Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2010

108

Maio ∞ Junho

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Junho 2010
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530–250 Torres Vedras

Depósito Legal n° 72011/93
Registo no ICS n° 124051
ISSN 0871-7222
Porte Pago

Sobre a capa

Uma metáfora sobre o infinito no Museu Escher.
(Fotografia de António M. Fernandes, Palácio Lange Voorhout, Den Haag [Haia])

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Alina Reis, António Domingos, António Ribeiro, Bruno Magina, Carlos Rosmaninho, Cristina Loureiro, Fernando Bravo, Grupo de Trabalho do 2° Ciclo, Manuel Saraiva, Marília Pires, Rui Feteira.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, N° 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: `revista@apm.pt`

Nota

Editorial

Formação precisa-se: Um investimento continuado por parte de todos

Ana Paula Canavarro

Este ano lectivo fica marcado pelo início da generalização do novo programa de Matemática do ensino básico. O dispositivo que a DGIDC preparou para apoiar este processo inclui o investimento na formação de professores. Um investimento reconhecido por todos como importante, pois esta ideia de que um novo programa precisa de nova formação é algo do senso comum sempre que existem processos de renovação curricular. Mas também é do senso comum que um novo programa não tem assim tantas diferenças relativamente ao anterior, que os temas são mais ou menos os mesmos, e que os manuais hão-de ajudar a resolver o problema de ensinar os novos conteúdos. E até parece que a necessidade de formação, que ao princípio é vista como uma exigência, se esbate com o passar do tempo.

Mas acontece que este novo programa exige realmente um investimento significativo na clarificação e aprofundamento do conhecimento do professor. Por um lado, existem mesmo novos tópicos matemáticos com que a maioria dos professores nunca lidou. Por outro lado, existem tópicos relativamente aos quais existem concepções erróneas muito enraizadas e generalizadas que é urgente esclarecer.

Por exemplo, no 1° ciclo, não podemos deixar de reparar no que em alguns lugares se passa com a abordagem ao cálculo. O novo programa pede que o cálculo mental seja desenvolvido de forma continuada e que sustente as posteriores aprendizagens de processos de cálculo mais formal, como os algoritmos. E em muitas escolas pode observar-se que a preocupação com o cálculo mental se tornou uma realidade. No entanto, existem salas de aula onde os alunos trabalham as decomposições dos números e os factos básicos e, em simultâneo, «põem em pé contas" como 5+2 ou 12+8».

Um outro exemplo bastante ilustrativo tem a ver com a simetria. O novo programa vem «repor» os conceitos de simetria e de transformações geométricas, ampliando a sua abordagem em relação ao anterior. No entanto, apesar de muitos professores começarem a estar sensibilizados para que existem diversas simetrias, em muitas escolas continua-se a perpetuar o erro de identificar a isometria reflexão com a simetria e a dizer que as duas mãos são simétricas uma da outra.

Também o tema de organização e tratamento de dados tem provado não ser tão simples como em geral se parece pensar. O novo programa propõe uma abordagem mais sofisticada em que as representações gráficas jogam especial papel. No entanto, muitos professores revelam dúvidas na escolha do gráfico mais adequado a cada situação e na própria identificação das características essenciais de cada gráfico, mesmo para gráficos simples como o pictograma.

E o desfile de exemplos poderia continuar. Poderia continuar relativamente a conhecimento matemático e relativamente a conhecimento didáctico, e em particular em relação a como utilizar os recursos tecnológicos actualmente disponíveis para ampliar e melhorar a qualidade das aprendizagens matemáticas dos alunos. O novo programa convida a múltiplas utilizações do computador, mas em muitos lugares os Magalhães desapareceram das escolas e os quadros interactivos estão a reflectir slides de Powerpoint de aulas expositivas.

Precisamos de mais formação para poder proporcionar aprendizagens matemáticas mais rigorosas e pertinentes aos nossos alunos, balizadas pelas orientações do novo programa. Participar em acções de formação formais de qualidade é certamente uma ajuda importante, e esperemos que o Ministério da Educação e outras entidades idóneas a proporcionem de forma continuada e responsável.

Mas «andar» na formação não chega — e pode, arrisco, até nem ser o mais relevante. É necessário que cada um de nós incorpore o espírito da formação, o espírito de reconhecer que precisamos de aprender mais, de querer aprender mais e de querer melhorar as práticas de ensino. Isto implica um investimento pessoal, uma mobilização positiva para identificar as lacunas e fragilidades e procurar superá-las, para estudar a sério por recursos adequados — e actualmente existem muitos disponíveis e em português, em papel e em versões digitais, sobre assuntos muito diversos e com relevância curricular. Mais difícil pode ser seleccioná-los.

Mas é também necessário que o espírito da formação seja assumido colectivamente, que a melhoria das práticas de ensino seja encarada como um desafio pelos grupos de professores nas escolas — e que seja apoiada por quem dirige os agrupamentos. Trocar ideias e materiais, reunir regularmente para aprofundar um assunto, levar a cabo ciclos de estudos, desenvolver projectos — são algumas possíveis modalidades de aprender em conjunto com os colegas, que muitos já praticam na sua vida profissional — em cenários com mais ou menos condições — e que proporcionam, para além da aquisição de conhecimentos importantes, experiências gratificantes. Que consigamos todos mobilizar-nos para este empreendimento e ampliar os nossos conhecimentos profissionais de modo a proporcionar aos alunos as aprendizagens matemáticas que eles merecem.

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

s	t	q	q	s	s	d
		01	02	03	04	05
06	07	08	09	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

2010 Setembro

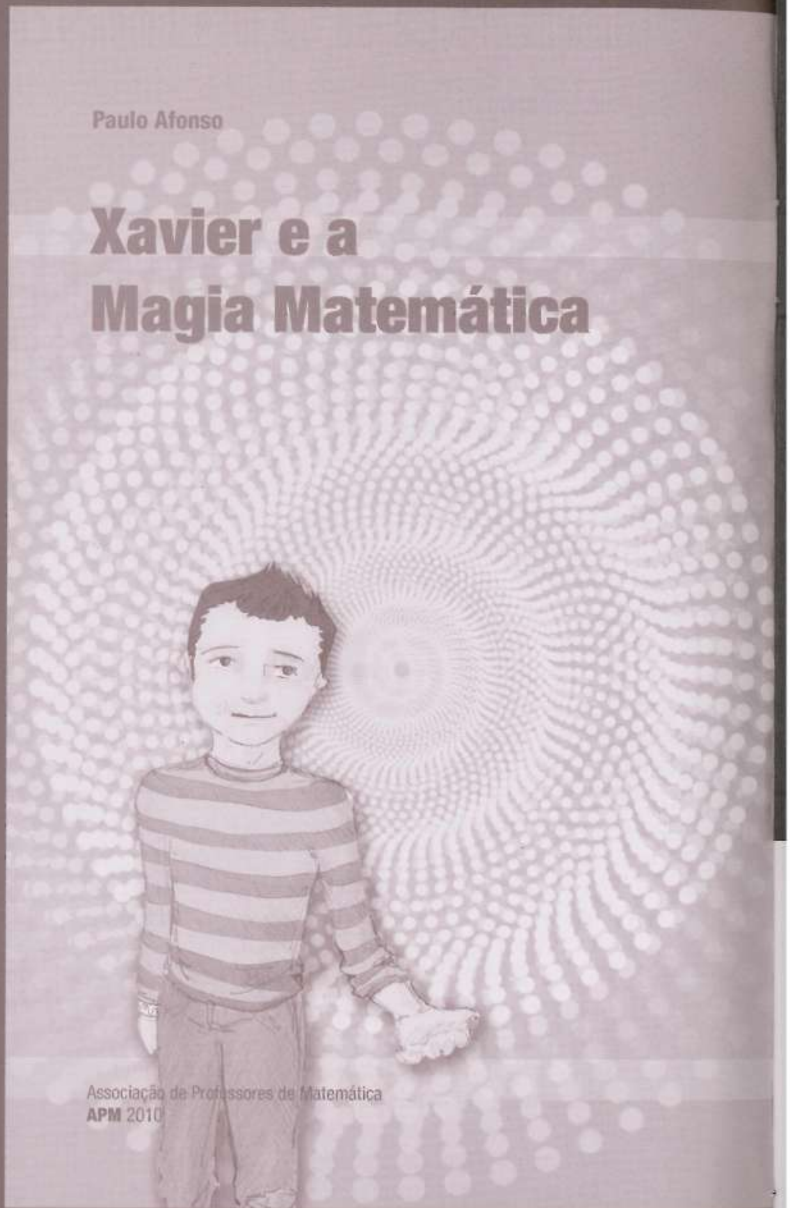
01 quarta-feira
ProfMat 2010

02 quinta-feira
ProfMat 2010

03 sexta-feira
ProfMat 2010

04 sábado
Cursos ProfMat 2010

05 domingo
Cursos ProfMat 2010



Agenda Dia-a-Dia com a Matemática 2010/2011

Organização: Núcleo do Porto da APM

Lançamento no ProfMat2010

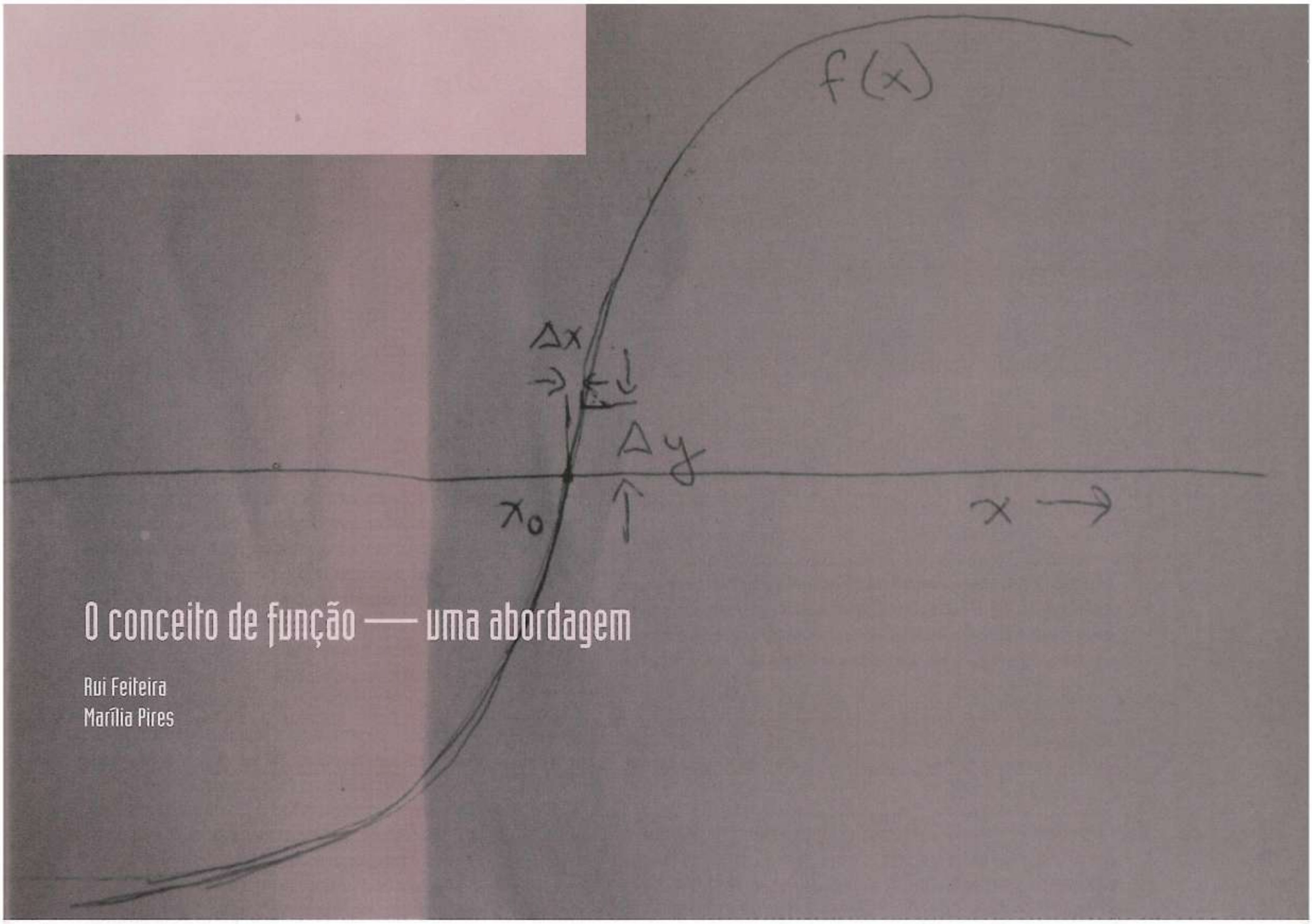
Xavier e a Magia Matemática

Autor: Paulo Afonso

Assim, temos todos — professores, alunos ou simples entusiastas da magia — oportunidade de nos intrigar, encantar, aprender e, quem sabe, começar também a ser como o Paulo: Magos da Matemática.

José Paulo Viana, in Prefácio

Lançamento no ProfMat2010



O conceito de função — uma abordagem

Rui Feiteira
Marília Pires

Introdução

O conceito de função é, talvez, um dos mais importantes com que os alunos têm de lidar no 3.º Ciclo do Ensino Básico. Sendo um conceito fácil de concretizar, é no entanto, um dos poucos conceitos abstractos com que os alunos se irão deparar neste nível de ensino. No novo programa, que já está a ser implementado em algumas zonas do país, pode ler-se que:

> «função é estudada essencialmente como relação entre variáveis embora também seja apresentada como correspondência unívoca entre elementos de dois conjuntos. São fundamentais as várias representações (algébrica, gráfica e tabular) de uma função na interpretação e resolução de problemas e na modelação de situações.» (DGDIC, 2007, p. 62)

Sendo este um conceito estruturante para qualquer aluno que queira prosseguir estudos no ensino secundário e/ou no superior, é necessário que o conceito seja introduzido de tal modo que seja completa e correctamente interiorizado pelos alunos. Neste artigo damos conta da nossa experiência levada a cabo em duas turmas do 8.º ano de escolaridade, recorrendo, de um forma muito informal, à teoria de grafos, como ferramenta auxiliar (Feiteira e Pires, 2007), com o fim de levar os alunos ao conceito de função através de um exemplo lúdico. Postas as referidas duas turmas perante a mesma questão inicial, quantos jogos se realizam num torneio com n equipas, pretendíamos analisar quais as estratégias escolhidas por cada turma e qual o grau de autonomia que as turmas e/ou os alunos individualmente demonstrariam. A nossa questão principal era verificar até que ponto os alunos, através deste exemplo seriam capazes de, naturalmente, chegarem ao conceito de função, ou se, pelo contrário, teriam que ser guiados até ele.

As turmas

As duas turmas em que o estudo se realizou, que a partir daqui se designarão por turma 1 e 2, são bastante diferentes quer em número de elementos, quer em aproveitamento escolar. A turma 1 tem cerca de 20 alunos, é uma turma bastante homogénea e solidária cuja composição se mantém praticamente inalterável desde o 6.º ano de escolaridade, tendo um aproveitamento médio satisfatório. Por seu turno, a turma 2 é constituída por 28 alunos sendo de composição muito heterogénea, uma vez que se integraram 11 novos alunos na turma desde o início do ano lectivo, dos quais 8 estão a repetir o 8.º ano de escolaridade. O aproveitamento da turma 2 é significativamente inferior ao da turma 1.

Ambas as turmas beneficiam da continuidade pedagógica em relação ao ano lectivo anterior.

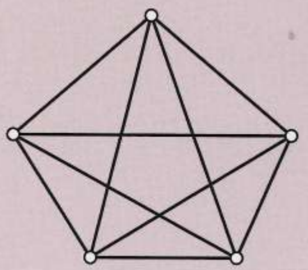


Figura 1

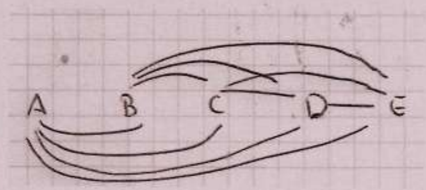


Figura 2

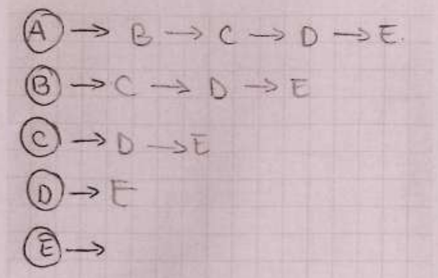


Figura 3

O problema

Sendo ambas as turmas maioritariamente constituídas por alunos do sexo masculino, um tópico que gera entusiasmo é o futebol. Exemplos baseados no mundo futebolístico provocam sempre uma elevada adesão ao trabalho da maioria dos alunos. Tentando tirar partido desta realidade, propusemos, no início das aulas dedicadas ao estabelecimento do conceito de função, o seguinte problema:

Uma associação de estudantes de uma escola pretende organizar um campeonato de futebol. Cada equipa joga apenas uma vez com cada uma das outras equipas. Quantos jogos se irão realizar, no total, se se inscreverem 5 equipas? (adaptado de Pires e Kravchenko, 2007).

Começamos com um exemplo em que o número de equipas é pequeno para permitir que a maioria dos alunos se mantenha motivado na procura de uma solução. Com efeito, como neste problema, o número de jogos aumenta de uma forma bastante rápida à medida que o número de equipas aumenta, um número maior de equipas poderia levar à desmotivação dos alunos por serem incapazes de fazer os cálculos.

A resposta a este problema aparece naturalmente modelando a situação através de um grafo completo e da aplicação do Lema dos apertos de mão. Ora os alunos não conhecem sequer o conceito de grafo, pelo que não seria de esperar que seguissem esse caminho.

A figura 1 é uma representação do grafo que modela a situação descrita no problema proposto, em que se representam as equipas por vértices e os jogos entre equipas por arestas. Como cada equipa joga com todas as outras apenas uma vez, em cada vértice incidem 4 arestas, correspondentes aos quatro jogos que cada equipa faz. Em linguagem de grafos diríamos que todos os vértices têm grau 4.

