das marcas genéticas de um sistema de ensino que se tem distinguido pelos seus resultados de excelência.

Em Portugal, para já, os novos agrupamentos, que juntam várias escolas sob uma mesma direcção, terão uma dimensão média de 1700 alunos, indicou o secretário de Estado da Educação, João Trocado da Mata. O número limite fixado foi de três mil estudantes.

Em Nova Iorque, o *mayor* Michael Bloomberg tem vindo a fazer precisamente o oposto. Desde 2002 foram fechados ou estão em processo de encerramento 91 estabelecimentos. Entre estes figuram mais de 20 das grandes escolas públicas secundárias da cidade, que foram substituídas por 200 novas unidades. Nas primeiras chegavam a coabitar mais de três mil alunos. Nas novas escolas, o número

da inversão da tendência registada na última década no Reino Unido. O número de escolas com mais de dois mil estudantes quase quadruplicou e cerca de 55 por cento das secundárias têm mais de 900 alunos.

Com esta dimensão, a função dos docentes passou frequentemente a ser mais a de "apagar fogos" do que a de ensinar, constata-se num documento elaborado pela organização de professores Teach First.

Aumentar permite poupar

Um estudo elaborado há uns anos pelo EPPI-Centre, de Londres, com base nas experiências dos países da OCDE, concluía que os alunos tendem a sentir-se menos motivados nas escolas maiores e que os professores se sentem menos felizes com o ambiente vivido nestas.

Ao invés dos resultados obtidos em Nova Iorque, no que respeita às escolas secundárias conclui-se, em contrapartida, que os resultados dos alunos tendem a ser melhores em es-

In Público, 19 de Julho de 2010

Filha — Oh mãe! Já viste isto a M., o A. e o P. passaram de ano. Na minha turma passaram todos!

Mãe — E então?!

Filha — Então?! Então a minha DT fartou-se de dizer que para passar é preciso ter positiva a Português e a Matemática e eles tiveram negativa a Português e a Matemática e mais uma data de disciplinas e passaram!

Nas últimas semanas e no que se refere a educação temos lido na imprensa: sobre mega agrupamentos, que alguns alegam contribuírem para o sucesso escolar, sobre abandono escolar, e sobre os 149 alunos do 8º ano, com 15 anos ou mais, a quem foi dada a possibilidade de fazer exames de conclusão do ensino básico e para os quais o insucesso foi de 100% (`http://publico.pt/1447502`).

Estas notícias têm-me feito reflectir sobre aquele diálogo entre mãe e filha que prosseguiu com a indignação da filha questionando porque é que a mãe insistia para ela estudar, se ela sem estudar até tinha 4 e 5 e os colegas com 2 transitavam de ano na mesma. E com alguma dificuldade da mãe em fazer valer os seus argumentos!

Aceitando os argumentos, e as evidências, de que as repetições de ano baseadas em mais do mesmo pouco adiantam, parece ser o investimento em planos de recuperação, tão individualizados quanto possível, a solução. No entanto os planos de recuperação individualizados parecem estar a transformar-se em mais carga burocrática para os professores do que em recuperação para os alunos.

Será esta maior individualização de percursos e soluções viáveis numa lógica de mega agrupamentos? Serão os mega agrupamentos a trazer a solução?! Temo que muito pelo contrário. Porque não aprendemos com as experiências de outros? A Finlândia, tida como um dos países com resultados de excelência, aposta nas escolas de pequenas dimensões. Nova Iorque e o Reino Unido fazem marcha atrás e apostam na redução do número de alunos por escola. Um dos fortes argumentos aqui apresentados para a redução da dimensão da escola é a humanização da mesma e a maior qualidade do exercício da docência: «Com esta dimensão [referindo-se a escolas com mais de 900 alunos], a função dos docentes passou frequentemente a ser mais a de apagar fogos do que a de ensinar».

Teoricamente uma gestão centralizada, numa direcção para mais escolas, incorre em poupanças. Serão estas poupanças reais e lucrativas quando pensamos na gestão pedagógica de recursos e soluções?

Soluções que permitam aos alunos que de alguma forma têm lacunas nas suas aprendizagens recuperar as suas dificuldades e continuar a progredir passam, a meu ver, por soluções locais de investimento de recursos humanos e responsabilidade e responsabilização dos envolvidos. Haverá capacidade para encontrar estas soluções a um nível macro, ou mega?!

Preocupa-me e incomoda-me que se generalizem afirmações que correspondem a crenças e atitudes do tipo: «Oh, *stora*, não se rale, no pedagógico a gente passamos à mesma» a juntar às da menina com boas notas que não vê razão para estudar!

Ana Luísa Paiva
Esc. Sec. Padre António Vieira

Programa de Matemática do Ensino Básico

Algumas ideias no fim de dois anos

Paula Teixeira

A revista *Educação e Matemática* n.° 105 foi dedicada ao novo Programa de Matemática para o Ensino Básico (PMATEB). Nela é dado um destaque especial ao programa e às aprendizagens matemáticas dos alunos evidenciadas pela experimentação do programa iniciada no ano lectivo 2008–2009 em 40 turmas. As experiências relatadas tinham um ano de vida e nelas eram visíveis o entusiasmo e a satisfação dos professores relatores.

Para os professores das turmas piloto, como eu que fui experimentadora no 7° ano, a experiência já tem dois anos. Todos os testemunhos que podem ser partilhados têm como referência as condições favoráveis de apoio e a formação que continuámos a usufruir ao longo de 2009–2010 (ver na *Educação e Matemática* n.° 105, a entrevista da Joana Brocardo).

Passados dois anos de trabalho com este programa sinto que, apesar de muitos conteúdos matemáticos não serem «novos», são abordados sob uma nova perspectiva e isso exigiu muitas horas de trabalho intenso para me apropriar das suas ideias e orientações principais. Creio que, se não tivesse feito esse trabalho, dificilmente teria um fio condutor para tomar decisões informadas e coerentes na abordagem dos temas.

Se no início do 7.° ano a escolha de um dos percursos de aprendizagem foi uma tarefa relativamente fácil, a planificação dos vários tópicos, quer no 7.° ano, quer no 8.° ano, foi colocando desde início algumas questões. Passo a exemplificar:

Os números inteiros e os números racionais

As propostas de percursos de aprendizagem disponibilizadas na página da DGIDC referiam o trabalho com números inteiros no 7.° ano, com números racionais no 8.° ano e com números reais no 9.° ano. Então no 7.° ano não se trabalha com racionais?Esta é uma das questões que mais vezes me tem sido colocada. Ora, acontece que os números racionais não negativos e não inteiros são introduzidos no 1.° ciclo e são trabalhados durante um tempo considerável no 2.° ciclo. Por isso, sim, no 7.° ano explorei várias situações em que apareciam números racionais não negativos e não inteiros. Outra questão que se levantou foi perceber a importância que os números racionais e as formas de os representar têm neste programa.

Os números racionais começam a ser trabalhados nos dois primeiros anos com uma abordagem intuitiva (...) recorrendo a modelos e à representação em forma de fracção (...). É nos 3.° e 4.° anos que o estudo destes números vai ser aprofundado, (...) introduzindo números (racionais) representados na forma decimal (usualmente designados por números decimais) (...)(p.14).

A forma como se define número racional não é única e daí decorrem consequências a que não pude ficar alheia. Que definição é preferível? Qual levanta menos problemas? Qual delas permite um trabalho no tempo, e ao longo dos anos, mais coerente com a extensão do conceito de número, ou em termos históricos, ou em termos didácticos, ...?

Na seguinte definição, observa-se que Sebastião e Silva faz referência a um conjunto de números, os fraccionários, que não merecem qualquer referência no PMATEB.

Os números inteiros e os números fraccionários têm a designação comum de números racionais.

(...) se a não é múltiplo de b, o quociente a/b é, por definição, um número fraccionário. (Silva, p. 50)

Será interessante ou desejável definir os racionais a partir daqui? A união de conjuntos disjuntos poderá vir a revelar-se uma mais-valia no estudo dos conjuntos numéricos? Ou, pelo contrário, acrescenta dificuldades ou termos desnecessários?

Contudo,

(...) O quociente de inteiros a/b (com $b \neq 0$), define os números racionais (Apostol, p. 26)

foi a definição trabalhada, sem a introdução de novos conjuntos numéricos, algo que me parece facilitar a ligação com as várias representações dos números racionais. Penso, no entanto, que vale a pena continuar a reflectir sobre a definição mais favorável para uma compreensão completa do conjunto dos racionais.

As representações

As representações e a sua importância tinham aparecido na minha vida de professora a propósito do programa do ensino secundário e ligadas às várias formas de representar uma função. No início deste processo de experimentação do programa de Matemática, eu li que as diversas representações são um dos objectivos gerais do ensino da Matemática:

Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações. (...)

ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos (...) traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra (...) elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas; usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas.(...).Os alunos devem conhecer e compreender os diferentes tipos de representações, ser capazes de as utilizar em diferentes situações e de seleccionar a representação mais adequada à situação. (p. 4)

Para além destas capacidades [transversais], (...) este programa valoriza também outras capacidades como as de representação e de estabelecimento de conexões dentro e fora da Matemática (...) (p.8).

Porém, uma coisa é ler e outra bem diferente é apoderar-me do que está subjacente à ideia da representação em Matemática. Foi à medida que a leccionação dos vários temas se foi desenrolando que me apercebi do papel das representações e tomei consciência da transversalidade desta capacidade a todos os temas. Passei a encontrar esta palavra todas as vezes que abria o programa para consulta. Portanto, só no segundo ano de trabalho tomava consciência do número substancial de vezes que a representação é referida no programa. Só no segundo ano as várias representações dos números racionais ganharam clareza.

A gestão curricular

A unidade de trabalho dos professores experimentadores nunca foi a tarefa pensada para uma aula, mas sempre a planificação de cada um dos tópicos. Mais à frente tentarei ilustrar a importância desta forma de trabalho com exemplos retirados da planificação de um tópico. Parece-me que só assim é possível prever o que pode acontecer e tentar antecipar dificuldades dos alunos.

Antes de iniciar a planificação de qualquer unidade foi necessário escolher um percurso de aprendizagem. Não basta olhar para os dois exemplos de percursos de aprendizagem disponibilizados na página da DGIDC e escolher um deles. Por exemplo, os professores que no 3.° ciclo leccionam as turmas piloto optaram, no 7.° ano, por seguir o percurso B sem qualquer alteração, mas o mesmo já não aconteceu no 8.° ano. Faço um balanço particularmente positivo das opções tomadas na planificação do 8.° ano, na forma como se ligaram os vários temas de Álgebra. Iniciou-se o ano com o tópico *Semelhanças* que não tinha sido leccionado no 7.° ano, seguiram-se os *Números racionais* e depois as *Isometrias*. Trabalhámos depois numa única unidade *Funções e Equações*: equações do 1.° grau a uma incógnita (com denominadores), funções linear e afim e sistemas de duas equações a duas incógnitas. Esta sequência tem causado alguma surpresa quando é apresentada a outros professores: (i) em ambas as propostas de percurso de aprendizagem para o 8.° ano a ordem é Funções, seguindo-se as Equações que inclui os sistemas de equações; (ii) separámos as equações dos sistemas de equações; (iii) alterando a ordem proposta dos percursos, não se optando por ligar os sistemas às equações literais e optando-se por uma forma pouco habitual.

Apesar do balanço da unidade *Funções e Equações* ser positivo, não deixou de levantar dificuldade a introdução de alguns conceitos que vão continuar a ser trabalhados no 9.° ano, e que partilho de seguida, ilustrando com exemplos muito concretos. Sublinho que as tarefas pertencem à mesma unidade e que as alterações de termos que se vão efectuando de tarefa para tarefa podem parecer pormenores, mas constituem situações de grande complexidade para os alunos. A sequência de quadros que se seguem tem também como fim alertar para o facto de ser fundamental uma boa planificação da unidade, dado que, cada uma destas tarefas tratada isoladamente, não nos alerta para a complexidade do tema.

Debrucemo-nos sobre algumas questões que constam da sequência Funções e Equações:

> Resolve a equação
>
> $$2\frac{x}{6} + 2\frac{x}{4} = 20$$
>
> (retirado da *Tarefa 1 — Equações com denominadores*)

Nesta equação a x chamamos incógnita. O termo $2\frac{x}{6}$ é muitas vezes confundido com o numeral misto $2\frac{1}{6}$ e torna-se fundamental a distinção entre o significado da escrita quando o contexto é aritmético e o seu significado quando o contexto é a álgebra

> **1.** Cada uma das três funções seguintes está definida por um dos seguintes processos:
> A função f através duma expressão algébrica,
> $$f(x) = x^2 + 1\ (\ldots)$$
> (...) Uma função com uma expressão algébrica do tipo $y = kx$ (ou $f(x) = kx$), $k \neq 0$, tem o nome de *função de proporcionalidade directa* ou *função linear*.
> x é um objecto (...)
> (retirado da *Tarefa 3 — Funções lineares*)

Na tarefa 1, ao x chama-se incógnita e agora, na tarefa 3, ao x passa a chamar-se variável ou objecto. Alguns alunos continuam a identificar as expressões do tipo $y = kx$ como sendo equações nas quais querem determinar o valor da incógnita; outros alunos aceitam o termo variável, mas nunca o termo objecto.

> **1.** Considera as seguintes funções do tipo $y = kx + b$, com $k = 3$ (...)
> (retirado da *Tarefa 4 — Função afim*)

Na expressão $y = kx + b$ para além do x aparece agora um k e um b aos quais se optou por não chamar parâmetro por se considerar que era mais um termo ligado a letras que apareciam na igualdade e que poderia confundir os alunos.

> **1.** Cada uma das equações que se segue tem duas incógnitas.
> $$y = 3x + 4 \quad \text{e} \quad y = -2x - 1$$
> O par ordenado (1,7) é solução da equação $y = 3x + 4$ porque $7 = 3 \times 1 + 4$.
> O par ordenado (4,−9) é solução da equação $y = -2x - 1$ porque $-9 = -2 \times 4 - 1$.
> (retirado da *Tarefa 5 — Sistemas de duas equações*)

Expressões do tipo $y = 3x + 4$ apareciam na tarefa anterior e a x e a y chamávamos variáveis e aqui dizemos que são duas incógnitas. Aparentemente, trata-se de um pormenor sem grande importância mas, à medida que os alunos trabalham e colocam questões ou fazem afirmações, é notório que não sabem quando se aplica uma designação ou outra, se é indiferente um ou outro uso e qual a razão de ser da mudança dos termos aplicados.

O termo Álgebra não é referido no programa de 1991 e não se falava na altura do pensamento algébrico. O facto de a Álgebra ser valorizada neste programa e de ser alvo de uma maior atenção faz com que tomemos consciência da complexidade dos conceitos envolvidos e isso acarreta uma melhor compreensão das dificuldades evidenciadas nos alunos.

A brochura *Álgebra no Ensino Básico*, disponibilizada na página da DGIDC, aborda as questões ligadas ao conceito de incógnita, variável, parâmetro, equação e função e a sua leitura foi uma ajuda importante na clarificação sobre as opções a tomar na forma de abordar estes conceitos.

O trabalho colaborativo

As capacidades transversais referidas no PMATEB constam também, implícita ou explicitamente das restantes disciplinas da área das ciências exactas (o raciocínio, a comunicação, a resolução de problemas, as representações, as conexões, etc.). Também o tratamento da informação, corresponde a um domínio fundamental do trabalho a realizar com os alunos. Em todos os testemunhos dados, o trabalho colaborativo entre os professores de Matemática é muito valorizado. De facto não é possível deixar de fazer essa referência sempre que se falar destes dois anos de trabalho e é natural que dessa alusão nasçam outras igualmente importantes na nossa vida profissional. Será interessante aproveitar essa experiência positiva de trabalho em equipa para em conjunto com os professores dos conselhos de turma, nomeadamente com os professores das ciências exactas, se trabalhar em colaboração no sentido de desenvolver nos alunos a capacidade de leitura de textos informativos em contextos diversos e de mobilização dos elementos disponíveis nos textos em cada uma das áreas disciplinares. Os alunos ganham se a disciplina de Matemática for também entendida e valorizada pelos outros professores e o trabalho colaborativo, tal como já se faz entre professores de Matemática, pode ser uma via.

Referências bibliográficas

ME (2007). *Programas de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Ponte, J., Matos, A. & Branco, N. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Silva, S. & Paulo, J. (1973). *Compêndio de Álgebra, 1º tomo, 6.º ano*. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco

Apostol, T. (1979). *Cálculo* (volume 1). Rio de Janeiro: Editora Reverté Ltda.