Esta propriedade pode desempenhar um papel importante na determinação do número de jogos. Para descobrir esse número podemos contar directamente no grafo o número de arestas ou, como há 5 vértices de grau 4 e quando se somam os graus temos cada aresta contabilizada duas vezes, basta fazer $(5 \times 4)/2 = 10$ jogos.

É de salientar que o grafo que modela esta situação pode modelar muitas outras, como por exemplo, o número de abraços que dão 5 amigos ou o número de telefonemas que estes fazem entre si.

Voltando ao problema proposto, verifica-se que estamos perante uma relação unívoca entre duas variáveis: número de equipas e número de jogos a realizar. O objectivo principal da introdução deste problema como seria de esperar, é que os alunos concluam que a relação entre o número de equipas e o número de jogos é unívoca sendo, portanto, uma função e, a partir daí, explorar as diferentes formas de representar uma função (diagrama sagital e tabela), o objectivo secundário é o de introduzir e distinguir convenientemente a noção de variável dependente e independente.

Turma 1

Quando apresentámos o problema nesta turma fez-se um enorme e constrangedor silêncio. De repente um dos alunos, que nem é dos melhores, exclamou: *Já sei 20 jogos!*

De seguida, outros números foram sendo lançados, 25, 12, 10...10, 10. Antes que a situação se descontrolasse, escolhemos dois alunos para explicarem o seu raciocínio à turma. Acompanhemos os diálogos:

Aluno 1: A minha equipa não pode jogar contra ela própria, faz 4 jogos. Com as outras dá 20. $5 \times 4 = 20$.

Aluna 2: Não, não é assim.

A aluna desenhou a figura 2 no quadro da sala.

Professor: O que representam as linhas e as letras?

Aluna 2: As letras são as equipas. As linhas quer dizer que [aponta para o quadro] este joga com este.

Professor: Como é que sabes quantos jogos se irão realizar?

Aluna 2: Conto. [aponta para as linhas que acabara de desenhar]

Uma outra aluna pede para intervir e apresenta o seguinte esquema de contagem (figura 3)

Aluna 3: Agora conto. $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ jogos [a aluna exemplificou no quadro como devia contar o número de jogos].

Ambas as alunas chegaram à mesma conclusão usando processos de contagem diferentes. A primeira aluna, sem disso ter consciência, modelou a situação através de um grafo, o que lhe facilitou a contagem do número de jogos. A segunda aluna utilizou uma técnica de contagem bastante semelhante à que se usa em probabilidades ao nível do 12.° ano de escolaridade. O aluno 1 não desarmou e continuava a afirmar que a resposta dele deveria estar certa, mas perante as evidências aceitou a resposta das colegas embora não

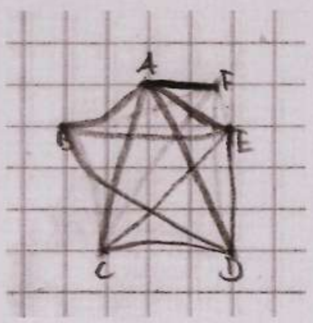


Figura 4

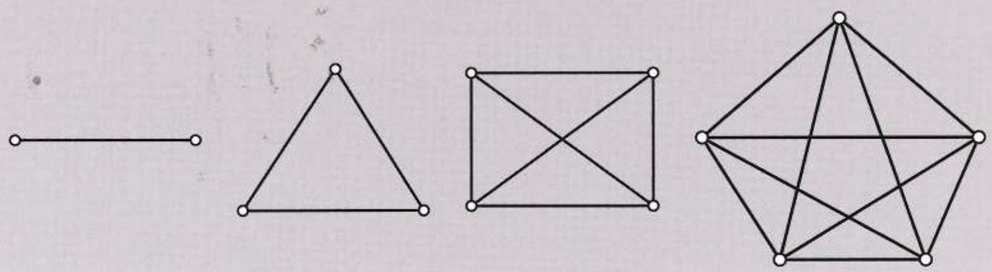


Figura 5

percebendo porque não chegava ao resultado certo. Nesta altura pedimos ao aluno para não desesperar e, antes de lhe explicarmos porque a sua resposta estava errada alterámos os dados do problema: E se forem 6 equipas a inscreverem-se? Ou 8 equipas?

Novamente um pouco de silêncio. A turma divide-se no processo de resolução, uns quantos alunos seguem o esquema da aluna 2, outros o esquema da aluna 3. O mesmo aluno que apresentara o número 20 como solução volta a intervir: 30 jogos no primeiro caso e 42 jogos no segundo caso.

Aluno 4: «Tá» mal. São 15 jogos e 21 jogos. Fiz o desenho e dá 15 e 21.

Este aluno usou a mesma estratégia que a aluna 2 tinha usado no caso de 5 equipas (figura 4) embora tenha modificado a disposição espacial das equipas. Note-se que para facilitar a contagem de jogos o aluno usou cores diferentes para cada equipa. Quanto questionado sobre o porquê desta modificação disse que assim, desta forma, era mais fácil contar as linhas (jogos). Entretanto, o aluno 1, não desiste e volta à carga.

Aluno 1: É sempre metade do que disse. Assim é fácil. Multiplico e divido por 2... dá sempre certo.

Professor: Multiplicas o quê?

Aluno 1: Número de jogos vezes número de jogos menos um. $6 \times 5 = 30$. Metade de 30 dá 15. «Tá» certo.

De uma forma, não muito difícil, alguns elementos da turma chegaram à conclusão de qual seria o número de jogos, modelando a situação através de um grafo. Conseguiram inferir e generalizar o número de jogos para qualquer número de equipas, obtendo a expressão que dá o número de jogos para um número

$$\frac{n(n-1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Embora não tivéssemos formalizado e explicitado a expressão que nos fornece o número de jogos, o aluno 1 verbalizou-a de uma forma bastante aceitável para a faixa etária em questão. Interessava mostrar agora porque razão o aluno 1 falhou no início. Este aluno estava a considerar que A jogar com B e B jogar A eram jogos diferentes e, portanto, duplicou o número de jogos. Dito de outra forma, o aluno não percebeu que a relação «jogar com» é simétrica, o que fazia com que estivesse a contar duas vezes o mesmo jogo quando estes jogos são na realidade um só.

Turma 2

Como já esperávamos que nesta turma fosse mais difícil responder ao problema inicial reduzimos de 5 para 4 o número de equipas. O nosso intuito era facilitar o trabalho caso fosse necessário conduzir a turma para a solução. Inicialmente esta turma reagiu da mesma forma que a turma anterior. Uma chuva de números completamente díspares foram sendo atirados como resposta ao problema. Uma vez que os alunos não conseguiam determinar correctamente o número de jogos, nem pareciam motivados para parar e pensar, desenhámos os «esquemas» da figura 5 para facilitar a compreensão do problema.

Identificámos os pontos com o número de equipas e as linhas com o número de jogos. Neste ponto os alunos começaram a demonstrar alguma compreensão e encontraram sem grandes dificuldades o número de jogos para 2, 3, 4 ou 5 equipas. Ao lado colocámos uma tabela que resumia a situação anterior.

N.º equipas	2	3	4	5
N.º jogos	1	3	6	10

Convidámos então os alunos a descobrirem o número de jogos no caso de haver 6 equipas inscritas. A turma dividiu-se em dois resultados: 14 jogos ou 30 jogos. Intrigados com a origem do valor 14 pedimos ao grupo que tinha chegado a esse resultado que explicasse como o tinha obtido. Tratava-se de uma tentativa errada de encontrar uma regularidade na sequência. O valor 30 já era por nós esperado. Convidámos então os alunos que tinham obtido 30 jogos a testarem a sua ideia no caso de 5 equipas inscritas. Finalmente um dos alunos concluiu que o número de jogos era metade daquilo que tinham previsto, e que o mesmo se verificava em todos os casos considerados. Finalmente a turma tinha chegado aonde pretendíamos.

Nesta abordagem revelou-se fundamental começar com um número bastante pequeno de equipas inscritas para que os alunos entendessem realmente o cerne do problema, e, em seguida, ir aumentando gradualmente o número de equipas, para que assim lhes fosse mais fácil inferir uma expressão analítica para a resposta ao problema.

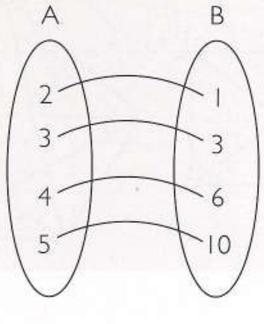


Figura 6

O conceito de função

Depois das 2 turmas terem chegado ao mesmo ponto introduzimos os conceitos de variável independente e dependente. Uma das vantagens nesta abordagem é que os alunos aceitam muito facilmente, confirmando empiricamente, que o número de jogos depende sempre do número de equipas inscritas, como mostra a última tabela. Uma vez aceite este facto, foi fácil verificar que para cada número de equipas existe um e um só número de jogos. Esta foi a altura ideal para definir formalmente o conceito de função, domínio, contradomínio, objecto e imagem de uma função, recorrendo sempre ao problema que tínhamos resolvido.

De seguida representámos a função sob a forma de um diagrama sagital, definindo A como conjunto partida e B como o conjunto chegada da relação, que neste caso, irá coincidir com o contradomínio da função (figura 6).

Enfatizámos ainda que o diagrama sagital e uma tabela são apenas diferentes formas de representar uma mesma função. Neste ponto, um dos alunos teve a seguinte afirmação curiosa:

Professor, isso é como ver as repetições de um [mesmo] golo com câmaras diferentes!

Algumas conclusões

Esta abordagem ao conceito de função ofereceu uma oportunidade aos alunos de criarem as suas próprias representações sobre o conceito de função, não ficando presos às representações do professor, embora na turma 2 o trabalho dos alunos tivesse que ser orientado nesse sentido. Na turma 1, deparámo-nos com uma diversidade de resoluções que não esperávamos encontrar. De salientar o facto curioso de na turma 1, os grafos terem sido uma das formas naturais de modelar a situação. Os grafos também surgiram, na turma 2, como facilitadores e intermediários na resolução do problema proposto, pese embora o facto de esta abordagem ter aparecido sob orientação do professor. Apesar da abordagem ter sido sugerida pelo professor, a turma reagiu bastante bem aos estímulos e continuou o trabalho a partir daí.

Abrimos aqui uns parênteses para lembrar a oportunidade de introduzir conceitos elementares de grafos nos conteúdos do 3° ciclo do ensino básico, como temos vindo a defender noutras oportunidades. De facto, embora sem formalizar os conceitos relacionados com teoria de grafos, esta pode fornecer estímulos para o desenvolvimento do trabalho dentro da sala de aula. Pode ainda permitir a modelação matemática de situações da vida real, sem que haja necessidade de proceder a simplificações que fazem com que a realidade se perca, dando origem a problemas que se podem resolver com o auxílio de algoritmos bastante intuitivos. A introdução de temas de teoria de grafos abriria a possibilidade de desenvolver aprendizagens realmente significativas — que é um dos pontos centrais do actual currículo do 3.° Ciclo — do ponto de vista dos alunos, uma vez que tem potencial para resolver problemas práticos e reais ligando a Matemática à experiência pessoal do aluno (Feiteira e Pires, 2007).

A forma como a turma 1 obteve a generalização do resultado para qualquer número de equipas também foi bastante interessante. Por via do diálogo entre os alunos e efectuando uma análise, não muito sofisticada, nem exaustiva, os alunos inferiram a expressão analítica que modela a questão.

Sendo o futebol uma temática que faz parte da vida dos alunos, teve um papel fundamental, como factor de motivação, para que os alunos se empenhassem na procura de uma solução.

Assim, vemos como um problema simples serviu de ponto de partida aos alunos, mais ou menos orientados pelo professor, para chegarem ao conceito de função como relação unívoca entre duas variáveis uma dependente (o número de jogos) e outra independente (o número de equipas), permitindo ainda apresentar as diferentes formas de representar uma função.

Referências bibliográficas

Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (2008). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Feiteira, R., Pires, M. (2007), Grafos para todos vs grafos para alguns, In *Actas do ProfMat 2007*, Angra do Heroísmo: APM [Suporte: CDRom]

Pires, M., Kravchenko, V., (2007), Reflexões sobre o ensino de Grafos, *Educação e Matemática*, n.° 93, pp.11–15, Lisboa: APM

Rui Feiteira
Agrupamento Vertical escolas Prof. José Buisel, Portimão
Marília Pires,
Departamento de Matemática,
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve

«Em Matemática não entendemos coisas . . . Habituamo-nos a elas!»

António M. Fernandes

Propositum

O título deste artigo traduz o pensamento de John von Neumann (brilhante matemático e físico) e foi, aliás, tema da secção «Pense Nisto» da revista *Educação e Matemática*, no seu número 101. Trata-se evidentemente de algo difícil de aceitar. John von Neumann não foi simplesmente um matemático dos mais importantes. Para além disso, reflectiu activamente sobre os fundamentos da matemática e, contribuiu de forma significativa para o seu estudo. Esse facto, por si só deveria fazer-nos encarar aquela afirmação de modo sério.

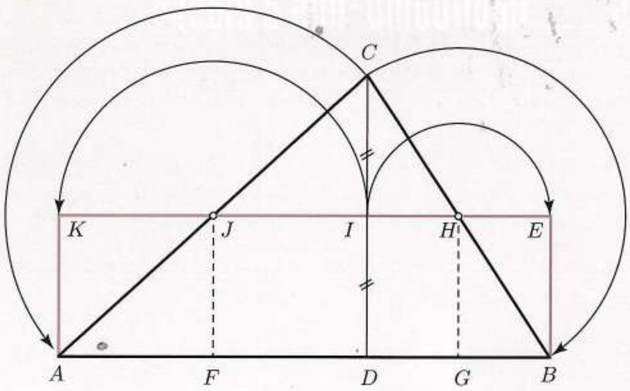


Figura 1.(a)

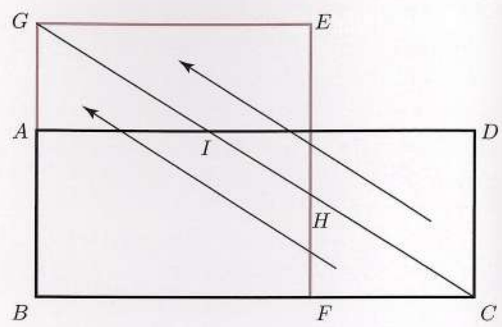


Figura 1.(b)

Vivem-se tempos nos quais a atitude analítica merece pouco mais que desprezo e, fascinada pelo poderio informático que entretanto alcançou, a Humanidade segue simulando em detrimento de seguir pensando.

Em ocasiões como estas, mais que em quaisquer outras, a força de uma afirmação como a de von Neumann, joga claramente contra si mesma.

Mas, ainda que academicamente, existe possibilidade de von Neumann estar certo e, nesse caso, não sendo possível uma compreensão absoluta do «universo matemático» é importante conhecer entre que limites essa compreensão ocorre e em que grau.

Esta é uma tarefa não apenas da Filosofia da Matemática, mas também da Filosofia da Educação Matemática. Sim, da Filosofia, … não confundir com «burocracia».

Deixarei este empreendimento para aqueles que possuem a competência necessária, ocupando-me aqui, exclusivamente, de expor factos que, em minha opinião, fornecem alguma evidência favorável à correcção da afirmação de que von Neumann está certo.

Vere

Não possuindo os meios necessários ao cálculo generalizado de áreas, os gregos desenvolveram um processo engenhoso que lhes permitia comparar áreas sem proceder ao seu cálculo explícito. Esta era precisamente a grande virtude deste sistema: permitir falar de áreas iguais, maiores ou menores, na ausência de uma noção geral de «área».

O conceito fundamental envolvido no processo a que nos referimos é modernamente designado de *congruência por dissecção*. Duas «figuras» planas F_1 e F_2 são congruentes por dissecção se é possível decompor uma delas num número finito de «sub-figuras» e rearranjá-las de modo a obter a outra. Embora se trate de uma ideia conceptualmente rica, adivinha-se que a sua aplicabilidade prática se limitasse aos casos em que se encontrassem envolvidas «figuras simples».

Restrinjamo-nos então ao caso particular dos polígonos, aproveitando para definir mais rigorosamente esta noção de *congruência por dissecção*. Dois polígonos P_1 e P_2 dizem-se congruentes por dissecção (escreve-se $P_1 \sim P_2$) se for possível decompor um dos polígonos num número finito de «peças» poligonais de modo que, transformando cada uma dessas peças por meio de isometrias é possível obter o segundo polígono. Uma vez que as isometrias preservam as áreas das figuras poligonais, resulta daqui que, se $P_1 \sim P_2$ então P_1 e P_2 têm a mesma área.

A questão que se levanta é então: poderemos tomar esta noção de congruência por dissecção como uma «definição» de «possuir a mesma área»? A resposta a esta questão não seria dada pelos gregos.

No caso dos polígonos a resposta é afirmativa. O resultado conhecido, como *Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien*, foi estabelecido no início do Séc. XIX: *dois polígonos são equivalentes por dissecção se e só se têm a mesma área.*

Este facto pode ser estabelecido de forma surpreendentemente simples e elementar. Começamos por observar que, se é possível decompor um polígono P_1 em «sub-polígonos» e rearranjá-los para obter um polígono P_2, o inverso é também possível (basta considerar as isometrias inversas para obter P_1 a partir de P_2). Como consequência deste facto reconhece-se que, se dois polígonos são conguentes por dissecção com um terceiro então, são congruentes por dissecção entre si. Importa ainda observar que, para cada área dada, existe (a menos de uma isometria) um único quadrado com essa área. Assim, constatamos que, para estabelecer o resultado de Wallace-Bolyai-Gerwien basta estabelecer que cada polígono é congruente por dissecção com um quadrado com a mesma área. Finalmente, como cada polígono é triangulável (ou seja, pode ser decomposto num número finito de triângulos) basta-nos mostrar que cada triângulo é congrunte por dissecção com um quadrado da mesma área e que, podemos sempre rearranjar um número finito de quadrados num único quadrado cuja área é a soma das áreas dos quadrados originais.