Paula Teixeira
E.S. D. João V

Avaliar para aprender

Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário

«A avaliação tem sido um segredo bem guardado ao longo do tempo. Feita por quem sabe sobre quem está a aprender. Contudo, a avaliação formativa obriga a interrogar estas práticas. Se esta é entendida como um meio de ajuda à aprendizagem, como é possível fazê-lo sem ouvir os alunos?» (p. 81)

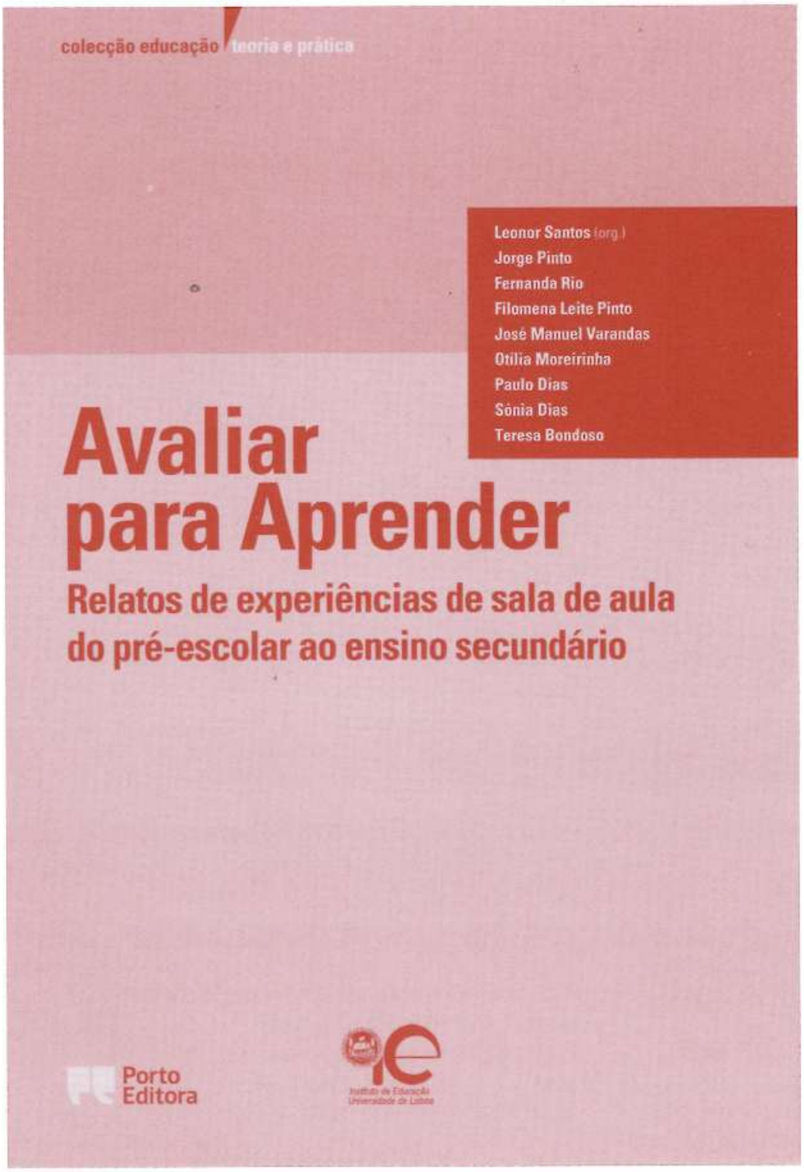
Há alguns meses atrás foi publicado um livro colectivo, organizado por Leonor Santos, que apresenta uma abordagem à temática da avaliação reguladora das aprendizagens, para todos os níveis educativos, da educação pré-escolar ao ensino secundário. O livro surge no âmbito de um projecto em curso — o Projecto AREA, Avaliação Reguladora do Ensino e Aprendizagem e tem como objectivo principal «partilhar algumas experiências entretanto desenvolvidas e reflectidas no âmbito da equipa do projecto, sustentadas num referencial teórico orientador do nosso trabalho» (p. 5). Salientaríamos duas das características mais interessantes do livro, características que na nossa perspectiva marcam claramente a sua identidade: a primeira é a abrangência de ciclos de ensino aos quais o livro se reporta e a segunda é o facto do trabalho relatado ter sido desenvolvido, analisado e discutido colaborativamente no seio de uma equipa que integra professores de todos esses níveis de ensino e investigadores. A natureza colaborativa do trabalho serviu de estrutura de apoio à decisão e à reflexão dos professores e investigadores e a abrangência dos níveis dos alunos permitiu uma análise mais profunda e holística das problemáticas e a identificação de características e indicadores gerais e transversais às práticas de avaliação reguladora no universo etário dos alunos envolvidos.

O livro está estruturado em cinco capítulos nucleares e apresenta uma organização inovadora, uma vez que assenta em narrativas de experiências desenvolvidas com os alunos. Cada uma destas narrativas é agrupada num âmbito temático, abarcando dimensões como os instrumentos de avaliação, a negociação de critérios de avaliação, o papel do erro na avaliação reguladora, auto-avaliação e a co-avaliação. São estas dimensões que estruturam o livro e dão coesão às narrativas apresentadas. Para além disso, cada uma das dimensões é discutida teoricamente, sendo fácil ao leitor perceber a conceptualização à luz da qual é feita a discussão e análise de cada um dos episódios apresentado.

Na introdução do livro, os autores analisam e discutem a noção de avaliação reguladora, assumindo claramente essa modalidade de avaliação como objecto de estudo no trabalho que apresentam, uma avaliação que serve fundamentalmente para contribuir para a aprendizagem, «o seu objectivo é acima de tudo ajudar a compreender o funcionamento cognitivo do aluno face a uma dada situação proposta para se poder intervir de forma adequada» (p. 12). Esta análise é feita a partir do conceito de avaliação formativa, actualmente ainda muito marcada, como referem os autores, pela teoria behaviorista. Perspectivam, por isso, uma avaliação formativa de natureza reguladora em que, numa lógica construtivista da aprendizagem, «o aluno passa a desempenhar um papel central» (p. 11), isto não significa, como defendem, que o papel do professor se torne menos importante, antes pelo contrário, uma vez que o professor deixa de se assumir como perito e decisor e passa a ser interveniente e proponente (em diálogo com os alunos), tomando decisões difíceis e exigentes em função da especificidade da diversidade de contextos de aprendizagem que selecciona.

Os autores defendem a natureza predominantemente interactiva da avaliação reguladora e, nesse sentido, defendem práticas de avaliação, desenvolvidas no dia-a-dia da sala de aula, em que, por um lado, o professor intencionalmente se preocupa em recolher informação, interpretar essa informação e agir em conformidade e, por outro, organiza contextos estruturados em que o aluno é chamado a desenvolver práticas de auto-regulação. Daí que todas as experiências narradas tenham decorrido em contextos habituais de sala de aula e não com turmas «especiais», previamente seleccionadas, constituindo um testemunho da possibilidade de integração curricular da avaliação reguladora, sem escamotear os constrangimentos encontrados. No entanto, os autores destacam, nas considerações finais que esses constrangimentos não são aqueles, muitas vezes pensados pelos professores de que «os alunos não são ainda capazes, são ainda muito novos, não têm ainda o amadurecimento necessário para darem resposta a certas solicitações» (p.109). Pelo contrário, ao «dar voz aos alunos», as experiências desenvolvidas mostraram que «os alunos são capazes de reflectir sobre o que fizeram e como fizeram, são capazes de serem autónomos, enfim são capazes de aprender!» (p.109).

Este livro é um livro sobre a avaliação como ferramenta para a aprendizagem, que parte da sala de aula e desafia quem o lê a problematizar aquilo que faz na sala de aula. Mas



Avaliar para Aprender
Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário

Autores: Leonor Santos (org.), Jorge Pinto, Fernanda Rio, Filomena Leite Pinto, José Manuel Varandas, Otília Moreirinha, Paulo Dias, Sónia Dias, Teresa Bondoso

Nº páginas: 112; *Ano:* 2010.
ISBN 978-972-0-34326-0
Editora: Porto Editora

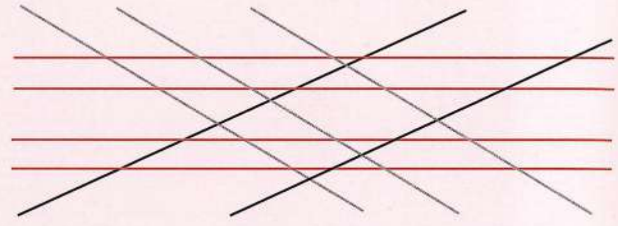
a tarefa não é fácil porque mexe com as nossas concepções (dos professores, dos alunos, dos encarregados de educação) em relação ao que é e para que serve a avaliação e lança desafios relacionados com as diferentes práticas reguladoras que é preciso compreender, desenvolver e aperfeiçoar constantemente. Neste sentido é necessário ser paciente, perseverante e crítico. Fica o desafio para que nos deixemos provocar por esta leitura.

Isabel Rocha e Hugo Menino
Núcleo de Investigação e Desenvolvimento em Educação/ Escola Superior de Educação e Ciências Sociais de Leiria

Paralelas e Polígonos

Temos duas rectas paralelas segundo uma certa direcção A, mais três rectas segundo outra direcção B e ainda quatro rectas segundo uma terceira direcção C.
No máximo, quantos triângulos se podem obter?
E quantos paralelogramos?
E quantos trapézios que não sejam paralelogramos?

(Respostas até 31 de Dezembro para zepaulo@armail.pt)



A hora dos biscoitos

O problema proposto no número 105 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Fomos fazer uma caminhada pela serra do Gerês. Depois de atravessarmos a sempre emocionante Fenda da Calcedónia, sentámo-nos a recuperar forças e abrimos o pacote de biscoitos que tínhamos levado.

A Ana tirou um biscoito e a décima parte dos que sobravam.

A Beatriz tirou dois biscoitos e a décima parte dos restantes.

O Carlos tirou três e a décima parte dos que sobejavam.

E assim sucessivamente até chegar a minha vez, ficando eu com os que ainda estavam no saco.

Curiosamente, acabámos por comer todos a mesma quantidade de biscoitos.

Quantas pessoas tinha o grupo e quantos biscoitos comeu cada um?

Recebemos 18 respostas: Afonso Garcia (Torres Novas), Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Catarina Ferreira (Lamego), Edgar Martins (Queluz), Francisco Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva (Amadora), Ilca Cruz, João Sá, Jorge Filipe (Lisboa), José Paulo Coelho (Moura), Leonel Vieira (Braga), Mária Correia de Almeida, Marta Gameiro (Torres Novas), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) Ricardo Portugal (Castelo Branco) e Vyacheslav Kostyuk.

Quase todos seguiram estratégias muito parecidas embora, como veremos a seguir, tenham aparecido mais dois processos diferentes.

Comecemos pela mais comum.

Seja B = número total de biscoitos.

A Ana tirou

$$1+\frac{B-1}{10} \text{ ou } \frac{9+B}{10},$$

deixando lá

$$B-\frac{9+B}{10}=\frac{9B-9}{10} \text{ biscoitos.}$$

A Beatriz tirou

$$2+\frac{\frac{9B-9}{10}-2}{10}=\frac{9B+171}{100} \text{ biscoitos.}$$

Como a Ana e a Beatriz comeram a mesma quantidade, vem:

$$\frac{9B-9}{10}=\frac{9B+171}{100},$$

ou $10B-90=9B+171$ ou $B=81$.

Havia então 81 biscoitos.

Podemos agora descobrir quantos comeu cada um e quantos eram os amigos.

A Ana tirou

$$1+\frac{81-1}{10}=1+8=9 \text{ biscoitos. Ficaram 72 no saco.}$$

A Beatriz tirou

$$2+\frac{70}{10}=2+7=9 \text{ biscoitos. Ficaram 63 no saco.}$$

E assim sucessivamente até ao nono amigo, que encontra o saco com 9 biscoitos e os tira todos.

A Graça Braga da Cruz seguiu um engenhoso processo, partindo do fim para o princípio.

O João Sá não usou equações (!) e escreveu o seguinte:

Se a Ana tirou um biscoito e um décimo dos restantes, então o número inicial de biscoitos era 1 + «múltiplo de dez», ou seja, um número terminado em 1.

Como a Beatriz tirou 2 + «a décima parte dos restantes», o número de biscoitos que tinha à sua disposição terminava em 2.

Do mesmo modo, o Carlos tinha diante de si um número de biscoitos que terminava em 3. E assim sucessivamente.

Isto quer dizer que cada um ou comeu 9 biscoitos ou um número que acaba em 9.

Vamos testar a hipótese 9.

Neste caso, a Ana comeu 1 + 8 (que é a décima parte de 80). O número inicial de biscoitos era 81.

Como 81 é múltiplo de 9, este número serve e então cada um comeu 9 biscoitos e eram 9 pessoas.

Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número

Joana Brocardo

O Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (Ponte *et al.*, 2007) perspectiva uma abordagem do tema Números e Operações com significativas diferenças em relação ao que estava previsto no programa anterior. Assume-se o desenvolvimento de sentido do número como o *pano de fundo* que contextualiza e orienta o trabalho com os números e das operações e altera-se a perspectiva e o ano de escolaridade em que determinados tópicos são introduzidos.

A introdução e trabalho em torno dos racionais não negativos é uma das alterações significativas assumidas pelo PMEB, e é este aspecto que abordo neste artigo. Começo por explicitar as alterações introduzidas e por avançar argumentos que as justificam. De seguida, discuto um conjunto de ideias que considero basilares para trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número.

Os números racionais não negativos: o que se altera e porquê

Perceber a evolução e a mudança do currículo de Matemática é fundamental para interiorizar o que se passa a valorizar e porquê. No PMEB, no caso do tema Números e Operações, destacam-se duas alterações significativas embora com ‹fôlego› bastante diferente: a um nível mais pontual, identifica-se a introdução, desde o 1.° ciclo, das várias representações dos números racionais e, a um nível de fundo, identifica-se a ideia de subordinar o trabalho em torno dos números racionais a uma perspectiva de desenvolvimento de sentido de número. O que poderá justificar estas alterações? Será que se trata de uma evolução pouco significativa ou, pelo contrário, ela encerra uma visão diferente sobre os números e as operações que importa reter e aprofundar?

Números decimais[1] versus fracções[2]

Nos programas de Matemática anteriores ao de 2007, embora surgissem algumas referências à importância do cálculo não algorítmico, a verdade é que todo o 1.º ciclo era perspectivado considerando a introdução rápida dos algoritmos tradicionais das operações aritméticas e o seu uso repetido na resolução de exercícios e problemas. Sendo o foco dominante o cálculo algorítmico, era expectável que para além dos números naturais, só se incluíssem os números representados na forma decimal, uma vez que quando se introduzem estes números se generaliza a estrutura decimal do sistema de numeração e se usam as mesmas regras de cálculo. Além disso, com os decimais percorre-se um caminho semelhante (paralelo até) ao dos naturais, em direcção ao algoritmo de cada uma das operações aritméticas, a partir das regras já definidas para estes números.

Numa perspectiva didáctica em que rapidamente se começava a trabalhar com base nas ‹unidades›, ‹dezenas› ou ‹centenas›, era relativamente fácil fazer a transição para as ‹décimas›, ‹centésimas› ou ‹milésimas›. Para os alunos que aprendiam a ter de representar os números e os cálculos usando uma ‹grelha tipo CDU›, a introdução dos decimais era mais uma oportunidade de continuar a usar o mesmo tipo de representação.

C	D	U
4	5	1

U	d	c
7,	4	3

Os algoritmos usados para adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números decimais são os mesmos que os usados para os números naturais. Numa perspectiva de grande valorização dos algoritmos tradicionais, importava ‹insistir› no seu uso, alterando o conjunto numérico mas persistindo no mesmo tipo de estrutura numérica.

7	2	3	3	1
1	0	3	2	3
	1	0		

7,	2	3	3,	1
1	0	3	2,	3
0,	1	0		

No programa actual, o foco do trabalho em torno dos Números e Operações não é o cálculo algorítmico. Por isso, os números racionais na sua representação fraccionária *podem* ser introduzidos antes dos decimais[3]. Embora prevendo, como é natural, uma abordagem «intuitiva a partir de situações de partilha e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo a modelos e à representação em forma de fracção nos casos mais simples» (Ponte *et al.*, 2007, p. 15), considera-se que se deve trabalhar com estes números que, do ponto de vista histórico, surgiram muito antes dos decimais, atribuindo-lhes sentido a partir de contextos significativos.

Perspectivar o desenvolvimento de sentido de número

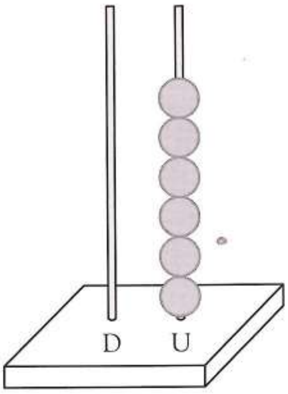
Uma das características que destaco como muito positiva no PMEB é o facto de nele se considerar que o trabalho em torno do tema Números e Operações deve ser perspectivado em termos de desenvolvimento do sentido de número. Do meu ponto de vista, importa perceber bem o significado desta diferença basilar relativamente a programas anteriores e analisar algumas das suas consequências a partir de um olhar sobre três aspectos que dizem respeito aos racionais.

Um primeiro, diz respeito à valorização do cálculo, considerando os seus diferentes tipos e não apenas o algorítmico. Contrariamente ao que muitos poderão pensar, trabalhar o sentido de número envolve ser exigente em termos de cálculo e na escolha do tipo que melhor se adequa ao cálculo a efectuar. Não podemos pensar, por exemplo, que ‹tudo vai bem› se os alunos:

- usarem o algoritmo para calcular 23,5 + 12,5 ou 6 : 15;
- não souberem calcular automaticamente 12 × 0,6 ou 1,25 × 100;
- recorrerem à calculadora para calcular 123,6 – 103,5 ou 0,75 × 24.

Um segundo aspecto diz respeito à valorização da construção do *sentido* que os números podem progressivamente ir assumindo para os alunos. Seja qual for o conjunto numérico de que falemos, as crianças começam por dar sentido ao que são e podem representar os números que pertencem a esse conjunto. Seja a propósito de números naturais, fraccionários ou decimais a aprendizagem decorre seguindo um processo de colocar e retirar rótulos (*labelled* e *unlabelled* no original, Galen *et al.*, 2009). Inicialmente, os números estão directamente ligados a objectos: 5 peças de Lego, três quartos de uma pizza, a mesa tem 1 metro e 5 centímetros de comprimento. Quando começa a lidar com os números naturais, uma criança pode saber que 5 peças de Lego mais 4 peças de Lego são 9 peças de Lego, mas não saber quanto é 5 + 4. Os números 5 e 4 são ainda rótulos que liga às peças de Lego. Só depois de passar por numerosas experiências em que lida com os números como rótulos de cubos, lápis, berlindes, etc., é que consegue começar a retirar os rótulos e a pensar em 5 e 4 sem estarem relacionados com objectos concretos, dando-lhes o *estatuto* de objectos em si mesmos. Nesta altura a criança vê 5 e 4 como números e sabe que 5 mais 4 é igual a 9. O mesmo se passa com os racionais. A criança sabe que três quartos de *pizza* mais um quarto de *pizza* é uma *pizza*. Só depois de muitas experiências usando fracções como rótulos é que começa a poder (e a ser vantajoso em termos da sua aprendizagem) retirá-los e a compreender que o rótulo não é importante para o sentido que atribue a ¾, a ¼ e aos cálculos associados. Nesta altura percebe, por exemplo, que ¾ + ¼ = 1 ou que 1 – ¼ = ¾.

Este processo de rotular e retirar rótulos evidencia que as crianças não conseguem compreender um trabalho numérico que passe, rapidamente, do exemplo para a definição e para a manipulação abstracta dos números e das operações entre eles. A figura 1 ilustra um tipo de proposta muito comum em alguns manuais: mesmo numa fase inicial em que não pode ser compreendido o que é um sistema de numeração de posição, ilustra-se a representação dos números num ábaco e propõem-se exercícios cujo resultado é sempre o número que se está a ‹dar›.