A figura 1.(a) ilustra como um triângulo ABC é congruente por dissecção com um rectângulo $ABEK$. Observe-se que os triângulos AJF e JIC são congruentes (eles são semelhantes pois têm os três ângulos iguais e, além disso, o comprimento do lado IC de um dos triângulo é igual ao comprimento do lado FJ do outro). Assim, $AFJK$ é um rectângulo. De modo análogo se pode demonstrar que $GBEH$ é um rectângulo. Uma vez que $ABEK$ se obtém do triâgulo original rodando duas peças triangulares, o triângulo inicial e o rectângulo final têm a mesma área.

Se atentarmos agora na figura 1.(b), ela ilustra o modo como um rectângulo é congruente por dissecção com um quadrado. Considerando o rectângulo inicial $ABCD$ com $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, desenha-se o quadrado $BFEG$ com lado de comprimento $\sqrt{ab}$. É claro que o quadrado tem a mesma área do rectângulo, restando-nos mostrar que o quadrado se pode obter do rectângulo por disecção. Basta demonstrar que os triângulos AIG e FCH são congruentes, o mesmo se passando com os triângulos ICD e GHE. Consideramos o primeiro par, uma vez que as considerações para o segundo são do mesmo tipo. Temos que:

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{FC}} = \frac{a + \overline{AG}}{b}$$

Atendendo a que $\overline{FC} = b - \sqrt{ab}$ obtém-se, depois de substituir na igualdade anterior e depois de eliminar denominadores, a seguinte igualdade:

$$b(\overline{HF} - \overline{AG}) = ab - \sqrt{ab}(a + \overline{AG}) = 0$$

porque $a + \overline{AG} = \sqrt{ab}$. Daqui resulta imediatamente que $\overline{HF} = \overline{AG}$. Como os triângulos AIG e FCH são claramente semelhantes, da igualdade anterior podemos concluir que são congruentes, como se pretendia.

[De facto, a construção anterior requer que no rectângulo de partida, o respectivo comprimento não exceda quatro vezes a largura (porquê?). Mas, dado um rectângulo arbitrário, ele é sempre congruente por dissecção com um outro satisfazendo esta condição (como?).]

Finalmente, resta-nos mostrar que tendo obtido um número finito de quadrados, os podemos reagrupar num único quadrado usando apenas isometrias. Uma vez que o processo pode ser iterado, no essencial, temos apenas que mostrar como é que isso pode ser feito no caso de dois quadrados. O método é adaptado de uma das inúmeras demonstrações do teorema de Pitágoras. Considere-se a figura 1.(c) onde se exibe esquematicamente uma demonstração do Teorema de Pitágoras que utiliza, precisamente, o método de dissecção. Deixam-se os detalhes ao cuidado do leitor.

Uma questão que naturalmente surge na nossa mente é a seguinte: pode tudo isto generalizar-se ao caso tridimensional (adaptando, evidentemente, a noção de «congruência por dissecção» de modo a que as «peças» nas quais se divide um dos poliedros sejam agora elas próprias poliedros)?

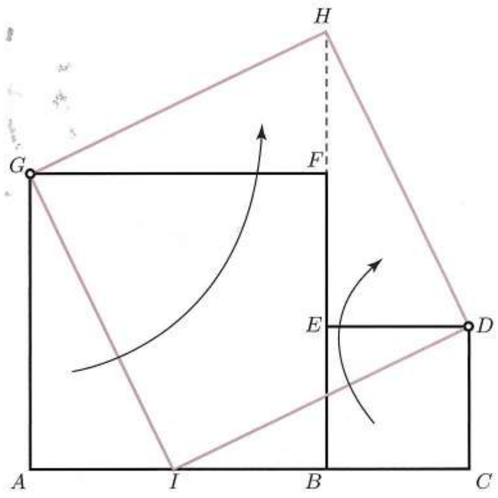


Figura 1.(c)

Ou seja, será verdade que considerando poliedros em vez de polígonos, se tem que dois quaisquer poliedros com igual volume são congruentes por dissecção?

Aparentemente nada obsta a uma tal possibilidade. A priori, não existem diferenças entre as noções de «polígono» e de «poliedro» nem entre «plano» e «espaço» que o pareçam justificar.

O problema atraiu David Hilbert que incluiu, na sua famosa Lista de Problemas, a questão de saber se um tetraedro é congruente por dissecção com um cubo de igual volume (terceiro problema de Hilbert).

Surpreendentemente, a resposta ao terceiro problema de Hilbert é negativa. A resposta foi dada, ainda em 1900, por Dehn que demonstrou a impossibilidade de um tetraedro e um cubo serem congruentes por dissecção. À semelhança das demonstrações de impossibilidade de resolução de certos problemas clássicos usando régua e compasso, obtidas como um sub-produto das investigações de Abel e Galois no domínio da álgebra, a demonstração de Dehn constitui um testemunho adicional deste tipo de interacção envolvendo álgebra e geometria.

Daremos uma ideia geral da demonstração mas, começaremos com algumas considerações preliminares. Se $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ é um conjunto finito de números reais, denotamos por $V(A)$ o conjunto de todas as somas $q_1x_1 + \cdots + q_nx_n$, em que os números $q_1, \ldots, q_n$ são todos rácionais. Uma função $f : V(A) \to \mathbb{R}$ é *aditiva* se satisfaz as duas condições seguintes:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in V(A)$;
2. $f(qx) = qf(x)$ para quaisquer $q \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Em cada poliedro, cada aresta resulta da intersecção de duas faces, por sua vez incluídas em planos bem determinados, esses planos determinam um ângulo que se designa de *ângulo diedral* do poliedro na aresta referida.

Considerando agora um poliedro P, suponhamos que A é um conjunto de números reais que inclui os ângulos diedrais de P que são, digamos, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, bem como o número π. Se $f : V(A) \to \mathbb{R}$ é uma função aditiva verificando $f(\pi) = 0$ então, o invariante de Dehn de P em f, denota-se por $\delta_f(P)$ e é o número, $\delta_f(P) = l_1 f(\alpha_1) + \cdots + l_k f(\alpha_k)$, onde cada l_i é o comprimento da aresta correspondente ao ângulo α_i. (Existe uma forma de definir este invariante mais «universalmente», evitando a referência às diferentes funções aditivas f como acima. Isso passaria por considerar o invariante como um elemento do *produto tensorial* de certos espaços vectoriais. Este é, contudo, o género de detalhe que tentaremos evitar aqui.)

O teorema de Dehn-Hadwiger estabelece então que, dados dois poliedros P e Q, se A é um conjunto de números reais contendo os ângulos diedrais de P e Q, assim como o número π e se, $f : V(A) \to \mathbb{R}$ é uma função aditiva que satifaz $f(\pi) = 0$ de tal modo que os invariantes de Dehn $\delta_f(P)$ e $\delta_f(Q)$ são diferentes então, P e Q não são congruentes por dissecção.

A demonstração deste resultado usa de forma essencial uma característica fundamental dos invariantes de Dehn designadamente, se P se pode decompor num número finito de poliedros $P = P_1 + P_2 + \cdots + P_k$ então $\delta_f(P) = \delta_f(P_1) + \cdots + \delta_f(P_k)$. Por outro lado, as isometrias do espaço não alteram os invariantes de Dehn, sendo por isso fácil concluir que no caso de se ter $\delta_f(P) \neq \delta_f(Q)$ não se pode ter $P \sim Q$.

Podemos agora verificar que se T e C são, respectivamente um tetraedro regular e um cubo, com o mesmo volume então, podemos definir uma função aditiva f para a qual se tem $\delta_f(T) \neq \delta_f(Q)$.

Os ângulos diedrais do cubo são todos iguais a $\pi/2$ enquanto que os ângulos diedrais de um tetraedro regular são todos de $\alpha = \arccos(1/3) \approx 70.53°$.

Consideremos então $A = \{\alpha, \pi/2, \pi\}$. Observe-se que $V(A) = v(\{\alpha, \pi\})$ uma vez que $V(A) = V(\{\alpha, \pi\})$

$$q_1\alpha + q_2(\pi/2) + q_3\pi = q_1\alpha + (q_2/2 + q_3)\pi$$

sendo $q_2/2 + q_3$ um número racional. Tendo isto em conta, definimos a função $f : V(A) \to \mathbb{R}$ através de $f(q_1\alpha + q_2\pi) = q_1$. (Pode mostrar-se que esta função está bem definida e é aditiva.) Sem perda de generalidade vamos imaginar que a aresta do cubo C mede uma unidade e vamos denotar por l o comprimento das arestas do tetraedro que tem também volume igual a uma unidade. Calculemos os invariantes de Dehn para C e T nesta função f que acabámos de definir. Tem-se que

$$\delta_f(C) = 12 \times f(\pi/2) = 12 \times \frac{1}{2} f(\pi) = 0.$$

No que diz respeito ao tetraedro temos:

$$\delta_f(T) = 6l f(\alpha) = 6l \neq 0.$$

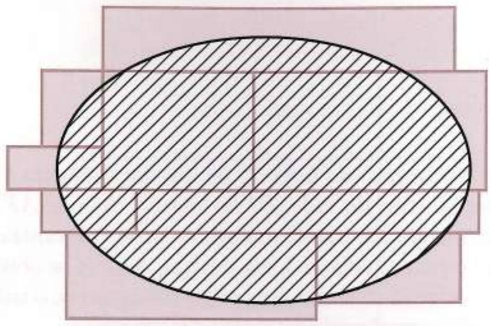


Figura 2. A área colorida representa o erro cometido

Aplicando directamente o teorema de Dehn-Hadwiger concluímos que um tetraedro e um cubo de volume igual não são congruentes por dissecção.

A título de curiosidade refira-se que o teorema de Dehn-Hadwiger tem uma versão forte, o denominado teorema de Dehn-Sydler que estabelece essencialmente que a igualdade dos invariantes de Dehn de dois poliedros de igual volume é uma condição necessária e suficiente para que sejam congruentes por dissecção.

De qualquer forma não deixa de ser surpreendente que uma noção que parecia tão próxima de caracterizar a ideia de «área», no caso do plano, possa falhar idêntico propósito no caso do espaço, de forma tão estrondosa.

A matemática actual é fundada num domínio conhecido como teoria de conjuntos. Este processo que temos discutido ao longo do artigo, em que se encontram envolvidos processos de decomposição de certos conjuntos particulares do plano ou do espaço, pode ser generalizado.

Uma dessas possibilidades passa por não ser tão restritivo nas «peças» que intervêm na decomposição. Dois conjuntos (arbitrários) de pontos do espaço, A e B dizem-se equidecomponíveis se A e B são reuniões de conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ e $B_1, \ldots, B_n$, respectivamente, onde os $A_1, \ldots, A_n$ são disjuntos dois-a-dois, o mesmo sucedendo com os $B_1, \ldots, B_n$ e para cada $i = 1, \ldots, n$ existe uma isometria do espaço G_i tal que $B_i = G(A_i)$ ou seja, B_i é a transformada de A_i pela isometria G_i).

Usando esta nova noção o terceiro problema de Hilbert passa a ter uma solução positiva. De facto, um tetraedro e um cubo de igual volume são equidecomponíveis. Mas não devemos «cantar vitória» demasiado cedo. Afinal, esta generalização tem também ela consequências imprevistas que se traduzem no enunciado da denominada *forma forte do paradoxo de Banach-Tarski* — Se A e B são dois conjuntos limitados de pontos do espaço, com interior não vazio (este é o caso de quaisquer poliedros) então A e B são equidecomponíveis.

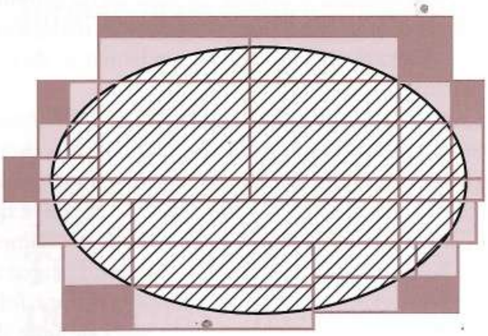


Figura 3. Após refinar a cobertura e eliminando os rectângulos coloridos com a cor mais escura, o erro cometido é menor

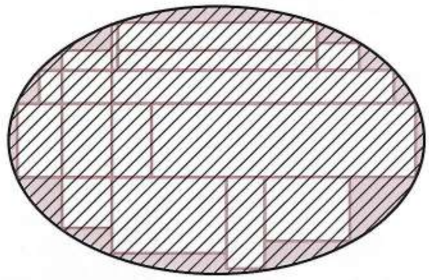


Figura 4. Aproximação por «defeito»

A consequência deste resultado é tudo menos intuitiva: *podemos decompor um berlinde num número finito de peças e, usando apenas isometrias, rearranjar essas peças de modo a obter uma esfera do tamanho do Sol.*

O resultado anterior requer, de modo essencial, a utilização do denominado axioma da escolha na respectiva demonstração. Trata-se da asserção segundo a qual dada uma família $\mathcal{X}$ de conjuntos não vazios, existe uma função (dita «de escolha») com domínio a família $\mathcal{X}$ e tal que para cada $X \in \mathcal{X}$ se tem $f(x)$ é um elemento de X (por isso se diz que f «escolhe» um elemento de cada $X \in \mathcal{X}$).

O axioma da escolha afirma algo que generaliza uma situação evidente no caso finito e, a priori é difícil antever consequências tão contra-intuitivas como aquelas anteriormente observadas, designadamente a impossibilidade de obter uma noção geral de medida que, estenda naturalmente os casos conhecidos envolvendo comprimentos, áreas e volumes. Por outro lado as vantagens que decorrem deste axioma no que diz respeito ao modo como «organiza» o universo de conjuntos são de tal ordem, que prescindir deste axioma não parece ser, actualmente, uma verdadeira opção.

O que vimos aqui é que uma abordagem à noção de medida, usando uma perspectiva geométrica ou mesmo uma sua variação conjuntista não são possíveis em geral, ou quando a generalidade parece ser suficiente, a caracterização encontrada parece ser totalmente insatisfatória.

Mesmo outro tipo de generalizações, sendo úteis, não deixam de desafiar a nossa compreensão. Uma delas é a denominada *medidade Lebesgue*. Ilustraremos a construção no caso do plano. (As necessárias adaptações para o caso da recta real ou do espaço são evidentes.) Considerando um conjunto arbitrário (limitado) de pontos do plano A, diremos que uma família $\mathcal{C}$ de rectângulos é uma cobertura de A se os rectângulos em $\mathcal{C}$ só se intersectam, eventualmente, nas suas fronteiras e, a união de todos os rectângulos em $\mathcal{C}$ contém o conjunto A (figura 2).

Se $\mathcal{C}$ é finito, a soma das áreas dos seus elementos fornece imediatamente uma aproximação (por execesso) daquilo que intuitivamente identificamos como a «área de A» e que denotamos por $m(\mathcal{C})$. No caso em que $\mathcal{C}$ contém infinitos rectângulos podemos ainda assim definir o valor $m(\mathcal{C})$ como sendo o *supremo* do conjunto,

$$\{m(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{C} \text{ e } \mathcal{F} \text{ é finito}\}.$$

(O *supremo* de um conjunto X é o menor valor a que satisfaz $x \leq a$ para qualquer $x \in X$.)

Deste modo, e em qualquer caso, $m(\mathcal{C})$ é uma estimativa por execesso do que entendemos como sendo a «área de A».

Se $m(\mathcal{C})$ é uma estimativa por excessso, e é realmente excessiva, então subdividindo os rectângulos em $\mathcal{C}$ e eliminando os novos rectângulos que não contêm pontos de A, obtemos uma nova cobertura de A, que denominamos $\mathcal{C}'$ para a qual se tem $m(\mathcal{C}') < m(\mathcal{C})$, ou seja, para a qual o erro cometido na avaliação da área é menor (figura 3).

Estas considerações sugerem que se considere definir como a medida exterior de A, o menor valor (em rigor o ínfimo) entre os $m(\mathcal{C})$ onde $\mathcal{C}$ varia entre todas as possíveis coberturas de A. Pode mostrar-se que esse valor existe sempre. Denotamo-lo por $\mu^*(A)$.

Claro está, que aproximar a área de A, por defeito, considerando famílias de rectângulos cuja união está contida em A (ao invés de conter A [figura 4]) origina uma construção igualmente natural (desta vez devendo nós escolher o maior [em rigor o supremo] dos valores $m(\mathcal{E})$, onde $\mathcal{E}$ varia entre estas novas famílias de rectângulos). Esse valor existe sempre e iremos designá-lo de *medida interior* de A, denotando-o por $\mu_*(A)$.

Como se disse, ambas as aproximações à área de A parecem naturais, pelo menos, nenhuma é mais natural que a outra. De facto, parece até muito razoável esperar que $\mu^*(A) = \mu_*(A)$.

Todas estas considerações se adaptam de modo imediato à recta real (substituindo o papel dos rectângulos pelo dos intervalos). Neste contexto, denotamos por $\mathfrak{M}(\mu)$ a família de todos os $X \subset \mathbb{R}$ para os quais se tem $\mu^*(X) = \mu_*(X)$. Se $X \in \mathfrak{M}(\mu)$ dizemos que X é *mensurável* e, em lugar de escrevermos $\mu^*(X)$ ou $\mu_*(X)$ escrevemos simplesmente $\mu(X)$, que se denomina a *medida de* X.

Permitirá esta construção fornecer uma medida para qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$? A sua naturalidade, elegância e até simetria, sugerem que sim. Ao próprio Lebesgue não passaria pela cabeça que assim não fosse. Só isso justifica a sua reacção extremamente negativa quando, em 1905, Giuseppi Vitali estabeleceu a existência de conjuntos que não são mensuráveis. Lebesgue falou então da natureza intrinsecamente contraditória do axioma da escolha (uma vez que este axioma tem um papel decisivo na demonstração de Vitali).