3 + 2 + 1 =
2 + 2 + 2 =
4 + 1 + 1 =
3 + 1 + 1 + 1 =

Figura 1. Representação de 6 no ábaco e exercícios cujo resultado é sempre 6

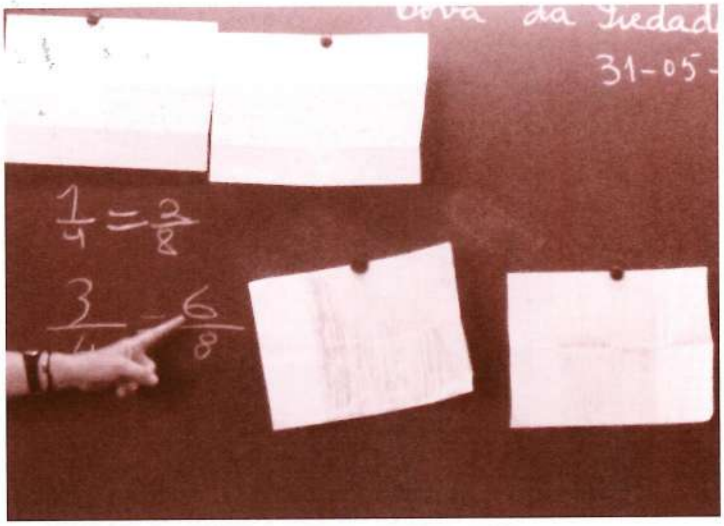


Figura 2. Eva e Raquel mostram que 1/2 = 2/4 e 3/4 = 6/8

Este processo também significa que a ordem de introdução dos vários conjuntos numéricos deve ser cuidadosamente pensada de acordo com a complexidade dos contextos que permitem rotular e a complexidade da representação que se introduz. Muitos contextos ligados à representação na forma de fracção — partilha equitativa de objectos e relação parte-todo a partir da divisão de uma unidade em partes iguais — são inicialmente mais acessíveis aos alunos do que os associados à representação decimal. Estes últimos envolvem o uso de unidades de medida padronizadas que são demasiado abstractas para poderem ser introduzidas logo no início do 1.° ciclo. A única excepção, em termos de contexto facilitador da introdução dos decimais, é o uso do dinheiro. No entanto, para além de implicar que as crianças estejam sempre a colocar rótulos no mesmo tipo de contexto, o dinheiro é um contexto pobre para essa rotulação uma vez que faz mais apelo ao uso de números naturais do que de números decimais.

Finalmente, um terceiro aspecto, diz respeito à atenção dada à construção de relações numéricas. Trabalhar de acordo com uma perspectiva de desenvolvimento de sentido do número implica incluir explicitamente a exploração de propriedades e relações numéricas ciclicamente revisitadas. Esta exploração intencional de propriedades e relações numéricas está muito relacionada com o planeamento cuidadoso de modos de trabalhar o cálculo mental, tanto com números inteiros, como com números racionais.

Por exemplo, saber usar o conceito de dobro de um número vai muito além de saber calcular o dobro de um número natural. Envolve conseguir mobilizar este conceito para calcular 2410 – 1205; 1– 0,5 ou metade de 50%. Também, conhecer as propriedades das operações vai muito além da sua enumeração e representação simbólica. Implica conseguir identificar situações em que elas facilitam o cálculo e ser capaz de as usar de forma flexível e produtiva. Por isso é que nenhum aluno deve usar uma calculadora para determinar 12 ×13 ou 12,5 × 24. Deverá ser quase imediato pensar que 12 × 13 é igual a 130 + 26, ou seja, 156. Para calcular 12,5 × 24 pode usar a propriedade associativa (no caso particular da relação dobro-metade) obtendo 25 × 12 = 50 × 6 = 100 × 3 = 300.

Três princípios para trabalhar os números racionais

Para além de compreender possíveis razões que fundamentam determinadas opções de carácter curricular, importa ao professor reflectir sobre os modos de as concretizar ao nível da sua prática. Nos pontos seguintes proponho três princípios que considero importantes para orientar a acção do professor no que se refere ao trabalho com os racionais.

Princípio 1. Usar contextos e modelos apropriados

O PMEB chama a atenção para a importância de usar diferentes contextos que permitam aprofundar a compreensão dos números racionais e as destrezas de cálculo. Fracções, decimais e percentagens são representações de números que só ganham sentido quando percebemos como são utilizadas em diferentes contextos.

Um contexto que tem bastantes potencialidades para trabalhar aspectos relacionados com as fracções é o de dobragens a partir de uma folha ou tira de papel[4]. Na figura 2 ilustra-se o modo como Eva e Raquel, duas alunas a iniciar o estudo das fracções, concluíram que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ tendo como base dobragens feitas em folhas de papel.

No quadro, para explicar como pensaram, Eva e Raquel colocam lado a lado duas folhas, afixadas no canto superior esquerdo do quadro (figura 2). A primeira está dobrada em quatro partes iguais e a segunda em 8. Registam e explicam que uma parte da folha dobrada em quatro é igual a duas partes da folha que está dobrada em 8, ou seja, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.

Para mostrar que $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ recorrem a um processo idêntico, mas usam outra forma de dobrar a folha em 4 e 8 partes iguais: as duas folhas estão colocadas no canto inferior direi-

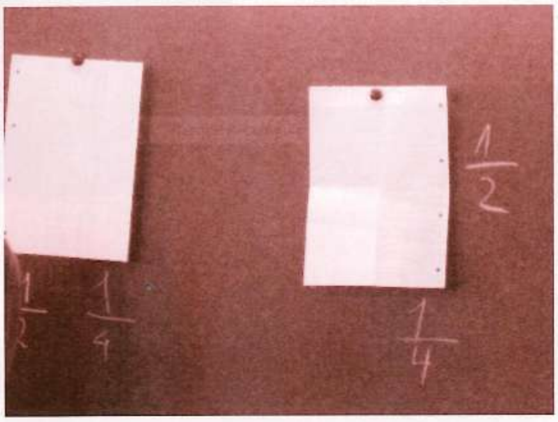


Figura 3. Eva e Raquel comparam ‹metades› e ‹quartos› de uma mesma folha de papel

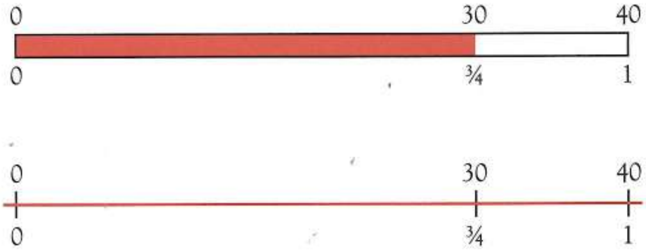
to da imagem e foram dobradas ao meio pelo lado maior, em cada dobragem (figura 2) e pintam de vermelho 3 das quatro partes e de preto 6 das oito partes iguais.

Este mesmo contexto permitiu também determinar e começar a comparar ‹metades› e ‹quartos› de uma mesma folha de papel. Como se mostra na figura 3, os alunos comparam formas diferentes de dobrar uma folha ao meio e em quatro partes iguais. Na primeira, dobram sempre a folha a partir do lado menor; na segunda dobram sempre a partir do lado que, em cada dobragem, fica maior.

Nas explicações que estas alunas e os seus colegas de turma iam dando, era visível que estavam, como é de esperar, numa fase de ‹colocar etiquetas›, relacionando as fracções com as partes de papel dobradas e pintadas. Percebiam que ½ é igual ¾ a porque olhavam para as duas folhas, uma dobrada em 2 partes iguais e outra em 4, e ‹viam› que uma das tiras da primeira folha cobria o mesmo espaço que duas das tiras da segunda. O mesmo se passava na comparação das metades e quartos com as folhas dobradas de forma diferente.

O que torna este contexto um bom exemplo é (i) ter significado e ser entusiasmante para os alunos que gostam sempre de dobrar, pintar e cortar e (ii) permitir lidar a um nível informal com ideias que progressivamente vão sendo formalizadas.

Figura 5. Representação de que num depósito com 40 litros restam 3/4 de combustível



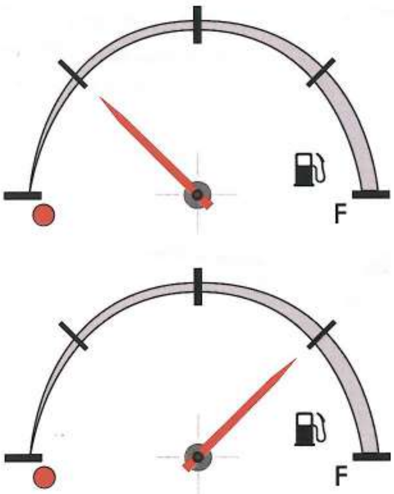


Figura 4. Mostrador do depósito de combustível de um automóvel

Um outro contexto diferente mas com as mesmas potencialidades é o mostrador do depósito de gasolina de um automóvel (figura 4). Numa primeira fase, os alunos percebem como é que funciona o ponteiro e como é que ele pode indicar que o depósito está cheio ou tem um quarto de gasolina[5].

Mais tarde, já no 2.° ciclo, este mesmo contexto pode proporcionar explorações mais complexas que permitem relacionar diferentes representações dos números. Percebem, por exemplo, que ¾ de um depósito não representa sempre a mesma quantidade de combustível e que o ‹todo› é importante para saber o que representa uma das suas partes.

Este contexto é também apropriado para apoiar a construção de dois modelos — a barra rectangular e a recta dupla — que, neste caso, explicitam a relação de proporcionalidade entre ‹litros› e ‹fracções do depósito›. Na figura 5 ilustra-se a representação desta relação considerando que o depósito tem 40 litros de capacidade máxima.

Outros contextos, baseados na exploração de situações relacionadas com as imagens que surgem no ecrã do computador quando se imprimem ou gravam documentos, permitem também apoiar o uso da barra rectangular e da recta, associando percentagens a fracções (figura 6).

A estreita relação entre alguns contextos e modelos não é simples de perceber e nem sempre é interpretada correcta-

Figura 6. Progresso de gravação de documento

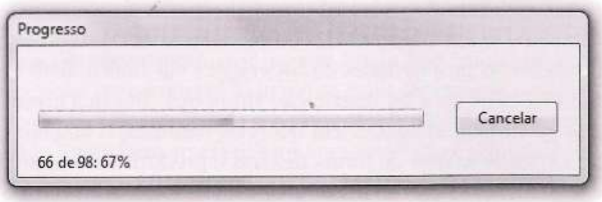


Figura 7. Relógio de ponteiros

Figura 8. Pizza repartida em partes iguais

mente. Pelo facto de se propor um contexto tendo em mente um certo modelo, isso não significa que os alunos o interpretem como se tinha previsto. No entanto, é bastante provável que esse contexto influencie de alguma forma o modo como modelam a situação.

Vejamos mais três tipos de exemplos de contextos e de modelos que lhes podem ser associados.

O relógio de ponteiros pode servir de contexto para várias tarefas (figura 7).

Este modelo permite relacionar os minutos com fracções da hora e facilitar a compreensão da adição e subtracção de fracções. Os alunos podem perceber que intervalos de 10 minutos são $\frac{1}{6}$ da hora, intervalos de 15 minutos são $\frac{1}{4}$ da hora, intervalos de 5 minutos são $\frac{1}{12}$ da hora, etc. Podem também pensar em $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ como sendo 20 mais 15 minutos. O total é 35 minutos ou seja, 7 intervalos de 5 minutos ou $\frac{7}{12}$ da hora.

Tarefas que exploram contextos de divisão de *pizzas* ou tartes (figura 8) apoiam a estruturação do modelo circular (figura 9).

Este modelo pode ser muito expressivo para representar partes da unidade e as relações entre essas partes, o que explica porque é que ele é muito usado para expressar, por exemplo, resultados de eleições.

Contextos tais como receitas de bolos, preços de diferentes quantidades do mesmo artigo ou percentagens de uma determinada quantia, podem facilitar o uso de tabelas de proporcionalidade (figura 10).

Existem também vários *applets*[6] que permitem trabalhar os números racionais, relacionando fracções, percentagens, números naturais e números decimais a partir da manipulação do modelo circular e da barra rectangular. Note-se, no entanto, que a sua exploração deve ser cuidadosamente planeada e pensada pois é fundamental que estes modelos façam sentido para os alunos, e isto só acontece depois de terem tido oportunidades, a partir da exploração de contextos significativos, de os irem descobrindo por si sós.

Figura 9. Representação de resultado obtido por duas listas

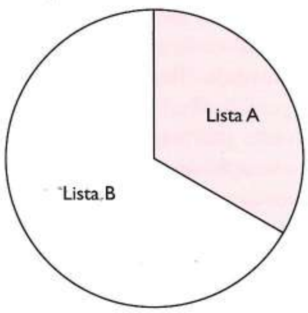


Figura 10. Tabelas de proporcionalidade

1 kg	100 g	25 g	125 g
20 euros			

100%	50%	25%	75%
532	266		

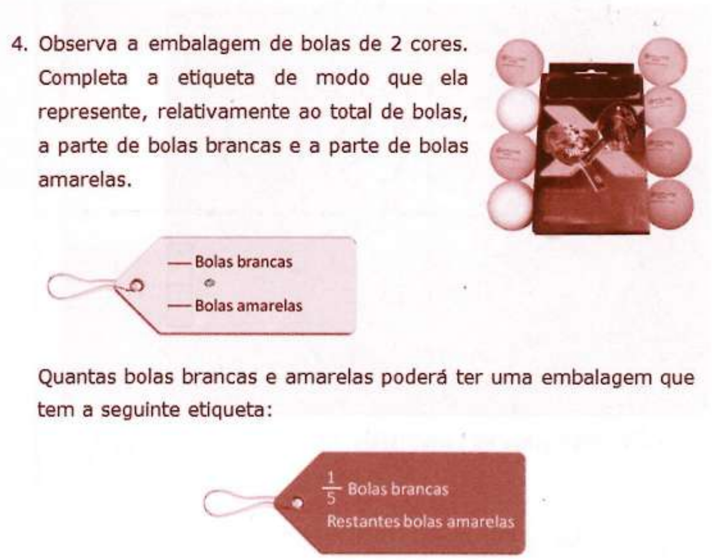


Figura 11. Tarefa sobre as embalagens com bolas de duas cores

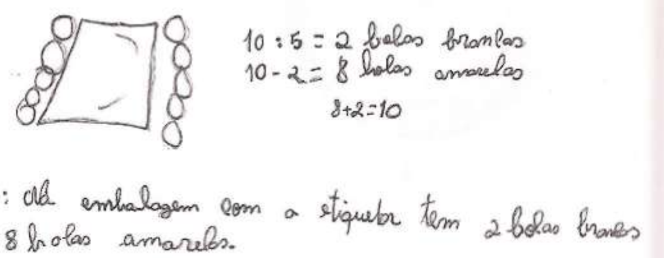


Figura 12. Resposta de Francisco e Gustavo

Princípio 2. Desenvolver gradualmente as «grandes» ideias subjacentes aos números racionais

No PMEB identifica-se a preocupação de ter em conta os sentidos das operações e os diferentes significados das fracções. Em relação a estas últimas, refere-se ser necessário trabalhar com fracções com significado de partilha, parte-todo, quociente, operador e medida.

Considero que esta indicação é importante para chamar a atenção de que se devem propor situações que abranjam, de acordo com uma evolução adequada, os vários sentidos e significados. Por exemplo, da mesma forma que não se podem propor contextos relacionados com a operação subtracção que envolvam apenas o sentido «retirar» e não incluam o sentido «completar», também não se podem apresentar situações com fracções que só envolvem o significado parte-todo, como tendia muitas vezes a acontecer. Esta indicação também é muito relevante porque se pretende que os alunos adquiram um conhecimento aprofundado e completo dos números e operações aritméticas. No entanto, não podem ser confundidas com tópicos a ensinar.

Quando pensamos nos números racionais e na sua aprendizagem, que ideias globais é fundamental destacar? O que poderão ser marcos importantes ao nível da evolução da sua aprendizagem numa perspectiva de desenvolvimento do sentido do número?

Fosnot e Dolk (2002) apresentam uma resposta bastante interessante e que pode ser produtiva ao nível de planear a aprendizagem dos números racionáis. Estes autores identificam sete ‹grandes› ideias a desenvolver: relação parte-todo, equivalência *versus* congruência, relacionar a multiplicação e a divisão com as fracções, o todo importa, relações de relações, decimais e percentagens — representações equivalentes, e valor de posição.

A relação parte-todo está no centro da compreensão do que é uma fracção e envolve perceber que as partes são equivalentes entre si e também o são em relação ao todo. Explorar situações como a de dobrar uma tira de papel em partes iguais permite realçar, desde muito cedo, a divisão da unidade em partes iguais e a relação que a fracção pode representar.

A compreensão desta ideia pode ser aprofundada na exploração de questões idênticas à segunda questão da tarefa da embalagem com bolas de duas cores[7] (figura 11).

Neste caso estava em causa perceber que a fracção ⅕ representa uma relação que pode ter diferentes todos, sendo o 5 o mais rapidamente identificado. No entanto, tal como Francisco e Gustavo identificaram a possibilidade de o todo poder ser também 10 (figura 12), os alunos podem começar a perceber que o todo pode assumir outros valores.

Uma ideia igualmente muito importante é a de que as partes de um mesmo todo não precisam de ser congruentes. Ilustrei anteriormente como Eva e Raquel começaram a lidar com esta ideia ao comparar metades e quartos de folhas iguais, mas dobradas de forma diferente.

Relacionar as fracções com a multiplicação e a divisão é também uma ideia que deve ser desenvolvida. Os contextos de partilha equitativa, como o de repartir três pizzas por quatro pessoas, permitem trabalhar desde cedo esta ideia e integrar os sentidos de partilha e de medida. Três pizzas repartidas por quatro pessoas (divisão por partilha) origina três em quatro partes de uma pizza (divisão por medida). Também relacionam a divisão e a multiplicação ao verificarem, por exemplo, que três vezes um quarto de cada pizza é igual a três quartos de uma pizza.

Uma ideia que está constantemente presente ao comparar e operar com fracções é a de que as fracções represen-

Figura 13. Composição de um sumo de fruta

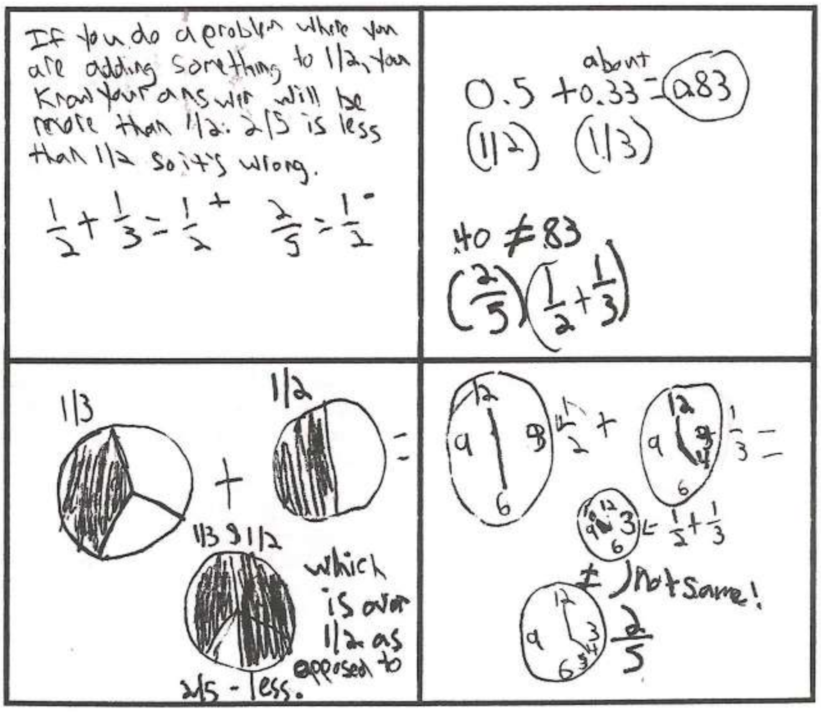


Figura 14. Justificações de que 1/2 + 1/3 ≠ 2/5 (Fosnot & Dolk, 2002, p. 138)

tam relações em que o todo importa. Vimos na tarefa com dobragens de uma folha de papel como Eva e Raquel usam esta ideia para comparar ‹metades› e ‹quartos› de uma mesma folha de papel. Embora de uma forma ainda informal, transformam as fracções iniciais em fracções equivalentes e que têm o mesmo todo.