Conclusão

A verdade é que Lebesgue estava errado, não existindo nada de particularmente contraditório no axioma da escolha. (Gödel demonstraria três décadas mais tarde a consistência do axioma da escolha relativamente aos restantes axiomas da teoria de conjuntos.) No que diz respeito à noção de medida, não há nela nada que impeça uma total generalização a todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$. Foi demonstrado por Solovay, que na ausência do axioma da escolha é consistente admitir que todos os conjuntos de reais são mensuráveis.

O que há aqui de estranho, se assim se pode dizer, é que não é possível generalizar estes dois tipos de noção em simultâneo, por mais naturais que essas generalizações possam parecer.

Assim, um entendimento pleno, num sentido quase metafísico, destes conceitos, ou pelo menos do modo como interagem, parece difícil de alcançar.

Outros exemplos poderiam ser acrescentados, talvez o mais notável seja a extraordinária incapacidade da matemática para descrever as propriedades dos números reais, afinal de contas, de descrever uma estrutura fundamental da própria Matemática.

Ao contrário da estrutura dos números reais, a estrutura da aritmética é razoavelmente bem conhecida. Não obstante a noção de número ter nascido com a própria matemática (certamente numa concepção rudimentar) a verdade é que só milénios passados, um outro Giuseppe, mais precisamente Giuseppe Peano, isolou um sistema axiomático capaz de caracterizar essa estrutura de modo satisfatório. Este foi o tempo que demorou o entendimento razoável de uma das mais simples estruturas matemáticas.

A Matemática não é um empreendimento terminado. Mas não é o facto de ainda existirem teoremas por estabelecer que dificulta essencialmente o seu entendimento. Precisamente porque muitos aspectos não podem ser decididos, a Matemática terá que permanentemente incorporar novos e poderosos axiomas que estabeleçam essas decisões. Neste ponto a convicção será de pouco valor. Esta não é necessariamente uma fraqueza já que, parafraseando Nietzsche: «As convicções são inimigas mais perigosas da verdade do que as mentiras.»

António M. Fernandes
Dep. Matemática
IST

Turmas mais pequenas? ME e especialistas dividem-se

20 • Público • Sexta-feira 11 Junho 2010

Portugal

Educação Dezoito mil põem deputados a discutir redução de alunos por turma

Turmas mais pequenas? ME e especialistas dividem-se

Petição do Movimento Escola Pública chegou esta semana ao Parlamento. E promete alimentar uma discussão que parece estar para durar

Graça Barbosa Ribeiro

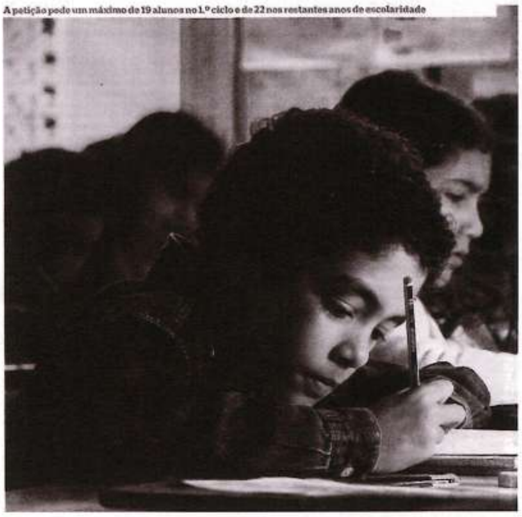
● Não existem estudos que permitam determinar se, tendo em vista o sucesso escolar, existe um número ideal de alunos por turma. Mas esta incerteza científica só torna ainda mais inflamado o debate em torno da questão lançada pelo Movimento Escola Pública (MEP), que esta semana entregou na Assembleia da República uma petição em defesa da redução do número de alunos por turma. Por baixo assinam nada menos do que 18 mil pessoas. De que foi feito o sucesso da petição? Do "bom senso" da medida, como alguns alegam? Ou do seu po-

turmas que em Portugal podem ter dez ou menos alunos: "Turmas dos cursos profissionais – muitas vezes atirados para esta solução de recurso devido ao insucesso; turmas das escolas dos Territórios Educativos de Intervenção Prioritária, precisamente de bairros muito desfavorecidos e onde o insucesso é muito comum; e turmas de repetentes".

Uma proposta populista?

Miguel Reis ainda assinala a contradição entre a frase e a política do Governo, recordando que "se essas turmas pequenas existem é porque há um reconhecimento do Estado de

A petição pede um máximo de 19 alunos no 1.º ciclo e de 22 nos restantes anos de escolaridade



Mais de metade das turmas tem até 21 alunos

Portugal tem menos alunos por turma que a média dos países da OCDE

Fontes: Ministério da Educação e OCDE

In Público. 11 de Junho de 2010

Defendem especialistas

Flexibilidade e autonomia também podem ser solução

● Se a falta de consenso entre os grupos parlamentares não permitir satisfazer a pretensão do Movimento Escola Pública, a solução poderá passar por uma proposta alternativa: a eliminação do número mínimo de alunos por turma e a atribuição de autonomia às direcções das escolas para as dimensionarem de forma mais ou menos flexível e de acordo com critérios a definir.

"Eu, que sou defensor convicto de turmas mais pequenas, tenho noção de que na escola que dirijo seria impossível concretizar, a curto prazo, essa medida, por falta de salas de aula disponíveis. Mas há escolas onde, devido à desertificação, as salas sobram – por que não começar por aí?", desafia Pedro Araújo, da Associação Nacional de Dirigentes Escolares.

A mesma ideia é defendida por Carlos Ceia, investigador da Universidade Nova, que adverte que se o Governo não avançar desde já com a diminuição do limite de alunos por turma, deverá, "pelo menos, dar autonomia às escolas para que possam fazer a experiência". "A questão do financiamento é recorrente, mas há sempre soluções, é uma questão de querer", defende o professor, que acredita que "as autarquias, as empresas e outras instituições locais poderão até estar interessadas em colaborar no combate ao insucesso escolar da sua comunidade, através da contratação do número de professores necessário" a um projecto daquele género.

Estas propostas estão na linha da estratégia defendida pela investigadora e professora universitária Dulce Gonçalves. Com muita experiência de investigação na área das dificuldades de aprendizagem, defende que, nalgumas circunstâncias, "as turmas até poderiam ter mais de 28 alunos". "O importante era as escolas terem autonomia e poderem e saberem usá-la para aumentarem ou diminuirem o número de alunos consoante o tipo de disciplina, de matéria e de aprendizagem". "Por exemplo, uma turma- base de 'X' alunos poderia dividir-se na aula de Língua Portuguesa em dois grupos, para trabalhar áreas específicas e diferentes consoante as necessidades distintas dos elementos dos dois grupos; e, no dia seguinte, juntar-se a outra turma, para uma aula tipo conferência ou seminário", exemplifica. **G.B.R.**

De acordo com a notícia publicada pelo jornal *Público* de 11 de Junho de 2010 foi entregue na Assembleia da República uma petição, assinada por 18 mil pessoas, que pede uma redução de alunos por turma — um número máximo de 19 alunos no 1º ciclo e 22 nos restantes ciclos de escolaridade, em vez dos actuais máximos — 24 e 28 alunos respectivamente.

Segundo a notícia «Não existem estudos que permitam determinar se, tendo em vista o sucesso escolar, existe um número ideal de alunos por turma. Mas esta incerteza científica só torna ainda mais inflamado o debate em torno da questão». É inquestionável que este assunto mexe com os cidadãos, pois quatro dias depois de ter sido lançada, a petição já tinha reunido as assinaturas necessárias para obrigar os deputados a debater o assunto. Esta petição vem trazer a debate mais uma vez a discussão sobre as condições de funcionamento das turmas, que passa não só pelo seu número de alunos, como também pela possibilidade de existirem desdobramentos a algumas disciplinas, assessorias ou pares pedagógicos.

Mas a alternativa a uma lei que pretende normalizar números em situações muito diversas e em escolas com características muito diferentes, será outra lei que também imporá números? Não tendem estas leis a acentuar as diferenças que existem, gerando outras? Porque não permitir às escolas que, de uma forma autónoma, decidam sobre a forma como constituem as turmas, tendo em conta o seu projecto educativo, as características dos seus alunos, e os recursos humanos e físicos existentes?

Discutir o número de alunos por turma para melhorar as condições de aprendizagem, também passa por garantir a oportunidade dos alunos trabalharem com *software* adequado, calculadoras, sensores, materiais manipuláveis, realizando tarefas de exploração e investigação onde precisam de ser apoiados nos diversos caminhos que a investigação tomará… Como fazer trabalho experimental em turmas de 26 ou 28 alunos? Não seria melhor ser a escola a decidir sobre desdobramentos e assessorias para garantir esse trabalho?

Este caminho não está livre de obstáculos. Nas escolas muitas vezes instalam-se rotinas e interesses corporativos, que não têm em atenção as reais necessidades dos alunos. Mas como consolidar a capacidade democrática de tomar decisões? Só vemos um caminho, tomando decisões, avaliando-as e corrigindo erros. Se se continuar a impor normativos muito prescritivos, a responsabilidade não pode ser verdadeiramente assumida pela escola.

Segundo a notícia, esta autonomia é defendida por entrevistados que afirmam existir soluções para as questões financeiras através de projectos abertos à comunidade ou que as escolas pudessem «aumentar ou diminuir o nº de alunos consoante o tipo de disciplina, de matéria e de aprendizagem».

Parece-nos mais eficaz uma lei onde se façam recomendações, mas que deixe às escolas a possibilidade de tomar decisões.

Não será de ir por aí?

Manuela Pires
Cristina Tudella

Expressões numéricas: uma abordagem diferente

As expressões numéricas assumem no 2.º ciclo do ensino básico uma parte importante do programa de Matemática. Contudo, não constam, certamente, da lista de preferências dos alunos, que se debatem com prioridades de operações, parênteses e outras complicações, além de propostas de trabalho com interesse duvidoso. Neste artigo, tentarei apresentar uma revisão deste tema, uma abordagem diferente mas igualmente possível, quiçá mais motivadora e significativa para as crianças.

Esta problemática das expressões numéricas não é recente. Já desde os meus tempos de escola preparatória que pensava em algumas das questões sobre as quais aqui me debruço. Mais tarde, durante a minha formação na Escola Superior de Educação de Lisboa, tive um grupo de professores que me sensibilizou para este e outros assuntos. Actualmente, estando ao serviço do ensino, tenho a possibilidade de fazer experiências e de partilhá-las com outros profissionais, nomeadamente através deste artigo.

Imaginemos uma aula de Matemática em que o professor apresenta o seguinte problema:

A dona Filomena foi comprar 1 litro de leite que custava 1 euro, uma dúzia de ovos por 2,50 euros e um pacote de farinha por 1 ½ euros, tudo para fazer um bolo para o seu neto Felisberto. Quanto pagou a dona Filomena pela despesa? E quanto recebeu de troco, sabendo que entregou uma nota de 20 euros à empregada?

Um dos seus alunos, bastante inteligente por sinal, não resiste a pensar:

Quem é a dona Filomena? E quem é o Felisberto!? O que é que me interessa que ela vá fazer um bolo? Por que é que ela não pagou a despesa com cartão Multibanco?

Estas são apenas algumas perguntas que este e outros alunos poderiam, justa e secretamente, colocar a si próprios quando confrontados, na quinta ou sexta aula de expressões numéricas, com mais uma actividade aborrecida, enfadonha e repetitiva.

O professor não sabe dos sentimentos que está a despertar nos seus alunos, porque se soubesse iria rever a sua metodologia de trabalho. Ou... talvez não. Poderia sempre optar por propor algo diferente, desta vez mais semelhante a um exercício do tipo:

Resolve a seguinte expressão numérica:

$$25 - 15 + 2 \times 10 + 1{,}5 + 0{,}5.$$

Contudo, mais uma vez, a escolha talvez não tenha sido a melhor. Onde está o interesse em transformar as crianças em máquinas de calcular, apenas efectuando operações desprovidas de contexto e de sentido?

O problema da dona Filomena e o exercício da expressão numérica propostos pelo nosso professor fictício são, de facto, as sugestões mais vulgarmente apresentadas pelos manuais escolares, intercaladas por uma ou outra actividade mais lúdica e/ou investigativa.

Figura 1

Quantos quadrados pequenos existem na figura? Quantos quadrados têm uma bola? E duas bolas? Quantas bolas existem na figura? Quantas bolas há em cada linha?

Figura 2

Quantas estrelas existem na figura? Quantas são as estrelas grandes? E médias? Quantas são as estrelas pequenas? Quantas estrelas não são grandes nem pequenas?

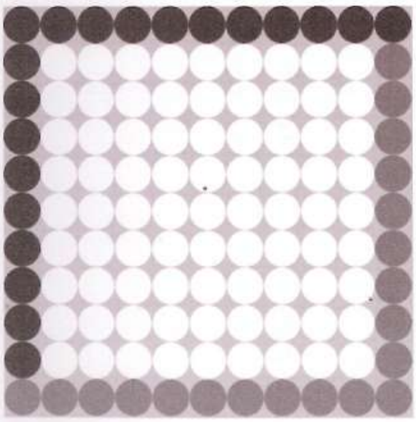
Figura 3

Quantos coelhos estão na figura? Quantos são os coelhos pequenos? Quantos coelhos estão virados para a direita? Quantos coelhos estão virados para a esquerda?

No programa do 2.º ciclo de Matemática, por seu lado, não vem definido nenhum objectivo do tipo «resolver expressões numéricas». Em vez disso, é possível encontrar, relativamente ao tema Número e Cálculo, objectivos como «resolver problemas e jogos numéricos ligados à vida real e aos interesses dos alunos (...) visando um melhor conhecimento dos números, usando as operações estudadas e conhecimentos de geometria», bem como «utilizar propriedades das operações para simplificar o cálculo mental ou escrito» e «descrever e discutir estratégias de resolução de problemas».

Actividades como as que recentemente realizei com alunos de 2.º e também 1.º ciclos do ensino básico e que apresento neste artigo (figuras 1 a 4) fazem, portanto, todo o sentido. Os alunos não têm necessidade de decorar regras, papaguear propriedades ou resolver à risca expressões enormíssimas. Em vez disso, embrenham-se em desafios matemáticos com utilidade e significado que permitem o recurso a diferentes estratégias e o desenvolvimento do raciocínio, sem esquecer o tema que aqui importa: as expressões numéricas.

Figura 4



Quantos círculos há na figura? Quantos círculos são castanhos? Quantos desses círculos são castanho-claro? E quantos são castanho-escuro? Quantos círculos são brancos?

O desafio consiste em, evitando fazer contagens com os dedos ou do tipo de um em um, descobrir, desenvolver e utilizar métodos que permitam, o mais rápida e correctamente possível, responder às questões que são colocadas sobre as várias imagens.

O interessante é observar a forma quase automática com que os alunos acabam por escrever as suas próprias expressões numéricas e explorar em plenário as diferentes formas de resolução a que cada um deles recorreu, estando elas ou não correctas.

Estas tarefas podem ser realizadas em pequenos grupos e requerem apenas a utilização de papel e lápis, pelo que penso que são de fácil execução e vão ao encontro dos gostos dos alunos que, tantas vezes, se sentem desanimados por trabalharem sempre da mesma forma e com os mesmos materiais: quadro, livro, fichas.

De facto, constata-se tristemente que, ao longo de anos e anos no ensino, há tendência para os professores deixarem de investir na criação de novas actividades, o que se compreende se tivermos em conta que geralmente eles se fecham na sua sala de aula e que raramente há uma partilha, um reconhecimento, uma premiação até.

Aliás, parece-me que o facto de os professores serem tão pouco reconhecidos (também) contribui de forma decisiva para todo este ciclo. Só se ouve a palavra «professores» associada a violência, concursos ou desemprego, dando-se mais importância a cantores, actores ou jogadores de futebol.

Convém ainda realçar que estas actividades foram levadas a cabo num ateliê temático com um grupo de alunos bastante heterogéneo (do 2.º ao 5.º ano de escolaridade) e nenhuma criança ficou para trás. Todos, ao seu ritmo, conseguiram cumprir os objectivos. Os alunos mais novos tiveram oportunidade de desenvolver algumas capacidades. Os mais velhos, por sua vez, puderam mobilizar e tirar proveito dos seus conhecimentos.

Há portanto que dar importância à educação e tentar inovar no ensino para que a Matemática alcance (finalmente) sucesso. Deixará de haver alunos que até se «safam» nos testes mas que não percebem o que estão a fazer, pois limitam-se a reproduzir aquilo que vêem o professor executar nas aulas.

Por isso, criatividade a funcionar, se faz favor!

Bruno Magina
Instrutor no Mathnasium de S. João do Estoril
Professor no Colégio da Bafureira da Parede

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.

Grafos Planares com ZomeSystem

Este ano lectivo, foi o primeiro em que estou a leccionar a disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais de 11° ano, abordando assim pela primeira vez a temática dos Grafos.

Tratando-se de uma turma do Curso de Ciências Sociais e Humanas, tradicionalmente constituídas por alunos que querem «fugir» à Matemática, fiquei surpreendido pelo relativo bom desempenho dos alunos, nesta primeira parte do ano lectivo, aquando da realização quer dos vários trabalhos, quer do Teste Sumativo feito sobre esta unidade temática. Penso que isto se deva ao facto dos conteúdos matemáticos serem explorados a partir de situações que eles vivenciam no dia-a-dia, tornando assim as aprendizagens mais significativas.

Os bons desempenhos deram-me um incentivo extra a propor a estes alunos uma pequena actividade de investigação sobre um tema que, apesar de não fazer parte do programa, lhes chama a atenção para o facto dos Grafos não se utilizarem apenas na tradicional representação de mapas de vias de comunicação.

Esta actividade de investigação sobre Grafos Planares, consistiu no estudo da relação existente entre os Grafos Planares e os Sólidos Platónicos. O desenvolvimento desta investigação, teve como base um guião organizado em duas partes distintas. Desta forma, numa primeira parte do guião distribuído aos alunos, eles tiveram um breve contacto com os dois conceitos atrás referidos. Numa segunda parte, os alunos tinham de:

(i) construir os sólidos pedidos, com o ZomeSystem (Fig. 1);

(ii) investigar, usando a sombra projectada do sólido, o grafo planar associado a cada sólido platónico (Fig. 2).