Quando comparam, adicionam e subtraem fracções, os alunos devem referir-se a um mesmo todo. Quando multiplicam ou dividem devem ter em conta relações de relações, outra das grandes ideias identificadas por Fosnot e Dolk (2002). Para calcular ⅓ de ½ importa tomar um terço de um todo que é metade e indicar qual a relação que traduz o que foi feito, tendo em conta o todo um (e não a metade). Esta mudança de todo, embora não sendo fácil, pode ser trabalhada com significado a partir da exploração de problemas de partilha equitativa com sandes ou pizzas[8].

Fazendo a ponte entre fracções e decimais e percentagens, os números decimais podem ser representados numa fracção cujo denominador é uma potência de 10 e as percentagens representam relações relativamente a um todo igual a 100. Assim, é importante perceber que as «grandes» ideias relativas às fracções são igualmente válidas para os decimais e percentagens, aspecto também destacado por Fosnot e Dolk (2002). Para tal, é necessário proporcionar experiências em que estas diferentes formas de representação sejam relacionadas, como acontece ao analisar a composição de sumos (figura 13).

Em contrapartida, uma ideia importante para compreender os números decimais, o valor de posição, não é comum às fracções e percentagens. Esta última grande ideia, ‹unifica› números inteiros e decimais tanto do ponto de vista conceptual, como do ponto de vista do cálculo, como já referi anteriormente.

Princípio 3. Construir significados e relações

Compreender os vários conjuntos numéricos e ser capaz de efectuar cálculos usando os números nas suas diferentes representações, é um objectivo de aprendizagem da Matemática muito relevante. Para o atingir, os alunos percorrem um longo caminho que vai das primeiras aprendizagens numéricas, só com números naturais, até à fase em que completam o estudo dos números racionais. Este caminho é suportado pelo estabelecimento de uma teia de relações entre os conjuntos numéricos e as operações neles definidas, mantendo sempre uma perspectiva clara sobre o que é significativo em cada fase.

Um aspecto a ter em conta neste caminho prende-se com a ‹desestabilização› provocada pelos ‹novos› números e que tem como consequência, numa fase inicial, prolongamentos incorrectos de regras de cálculo, como por exemplo:

- pensar que 1,23 é maior que 1,3
- pensar que ½ + ⅓ = ⅖

Este tipo de erros ilustra como é importante atender sempre ao significado das novas representações numéricas e das relações entre elas. A análise dos erros a partir de contextos em que os números e as suas relações têm significado, constitui uma tarefa que pode ser interessante discutir com os alunos, uma vez que exige o pensar sobre os conceitos numéricos envolvidos.

Na figura 14 ilustra-se como os alunos conseguem pensar no que representa cada fracção e usar diferentes argumentos para justificar que ½ + ⅓ ≠ ⅖.

Um segundo aspecto a ter em conta prende-se com a importância de estabelecer relações e significados. Saber ope-

1. A Ana convidou 4 amigas para irem almoçar a um pequeno restaurante no dia dos seus anos. Todas decidiram escolher o prato do dia. No entanto, estavam indecisas sobre como encomendar as doses pois consideram que uma dose dá para duas pessoas. Que diferentes possibilidades teriam de o fazer? Qual das possibilidades é mais económica?

Figura 15. Problema das ementas

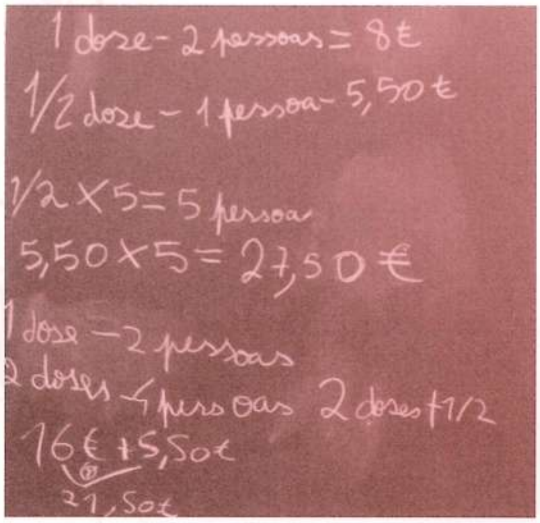


Figura 16. Resolução de José e Leandra

rar com os naturais, fraccionários ou decimais é importante. Mas é-o porque isso é necessário para resolver problemas de forma flexível, percebendo relações entre as várias representações dos números e seleccionando estratégias adequadas. Concretizo esta ideia procurando perspectivar o caminho a percorrer por José e Leandra. Numa das primeiras tarefas em que trabalharam com números representados na forma de fracção, resolveram o problema das ementas (Mendes *et al.*, 2010, p. 103), pensado para ser introduzido no 3.° ano (figura 15).

Ao explicar no quadro como pensaram (figura 16), José e Leandra registam nas duas primeiras linhas as relações estabelecidas no enunciado. Depois, indicam duas possibilidades de encomendar o prato do dia que correspondem à mais e menos cara, respectivamente. Analisando os registos que efectuaram percebemos que parecem muito expeditos na realização de cálculos e que parecem ter desenvolvido uma forma de representar como pensam usando os símbolos matemáticos. Com ½ × 5 = 5 pessoas parecem querer dizer tenho 5 vezes meia dose para 5 pessoas. O cálculo que fazem em seguida mostra que certamente pensaram assim. Nesta fase da aprendizagem é melhor o professor pedir para explicitarem o que pensam e não corrigir de imediato esta representação, uma vez que os alunos não têm ainda os conhecimentos suficientes para perceber o que ‹está mal›.

Mais tarde, após a exploração de várias tarefas que incidem sobre estes conteúdos, os alunos devem começar a compreender que este registo não está correcto. Nessa altura, devem ser capazes de perceber relações entre diferentes representações numéricas, percebendo que ½ × 5 não representa o mesmo que 5,50 × 5 pois ½ de uma dose não é o mesmo que o preço de meia dose. ½ × 5 pode representar metade de 5 doses ou de 5 pessoas (o que tendo em conta o contexto não faz sentido) e não o preço de cinco meias doses.

Imaginemos agora que José e Leandra estão no final do 2.° ciclo. Deverão ter tido oportunidade de aprofundar aspectos centrais relativos aos números racionais que lhe permitam relacionar, com sentido, as suas várias representações e ser capazes de manipulá-las adequadamente na resolução de problemas. É fundamental que compreendam, por exemplo, que:

- o preço de 0,764 kg de laranjas a 1,40 euros por quilo é aproximadamente ¾ de 1,40 euros;
- ter um desconto de 25% corresponde a pagar ¾ do preço inicial;
- é mais barato comprar um frasco de compota que pesa 400 gramas e custa 3,80 euros do que um frasco com 300 gramas da mesma compota mas que custa 3 euros;
- numas eleições em que 40 em cada 100 portugueses votou, houve maior percentagem de abstenção do que nas eleições anteriores, em que votaram 5 em cada 9 portugueses.

Globalmente, José e Leandra deverão ter tido oportunidade de explorar problemas matemáticos ricos, lidando e relacionando as diferentes formas de representar os números racionais. Por último, a partir de um processo sucessivo de retirar rótulos, deverão saber comparar e representar números racionais na recta numérica, assim como calcular o valor de expressões numéricas em situações sem contexto, estabelecendo relações entre os números nas suas várias representações e usando o tipo de cálculo que melhor se adequa aos números envolvidos e suas representações.

Reflexão final

Trabalhar com fracções, decimais e percentagens envolve saber operar formalmente com estas diferentes formas de representação dos números. Este objectivo deve ser atingido depois de um longo processo de aprendizagem cuidadosamente planeado e baseado em sucessivos ciclos de colocar e retirar rótulos, tal como foi referido anteriormente. Saber operar com os objectos matemáticos abstractos é um importante objectivo do PMEB que não pode ser relegado para segundo plano nem pode ser ‹substituído› pelo uso da calculadora. Esta pode e deve ser usada para ajudar a pensar, aumentando a compreensão sobre os números e as operações. Deve ser utilizada para efectuar cálculos em situações em que este aspecto não é central. Não pode, no entanto, recorrer-se à calculadora como argumento para prescindir de um trabalho aprofundado em torno do desenvolvimento das capacidades de cálculo mental e escrito, objectivos de aprendizagem fundamentais e claramente destacados no PMEB.

O ditado popular que diz «nem oito nem oitenta» pode resumir bem o que referi anteriormente. Importa não passar de:

- um excessivo peso do cálculo formal, para uma situação em que ele não é contemplado;
- uma situação em que não se pode usar a calculadora para uma em que ela é usada indiscriminadamente;
- um uso reduzido ou mesmo inexistente de materiais manipuláveis para um uso indiscriminado de qualquer tipo de material.

Conseguir este equilíbrio não é fácil. No entanto, há indícios claros de que ‹as coisas› estão a mudar no bom sentido. Existem cada vez mais materiais com qualidade de apoio ao trabalho do professor, a introdução do PMEB criou em algumas escolas dinâmicas de trabalho bastante interessantes, o Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1.° e 2.° ciclos já abrangeu um número significativo de professores. Por isso, termino este artigo com uma tónica positiva, destacando que, embora haja ainda muito por fazer no âmbito de uma concretização efectiva das ideias prescritas no PMEB relativamente aos racionais, estamos no bom caminho. Precisamos é de continuar!

Notas

1 A partir daqui usa-se o termo número decimal ou apenas decimal no sentido de número racional na sua representação decimal.

2 Usa-se o termo fracção no sentido de número racional na sua representação na forma de fracção.

3 No programa de 1991 a introdução no 1.° ciclo de números racionais não representados na forma decimal estava limitada ao uso de operadores como «metade» ou «terça parte», não constituindo, de facto, uma verdadeira inclusão dos números racionais representados na forma de fracção.

4 No *site* da DGIDC estão disponíveis várias tarefas que envolvem dobragens de papel. Neste artigo usam-se exemplos de exploração de uma delas e que está incluída em Mendes, Brocardo, Delgado, & Gonçalves (2010).

5 Tarefa destinada ao 3.° ano e incluída em Mendes *et al.* (2010).

6 Como os *Fractions model I, II e III*, disponíveis no *site* do NCTM.

7 Tarefa incluída em Mendes *et al.* (2010).

8 No artigo de Boavida, Silva e Fonseca (2009) da revista *Educação e Matemática* n.° 102 podem ver-se exemplos do modo como esta ‹grande› ideia pode surgir no contexto de uma partilha equitativa de sandes.

Referências bibliográficas

Fosnot, C., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: constructing fractions, decimals, and percents.* Portsmouth, The Netterlands: Heinemann.

Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E. & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-traching trajectory for grades 4, 5 and 6.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

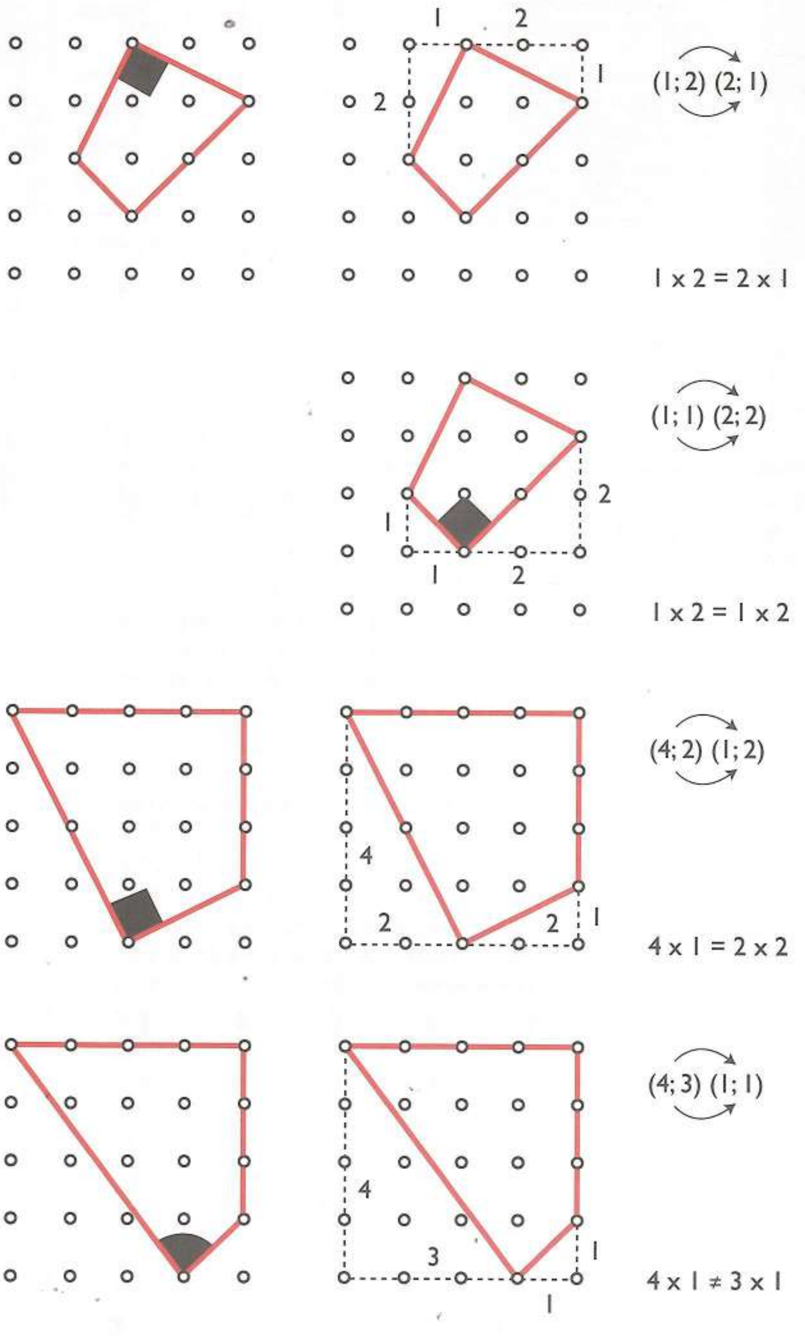
Mendes, F., Brocardo, J., Delgado, C., & Gonçalves, F. (2010). *Números e operações — 3.° ano. Materiais de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação (disponível em http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica).

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* (disponível em http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica)

Joana Brocardo
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Possibilidades, muito mais do que descobrir um exemplo[1]

Cristina Loureiro



No texto anterior foi aflorada a ideia de construir um quadrilátero só com 2 ângulos rectos opostos. Este tipo de desafio inscreve-se no raciocínio matemático de descoberta de um exemplo. Uma actividade desta natureza não termina com a satisfação pela descoberta de um exemplar. É necessário que seja natural a atitude de ir à procura de mais exemplos e de querer compreender por que razão matemática são eles possíveis. É assim que se poderão obter mais, todos se o número de possibilidades for finito, tantos quantos se queiram, no caso de existirem em número infinito. Deste modo, descobrir um exemplo será sempre ampliar o conhecimento matemático.

Os quadriláteros apresentados no texto referido são exemplos de quadriláteros apenas com 2 ângulos rectos opostos. Foi deixado ao leitor a tarefa de garantir se os ângulos em causa eram ou não rectos. Haverá uma técnica rápida para ter a certeza se um ângulo, na estrutura quadriculada do geoplano, é ou não recto?

Se os produtos cruzados dos pares das diferenças entre pontos (ver as figuras), tomadas pela mesma ordem, são iguais, o ângulo é recto. Se os produtos são diferentes, o ângulo não é recto. Esta técnica só deve ser aplicada a ângulos que à vista desarmada parecem rectos ou quase rectos.

Com esta técnica é muito fácil descobrir mais exemplos de quadriláteros só com 2 ângulos rectos opostos em qualquer rede ponteada quadriculada, isto é, numa rede que tem subjacente uma estrutura ortogonal isométrica. Fica por provar que esta técnica é válida e porque é que ela funciona.

Descobrir um exemplo é um dos tópicos do raciocínio matemático no novo Programa de Matemática para o Ensino Básico.

Nota

[1] Este artigo é o segundo de uma série de textos curtos sobre ideias matemáticas importantes. Cada artigo será a discussão de uma ideia com base numa experiência ou num episódio de sala de aula.

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa

Novo Programa de Matemática

Inovação de práticas e aprendizagens

Paula Pessoa

Que balanço das aprendizagens matemáticas dos alunos?

Nos últimos dois anos, muito se tem falado do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. O mesmo surge como sendo um reajustamento do anterior Programa. Todavia, quem, como eu, teve o privilégio de embarcar na aventura da sua experimentação, facilmente se apercebeu de que se trata de um documento inovador de práticas e aprendizagens. Neste artigo, dou o meu singelo testemunho enquanto professora experimentadora deste Programa, durante dois anos lectivos, numa turma (3° e 4° anos) da Escola Básica de Gavião.

Com o vivenciar desta experiência, impõe-se o comprometimento com o processo de reformulação das concepções do que é ensinar e aprender Matemática e a responsabilidade pelo desenvolvimento de uma atitude positiva face ao Novo Programa pois, durante a sua experimentação, confrontei-me com inúmeras evidências de que proporciona aos alunos aprendizagens de maior qualidade. As orientações/indicações metodológicas, por ele preconizadas, conduzem a alterações estruturais profundas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Apontam, inequivocamente, para uma redefinição dos papéis desempenhados pelo alu-

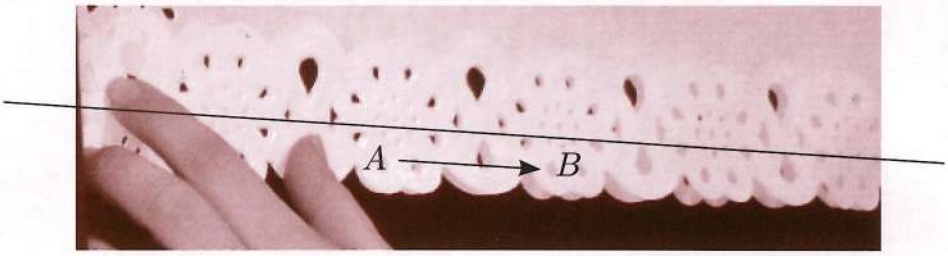


Figura 1. Identificar simetrias e modelar a translação

no e pelo professor: o primeiro assumindo uma participação mais activa na construção do saber; o segundo constituindo-se como organizador e dinamizador da aprendizagem. A valorização de vários modos de trabalho, a natureza das tarefas/ situações de aprendizagem, de cariz mais exploratório e investigativo, e a ênfase colocada no desenvolvimento das capacidades transversais possibilitam o entrecruzar de dimensões importantes das aprendizagens matemáticas e a criação de dinâmicas comunicacionais assentes na discussão e reflexão sobre a actividade desenvolvida.