É de referir que os alunos apreciaram esta abordagem do conceito de planaridade, tornando-se assim evidente a mais valia desta estratégia em oposição a uma tradicional exploração feita no quadro, projectando um acetato ou eventualmente apresentando vários grafos planares numa ficha de trabalho. Julgo que para este facto, muito contribuiu a presença de dois «condimentos» essenciais:

- o facto de ser uma actividade de grupo;
- a existência de motivação elevada, originada por uma exploração com um diferente material didáctico (recentemente adquirido através do PAM).

Em virtude da agradável experiência que se vivenciou nesta aula, deixo aqui alguns comentários de alunos:

«Sobre a aula passada, acho que trabalhámos bem e que foi um bom método de compreensão da matéria através de materiais manipuláveis.»

«Na minha opinião, a aula passada foi muito dinâmica e criativa, devia de haver mais aulas assim.»

«Gostei da aula passada, pois com a utilização de materiais manipuláveis conseguimos expressar melhor os nossos raciocínios, e ao ser uma aula prática o interesse é maior pela matéria. Devíamos fazer mais vezes aulas práticas!»

Nota: nem todos os conjuntos ZomeSystem, permitem a construção de sólidos platónicos

Carlos Rosmaninho
Agrupamento de Escolas de Arraiolos

Figura 1: construção de sólidos

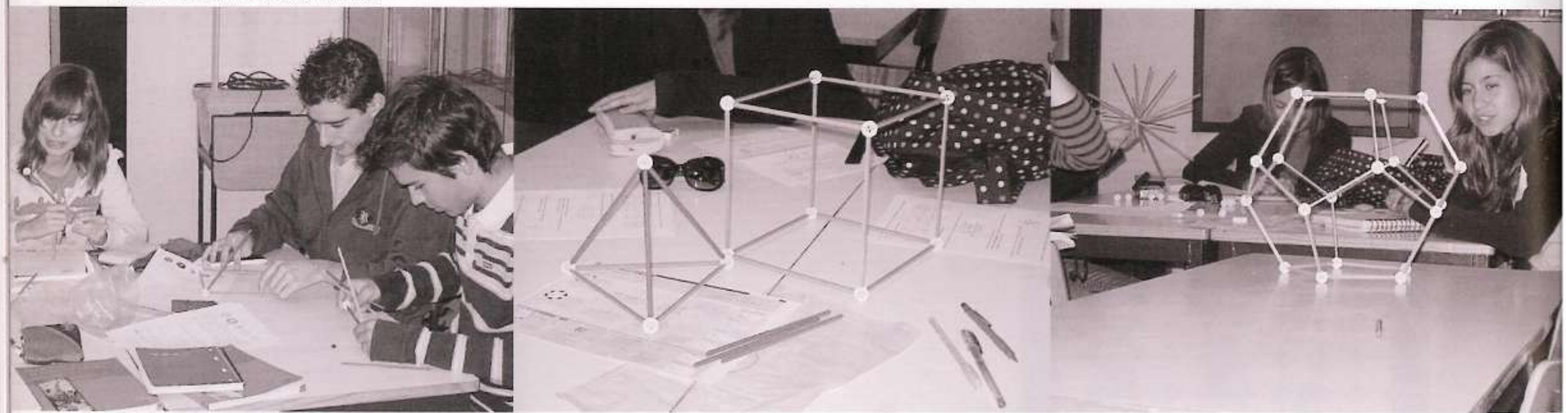
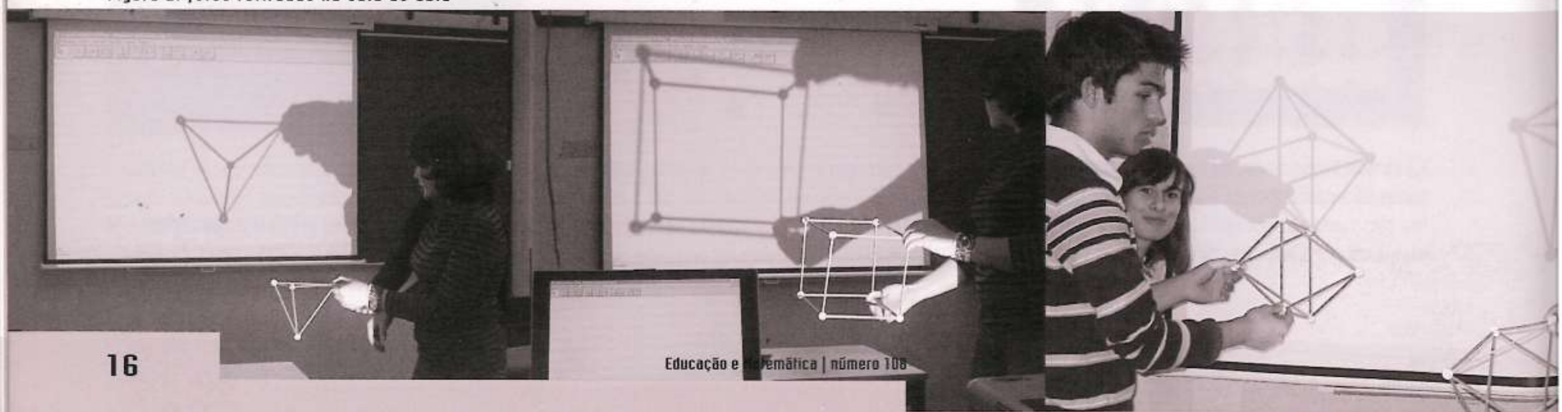
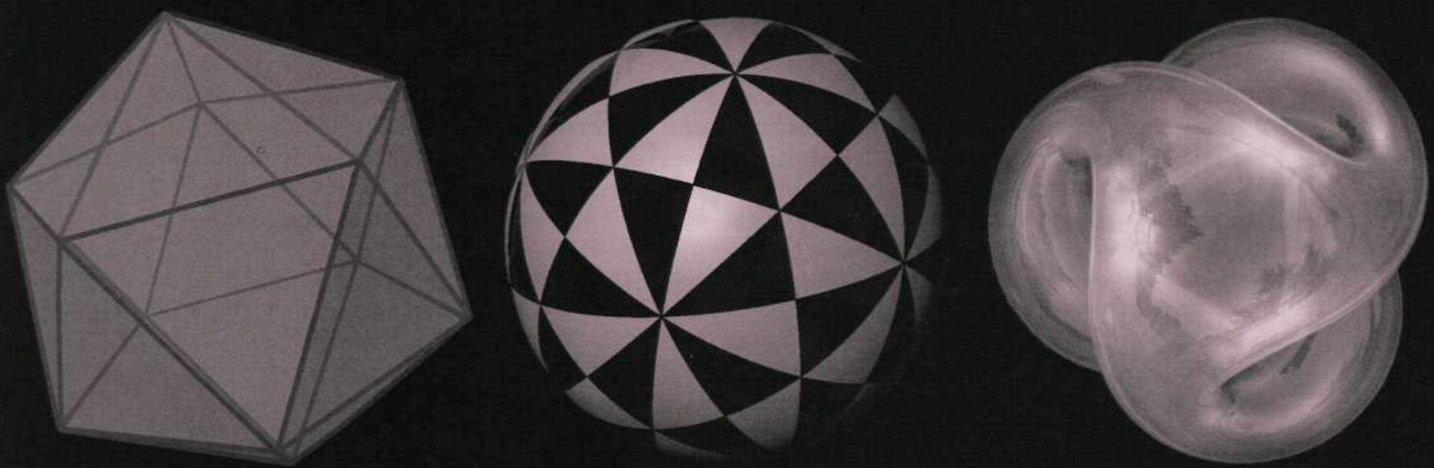


Figura 2: fotos retiradas na sala de aula





A emancipação da Álgebra relativamente à Geometria

Aspectos da evolução da Matemática

Manuel Joaquim Saraiva
Alina Reis

Introdução

Neste artigo começa por apresentar-se uma perspectiva sobre a natureza da Matemática, centrada nas ideias de Bento de Jesus Caraça, encarando-a como uma actividade humana. Seguidamente apresenta-se o exemplo da *libertação* da Álgebra relativamente à Geometria, realçando o papel fundamental que tiveram, quer a criação dos símbolos matemáticos, quer o seu uso. Por fim, tecem-se alguns comentários finais.

A Matemática como uma construção humana

Para o homem civilizado de hoje, e segundo Caraça (1998), o número natural é um ser puramente aritmético, desligado das coisas reais e independente delas — é uma pura conquista do seu pensamento. Com esta atitude, o homem de hoje, esquecido da humilde origem histórica do número, e elevando-se (ou julgando elevar-se) acima da realidade imediata, concentra-se nas suas possibilidades de pensamento e procura tirar delas o maior rendimento. O homem tem tendência a generalizar e a estender o seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. Caraça tem uma intencionalidade clara em realçar a contextualização do conhecimento matemático, nomeadamente quanto à sua génese. É neste sentido que faz a seguinte referência à sucessão dos números naturais:

> O homem de hoje, afastado da origem histórica do número, pensará que naquela sucessão se passa dum número para o seguinte juntando-lhe uma unidade; por meio desta operação mental elementar — juntar uma unidade — passa-se do 1 para o 2, do 2 para o 3 e vai-se tão longe quanto se quiser; se se der um número n, por maior que seja, pode-se sempre efectuar sobre ele a mesma operação mental e obter um número maior, $n + 1$, logo, não há um número inteiro maior do que todos os outros. (p. 10)

Desta forma, pouco importa que o homem de hoje a certa altura esteja já a construir, com a sua operação mental elementar, números tão grandes que não consiga encontrar colecções cujos elementos sejam contados por esses mesmos números — ele tira a ideia dos primeiros números e da operação elementar de passagem de um ao seguinte e depois vai tirar todas as consequências dessa ideia e dessa operação. O seu pensamento aceita a possibilidade de repetição ilimitada do acto mental (a base do conceito de infinito) — juntar uma unidade — o que, para Caraça, exige o abandono de certas evidências da vida de todos os dias.

Trata-se da defesa de que toda a teoria matemática é uma construção progressiva feita à custa de conceitos — os seres de que trata a teoria — e de afirmações feitas sobre esses conceitos. Segundo Caraça, tal construção é dominada por, entre outros, «um princípio geral de compatibilidade lógica dos seres e das afirmações, princípio esse que é, na Matemática, a expressão de um outro mais geral que domina toda a construção científica — o princípio do acordo da razão consigo própria» (p. 50). No desenvolvimento da Matemática encontramos a cada passo, conjugados, estes dois motivos de progredir, dois gumes da mesma arma — actividade racional e actividade experimental; teoria e experiência; pensamento e acção. Ou seja, «há a necessidade de caminhar, *tacteando*, entre o que a intuição nos *dá* a partir da realidade e o que a razão nos *permite* com os instrumentos que forja» (p. 196).

A teoria das séries é, para Caraça, um bom exemplo da criação de conceitos, independentemente da sua ordenação lógica, onde, «para a necessidade de obtenção de resultados se criam instrumentos precisos e a preocupação de rigor e de ordenação surgem posteriormente» (p. 262) — é assim que a ciência se faz e é por isso que ela nos apresenta tantos momentos de verdade e erro, numa convivência paredes-meias dos triunfos mais luminosos com os fracassos mais retumbantes. Caraça afirma, ainda, que:

> Verdade e erro não podem tomar-se em absoluto, mas têm significado apenas quando apostos contra o seu contexto. De época para época, este varia e varia consequentemente o significado da verdade e do erro. Aquilo que hoje arrepiaria qualquer estudantezinho de Matemáticas Gerais duma Universidade foi outrora ouro de lei para os melhores matemáticos; nisso só vejo uma prova do carácter histórico e não absoluto da verdade; uma prova de que a Ciência é feita pelos homens para os homens, sujeitos a todas as suas limitações. (p. 262)

Concordantes com esta perspectiva, Davis & Hersh (1995) afirmam que se recuarmos no tempo, aquilo que hoje é considerado um objecto matemático simples, como um círculo, poderá outrora ter transportado o impacto psicológico de toda uma estrutura e ter até exercido influência sobre a metodologia científica (por exemplo, na astronomia). Estes autores recorrem ao exemplo do conceito de função, onde procuram realçar a contextualização do conhecimento matemático [Para Dirichlet, uma função $y(x)$ é determinada se tivermos qualquer regra que dê um valor definido y para qualquer x num determinado conjunto de pontos — não é necessário que y tenha a mesma regra em relação a x em todo o intervalo; na verdade, nem é necessário que possa representar-se essa relação em termos de operações matemáticas; não interessa se pensamos nela (correspondência) de modo que partes diferentes sejam dadas por leis diferentes ou se ela (correspondência) não respeita nenhuma lei específica; se uma função é especificada em apenas uma parte de um intervalo, o modo como se define o seu prolongamento ao resto do intervalo é inteiramente arbitrário]. Para Davis & Hersh, com a definição dada por Dirichlet, a Análise ultrapassa, e muito, a Geometria. Enquanto o conceito restrito de função, utilizado no século XVIII, não era adequado para descrever algumas curvas facilmente desenháveis, o conceito de função arbitrária do século XIX inclui criaturas impossíveis de desenhar ou visualizar.

Há, assim, e para aqueles autores, uma perspectiva clara de que aquilo que se produz, se pratica e se cria em cada dado momento é parte de uma corrente de consciência que progride com o tempo. Para Davis & Hersh (1995) o que ia na cabeça de Arquimedes era diferente do que ia na cabeça de Newton e isto, por sua vez, era diferente do que ia na de Gauss. Não é uma questão de «mais», de Gauss saber mais do que Newton, que, por sua vez, sabia mais do que Arquimedes. É fundamentalmente uma questão de «diferente». O estado actual do conhecimento tece uma rede de motivações e aspirações diferentes, de interpretações e potencialidades diferentes. Esta é, também, a perspectiva de Ernest (1991), para quem a Matemática duma dada época não só é condicionada pelos respectivos parâmetros sociais, culturais e económicos, como segue um processo de validação essencialmente social.

Do ponto de vista do utilizador, é possível, e às vezes até é conveniente, identificar a Matemática com a sua apresentação axiomática encontrada nos livros de estudo. Porém, e para Davis & Hersh (1995), do ponto de vista do produtor, a apresentação axiomática é secundária; é apenas um aperfeiçoamento que é construído depois de o trabalho principal — o processo de descoberta matemática — ter sido completado.

Estes autores baseiam-se nas ideias de Lakatos (1976), que aplicou a sua análise epistemológica não à Matemática Formalizada mas à Matemática Informal, ao processo de desenvolvimento e descoberta que, evidentemente, é a Matemática conhecida dos matemáticos e estudantes de Matemática. Na realidade, a Matemática formalizada, à qual a maior parte da filosofia recente é dedicada, é praticamente impossível de encontrar onde quer que procuremos, fora dos textos e revistas de lógica simbólica (Hersh & Davis, 1995).

A Matemática Informal é, para Lakatos, uma ciência na definição de Popper, que se desenvolve por um processo sucessivo de crítica e aperfeiçoamento das teorias e pelo avanço de novas teorias em competição (e não pelo modelo dedutivo da Matemática Formal). Aquele autor procura mostrar que a Matemática Informal, quase empírica, não se desenvolve através do crescimento monótono do número de teoremas inquestionáveis estabelecidos, mas através do melhoramento incessante de palpites por especulação e crítica, através da lógica das demonstrações e refutações. É neste sentido que Davis & Hersh (1995) afirmam que existem dois factos conhecidos acerca da natureza da Matemática. O primeiro é o de que a Matemática é uma invenção humana — os matemáticos sabem-no, porque são eles que a inventam. O segundo relaciona-se com as coisas que os matemáticos trazem ao mundo (figuras geométricas; funções aritméticas e operadores algébricos; ...) serem misteriosas para os seus criadores — têm propriedades que os matemáticos descobrem através de um grande esforço e engenho; têm outras propriedades que os matemáticos tentam descobrir em vão; têm outras propriedades ainda de que os matemáticos nem suspeitam.

Assim, podem tomar-se como ponto de partida, e a partir da experiência matemática, que a Matemática: i) é uma criação nossa; é acerca de ideias nas nossas mentes; e ii) é uma realidade objectiva, no sentido em que os objectos matemáticos têm propriedades bem definidas, que podemos ou não conseguir descobrir. Desta forma, a Matemática é uma realidade objectiva, que não é física nem subjectiva. É uma realidade ideal (ou seja, não física) que é objectiva (independente da consciência de qualquer pessoa em particular). A Matemática não é o estudo de uma realidade ideal, preexistente e intemporal, nem é um jogo, tipo xadrez, com símbolos e fórmulas inventadas. A Matemática é a parte dos estudos humanos que é capaz de alcançar um consenso, como o da ciência, que é capaz de estabelecer resultados reprodutíveis; a existência da Matemática é um facto, não uma questão; este facto não é nem mais nem menos do que a existência de modos de raciocínio e argumentos acerca de ideias, que são aliciantes e conclusivas, que «não são controversas uma vez compreendidas».

Para Davis & Hersh, a Matemática debruça-se, assim, sobre um determinado assunto e as suas afirmações têm significado. No entanto, este significado deve ser encontrado no conhecimento partilhado pelos seres humanos, e não numa realidade externa, não humana. Neste aspecto, a Matemática trabalha com significados humanos e é inteligível apenas no contexto da cultura — a Matemática é um estudo humanístico; é uma das humanidades. O que distingue a Matemática das outras humanidades é a sua qualidade de ser como uma ciência. As suas conclusões são bem definidas, tal como as conclusões da ciência natural. Não são simples produtos de opinião e não estão sujeitas a um desacordo permanente como as ideias de um crítico literário.

Como matemáticos, Davis & Hersh sabem que inventam objectos ideais e tentam, depois, descobrir factos acerca deles. Aceitam a Matemática tal como ela é: falível, corrigível e com significado. Os autores deste texto concordam com esta perspectiva. A Matemática é uma actividade humana, sendo a sua descrição lógicoformal apenas uma ficção; a verdadeira Matemática é encontrada na prática dos matemáticos.

Da Geometria à Álgebra

O termo «álgebra» deriva da designação do tratado de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780–850), denominado por Hibab Al-jabr w'al muqabalah (Struik, 1992). Tal tratado tornou-se conhecido no Ocidente através de traduções latinas e fez com que a palavra Al-jabr se tornasse sinónima de toda a ciência da «álgebra», que, de facto, até meados do século XIX, não era mais do que a ciência das equações.

Nogueira, J., Nápoles, S., Monteiro, A., Rodrigues, J. & Carreira, M. (2004) enfatizam o facto de neste tratado de al-Khwarizmi terem sido resolvidos seis tipos de equações polinomiais, $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$ e $bx + c = ax^2$. Na realidade é surpreendente a quantidade de casos estudados por al-Khwarizmi, visto que, nos dias de hoje, aqueles seis casos resumem-se apenas a dois: a equação linear e a equação polinomial de segundo grau. Nogueira *et al* justificam o estudo de tantos casos com o facto de os Árabes, nesse período, não aceitarem nem o zero nem os números negativos. Para eles, e até ao século VI d.C., o conceito de zero não existia — era apenas um indicador de posição nos vários sistemas de numeração adoptados pelos Babilónios, Greco-romanos e Indianos. É apenas a partir do século XV que o uso de zero se generalizou no Ocidente. Em relação aos números negativos, até ao século XIX, foram vários os matemáticos que os rejeitaram: Michael Stifel (1487–1567) refere-se aos números negativos como sendo *disparates desprovidos de sentido*, designando-os por números fictícios; Descartes (1556–1650) designa-os por números falsos; Lazare Carnot (1753–1823) ignora-os e Busset (francês do século XIX) considera-os como sendo *raiz da aberração do raciocínio humano*. O pensamento que inquietava a comunidade matemática, em relação aos números negativos, é descrito em Nogueira *et al.* da seguinte forma:

> Para obter uma quantidade negativa isolada seria necessário cortar uma quantidade concreta ao zero, retirar algo do nada: isso é uma operação impossível. Assim sendo, como é possível conceber uma quantidade negativa isolada? (p. 30)

Foram necessários séculos de desenvolvimento para que alguns conceitos fossem aceites pela comunidade matemática. Ou seja, al-Khwarizmi, ao não aceitar nem o zero nem os números negativos, encontra-se enquadrado com os seus contemporâneos e com muitos dos seus sucessores — é um matemático do século IX. Além destes conceitos, al-Khwarizmi também rejeitou o uso de uma simbologia — embora já existente na altura mas não na forma como a usamos hoje. Criada por Diofanto, a primeira simbologia passou pela contínua utilização de abreviaturas. Em Nogueira *et al* é referido que Diofanto desenvolveu uma notação simbólica, excessivamente avançada para a época, e por isso pouco consentânea com a mentalidade reinante, ainda dominada pela Geometria de Euclides. Ele seria (re)descoberto no século XV, quando os matemáticos se aperceberam das vantagens do uso das abreviaturas $co.(cosa = x)$, $ce.(census = x^2)$ e $cu.(cubo = x^3)$ nas equações.

Para Struik (1992), o tratado Al-jabr possui uma discussão sobre equações lineares e quadráticas sem qualquer formalismo algébrico e onde muito do raciocínio é geométrico. O facto de al-Khwarizmi não ter usado qualquer sim-

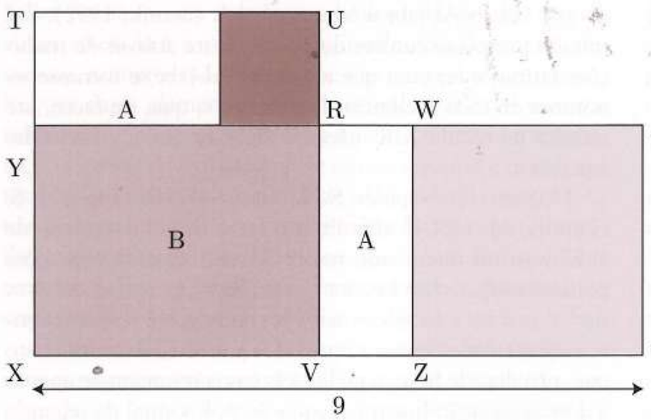


Figura 1. Resolução geométrica para determinar uma das raízes da equação polinomial do 2º grau $x^2+20=9x$.

bologia no seu tratado está de acordo com a forma como os matemáticos encaravam a resolução de questões matemáticas. Como é referido em Nogueira *et al*, al-Khwarizmi defendia que um problema não podia ser considerado solucionado enquanto não se demonstrasse que a resposta encontrada era válida, sendo tal objectivo realizado geometricamente, seguindo a tradição euclidiana: é necessário demonstrar geometricamente a verdade dos mesmos problemas que foram explicados por números.

Nesta época havia uma grande *submissão* da Matemática à Geometria. Tudo indica que era através dela que se validavam os resultados matemáticos obtidos: se não se conseguisse explicar geometricamente, os resultados não eram considerados.

Até ao século XIX, a Geometria Euclidiana era a área do conhecimento mais firme e de maior confiança. Ao assentar em cinco axiomas, era considerada como sendo o estudo das propriedades do espaço. Estas propriedades tinham uma existência absoluta e independente, eram objectivas e eram o exemplo supremo de propriedades do universo que eram exactas, eternas e que podiam ser conhecidas com toda a certeza pela mente humana. É neste sentido que se fala no mito de Euclides presente até ao século XIX: a convicção de que os livros de Euclides contêm a verdade acerca do universo, que são claros e indubitáveis, e apresentam uma linguagem e um raciocínio essencialmente geométricos. Por exemplo, a expressão $\sqrt{A}$ era introduzida como sendo o lado de um quadrado de área A e o produto ab como sendo a área de um rectângulo de lados a e b. Desta forma, matemáticos como al-Khwarizmi tinham um raciocínio fortemente geométrico. Por exemplo, os árabes do século IX seguiam o método de complementar quadrados para a resolução de equações polinomiais do segundo grau. Em Nogueira *et al*, com o recurso a alguma linguagem simbólica dos dias de hoje, é ilustrado o raciocínio destes matemáticos através da resolução de um caso particular:

A equação $x^2 + 20 = 9x$ possui de forma imediata duas raízes reais positivas: a soma de duas quantidades positivas tem de ser igual a uma quantidade positiva. A primeira construção geométrica, para a determinação de uma das raízes da equação considerada, corresponde à figura 1. Os autores começam por referir que a raiz terá de ser menor que nove unidades pois se $x \geq 9$ então $x^2 \geq 9x$, pelo que $x^2 + 20 = 9x$ não poderia ter uma raiz positiva (p. 136)

Como $x^2 + 20 = 9x$, o rectângulo de vértices XYWZ tem área igual a 20. Decomponha-se este rectângulo em dois rectângulos A e B de forma que o rectângulo B tenha de lados x e $9/2$. Coloque-se em cima do rectângulo B um rectângulo igual a A depois de o rodar 90°. Como A tem lados x e $9/2 - x$, a medida do segmento YT é igual a $9/2 - x$ e XTUV é um quadrado de lado $9/2$ e, portanto, com área igual a $81/4$. Então a área do rectângulo tracejado obliquamente é igual a $81/4 - 20 = 1/4$. Como a medida do segmento RU também igual a $1/2$, então $9/2 - x = 1/2$ e, finalmente, $x = 9/2 - 1/2 = 4$.

Como determinar a outra raiz? É perfeitamente legítimo dizer que o raciocínio anterior leva a concluir que $(9/2 - x)^2$ e $1/4$ são iguais à área do quadrado tracejado obliquamente, pelo que $9/2 - x = \pm 1/2$, e assim, $x = 4$ ou $x = 5$.

Porém, é devido ao uso de uma notação e ao considerarem-se números negativos que foi possível a determinação das duas raízes, apenas com a construção da figura 1. Davis & Hersh referem que a representação simbólica de ideias matemáticas tem sempre como consequência a alteração dessas ideias; um ganho em precisão e um prejuízo em fidelidade ou em aplicabilidade à situação inicial.

Desta forma, a não utilização de uma notação, a não-aceitação do zero e dos números negativos e ainda o facto de os resultados terem de ser confirmados geometricamente, conduz a que seja necessária a construção de uma figura diferente — Figura 2 — para a determinação da segunda raiz da equação $x^2 + 20 = 9x$, ou seja, $x = 5$. Para a sua construção, Nogueira *et al.* começam por considerar que:

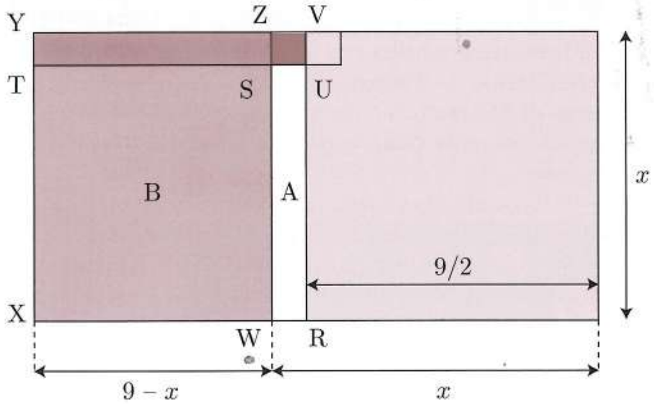


Figura 2. Resolução geométrica para determinar a outra raiz da equação polinomial do 2º grau $x^2+20=9x$.

A equação admite uma raiz maior do que $9/2$ e constroem novamente um rectângulo com lados iguais a 9 e x, decompondo-o em três partes (um quadrado de lado x e os rectângulos A e B). Colocam um rectângulo igual a A adjacente a um dos lados maiores do rectângulo inicial, como se ilustra na Figura 2. Como $x^2 + 20 = 9x$, o rectângulo B (com vértices XYZW) tem área igual a 20.

Observe-se que o comprimento do segmento XT é igual a $9/2$. Como os segmentos TU e UR têm o mesmo comprimento, os rectângulos de vértices YTUV e SURW têm a mesma área. Então a área do quadrado de vértices TURX é igual à área do rectângulo B mais a área do quadrado de vértices ZVUS. Finalmente a área deste último é igual a $81/4 - 20$, pelo que a medida do segmento ZS é igual a $1/2$, tendo-se $x - 9/2 = 1/2$ e, assim, $x = 5$.

Em Nogueira *et al.* são apresentados mais dois exemplos concretos da resolução de equações polinomiais do segundo grau através do método de completar quadrados. O objectivo dos autores é o de ilustrar que, para cada equação é necessário recorrer a figuras diferentes e que a inexistência de uma simbologia apropriada era o principal obstáculo para o desenvolvimento de uma maior aptidão na resolução de questões matemáticas. Isto é, era a falta de símbolos que não permitia a ultrapassagem das dificuldades algébricas existentes. De facto, a criação e o uso sistemático de uma simbologia aparecem associados à *emancipação* da Álgebra relativamente à Geometria.

O primeiro matemático que procurou *libertar* a Álgebra da influência da Geometria foi Abu-Kamil ibs Aslam (830–930), um dos sucessores e contemporâneo de al-Khwarizmi. Segundo Nogueira *et al*, Abu-Kamil foi o autor de Hitab fi al-jabr wa'lmuqabala, um livro dividido em três partes, baseado tão de perto nos escritos de al-Khwarizmi que chega ao ponto de, nos seus 69 exemplos numéricos, incorporar quase metade dos que haviam sido referidos por este último, apenas com alterações de pormenor. Mas não se infira daqui que os textos de Abu-Kamil foram uma cópia dos de al-Khwarizmi; na realidade, ao afastar-se da herança do seu predecessor, Abu-Kamil procurou libertar os seus exemplos da influência da Geometria.

Poucos anos após Abu-Kamil surge Al-Karaji (953–1019) que, para Nogueira *et al.* aparece como sendo o matemático que *emancipou* a Álgebra da sua herança geométrica e fomentou a prática das actuais operações aritméticas. De facto, segundo estes autores, Al-Karaji foi o primeiro matemático a referir a incógnita x e a definir o produto das potências de x (e dos seus inversos) de uma maneira recursiva.

Nogueira *et al.* referem também o papel de Cardano (1501–1557) no processo de resolução de equações cúbicas e que este, ao longo do seu livro, não seguiu uma linha bem definida, hesitando entre a Geometria e a Álgebra — sempre que possível, Cardano opta pelo estudo geométrico dos problemas, seguindo a tradição da velha escola euclidiana; no entanto, dá-se conta que o estudo algébrico, mais abstracto, funciona bem em muitas situações: a resolução da equação quártica é disso um exemplo, assim como outras em que os números negativos e as suas raízes quadradas desempenham papel de relevo.

Assim, no processo de *emancipação* da Álgebra encontram-se matemáticos que parecem divididos quanto ao papel e à importância dos resultados puramente algébricos. Nogueira *et al.* afirmam que Cardano ao não conseguir traduzir em termos geométricos a resolução de uma questão matemática, remata escrevendo que é assim que evolui a subtileza aritmética, obtendo-se no final resultados que parecem ser tão refinados como inúteis. Por sua vez, aqueles autores afirmam que Rafael Bombelli (1526–1573) foi o último dos matemáticos italianos renascentistas que ao salientar com clareza a existência de problemas que não requerem (ou muitas vezes nem sequer possibilitam) tradução geométrica, proporcionou um desenvolvimento sem precedentes na Matemática, passando a ser enfatizado, cada vez mais, o raciocínio dedutivo e a encararem-se os números como uma ferramenta de cálculo.

O trabalho de Descartes (1596–1650) no desenvolvimento da Álgebra formal, e para Boyer (1996), é muito importante — num ponto essencial ele rompeu com a tradição grega, pois em vez de considerar x^2 e x^3, por exemplo, como área e volume, ele interpretou-os como segmentos.

Desta forma, a Álgebra desenvolveu-se ao longo do tempo e à medida que os matemáticos partiram na natural descoberta de propriedades sobre os objectos ideais — que foram tentando representá-los por símbolos — os quais são enfatizados por Struik, quando se lhes dirige destacando que novos resultados foram muitas vezes possíveis, devido somente a um novo modo de escrever. Como exemplo de tudo isto, Davis & Hersh referem o facto de no século XIX a notação leibnistziana, para as derivadas, ter permitido o desenvolvimento da Álgebra abstracta. Para eles, a notação leibnistziana Df, D^2f apresenta um número inteiro como indicação da ordem das diferentes diferenciações, o que sugere a possibilidade de uma interpretação útil de $D^{\alpha}f$ para assumir valores negativos ou fraccionais α (o que não se passava com a notação newtoniana para as derivadas, $\dot{f}$, $\ddot{f}$, etc.). Todo o cálculo operacional procede desta extensão.

Inicialmente a Álgebra foi sinónimo de «ciência das equações» e, segundo Struik, ao contrário da Geometria, até meados do século XIX, revelou a sua origem oriental pela ausência de um fundamento axiomático — facto este que ilustra a secundariedade axiomática na construção matemática. Porém, segundo Boyer, embora tenha sido no século XIX que se dá o processo gradual de generalização na Álgebra, é apenas no século XX que foi desenvolvida toda a teoria dos anéis que caracteriza a designada Álgebra moderna.

Assim, e posteriormente à resolução de problemas cujo conteúdo e soluções envolviam questões com significado geométrico, a Matemática foi evoluindo gradualmente e foi alcançando um patamar mais abstracto onde os símbolos matemáticos ganharam o seu relevo e significado. De difícil representação no papel, ganhou importância a linguagem simbólica que a Matemática envolve e, com ela, o desenvolvimento de uma nova área: Álgebra.

Conclusão

A Matemática trabalha com significados humanos e é inteligível apenas no contexto da cultura. As necessidades internas da Matemática criam pressões para que se procurem explicações, pois somos curiosos e queremos compreender as coisas.

A Geometria Euclidiana, ao não conseguir explicar certos factos, *viu* desenvolver a Álgebra. Criaram-se novos seres matemáticos, novos sinais e símbolos, e foi possível ir dando resposta a questões em aberto às quais a Geometria não conseguia responder, bem como, ao surgimento de novas questões. A todos os símbolos e a todas as relações entre objectos algébricos criados são dados significados. Há um avanço no conhecimento e na capacidade de explicar situações até aí inexplicáveis.

O *limite* do pensamento matemático é o *infinito*.

Bibliografia

Boyer, C. (1996). *História da Matemática*. Brasil: Editora Edgard Blucher Ltda.

Caraça, B. (1998). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Davis, P. & Hersh R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Nogueira, J., Nápoles, S., Monteiro, A., Rodrigues, J. & Carreira, M. (2004). *Contar e fazer contas — Uma introdução à Teoria dos Números*. Lisboa: Gradiva.