Há uma expressão que traduz de forma clara o que decorre do trabalho desenvolvido com este Programa: *Matemática com compreensão*. De uma postura acrítica na realização de procedimentos, evoluiu-se para uma prática onde o fazer anda a par da justificação e argumentação, ganhando por isso significado. Os progressos evidenciados nas aprendizagens realizadas pelos alunos, abrangem os mais variados temas/tópicos e capacidades, nomeadamente ao nível do desenvolvimento do sentido de número e do cálculo mental, do pensamento algébrico e geométrico, da literacia estatística, da capacidade de comunicar as suas ideias e procedimentos, na justificação de raciocínios e na resolução de problemas, em que os alunos revelam maior facilidade na apreciação da plausibilidade dos resultados obtidos, na sua formulação e na reflexão sobre a adequação e eficácia das estratégias utilizadas.

Face a este cenário compreensivo de conceitos e procedimentos matemáticos importantes, uma nova visão da Matemática vai adquirindo forma e, com ela, a consciencialização das formas de trabalho que favorecem a sua apropriação pelos alunos. A construção colaborativa dos saberes, a partir das interacções dos alunos entre si e com o professor, promoveu a organização e clarificação do pensamento matemático dos alunos que, agora, revelam mais segurança e confiança nas suas capacidades pessoais.

A postura crítica e reflexiva em situações matemáticas diversas e o domínio de processos, ideias e conceitos matemáticos, por parte dos alunos, vieram reforçar a premissa de que o êxito na aprendizagem da Matemática está intimamente relacionado com o tipo de tarefas/experiências de aprendizagem que lhes são propostas e com o modo como o professor acompanha a realização das mesmas, respondendo a dúvidas que possam comprometer o seu desenvolvimento, incentivando-os a prosseguir e a ultrapassar dificuldades (sem interferir com o seu raciocínio), promovendo o confronto de estratégias e a argumentação.

O desenvolvimento do sentido de número, do cálculo mental, da abordagem aos algoritmos e aos números racionais, no âmbito dos *Números e Operações*; a valorização das capacidades transversais e do tema *Organização e Tratamento de Dados* e, na *Geometria*, o desenvolvimento do sentido espacial, são algumas das alterações mais marcantes relativamente ao trabalho que foi desenvolvido.

Frisos — Um exemplo de aprendizagens no domínio da Geometria

Uma alteração significativa em relação ao Programa anterior é o estudo, logo no 1.º ciclo, de diversas transformações geométricas, tão importantes na formação matemática dos alunos.

A ideia de simetria, neste ciclo de ensino, tem-se restringido à reflexão de eixo vertical e, em alguns casos, de eixo horizontal. É fundamental que os professores tenham uma ideia clara do conceito de simetria e que saibam que actividades devem propor aos alunos, que lhes permitam desenvolver o conhecimento matemático de transformações geométricas como as isometrias, abordando também a reflexão deslizante, a translação e a rotação.

Neste âmbito, os alunos do 4º ano da turma piloto da EB de Gavião tiveram a oportunidade de se envolver em actividades ricas e produtivas, das quais destaco a exploração/construção de frisos, dado que os mesmos constituíram uma importante fonte de exploração de simetrias, possibilitando o estudo de isometrias de forma motivadora e esclarecedora.

Neste trabalho, os alunos identificaram simetrias de translação, reflexão, reflexão deslizante e rotação (meia-volta), investigaram os efeitos destas transformações e descreveram-nos, tendo sido gradualmente integrado o vocabulário próprio do tema.

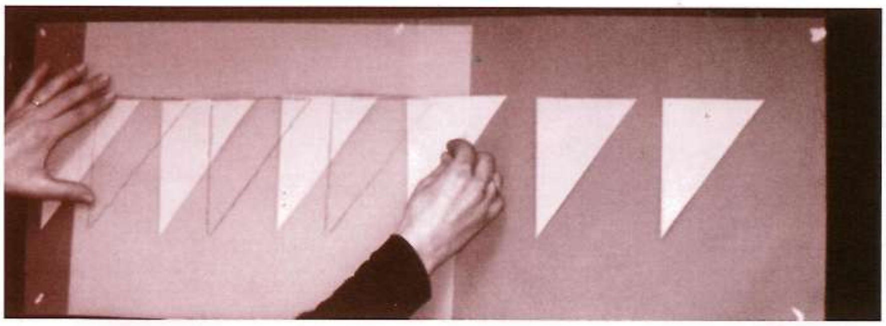


Figura 2A. Translação

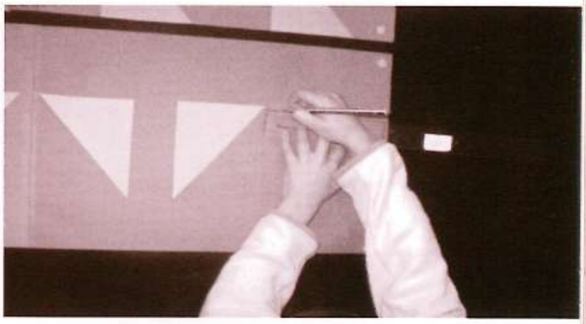


Figura 2B. Translação e reflexão de eixo vertical

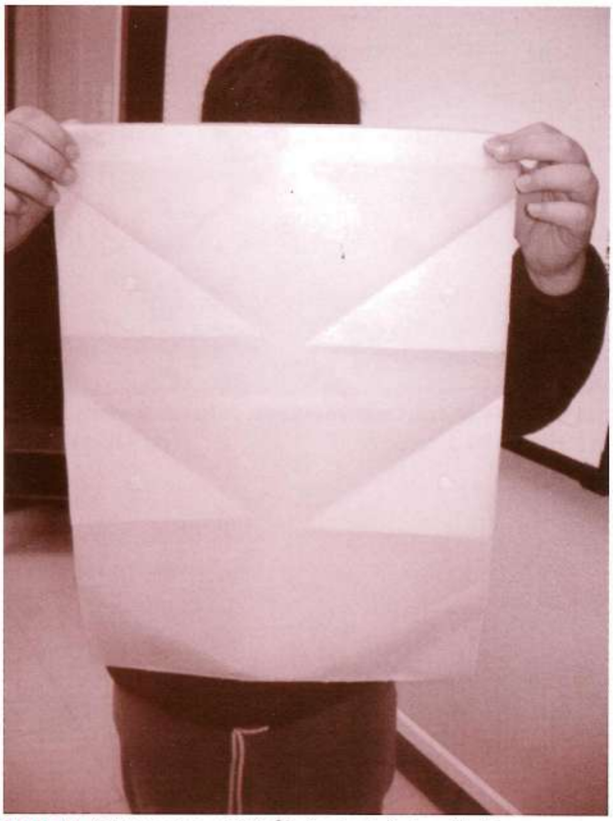


Figura 2C. Verificando a existência de simetria de reflexão

Numa fase inicial da aula, apresentaram-se frisos de papel aos alunos e pediu-se que identificassem simetrias. Facilmente se referiram à reflexão de eixo horizontal e vertical, mas não fizeram qualquer referência à simetria de translação.

A professora recorreu a um dos frisos e, com uma figura igual, sobrepõe a inicial e «desliza», segundo o vector AB, mostrando que a figura, no seu conjunto, é transformada nela própria, modelando, assim, a translação (figura 1).

Posteriormente, construíram-se, com toda a turma, diferentes frisos, tendo em conta algumas das simetrias possíveis, modelando as rotações, translações e reflexões (figuras 2A e 2B) e verificando a existência de simetrias de reflexão, através de dobragens (figura 2C). Os alunos compreenderam que na simetria de translação se verifica um deslocamento segundo uma dada direcção, um dado sentido e um dado comprimento e utilizaram a régua para efectuarem o deslocamento com maior rigor (figura 2B). É de referir que a utilização de papel transparente facilitou a compreensão dos conceitos envolvidos (figura 2C).

Na construção do friso com simetria de rotação de meia-volta, com o papel transparente, decalcou-se a configuração e «rodou-se» em torno de um centro. Foi uma forma de modelar a rotação, bastante compreensiva para os alunos (Figura 2D).

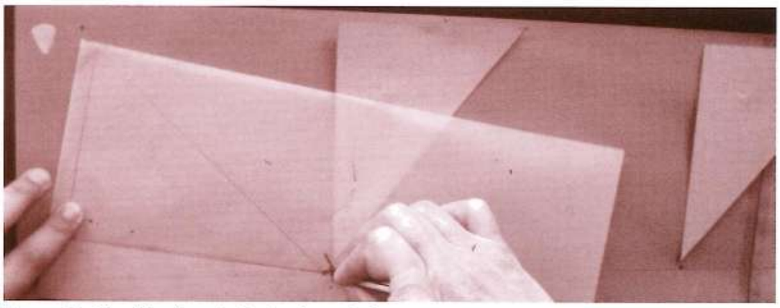


Figura 2D. Simetria de rotação [meia-volta]

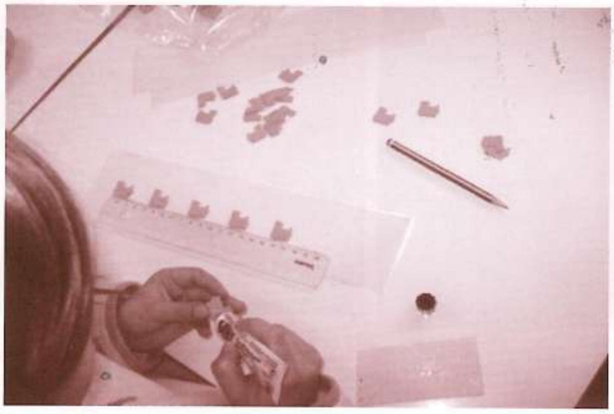


Figura 3A. Construindo um friso

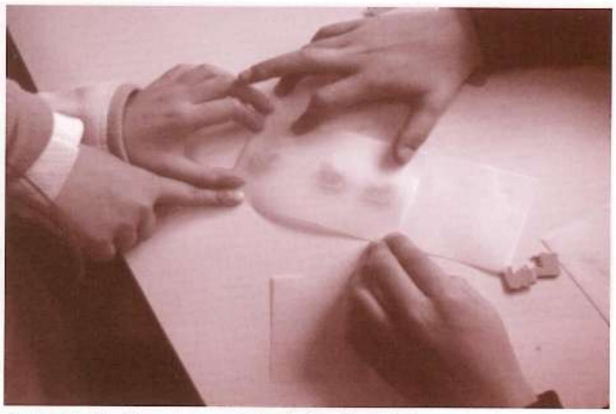


Figura 3B. Verificando a existência de simetria de reflexão de eixo vertical

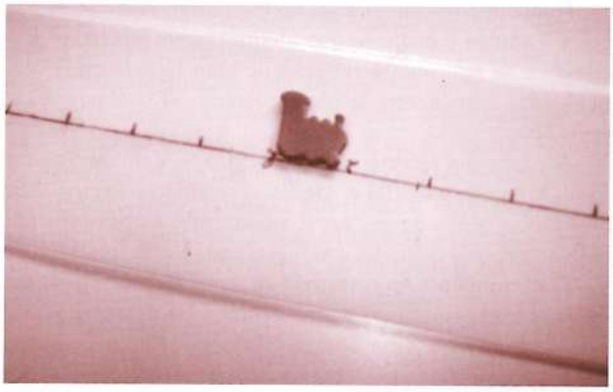


Figura 3C. Rotação de meia-volta [posicionamento da configuração entre dois centros de rotação consecutivos]

Figura 3D. Rotação de meia-volta [obtendo os transformados da configuração]

Após este trabalho, os alunos, em pequenos grupos, construíram os seus próprios frisos, tendo em conta as simetrias anteriormente exploradas. Houve o cuidado de que as configurações/motivos utilizados (feitos em material Eva) não contivessem qualquer simetria para além da identidade. Mais uma vez verificaram a reflexão através das dobragens (figura 3B). Na construção do friso com simetria de translação e rotação de meia-volta, os alunos desenharam uma recta no centro do friso e escolheram dois pontos J e C. Por translações sucessivas, foram obtendo os transformados de J. O ponto J e os seus transformados foram tomados para centros de rotações de amplitude 180°. Posicionaram a sua configuração entre dois centros de rotação consecutivos (figura 3C). Obtiveram os transformados da sua configuração pelas duas rotações de centro nesses pontos e de amplitude180°. Utilizando, sucessivamente, o mesmo processo com as cópias da sua configuração, obtiveram um friso com rotação de amplitude 180° — rotação de meia-volta (figura 3D).

Decalcaram a sua configuração e as cópias obtidas por translação (na parte superior do friso) e «rodaram» em torno de um centro, para verificarem se havia sobreposição das duas figuras (figuras 4B e 4C). Verificaram, ainda, que obtinham a figura original tomando como centro de rotação qualquer ponto obtido por translações sucessivas de um ponto inicial, mesmo efectuando a rotação no sentido inverso.

Os frisos construídos pelos alunos foram apresentados a toda a turma e colocados no quadro, junto dos modelos correspondentes (figura 5).

Esta tarefa permitiu a abordagem a diferentes tipos de simetria, a aprendizagem de conceitos geométricos de forma dinâmica e o aprofundamento da sua compreensão.

O conceito de simetria foi também a base para actividades de justificação/argumentação. A comunicação entre professor e aluno — oral ou escrita — é muito importante para que o aluno explicite os raciocínios matemáticos envolvidos nas experiências geométricas realizadas.

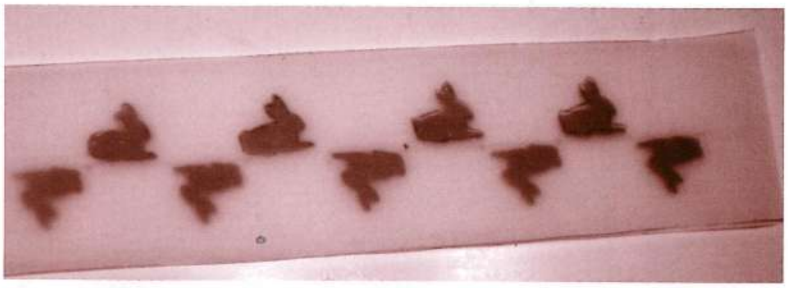


Figura 4A. Rotação de meia-volta

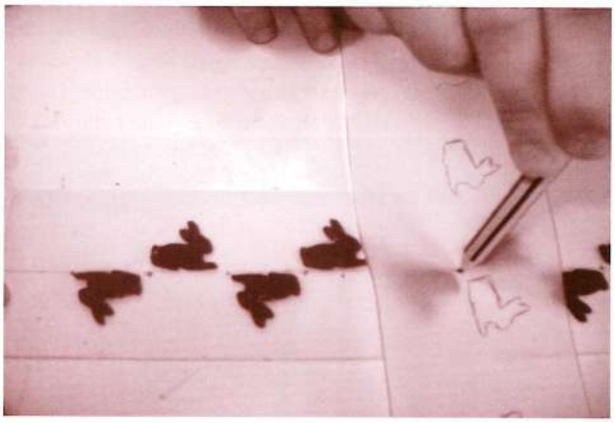


Figura 4B. Modelando a Rotação de meia-volta (fixando um centro de simetria de rotação)

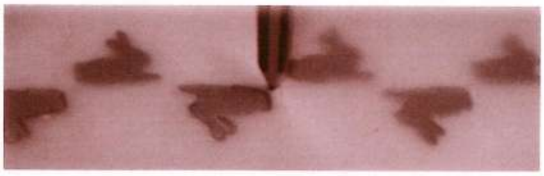


Figura 4C. Rotação de meia-volta (sobreposição perfeita aos 180°)

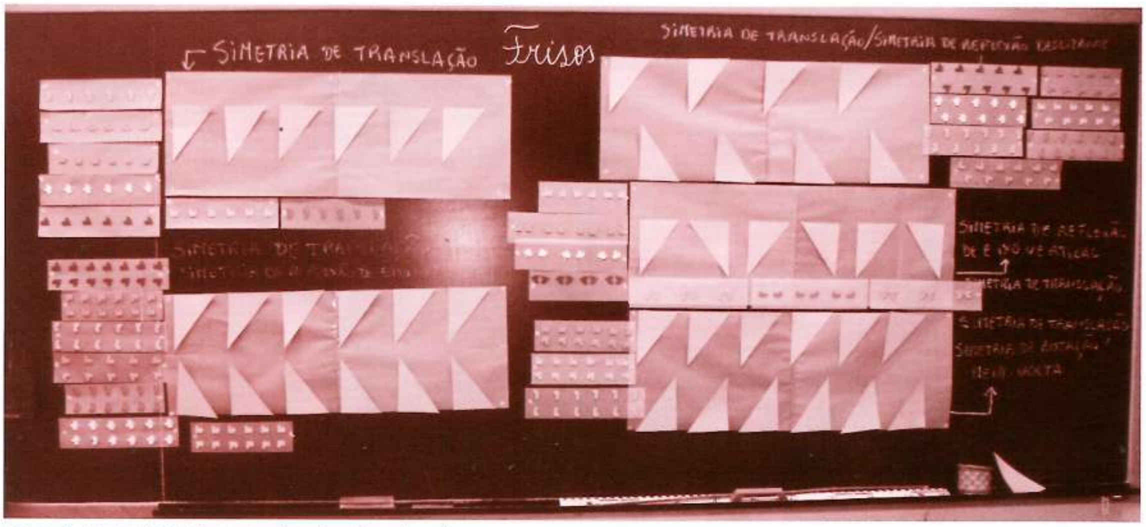


Figura 5. Frisos (modelos e construções dos alunos)