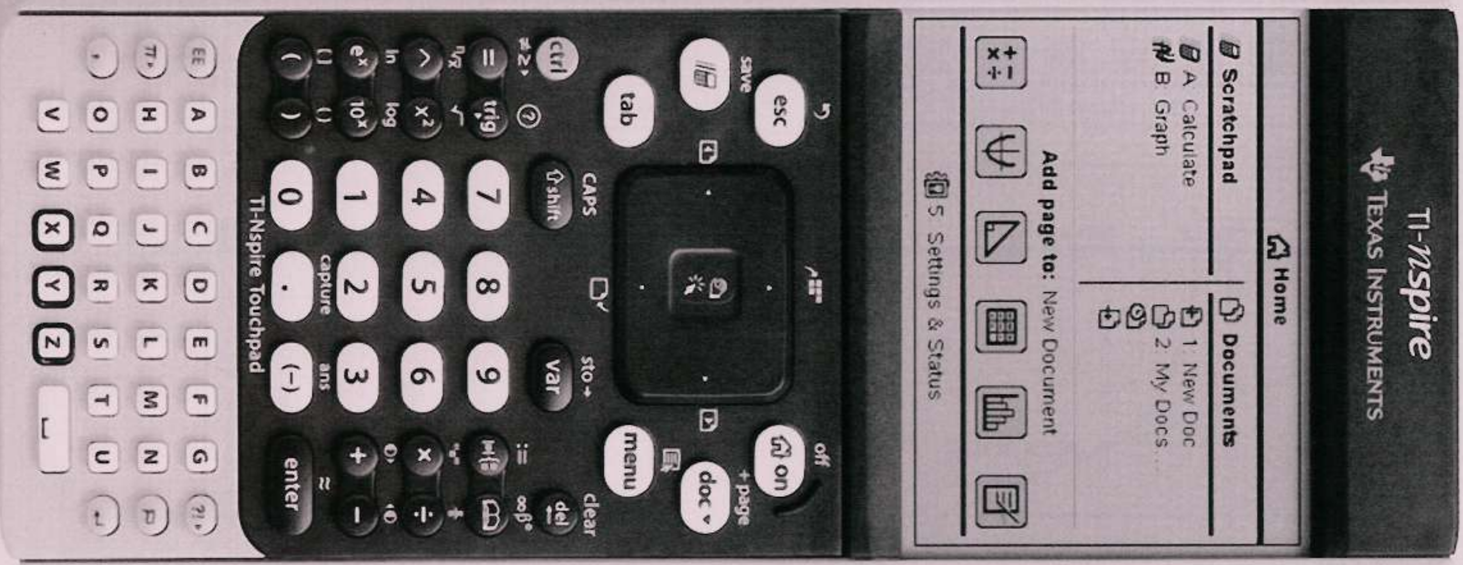
Struik, D. (1992). *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Manuel Joaquim Saraiva
Departamento de Matemática da UBI e CIEFCUL

Alina Reis
Escola E. B. nº 2 de Elvas

Investigações matemáticas com a TI-Nspire

José Paulo Viana



Todos nós sabemos (quer dizer, quase todos...) que a calculadora gráfica pode ser um poderoso instrumento, quer para o professor que ensina Matemática, quer para os alunos aprenderem e fazerem Matemática.

O aparecimento da unidade portátil TI-Nspire, que é muito mais que uma calculadora gráfica, veio alargar muitíssimo o leque de possibilidades. Desta forma, aumenta consideravelmente o número de problemas significativos que podem ser propostos aos alunos e que os obrigam a experimentar, a investigar, a elaborar conjecturas, a testá-las e, se necessário, a reelaborá-las.

Vamos então resolver aqui dois problemas que poderão ser propostos aos alunos no 11° ou no 12° anos. Os problemas aparentam ser quase iguais mas, como veremos, têm desenvolvimentos muito diferentes.

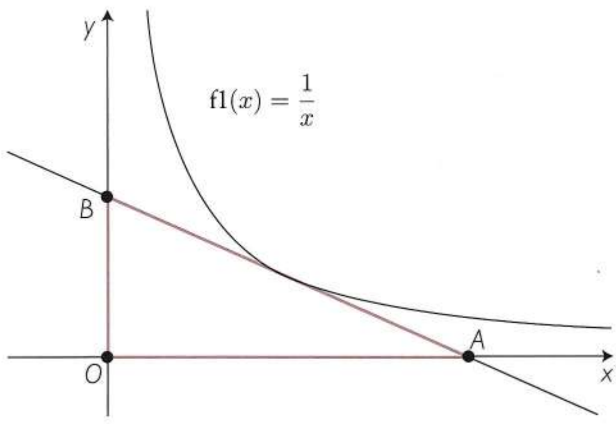


Figura 1

Um triângulo a partir da hipérbole

Temos o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Por um ponto de abcissa a traçamos a tangente ao gráfico de f. A tangente intersecta os eixos coordenados nos pontos A e B.

Consideremos o triângulo BOA, em que O é a origem do referencial (figura 1).

Como varia a área do triângulo em função de a?

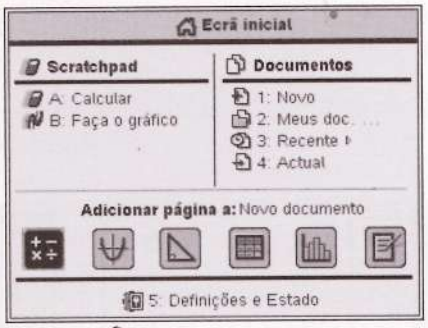


Figura 2

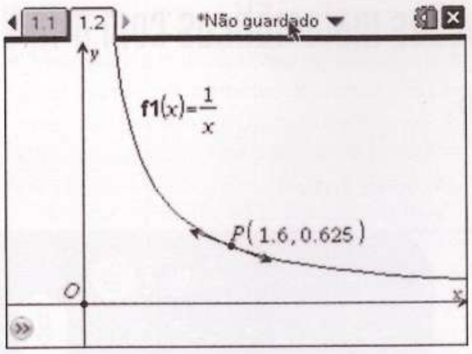


Figura 3

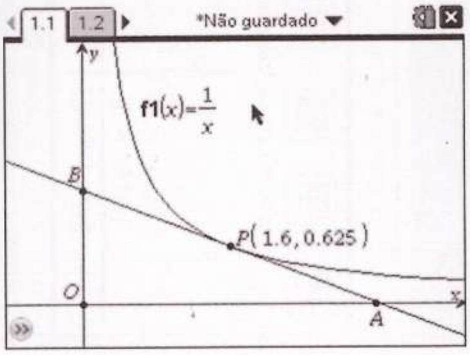


Figura 4

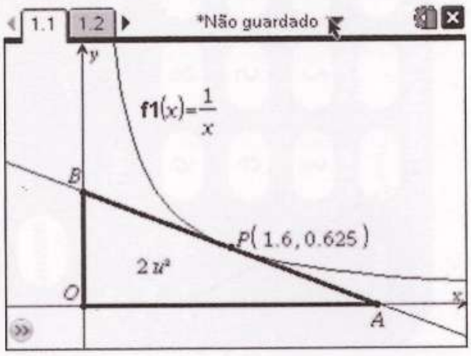


Figura 5

Resolução na máquina

Vamos começar por resolver o problema na unidade portátil com o sistema operativo 2.0 mas, no essencial, tudo se passará de forma muito parecida com os anteriores sistemas. As principais diferenças em relação ao que aqui apresentamos vão ser os números que indicam as opções dos menus.

Com a tecla (home) vai ao ecrã inicial e escolhe *1:Novo* para criar um novo documento (figura 2).

Cria uma página de *2:Gráficos e Geometria.*

Faz o gráfico da função $f1(x) = 1/x$.

Para uma melhor visualização, põe o cursor numa zona livre, carrega em (click) até a *mão* fechar e «agarra» a folha. Depois, arrasta-a de modo a que a origem do referencial fique perto do canto inferior esquerdo.

Traça uma tangente ao gráfico num ponto qualquer. Para isso, vai a (menu) *7:Pontos e Rectas, 7:Tangente*, desloca o cursor para a curva e, quando aparecer a mensagem *gráfico f1* faz (enter) e, novamente, em *Ponto sobre um objecto*, faz (enter). Digita P para nomear o ponto criado (figura 3).

Para obter as coordenadas do ponto vai a (menu) *1:Acções, 7:Coordenadas e Equações*, desloca o cursor para o ponto, faz (enter), desloca as coordenadas para onde aches conveniente e faz (enter).

Temos agora de construir os pontos de intersecção da tangente com os eixos.

Vai a (menu) *7:Pontos e Rectas, 3:Ponto(s) de intersecção*, desloca o cursor para o eixo Ox, faz (enter), depois para a tangente, faz (enter) e, quando aparece o ponto faz (shift)(A) para que o ponto fique etiquetado com a letra «A». Repete para o eixo Oy, chamando «B» ao ponto (figura 4).

Define o triângulo BOA em (menu) *9:Formas, 2:Triângulo.* Desloca o cursor para os pontos A, O e B, fazendo (enter) em cada um deles.

Faz (esc) para o cursor ficar livre e põe-no sobre um dos lados do triângulo. Quando aparecer a mensagem «triângulo» faz (ctrl)(menu) *3:Atributos* e muda a espessura da linha para média (figura 5).

Falta obter a área do triângulo. Vai a (menu) *8:Medições, 2: Área*, desloca o cursor para o triângulo e faz (enter).

Sem fazer mais nada, arrasta o texto com o valor da área para uma zona livre e faz (enter).

Está terminada a construção. Podemos passar à investigação.

Lembremos que queremos descobrir que relação existe entre a abcissa do ponto P e a área do triângulo. No exemplo da construção que fizemos temos a =1,6 e área = 2.

É agora que tudo se torna mais interessante: não temos de fazer mais construção nenhuma. Basta fazermos (esc) para o cursor ficar livre e pô-lo em cima do ponto P (figura 6).

Agarramos o ponto P carregando em (click) e arrastamo-lo. A máquina irá manter a construção e actualizará automaticamente todas as variáveis (que neste caso são as coordenadas de P e área do triângulo).

Vemos que, em todas as posições que escolhermos para P, a área do triângulo não se altera. Ou seja, a área do triângulo BOA é independente da abcissa de P.

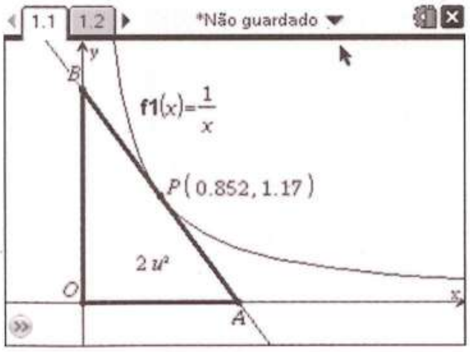


Figura 6

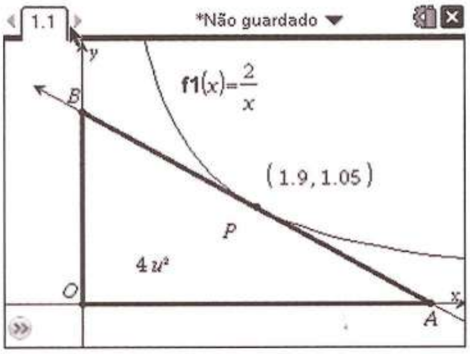


Figura7

Bem, na realidade, não temos a prova que este resultado seja sempre verdadeiro. Neste momento, trata-se apenas de uma conjectura baseada na observação de uma grande quantidade de triângulos diferentes, todos eles com a mesma área. É aqui que temos de propor aos nossos alunos que dêem o passo seguinte: provar que esta propriedade se verifica sempre.

Demonstração

Para um ponto genérico P, as suas coordenadas são $(a, 1/a)$

O declive da tangente é igual à derivada de f nesse ponto. Como

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

vem

$$m = -\frac{1}{a^2}.$$

A equação da tangente é do tipo

$$y = -\frac{1}{a^2}x + b.$$

Substituindo as coordenadas de P na equação, descobrimos o valor de b e obtemos:

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}.$$

Fazendo a intersecção com os eixos, obtemos as coordenadas de A e B: A $(2a, 0)$ e B $(0, 2/a)$.

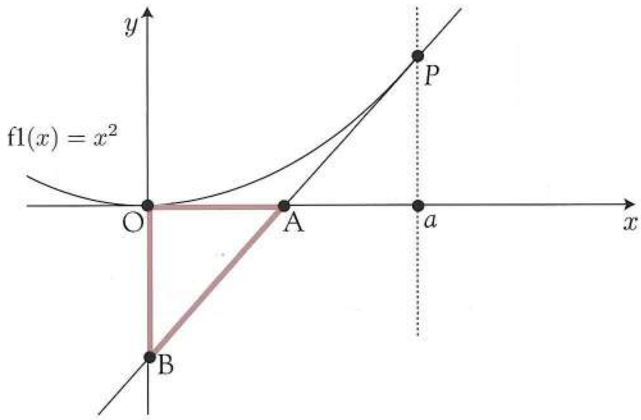


Figura 8

$$\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{2}{a} = 2$$

Está demonstrado.

Prolongamentos

Como quase sempre, vale a pena pensar: *E se...?*

E se a função fosse

$$f(x) = \frac{2}{x}?$$

Não é preciso repetir todo o processo. Basta ir à máquina e alterar a função f1 no ecrã onde estávamos: pomos o cursor sobre a etiqueta da função, clicamos para seleccionar o numerador e alteramo-lo para 2 (figura 7).

Depois é só deslocar o ponto P e ver o que acontece à área. Agora, podemos ir mais longe ainda:

E se a função fosse

$$f(x) = \frac{k}{x}?$$

Já sabemos as áreas para k igual a 1 e a 2. Experimentamos na máquina mais alguns valores de k e logo descobriremos a relação que ele tem com a área.

Um triângulo a partir da parábola

Temos o gráfico da função $f(x) = x^2$ (figura 8).

Por um ponto de abcissa $a > 0$ traçamos a tangente ao gráfico de f. A tangente intersecta os eixos coordenados nos pontos A e B.

Consideremos o triângulo BOA, em que O é a origem do referencial.

Como varia a área do triângulo em função de a?

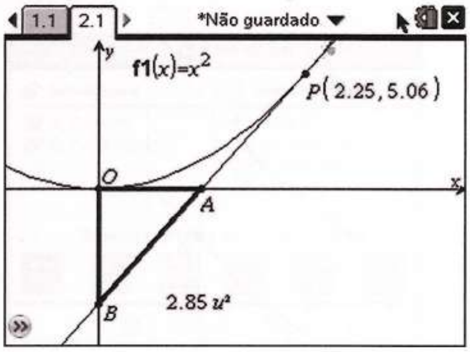


Figura 9

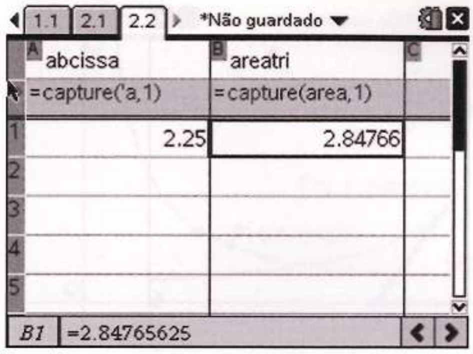


Figura 11

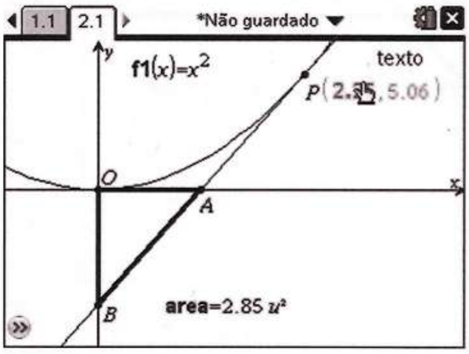


Figura 10

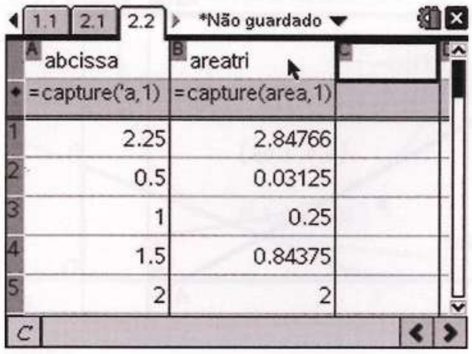


Figura 12

Resolução na máquina

A) Construir a figura

Para continuar a usar a máquina, temos duas alternativas:

1ª hipótese — Ir a (⌂) *1:Novo* e criar um novo documento. A máquina pergunta se desejamos gravar o documento anterior. Podemos dizer que sim e dar-lhe um nome. Ele fica guardado e poderemos consultá-lo mais tarde.

2ª hipótese — Continuar no mesmo documento, criando um novo problema. Para isso, carregar na tecla «doc» *4: Inserir 1:Problema* (ou, estando a usar o teclado antigo, fazer (ctrl) *4:Inserir 1:Problema*). Tudo o que fizermos agora é independente do que estava no problema anterior e podemos portanto usar os mesmos nomes para as funções, pontos, etc.

A construção da figura é muito parecida com a do problema anterior, pelo que podemos omitir os pormenores.

Desta vez, a área não é constante. Basta pensar que, quando P se aproxima de O, a área tende para 0. E, se agarrarmos o ponto P e o deslocarmos, confirmamos isso.

Temos então de registar numa tabela os diferentes valores que escolhermos para a abcissa de P e as correspondentes áreas do triângulo. Poderíamos fazer isso numa folha de papel mas é muito mais fácil usar a máquina para fazer a recolha de dados (figura 9).

B) Definir variáveis

Coloca o cursor sobre a abcissa do ponto de tangência e aguarda que o cursor mude para ☝. Selecciona este valor pressionando em (enter) ou em (☝). Acciona a tecla (var), escolhe *1:Guardar Var*, dá-lhe o nome de *a* (de abcissa) digitando a tecla (A) e faz (enter). Repara que a abcissa do ponto aparece agora a negrito (figura 10).

Repete o processo para a área do triângulo, dando o nome de *area* à nova variável.

C) Criação da folha de cálculo

Faz (ctrl) «doc»(+*page*) *4:Adicionar Listas e folha de cálculo* para acrescentar a nova página (estando a usar o teclado antigo, fazer (ctrl) *4:Inserir 6:Listas e folha de cálculo*).

Coloca o cursor na célula A1. Pressiona 3 vezes ▲ para seleccionar a coluna toda. Para alterar a largura da coluna vai a (menu) *1:Acções, 2:Redimensionar, 1:Largura da coluna*, pressiona várias vezes em ▶ e faz (enter). Desloca o cursor para a direita e repete o processo para a coluna B.

Coloca o cursor no topo da coluna A (junto da letra A), escreve *abcissa* e faz (enter) (figura 11).

Vai para o topo da coluna B e escreve *areatri*.

D) Captura das variáveis

Coloca o cursor na casa com fundo cinzento, imediatamente acima de A1. Pressiona (menu) *3:Dados, 2:Captura de dados, 1:Captura Automática de dados*. Substitui *var* por *a*, digitando (A). Se a máquina perguntar se *a* é uma variável (como neste caso) ou se é o nome de uma coluna, selecciona a opção *Referência de variável* e pressiona (enter).