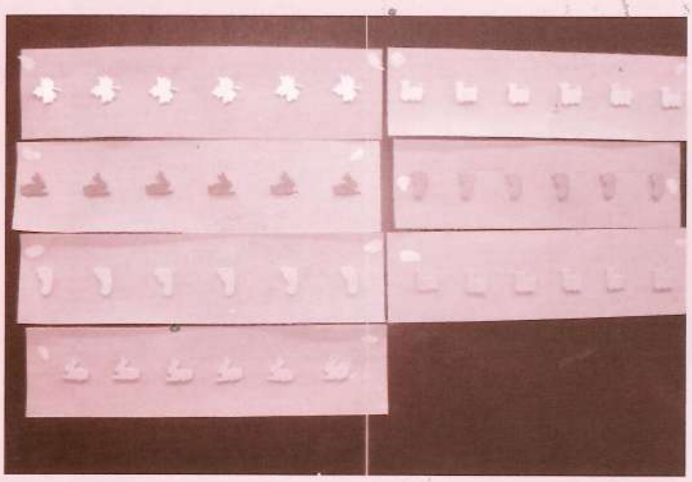


Figura 6A. Translação

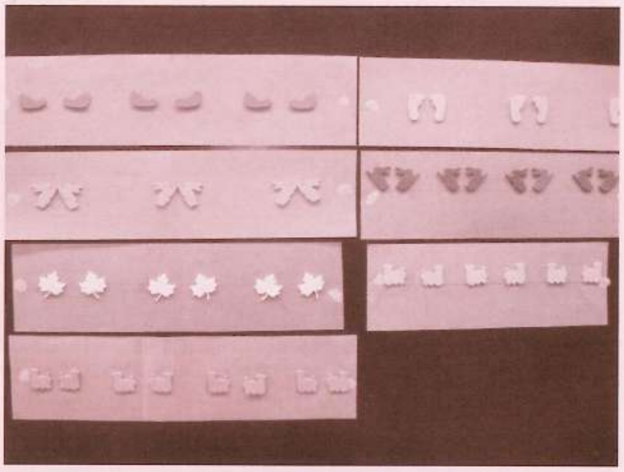


Figura 6B. Translação/Reflexão de eixo vertical

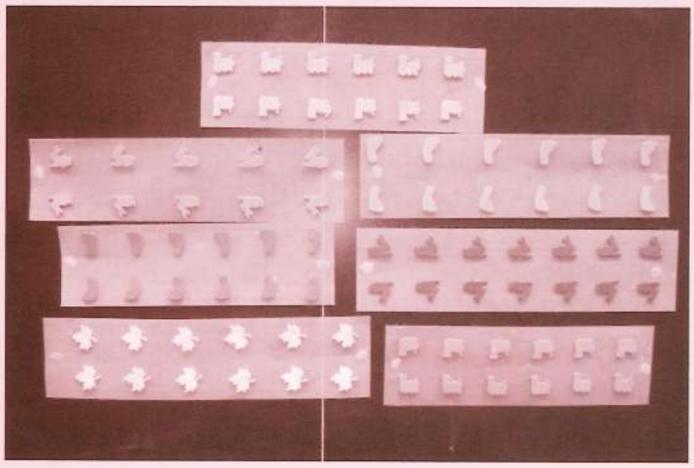


Figura 6C. Translação/Reflexão de eixo horizontal

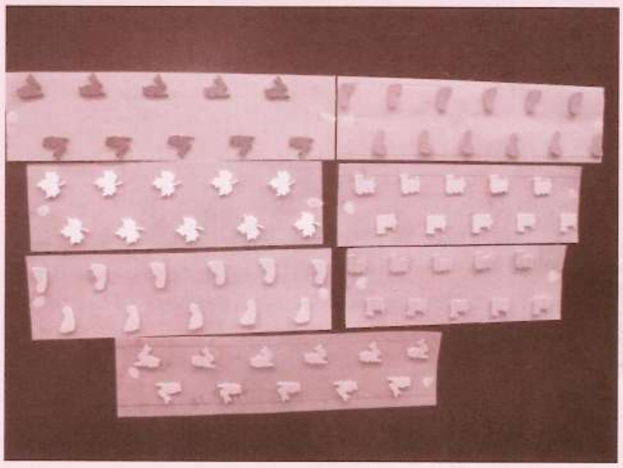


Figura 6D. Translação/Reflexão Deslizante

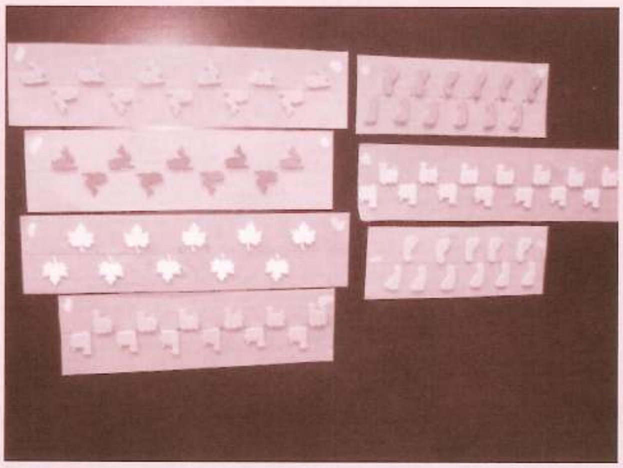


Figura 6E. Translação/Rotação (meia-volta)

Que desafios para os professores?

O exemplo apresentado é revelador de que o Novo Programa integra ideias/conceitos relevantes e enfatiza processos e capacidades que promovem a aprendizagem compreensiva da Matemática, numa perspectiva clara de articulação que conduz os alunos, de forma gradual, para níveis crescentes de entendimento conceptual.

Mas é preciso termos plena consciência de que a concretização dos princípios veiculados por este documento requer o compromisso dos diferentes agentes educativos, assumindo os professores, neste processo, um papel fulcral, já que a sua acção determina, em grande parte, a forma como os alunos aprendem matemática.

A tónica colocada no desenvolvimento das capacidades transversais, a exigência de uma selecção mais criteriosa das experiências de aprendizagem a proporcionar aos alunos e de estratégias pedagógicas e de avaliação a adoptar, bem como um maior aprofundamento na abordagem de alguns tópicos vem colocar ao professor um enorme desafio no processo de planificação/gestão da aula, para mim, um dos aspectos mais complexos na leccionação do Novo Programa e que mais dúvidas suscita:

Como estabelecer uma sequência de tarefas coerente, na abordagem de cada tópico?

Quais as tarefas mais significativas para introduzir determinados conceitos, capazes de envolver e desafiar os alunos?

Como organizar e orientar o trabalho dos alunos?

Que perguntas colocar para fazer emergir aspectos estratégicos do pensamento matemático dos alunos, no sentido de tentar perceber as suas dificuldades e conduzi-los a níveis mais elevados de entendimento conceptual?

Que conexões com outras áreas e dentro da própria Matemática se podem estabelecer?

São tomadas de decisão que exigem do professor um conhecimento matemático e pedagógico sólido, a vivência de uma prática reflexiva e investigativa e uma disponibilidade para a mudança. Torna-se imperativo questionar concepções do que é ensinar e aprender Matemática e tornarmo-nos aprendentes da nossa prática, envidando esforços no sentido do seu aperfeiçoamento o que, indubitavelmente, se reflectirá na extensão e qualidade das aprendizagens dos alunos.

Neste domínio, a formação contínua, em contexto de sala de aula, abrangendo os diferentes temas e capacidades transversais, assume um papel fundamental. No entanto, outros meios se revestem de particular importância, nomeadamente o estabelecimento de dinâmicas colaborativas entre pares que potenciem a apropriação das orientações curriculares e das linhas orientadoras do Programa, a selecção/criação de tarefas e a mobilização de estratégias pedagógicas eficazes.

É de salientar, também, os excelentes materiais de apoio produzidos durante o período de experimentação que remetem para o desenvolvimento de experiências de aprendizagem, consentâneas com o Programa, numa perspectiva de optimização dos processos matemáticos e/ou hábitos de pensamento matemático fundamentais. Para além disso, apresentam sugestões para a sua exploração e possíveis caminhos a seguir pelos alunos, dando maior segurança ao professor para lidar com novos conceitos, técnicas e processos e envolver os alunos em actividades ricas e produtivas.

Acredito que, nesta altura, os leitores se questionarão, com toda a legitimidade, sobre o tempo para investigar/pesquisar/articular/reflectir... Não tenho resposta, pois tanto se exige ao professor na escola de hoje, tanto e tão díspar, que praticamente não lhe resta tempo para ser artífice da sua própria arte; reflectir sobre a sua prática e sobre a compreensão matemática dos alunos.

Caberá ao Ministério da Educação intervir neste domínio, criando condições para que nas escolas seja dado esse tempo aos docentes. Enquanto isso, algo se vai fazendo, muito para além do horário, pela grande força do querer e do acreditar que é este o caminho para o sucesso dos nossos alunos.

Em Setembro, a generalização do Programa será uma realidade e a tarefa que espera os professores é ambiciosa, mas exequível. Tem dois anos de provas dadas!

Os alunos das turmas piloto valorizam a Matemática, revelam confiança e flexibilidade em lidar com ela, envolvem-se activamente na sua aprendizagem, comunicando de forma crítica e reflexiva as suas ideias, processos e resultados.

Os alunos estão a aprender mais e melhor, facto que nos leva a afirmar com toda a convicção de que o Novo Programa veio imprimir uma dinâmica de desenvolvimento qualitativo do ensino e aprendizagem da matemática.

Paula Pessoa
Escola Básica de Gavião

Formulários on-line com Google Docs

Uma ferramenta para a construção de instrumentos de recolha e tratamento de dados

Muitas vezes queremos criar um instrumento de recolha de dados, como um questionário, que nos permita recolher informação rapidamente, quer com os nossos alunos numa aula de Matemática ou mesmo outra disciplina, quer na sequência de uma sessão de formação que organizámos e sobre a qual queremos recolher a opinião dos participantes com o propósito de avaliação. Para o efeito, usamos normalmente o processador de texto ou a folha de cálculo, que após grandes esforços de formatação nos devolve um produto mais ou menos bem conseguido. Depois imprime-se, distribui-se para preenchimento, recolhe-se, organizam-se os dados, normalmente numa folha de cálculo, e apresentam-se sob a forma de tabelas e gráficos.

Já imaginou criar tudo isso com um aspecto mais profissional e *on-line* e o seu preenchimento, organização e apresentação serem também realizados *on-line* e de forma automática, sem requerer a sua intervenção directa?

O Google Docs é um serviço da Google que nos permite, entre outras funcionalidades, resolver de forma simples e rápida a situação. Mas o que é e onde acedemos ao Google Docs?

Comece por colocar num motor de busca, *Google Docs* ou aceda ao endereço `http://www.google.com/google-d-s/hpp/hpp_pt-PT_pt.html`. Deve ter uma conta de correio electrónico *gmail* ou então começar por criar uma conta Google, seguindo os passos indicados a partir do *site* acima.

O que é o Google Docs?

Trata-se de um *site* na Internet onde, entre outras coisas, pode:

- criar documentos de raiz ou carregar ficheiros já existentes (por exemplo, em formatos *doc*, *xls* ou *ppt*);
- partilhar e colaborar em tempo real com colegas seus, os quais pode designar quem são, em torno de um documento ou de uma apresentação que podem estar a ver e a alterar em simultâneo;
- aceder aos serviços e aos seus ficheiros em qualquer lugar, com acesso à Internet;
- publicar os trabalhos como páginas Web (sem qualquer conhecimento de programação), controlando quem as pode ver.

Dado o interesse particular para este artigo na criação de um questionário, vou-me centrar apenas neste aspecto.

Como criar um formulário (questionário) no Google Docs?

No respectivo *site* do Google Docs, inicie o seu trabalho indicando o *mail* e a *password* e depois escolha *Creat New* e seleccione *Spreadsheet*. Abre-se uma janela (figura 1) que reconhece ser da folha de cálculo.

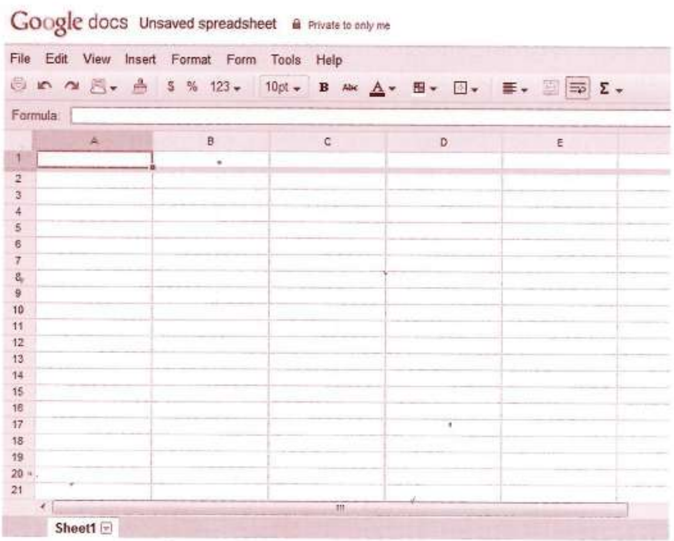


Figura 1

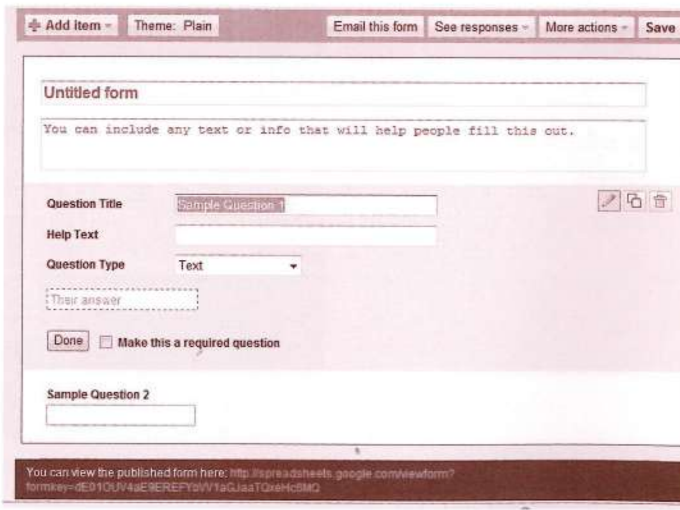


Figura 2

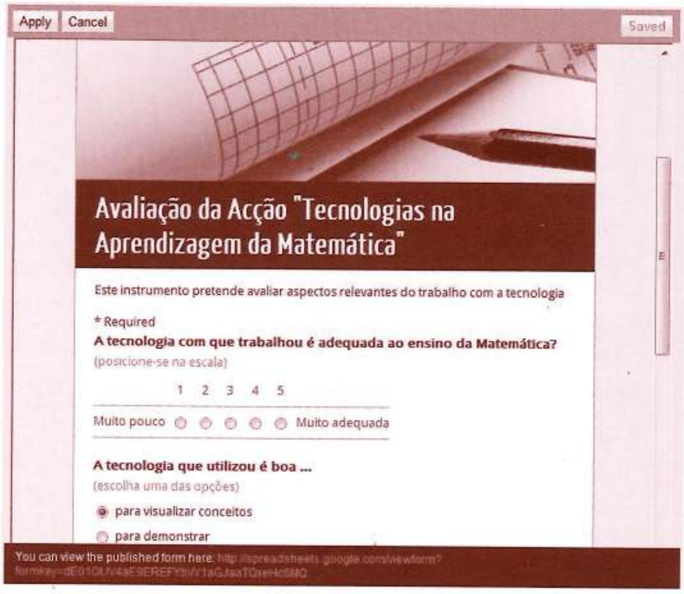


Figura 3

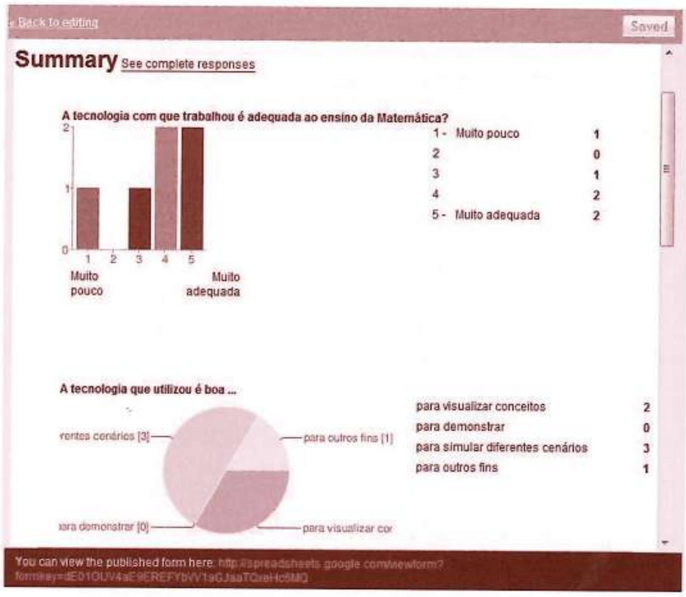


Figura 4

Agora, para criar o formulário, seleccione, no menu, *Form – Creat a Form*. Abre-se uma nova janela onde pode atribuir um nome ao questionário, inserir um pequeno texto explicativo do que pretende, redigir as questões (*Question title*) e escolher o tipo de questão (por exemplo, escolha múltipla, caixa de verificação (ou *checkbox*), escolha de hipóteses de uma lista ou escala ordenada (ver figura 2). Tenha em conta que a escolha do tipo de questão é importante porque pode condicionar as respostas, assim como o tratamento da informação. Por exemplo, enquanto as opções da escolha múltipla ou da escolha de uma lista são alternativas, a caixa de verificação já o não é, porque admite que se escolha mais do que uma opção para a mesma questão. Também uma questão do tipo *Text* permite recolher informação de forma mais aberta que poderá ser posteriormente analisada e categorizada.

Tendo em conta o objectivo que se pretende, o formulário pode exigir que algumas das questões sejam de preenchimento obrigatório, activando a caixa (*Making this a required question*). Para adicionar sucessivas questões ao formulário, escolha *Add item* e o tipo da questão e quando tiver incluído todas as perguntas faça um clique em *DONE* e o seu questionário fica pronto.

Grave (em *Save*) e em seguida pode atribuir um aspecto mais profissional ao seu questionário em *Theme*, que por defeito está em *Plain*. Por exemplo, para o formulário criado, escolhi o modelo *Blueprints* que fica com o aspecto da figura 3.

Pode agora visualizar como surge o seu questionário numa página *Web* e testar o seu preenchimento, seguindo o *link* indicado no final do formulário (ver informação no rectângulo preto na figura 3 — *You can view the published form here* `http://spreadsheets.google.com/viewform?....`).

Agora pode indicar uma lista de endereços de correio electrónico para onde o formulário será enviado (em *E-mail this form*) ou simplesmente indicar o endereço (*site*) onde está publicado e pode ser preenchido *on-line* pelos destinatários.

Como se organizam e divulgam os resultados dos formulários preenchidos?

Após os formulários preenchidos, para ver as respostas aceda a *See responses* e aí pode optar por *spreadsheet* ou *summary*. Na primeira opção visualiza a informação organizada na folha de cálculo, em que cada linha corresponde a um registo (um respondente) e cada coluna a uma questão (um campo de informação — variável). Na 2ª opção, a informação já vem resumida e organizada sob a forma de uma tabela de dados e gráfico (barras/colunas, circular ou de linhas), por cada questão (ver figura 4).

Se quiser incluir a informação organizada obtida no seu *site* pessoal, no seu blogue de turma ou no *site* da escola, vá a *More actions* e escolha *Embed*. Copie essa instrução que aparece entre *tags* (< e >) e inclua-a no respectivo *site*.

José Duarte

Diferentes abordagens para o problema dos apertos de mão

Nuno Martins

Um problema clássico de combinatória, supõe que há n *pessoas numa sala e todas as pessoas se cumprimentam, apertando a mão, uma única vez entre elas. Pretende-se saber quantos apertos de mão foram dados.*

Iremos apresentar alguns métodos de resolução deste problema, de uma forma progressiva, isto é, começaremos com a resolução que pensamos ser a mais intuitiva e tentaremos, progressivamente, melhorar as formas de apresentação das resoluções. Faremos, ainda, uma abordagem deste problema de combinatória sob o ponto de vista geométrico.

É importante que o leitor, antes de ler o artigo, tente ele próprio encontrar uma maneira de resolver este problema.

Método 1

A primeira abordagem ao problema e, provavelmente, a que mais naturalmente ocorre, é a simulação da situação. Este método poderá ser eficaz, caso o número de pessoas na sala, n, seja pequeno. Mas, e se o número de pessoas for elevado? Por exemplo, 50 ou 100 pessoas? Quantos apertos de mão ocorreriam? Como nos poderíamos organizar, mesmo através da simulação no papel, para garantir que cada pessoa deu apenas um aperto de mão? Pensemos na situação para $n = 20$.

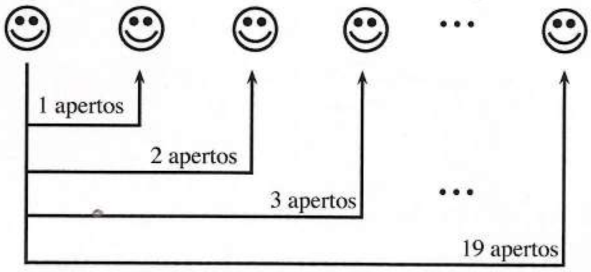


Figura 1

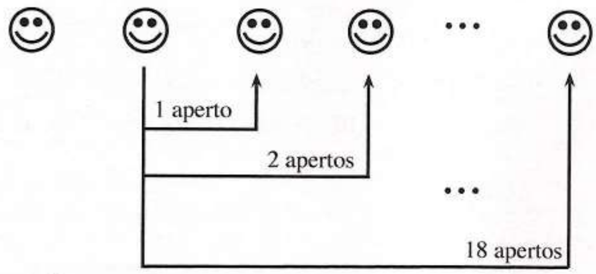


Figura 2

Organizando, por exemplo, as pessoas numa fila, facilmente percebemos que a primeira pessoa dá 19 apertos de mão — cumprimenta todas as pessoas da fila excepto ela própria (Figura 1).

Já a segunda pessoa da fila dará 18 apertos, pois além de não se cumprimentar a si própria, já cumprimentou a primeira pessoa (Figura 2):

Seguindo a mesma lógica, a terceira pessoa iria dar 17 apertos, pois além de não se cumprimentar a si própria, já havia cumprimentado as duas pessoas anteriores. Ora, se aplicarmos este raciocínio às 20 pessoas, chegamos facilmente à conclusão que o número de apertos total é dado pela soma:

$$19 + 18 + 17 + 16 + ... + 4 + 3 + 2 + 1 = 190$$

Estamos agora em condições de calcular o número de apertos para qualquer valor de n, ou seja, para um número qualquer de pessoas. O número total de apertos será dado pela soma dos primeiros números naturais consecutivos até ao número de pessoas menos uma. Mas caso estivessem, 100, 200, 500... pessoas na sala, calcular o número de apertos podia tornar-se moroso e mesmo penoso de calcular!

O ideal seria tentar encontrar uma fórmula que permitisse calcular o número de apertos para um qualquer número de pessoas, de uma forma rápida (estamos a pensar no método de Gauss para o cálculo dos primeiros n números naturais consecutivos[1] ou na fórmula geral das progressões aritméticas[2]).

Para já, analisemos outros métodos de resolução e tentaremos depois, e de uma forma natural, chegar à expressão que nos permite generalizar para qualquer valor de n.

Método 2

Comecemos por pensar no problema para os casos mais simples, e organizemo-los numa tabela (Tabela 1). Quantos apertos darão duas pessoas? E três pessoas? E quatro? Existirá alguma relação entre o número de apertos com o número de pessoas envolvidas?

Efectivamente percebe-se que o número de apertos seguinte pode ser obtido à custa do número de apertos anterior com o respectivo número de pessoas (Tabela 2).

No entanto, o nosso pequeno problema, dentro do nosso problema, continua por solucionar. Como proceder quando está envolvido um grande número de pessoas? Seguramente que este também não é o método mais adequado para resolver esta questão.

Método 3

Se nos centrarmos apenas Na sequência do número de apertos, podemo-nos aperceber do padrão que está subjacente — o número de apertos seguinte é obtido somando sempre números naturais consecutivos. É, por isso, fácil determinar o número de apertos (Esquema 1).

Conseguiremos, com este método, resolver o problema para valores consideráveis de n? Não...! Este método é recursivo, visto precisarmos sempre de conhecer quantos apertos foram dados no caso anterior para determinar o número de apertos seguinte. No entanto, não deixa de ser um método de resolução interessante onde se analisa o padrão que surge na sequência dos apertos de mão.

Método 4

Podemos abordar o problema usando um modelo para os apertos de mão. Representemos por A, B, C, D, E,... as pessoas sendo n o seu respectivo número. Cada aperto irá ser representado por um par de letras, por exemplo, $A \longleftrightarrow B$ significa que A cumprimentou B. Obviamente, que $B \longleftrightarrow A$ não precisa de ser representado. Assim, temos (Esquema 2).

Repare-se na relação entre «n» e a parcela maior de cada soma. Este número é sempre inferior em uma unidade, como tal, podemos inferir que, para $n = 20$, o número de apertos seria $19 + 18 + 17 + 16 + ... + 2 + 1 = 190$. Este método é prático? É, apenas, mais um método que nos permite perceber o comportamento do número dos apertos de mão para um determinado número de pessoas. Mas caímos outra vez numa soma de números naturais consecutivos.

Nº de pessoas	Nº de apertos
2	1 aperto
3	3 apertos
4	6 apertos
5	10 apertos
6	15 apertos
7	21 apertos
...	...

Tabela 1

Nº de pessoas	Nº de apertos
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
...	...
19	171
20	190

Tabela 2

Todas estas resoluções/abordagens, não nos permitem, responder, de forma imediata (entenda-se, com apenas uma operação), o número de apertos que seriam dados se estivessem envolvidas, por exemplo, 35 pessoas. Saberíamos que o resultado seria a soma dos 34 primeiros números naturais. Mas será que haverá alguma maneira de saber o número de apertos com uma simples operação?

n=2 →1 aperto
+2
n=3 →3 apertos
+3
n=4 →6 apertos
+4
n=5 →10 apertos
+5
n=6 →15 apertos
+6
n=7 →21 apertos
+7
n=8 →28 apertos
+8
n=9 →36 apertos
+9
n=10 →45 apertos
+10
n=11 →55 apertos
+11
n=12 →66 apertos
+12
n=13 →78 apertos
+13
n=14 →91 apertos
+14
n=15 →105 apertos
+15
n=16 →120 apertos
+16
n=17 →136 apertos
+17
n=18 →153 apertos
+18
n=19 →171 apertos
+19
n=20 →190 apertos

Esquema 1

n=2 A ↔ B

n=3 A ↔ B B ↔ C
A ↔ C
2 + 1 = 3

n=4 A ↔ B B ↔ C C ↔ D
A ↔ C B ↔ D
A ↔ D
3 + 2 + 1 = 6

n=5 A ↔ B B ↔ C C ↔ D D ↔ E
A ↔ C B ↔ D C ↔ E
A ↔ D B ↔ E
A ↔ E
4 + 3 + 2 + 1 = 10

n=6 A ↔ B B ↔ C C ↔ D D ↔ E E ↔ F
A ↔ C B ↔ D C ↔ E D ↔ F
A ↔ D B ↔ E C ↔ F
A ↔ E B ↔ F
A ↔ F
5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15

...

Esquema 2

Nº de pessoas	Nº de apertos	Padrão
2	1	1×1
3	3	$\boxed{3} \times 1$
4	6	$\boxed{3} \times 2$
5	10	5×2
6	15	5×3
7	21	$\boxed{7} \times 3$
8	28	$\boxed{7} \times 4$
9	36	9×4
10	45	9×5
11	55	$\boxed{11} \times 5$
12	66	$\boxed{11} \times 6$
13	78	13×6
14	91	13×7
15	105	$\boxed{15} \times 7$
16	120	$\boxed{15} \times 8$
17	136	17×8
18	153	17×9
19	171	$\boxed{19} \times 9$
20	190	$\boxed{19} \times 10$
...	...	...

Tabela 3

Nº de pessoas	Nº de apertos
2	$\frac{2 \times 1}{2} = 1$ aperto
3	$\frac{3 \times 2}{2} = 3$ apertos
4	$\frac{4 \times 3}{2} = 6$ apertos
5	$\frac{5 \times 4}{2} = 10$ apertos
6	$\frac{6 \times 5}{2} = 15$ apertos
7	$\frac{7 \times 6}{2} = 21$ apertos
...	...

Tabela 4

Método 5

Analisemos, agora, a coluna do número de apertos da seguinte tabela e a respectiva coluna do padrão que se forma (Tabela 3).

Um interessante padrão é formado recorrendo a uma simples multiplicação. Relacionando os seus factores com o número de pessoas, podemos facilmente calcular o número de apertos. Repare-se que quando o número de pessoas é ímpar o multiplicando vai ser esse mesmo número e o multiplicador é a parte inteira da metade desse número; quando o número de pessoas é par o multiplicando é o número ímpar que lhe antecede e o multiplicador é a sua metade. Por exemplo, o número de apertos dados por 35 pessoas: $35 \times 17 = 595$; ou para 100 pessoas: $99 \times 50 = 4950$; ou para 231 pessoas: $231 \times 115 = 26565$.

Este método permite-nos, assim, determinar o número de apertos para um qualquer número de pessoas.

Método 6

Podemos tentar chegar a uma fórmula, de forma simples, que nos permita calcular o número de apertos de mão, para qualquer número de pessoas. Analisemos, novamente, a tabela 1 apresentada no método 2.

Será que se consegue relacionar o número de pessoas (primeira coluna) com o número de apertos (segunda coluna)? Efectivamente, o número de apertos de mão pode ser obtido pelo produto entre o número de pessoas envolvidas e pelo número de pessoas do caso anterior, dividido por 2 (Tabela 4).

Como tal, podemos chegar facilmente à fórmula: o número de apertos é dado por

$$\frac{(\textit{número de pessoas}) \times (\textit{número de pessoas} - 1)}{2}$$

Ou então,

$$T = \frac{n \times (n-1)}{2},$$

onde T representa o número total de apertos e n o número de pessoas.

Ora, chegámos precisamente e de uma forma simples, à fórmula de Gauss para o cálculo dos primeiros n números naturais consecutivos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	x	1–2	1–3	1–4	1–5	1–6	1–7	1–8	1–9
2	2–1	x	2–3	2–4	2–5	2–6	2–7	2–8	2–9
3	3–1	3–2	x	3–4	3–5	3–6	3–7	3–8	3–9
4	4–1	4–2	4–3	x	4–5	4–6	4–7	4–8	4–9
5	5–1	5–2	5–3	5–4	x	5–6	5–7	5–8	5–9
6	6–1	6–2	6–3	6–4	6–5	x	6–7	6–8	6–9
7	7–1	7–2	7–3	7–4	7–5	7–6	x	7–8	7–9
8	8–1	8–2	8–3	8–4	8–5	8–6	8–7	x	8–9
9	9–1	9–2	9–3	9–4	9–5	9–6	9–7	9–8	x

Tabela 5

Método 7

Uma outra maneira de obter uma fórmula (que será, naturalmente, equivalente à do método 6), é usar uma tabela de dupla entrada. Suponhamos o caso para 9 pessoas. Na linha e coluna 1, listamos as pessoas, representadas de «1 a 9». No corpo da tabela 5 estão representados os apertos.

Repare-se que a diagonal principal representa as pessoas que se cumprimentam a elas próprias, por isso, estes apertos não são contados. Também se pode reparar que a tabela é simétrica relativamente a esta diagonal, o que significa que em metade da tabela estão representados os mesmos apertos que na outra metade, como tal, também estes não devem ser contados. Sendo assim, para 9 pessoas envolvidas, a tabela tem 81 entradas, mas como não é contada a diagonal (9 entradas) e só são contadas metade das entradas, temos que:

$$\frac{81-9}{2} = 36 \text{ apertos.}$$

Generalizando, para n pessoas, temos no total n^2 entradas na tabela, às quais teremos que subtrair n da diagonal principal e das quais só metade serão contabilizadas, ou seja

$$\frac{n^2-n}{2},$$

que é equivalente à fórmula encontrada no método 6.

Método 8

Como foi referido no início deste artigo, este é um problema de combinatória e o que está implícito é saber de quantas maneiras se podem combinar (apertar a mão) duas pessoas de um grupo de n, pelo que, a forma mais eficiente e rápida para o resolver é aplicar a fórmula das combinações:

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

No entanto, ao aplicar este método, pensamos que se perde a abordagem interessante que o problema pode ter embora a sua aplicação envolva já um pensamento mais elaborado que o dos métodos anteriores.

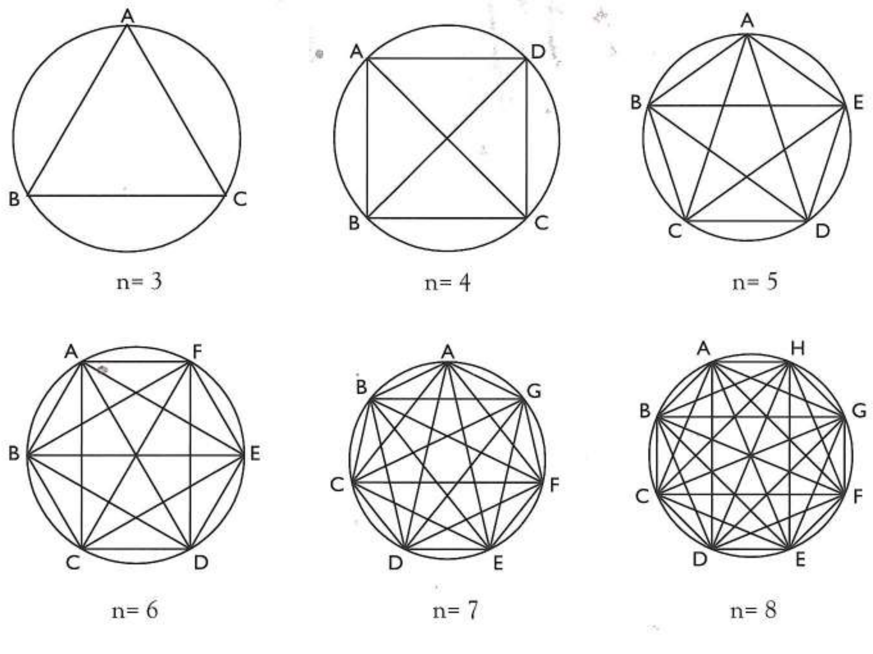


Figura 3

Método 9

Façamos, agora, uma abordagem ao problema, sob um ponto de vista geométrico. Construamos uma circunferência e, sobre ela, pontos equidistantes (apenas por questão de estética!) que nos representam as pessoas. De cada ponto irá partir $n-1$ segmentos para os restantes pontos, que são os apertos de mão que cada pessoa dá. Para cada concretização de n, obtém-se um polígono (exceptuando, obviamente, o caso $n=2$), com as respectivas diagonais (para $n>3$) (ver Figura 3 na página seguinte). O problema tornou-se, assim, geométrico, cuja resposta é dada pelo número de lados do polígono adicionado das respectivas diagonais.

Para $n=20$ obtém-se esta harmoniosa imagem (Figura 4)[3]. Como facilmente se percebe, só é exequível fazer uma contagem de diagonais para polígonos com um pequeno número de lados. É quase impossível, por exemplo, contá-las num polígono com 20 lados (ver Figura 4 na página seguinte). Como tal, há que tentar encontrar uma expressão geral que nos permita, através do polígono, chegar ao número total de apertos. Imaginemos 20 pessoas, em que todas se irão cumprimentar e escolhamos uma. Esta pessoa dará 19 apertos. Como são 20 pessoas, no total haverá $20 \times 19 = 280$ apertos. Contudo, cada aperto envolve duas pessoas, logo, 280 é o dobro do número efectivo de apertos que se irá dar, que é

$$190 = \frac{20 \times 19}{2}.$$

Fazendo uma generalização para n pessoas, teremos que o número de apertos é dado por

$$\frac{(n-1) \times n}{2}$$

que é, precisamente, a expressão obtida no método 6.

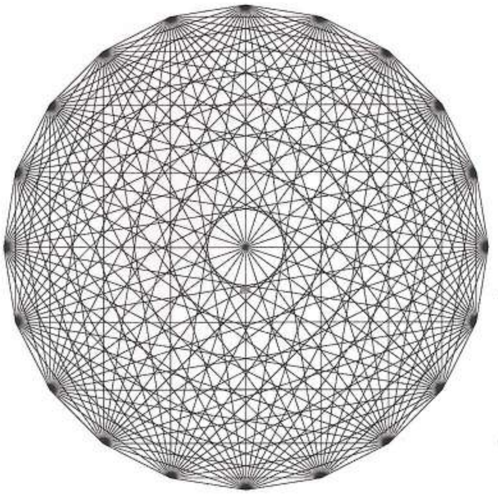
Uma outra abordagem semelhante mas menos trivial, seria encontrar uma expressão para o número de diagonais e adicionar-lhe o número de lados do polígono. Pensemos, por exemplo, no hexágono. Se cada vértice representar uma pessoa, a diagonal do hexágono vai representar o aperto que essa pessoa dá a outra pessoa, que não é ela própria nem as que lhe estão adjacentes. Assim, a pessoa A cumprimenta $(6-3)=3$ pessoas. Logo, como temos 6 vértices, teríamos $6 \times 3 = 18$ diagonais. No entanto, se as formos contar realmente, só temos metade, visto que, cada diagonal une exactamente dois vértices e, para cada vértice, contámos a mesma diagonal duas vezes, ou seja, significa que fazemos a contagem de $A \longleftrightarrow C$ (A cumprimenta C), mas não fazemos a contagem de $C \longleftrightarrow A$. Podemos construir uma tabela que nos sintetize a situação para polígonos com n lados (Tabela 6).

Como tal, chegamos à expressão:

$$\frac{(n-3) \times n}{2}, \ n > 3,$$

que nos dá o número de diagonais de um n-ágono. Assim para o hexágono (6 pessoas) temos

$$\frac{(6-3) \times 6}{2} = 9 \text{ diagonais}$$



n= 20

Figura 4

Nº de lados	Nº de diagonais que sai de cada vértice	Nº total «suposto» de diagonais	Nº «efectivo» de diagonais
4	$4-3=1$	$1\times 4=4$	$4\div 2=2$
5	$5-3=2$	$2\times 5=10$	$10\div 2=5$
6	$6-3=3$	$3\times 6=18$	$18\div 2=9$
7	$7-3=4$	$4\times 7=28$	$28\div 2=14$
8	$8-3=5$	$5\times 8=40$	$40\div 2=20$
...	...	...	...
n	$n-3$	$(n-3)\times n$	$\frac{(n-3)\times n}{2}$

Tabela 6

que adicionadas ao número de lados do hexágono, perfaz o número total de apertos para as 6 pessoas, 15. De um modo geral, a expressão do número de apertos é dada por:

$$\frac{(n-3)\times n}{2}+n \quad , \quad n>2$$

Como seria de esperar esta expressão é, também ela, equivalente à já apresentada no método 6:

$$\frac{(n-1)\times n}{2} \quad , \quad n>2$$

O que está em mente quando nos deparamos com uma situação problemática é encontrar uma possível (re)solução. Provavelmente, numa primeira abordagem tenta-se chegar à solução, não havendo especial preocupação com a forma de a obter. Porém, essa resolução poderá não ser a mais clara nem a mais elegante. Os caminhos tortuosos que inicialmente se percorrem numa primeira abordagem, para encontrar a solução, podem eventualmente ser optimizados se tentarmos pensar no problema sob pontos de vista diferentes. Mesmo que já tenhamos encontrado uma resolução que nos satisfaça podemos estar interessados em descobrir outras, nem que seja com o intuito de confirmar o(s) resultado(s) por outros métodos.

Até mesmo problemas com um enunciado bastante simples, como o que foi apresentado, pode proporcionar variados e interessantes métodos de resolução!

O autor agradece as sugestões dadas pelos revisores da APM que contribuíram para o melhoria deste artigo.

Notas

1 $\frac{n\times(n-1)}{2}$, $n\geq 2$.

2 Soma dos primeiros n termos de uma progressão aritmética:

$$S_n=\frac{(u_1+u_n)\times n}{2}.$$

3 Por forma a não sobrecarregar a imagem omitiram-se as letras nos vértices do polígono.

Referências bibliográficas

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Gradiva.

Posamentier, A. S. e Krulik, S. (1990). *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions*. Corwin Press, Inc. USA.\ \

Wheeler, R. E. (1992). *Modern Mathematics*. Eighth edition — Brooks Cole Publishing Company.

Referências on-line

http://illuminations.nctm.org/LessonDetail.aspx?ID=L630

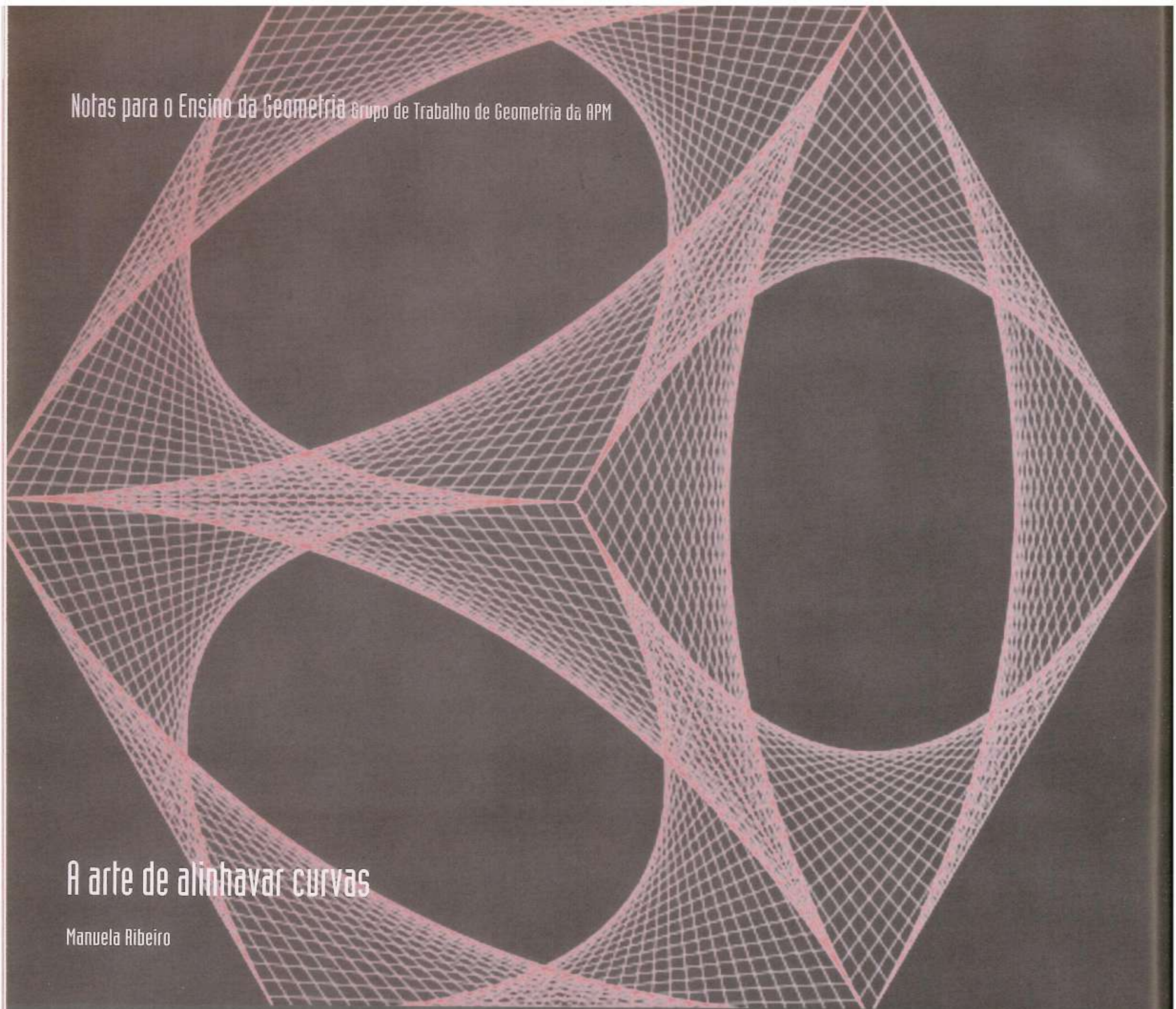
http://mathforum.org/library/drmath/view/54691.html

http://math.springbranchisd.com/high/classes/geometry/Laying%20The%20Foundation/Lessons/Handshake__Problem%20P.315-319.pdf

http://www.math.toronto.edu/mccann/assignments/204/handshake.pdf

Nuno Martins

Escola Superior de Educação de Coimbra



A arte de alinhavar curvas

Manuela Ribeiro

Curvas há muitas, simples, belas, ricas de propriedades e aplicações, tais como as cónicas, as ciclóides, as epiciclóides, as hipociclóides, …, que oferecem um vasto campo de estudo passível de abordagem desde um nível muito elementar.

Esse campo tem-se mantido praticamente inexplorado, no Ensino Básico o programa apenas aborda a circunferência, no entanto, por exemplo, experiências como a simples dobragem de uma folha de papel vegetal, o corte de um cone por um plano podem conduzir à abordagem das cónicas[1]. Nesta nota iremos apresentar outra maneira possível de abordar o estudo das curvas.

A arte de alinhavar curvas (em inglês, *Curve Stitching*) é em primeiro lugar um trabalho manual que pode ser executado desde tenra idade e ser desfrutado sem qualquer necessidade de compreensão dos fundamentos matemáticos subjacentes, mas que pode servir de pretexto para falar de geometria com os alunos.

Bonitas figuras podem ser obtidas marcando pontos igualmente espaçados ao longo de linhas rectas ou à volta de circunferências, depois resta uni-los ordenadamente com agulha e linha.

A um nível mais avançado a arte de alinhavar curvas pode ser encarada como uma actividade essencialmente matemática que nos leva a procurar resposta para perguntas tais como: porque razão surge uma parábola ao unir convenientemente pontos igualmente espaçados em cada um dos lados de um ângulo?

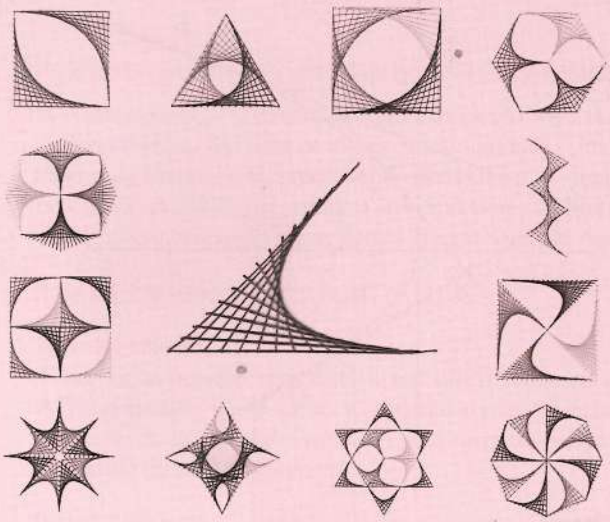


Figura 1

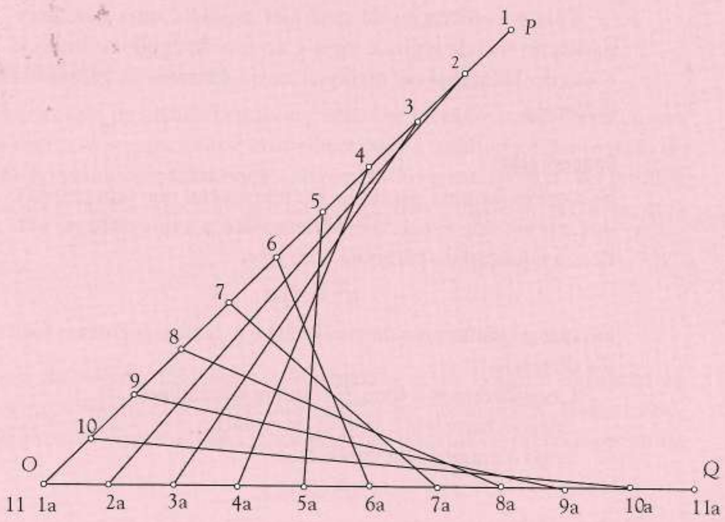


Figura 2

Alinhavar curvas tendo como base um ângulo

Processo para alinhavar uma parábola

Para iniciar o trabalho basta reunir: uma folha de cartolina A4, um lápis, uma régua, uma agulha e linha, e em seguida:

1. Na folha de cartolina traçar um ângulo de vértice *O* (fig. 2).
2. Sobre cada um dos lados do ângulo marcar, a partir de *O*, o mesmo número de segmentos iguais, por exemplo 10.

   NB: Os segmentos de recta traçados deverão ser iguais em cada uma das semirectas, não necessariamente iguais nas duas semirectas.

   Sejam *P* e *Q* os pontos extremos.
3. Numerar os pontos de *P* a *O* e de *O* a *Q*, 1 a 11 e 1a a 11a, respectivamente.
4. Com a agulha perfurar a cartolina em cada um dos pontos marcados.
5. Por último enfiar a linha na agulha e unir os pontos marcados na ordem seguinte

   1 – 1a – 2a – 2 – 3 – 3a – 4a – 4 – 5 – 5a ....

Num nível muito elementar poderá ser dada a cartolina já perfurada.

No lado da frente cada dois pontos com o mesmo número são unidos por um alinhavo, que na figura 2 está representado por um segmento, e esses alinhavos envolvem uma curva, uma parábola.

De facto está perante uma verdadeira parábola. Veja a demonstração na página seguinte.

Sugestões de trabalho com os alunos

Levar os alunos a reflectir sobre aquilo que vêem:

- uma família de linhas esticadas (rectas) convenientemente dispostas que envolvem uma curva, uma parábola;
- cada uma das rectas é tangente à curva, tem em comum com a curva apenas um ponto, o ponto de tangência;
- que essa curva é aberta mas que há curvas fechadas. Pedir para desenharem uma curva fechada;
- que essa curva é simétrica (tem uma simetria de reflexão) mas que há curvas não simétricas. Pedir para colocarem a mira de modo que a curva coincida com a sua imagem.

Aproveitar ainda para ver que:

- uma curva deste tipo pode ser obtida: dobrando convenientemente uma folha de papel vegetal, cortando convenientemente um cone, uma antena parabólica, um farol de automóvel;
- a concavidade da curva varia com a abertura do ângulo.

E deixar no ar a interrogação do que acontece se em vez de alinhavarmos os lados de um ângulo alinhavarmos duas rectas paralelas, ou outras configurações propostas aos alunos.

Como vê é muito mais simples alinhavar uma parábola do que explicar por palavras como fazê-lo e mais ainda do que justificá-lo. Depois de ter alinhavado uma verá que não há necessidade de numerar os pontos e estará em condições de alinhavar parábolas entre diferentes pares de linhas em figuras mais complicadas. Na figura 1 encontra alguns exemplos, deixe os seus alunos construir dois ou três à sua escolha e em seguida convide-os a deixarem-se levar pela sua imaginação.

Para a construção de qualquer modelo, uma boa alternativa ao uso de régua e lápis e ao uso de agulha e linha, é o uso do *Sketchpad* ou qualquer outro *software* de geometria dinâmica.

Demonstração:

Se a curva for uma parábola, no referencial que tem por eixo dos x o eixo de simetria e por eixo dos y a tangente no vértice, a equação da parábola é do tipo

$$y^2 = 2px$$

em que p (parâmetro da parábola) é a distância entre o foco e a directriz.

Consideremos o foco F com coordenadas (a,o).

Então a directriz é a recta de equação $x = -a$ e $p = 2a$.

Logo a equação da parábola é

$$y^2 = 4ax$$

OP e OQ são tangentes à curva, assim como toda a recta AB com $A \in OP$ e $B \in OQ$ tal que AP e OB tenham o mesmo número de divisões, isto é, tal que

$$\frac{OA}{BQ} = \frac{OP}{OQ}$$

Será que qualquer recta tangente à parábola de equação $y^2 = 4ax$ intersecta OP e OQ em pontos A e B, respectivamente, tais que $(OA/OP) = (BQ/OQ)$?

- Consideremos uma tangente à parábola num ponto R de abcissa, para facilidade de cálculo, ar^2.

  Ordenada de $R = y$ tal que $y^2 = 4a \times ar^2$

  $$y = 2ar$$

  logo $R(ar^2, 2ar)$.

  Equação da tangente à parábola no ponto R

  $$y - 2ar = m(x - ar^2)$$

  em que $m =$ Declive da tangente à curva de equação $y = 2\sqrt{ax}$ no ponto de abcissa $ar^2 =$ Derivada da função $y = 2\sqrt{ax}$ no ponto de abcissa $ar^2 = 1/r$.

  $$y - 2ar = \frac{1}{r}(x - ar^2)$$

  $$ry = x + ar^2$$

- Determinemos agora os pontos A e B, intersecção da tangente à parábola no ponto R com OP e OQ, respectivamente.

  $$P = (ap^2, 2ap) \quad p > 0$$

  $$Q = (aq^2, 2aq) \quad q < 0$$

  Tangente à parábola no ponto P $\ py = x + ap^2$

  Tangente à parábola no ponto Q $\ qy = x + aq^2$

  $$\begin{cases} py = x + ap^2 \\ ry = x + ar^2 \end{cases}$$

  $$\begin{cases} x = apr \\ y = a(r + p) \end{cases}$$

  $$A = (apr, a(p + r))$$

  $$B = (aqr, a(q + r))$$

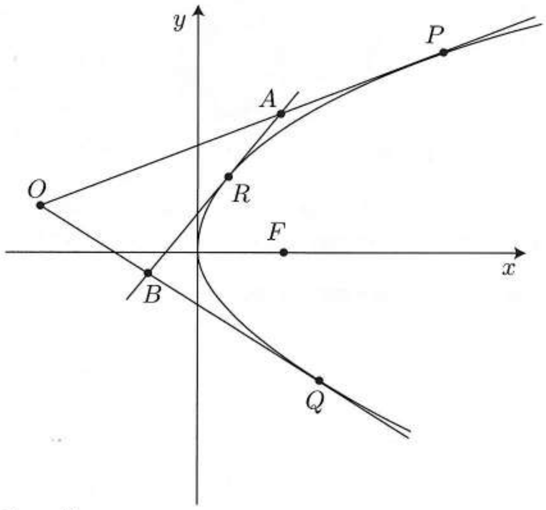


Figura 3

- Determinemos ainda o ponto O intersecção das tangentes à parábola nos pontos P e Q.

  $$O = (apq, a(p + q))$$

- Por último vejamos se a relação $(OA/OP) = (BQ/OQ)$ se verifica.

  $$\overrightarrow{OA} = (ap(r - q), a(r - q))$$

  $$\overrightarrow{OP} = (ap(p - q), a(p - q))$$

  $$\overrightarrow{BQ} = (ap(q - r), a(q - r))$$

  $$\overrightarrow{OQ} = (ap(q - p), a(q - p))$$

  $$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OP}} = \frac{r - q}{p - q}$$

  $$\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{OQ}} = \frac{q - r}{q - p}$$

  logo a relação verifica-se.

Notas

1 Ver *As cónicas sob múltiplas perspectivas* em EM 95.

Bibliografia e links

Millington, John. *Curve Stitching: The art of beautiful mathematical patterns*. Tarquin Publications: St Albans, 2007.

http://math.youngzones.org/Curve_stitching.html

Manuela Ribeiro

Grupo de Trabalho de Geometria da APM

APM — 2010

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2010

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `http://www.apm.pt`

Assinaturas das revistas para 2010

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)</th><th>Quadrante</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sócio individual</td><td>Portugal</td><td></td><td>12,00 €</td></tr>
<tr><td>Estrangeiro</td><td></td><td>15,00 €</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Instituições</td><td>Portugal</td><td rowspan="2">42,00 €</td><td>23,00 €</td></tr>
<tr><td>Estrangeiro</td><td>27,00 €</td></tr>
</table>

índice

Editorial

Artigos

Secções