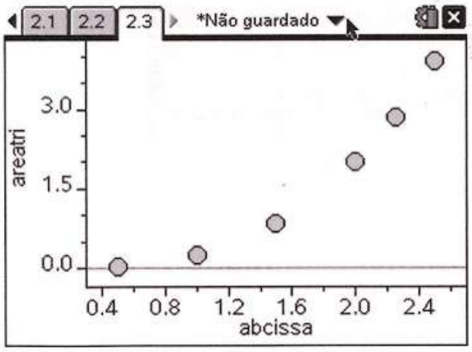


Figura 13

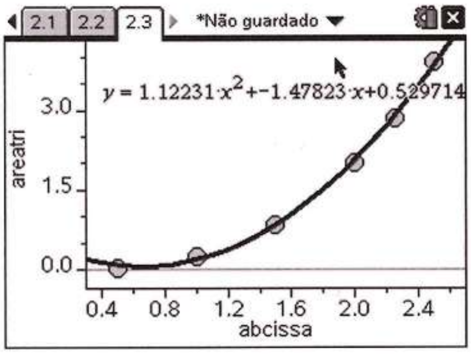


Figura 14

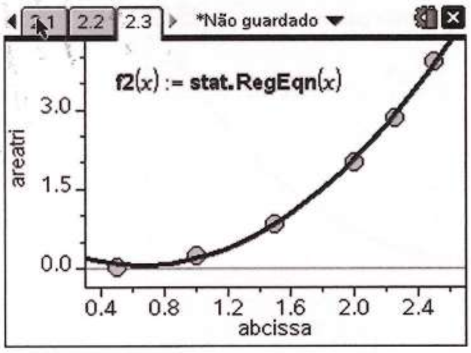


Figura 15

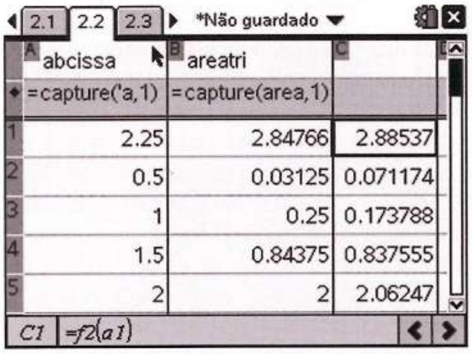


Figura 16

Repete este procedimento na coluna B, mas substituindo agora *var* por *area*.

Repara que já foram capturados os valores correspondentes à abcissa do ponto e à área do triângulo actualmente existentes (figura 12).

E] Recolha de dados

Faz [ctrl] ◄ [page] para voltar à página do gráfico.

Desloca o cursor para cima da abcissa do ponto de tangência. Quando aparecer a mão (com a indicação *Ligado=a*) faz [enter] duas vezes, apaga o valor da abcissa com [clear], escreve 0,5 e faz [enter] (figura 10).

Repete este processo várias vezes para obteres novos valores da abcissa espaçados de 0,5 e até 3 ou 4.

Faz [ctrl] ► [page] para voltar à página da folha de cálculo e verifica que a recolha de dados foi efectuada.

F] Nuvem de pontos

Olhando simplesmente para os dados, não é fácil ver a relação entre as duas variáveis. Vamos por isso fazer uma nuvem de pontos.

Faz [ctrl] «doc» (+*page*) 5:*Adicionar Dados e estatística* para acrescentar a nova página (estando a usar o teclado antigo, fazer [ctrl] 4:*Inserir* 7:*Dados e Estatística*).

Desloca o cursor para baixo do eixo horizontal e quando aparecer a mensagem «*clicar para adicionar variável*» faz [enter]. Aparece a lista das variáveis existentes. Escolhe *abcissa* e faz [enter] (figura 13).

Repete o processo deslocando o cursor para a esquerda do eixo vertical e escolhe a variável *areatri*.

G] Procura da correlação

Os pontos do gráfico obtido parecem estar sobre uma parábola. Vamos por isso pedir uma correlação quadrática. Pressionamos [menu] 4:*Analisar*, 6:*Regressão*, 4:*Mostrar Quadrática*.

A função obtida parece adaptar-se bem à nuvem de pontos (figura 14). Mas será mesmo esta a relação procurada? É o que vamos verificar.

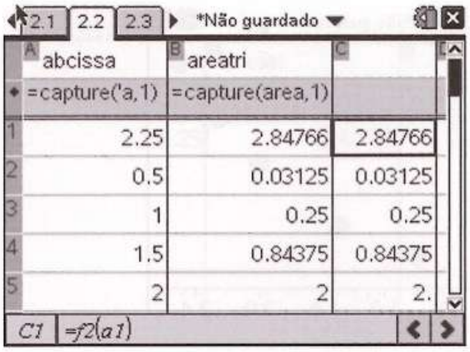
Pressionamos [menu] 4:*Analisar*, 4:*Traçar função*. Aparece uma caixa com *f2(x)*:=. Teclamos [var] e abre-se uma caixa, onde seleccionamos a equação da regressão (*stat.regeqn*) (figura 15). Acrescentamos (*x*) e fazemos [enter]. Criámos assim em *f2* a função de regressão obtida.

Com [ctrl] ◄ [page] passamos para a folha de cálculo e na célula C1 escrevemos =*f2(a1)* [enter]. Deslocamos o cursor para C1 e pressionamos [ctrl] [menu] 2:*Copiar*.

Pomos o cursor em C2, pressionamos [shift] até o contorno da célula aparecer a tracejado grosso e vamos carregando em ▼ até à célula de C correspondente à última linha preenchida na coluna A. Fazemos [enter], as células seleccionadas ficam a cinzento e depois [ctrl] [menu] 3:*Colar*. Comparamos os valores das colunas B e C e verificamos que não são iguais (figura 16).

Conclusão: a correlação procurada não é uma quadrática. Aliás, se tivéssemos olhado com atenção para o gráfico, víamos que a curva não passava na origem.

Figura 17



	A abcissa	B areatri	C
◆	=capture('a,1)	=capture(area,1)	
1	2.25	2.84766	2.84766
2	0.5	0.03125	0.03125
3	1	0.25	0.25
4	1.5	0.84375	0.84375
5	2	2	2.
C1	=f2(a1)		

Figura 18

Investiguemos então se se trata de uma cúbica.

Com ctrl ▸ passamos ao gráfico estatístico e, pressionando menu *4:Analisar, 6:Regressão, 5:Mostrar Cúbica*, pedimos a regressão cúbica. Deslocando com o cursor a expressão da função de correlação, reparemos que todos os coeficientes, excepto o de 3° grau, são praticamente nulos. O gráfico parece ajustar-se perfeitamente à nuvem de pontos. Confirmemos (figura 17).

Passamos para a página anterior com ctrl ◂. A máquina actualizou automaticamente a função *f2* e portanto a coluna C tem agora os valores obtidos a partir da nova função de correlação (se os valores não se tiverem actualizado, fazer menu *1:Acções, 5:Recalcular*).

Verificamos assim que os valores das colunas B e C são idênticos (figura 18).

Conclusão: área = 0,25 a^3.

Demonstração

Está descoberta a relação entre as duas variáveis. Temos «quase a certeza» que é aquela. Mas não nos sentimos satisfeitos se não a provarmos. O processo é muito parecido com o do problema anterior.

O declive da tangente no ponto genérico P(a, a^2) é $f'(a) = 2a$.

A equação da tangente é $y = 2ax - a^2$.

As coordenadas dos pontos são A$(0, a/2)$ e B$(-a^2, 0)$.

A área do triângulo é

$$\frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times a^2 = \frac{a^3}{4}.$$

Prolongamentos

E se a função fosse $f(x) = 2x^2$?

Basta ir à máquina e substituir a expressão de f1. Depois, ir à página de dados e apagá-los: seleccionar cada coluna (deslocando o cursor até ao cimo) e fazer menu *3:Dados, 4: Apagar dados*. A seguir, ir ao gráfico, escolher novamente diversos valores para a abcissa de P e... continuar.

E se a função fosse $f(x) = 3x^2$?

E se a função fosse $f(x) = kx^2$?

Nota: Estas duas actividades fazem parte do curso *Investigações Matemáticas com a TI-Nspire*, do grupo de trabalho T³, da APM.

José Paulo Viana
Escola Secundária de Vergílio Ferreira [Lisboa]

Encontro de Investigação em Educação Matemática 2010

Realizou-se nos dias 17 e 18 de Abril, no hotel Costa da Caparica, no concelho de Almada, o Encontro de Investigação em Educação Matemática 2010. Este encontro vem na sequência dos dezanove encontros realizados pela Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, que nesta edição assumiu a sua emancipação e criou uma nova sociedade, a Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM).

O tema do Encontro foi a Comunicação no Ensino e Aprendizagem da Matemática e organizou-se em torno de 3 conferências plenárias e 4 grupos de discussão. Duas das conferências plenárias foram proferidas por convidadas estrangeiras: *On the comunication of proof*, por Joanna Mamona-Downs da Universidade de Patras, Grécia e *Community of learners with Technologies*, por Ornella Robutti da Universidade de Turim, Itália. A terceira conferência, *O processo de demonstrar na aula de Matemática: Um olhar sobre a comunicação emergente*, foi proferida por Margarida Rodrigues da ESE de Lisboa.

Na conferência da abertura dos trabalhos, Joanna Mamona-Downs questionou-se sobre o papel da apresentação formal da demonstração e a forma como este pode promover a comunicação quando fazemos matemática. No final do dia Margarida Rodrigues voltou a retomar o processo de demonstrar integrado na aula de Matemática, analisando as vertentes da compreensão, da validação do conhecimento matemático, da comunicação matemática e a relação entre a construção da demonstração e a prática social desenvolvida na aula. Antes do final dos trabalhos Ornella Robutti mostrou-nos de que forma uma comunidade de *aprendizes* pode beneficiar do uso da tecnologia, quer a comunicação seja presencial ou à distância.

Os grupos de discussão reuniram durante os dois dias tendo sido dedicado um espaço no segundo dia para uma síntese dos trabalhos. Nos 4 grupos foram apresentadas 18 comunicações e 2 posters. A metodologia adoptada levou a que a apresentação dos posters estivesse integrada nos próprios grupos de discussão.

Um primeiro grupo foi dedicado à *Comunicação na Aula de Matemática*, dinamizado por Conceição Costa e Isolina Oliveira, e contou com 5 comunicações e 1 poster. Nestas comunicações esteve em evidência o trabalho colaborativo em matemática, o desenvolvimento de tarefas de natureza exploratória, a comunicação envolvendo alunos com necessidades educativas especiais e o papel dos gestos na comunicação. Um segundo grupo sobre *Comunicação em Materiais Escritos e Manuais*, dinamizado por Darlinda Moreira e Manuel Vara Pires, contou com 3 comunicações e um poster. Nestas comunicações esteve em destaque as conexões entre a matemática e as outras ciências através de propostas didácticas, a análise de manuais escolares e o papel dos relatórios escritos. Um terceiro grupo sobre A *Comunicação*

e o *Professor de Matemática*, dinamizado por Helena Martinho e Lurdes Serrazina, contou com 5 comunicações. Nestas comunicações esteve em destaque a explicação e negociação de significados, o papel dos alunos na comunicação matemática e na regulação das aprendizagens e as concepções e práticas comunicativas dos professores e futuros professores. O quarto grupo sobre A *Comunicação Representações e Tecnologia*, dinamizado por António Domingos, Jaime Carvalho e Silva e Manuel Saraiva, contou com 5 comunicações. Nestas comunicações foi evidenciado o papel das tecnologias na comunicação e resolução de problemas, destacando-se o papel da folha de cálculo e a Telescola como metodologia de ensino. Foi também destacado o papel das representações, quer em actividades de investigação quer na representação dos números racionais.

No final do primeiro dia de trabalhos reuniu a Assembleia, por iniciativa da Comissão Promotora da criação da nova associação, que aprovou os estatutos desta nova Sociedade e nomeou a sua Comissão Executiva que é composta pelos seguintes elementos: Ana Paula Canavarro, António Domingos, Darlinda Moreira, João Pedro da Ponte, José Manuel Matos, Leonor Santos e Lurdes Serrazina. Esta Comissão ficou mandatada para prosseguir os trâmites legais necessários à criação da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM).

O balanço de mais este Encontro revela-se bastante positivo, tendo contribuído efectivamente para um avanço no conhecimento em várias áreas da Educação Matemática, nomeadamente no papel que a comunicação pode desempenhar nos mais diversos níveis. Fica aqui um agradecimento especial aos colegas que se dispuseram a rever os textos das comunicações, melhorando significativamente a sua qualidade.

António Domingos
FCT/UNL

Materiais para a aula de Matemática

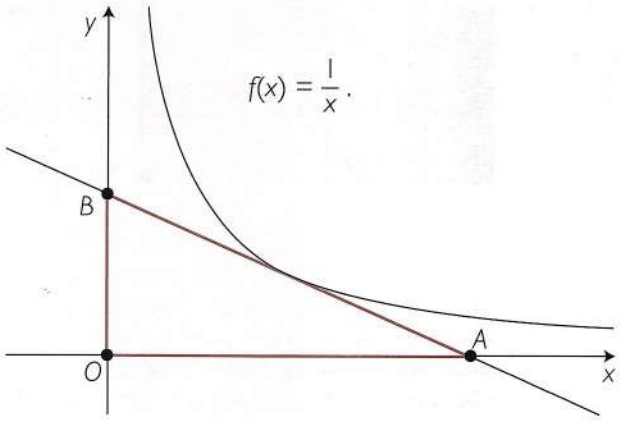
Um triângulo a partir da hipérbole

A tarefa «Um triângulo a partir da hipérbole» é uma das actividades exploradas no artigo «Investigações matemáticas com a TI-Nspire», de José Paulo Viana, publicado nesta revista. A tarefa destina-se a alunos dos 11°/12° anos de escolaridade e inclui um guia de resolução tendo como pressuposto a utilização de tecnologia gráfica. Se pensar utilizá-la na sala de aula, sugerimos uma leitura prévia ao artigo referido.

Um triângulo a partir da hipérbole

Temos o gráfico da função

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$



Por um ponto de abcissa *a* traçamos a tangente ao gráfico de *f*. A tangente intersecta os eixos coordenados nos pontos A e B. Consideremos o triângulo BOA, em que O é a origem do referencial.

1. Como varia a área do triângulo em função de *a*?

   Guia de resolução
   De preferência com a tua unidade portátil TI-Nspire, segue os seguintes passos:
   1. Faz o gráfico da função.
   2. Traça a tangente ao gráfico num ponto qualquer P e pede as coordenadas desse ponto.
   3. Faz a intersecção da tangente com os eixos coordenados.
   4. Define o triângulo BOA e pede a área do triângulo.
   5. Faz variar o ponto de tangência e observa o que acontece à área do triângulo.

2. Faz uma conjectura sobre a influência que a abcissa *a* do ponto de tangência P tem sobre a área do triângulo BOA.

3. Considera o ponto P de abcissa 4.
   Determina a equação da tangente ao gráfico no ponto P
   Quais são as coordenadas dos pontos A e B, intersecções da tangente com os eixos?
   Calcula a área do triângulo BOA.
   A tua conjectura confirmou-se?

4. Prova analiticamente a tua conjectura.
   Para isso, considera um ponto genérico P de abcissa *a* e segue as mesmas etapas da questão 3.

Impossibilidades, uma poderosa possibilidade matemática (I)

Cristina Loureiro

No seu livro «Cartas a uma jovem matemática», Ian Stewart faz o elogio da impossibilidade em Matemática. Afirma que «a matemática goza de um privilégio que nenhuma outra forma de vida tem. Na matemática, podemos demonstrar que algo é impossível.» Acrescenta ainda que «uma demonstração matemática de impossibilidade é uma garantia virtualmente inquebrável» (p. 93). Sabemos como esta fascinante possibilidade faz parte da matemática, mas muitas vezes esquecemo-nos de que, por isso mesmo, ela deve estar presente na construção do raciocínio matemático na escola. Nos últimos anos confrontei-me com algumas impossibilidades matemáticas no ensino básico que me interessaram duplamente. Por um lado foi a necessidade de demonstrar a impossibilidade. Por outro o fascínio que elas produzem nos alunos.

Construir um quadrilátero com 3 ângulos rectos

A tarefa proposta aos alunos foi: *Num geoplano de 5 por 5, construir quadriláteros com pelo menos um ângulo recto. Pintar a vermelho os ângulos rectos, a verde os agudos e a amarelo os obtusos.*

Ao organizar os exemplares descobertos em classes segundo o número de ângulos rectos, rapidamente reconhecemos que falta um quadrilátero com 3 ângulos rectos. Ninguém consegue construir um quadrilátero assim. Será mesmo impossível?

A demonstração de que este quadrilátero não pode existir, na geometria euclidiana, tem por base a ideia de que ao tentar obter o terceiro ângulo recto necessariamente o quarto ângulo também tem que ser recto (fig 1). Uma verificação manual pode ser feita com recurso a um geoplano como ilustra a figura 2.

Construir um quadrilátero só com 2 ângulos rectos opostos

O que é também interessante quando nos familiarizamos com a existência da impossibilidade é que ficamos mais sensíveis a esta hipótese e somos tentados a recorrer a ela frequentemente. Por exemplo, tenho notado que muitos professores pensam que é impossível construir um quadrilátero só com 2 ângulos rectos opostos. Não só não é impossível, fig. 3, como estes quadriláteros têm um papel muito importante na geometria.

Nos exemplos apresentados na fig. 3, há dois exemplares congruentes e um que está incorrecto. Não é difícil confirmar, mas para isso é necessário ter alguma destreza em identificar ângulos rectos quando os seus lados não coincidem com a malha quadriculada do geoplano.

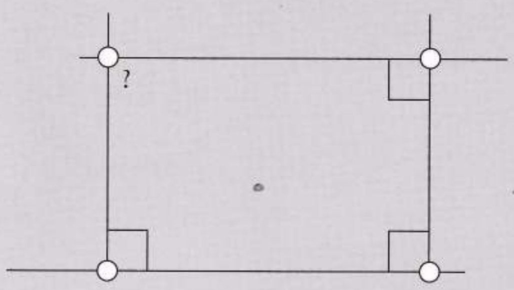


Figura 1

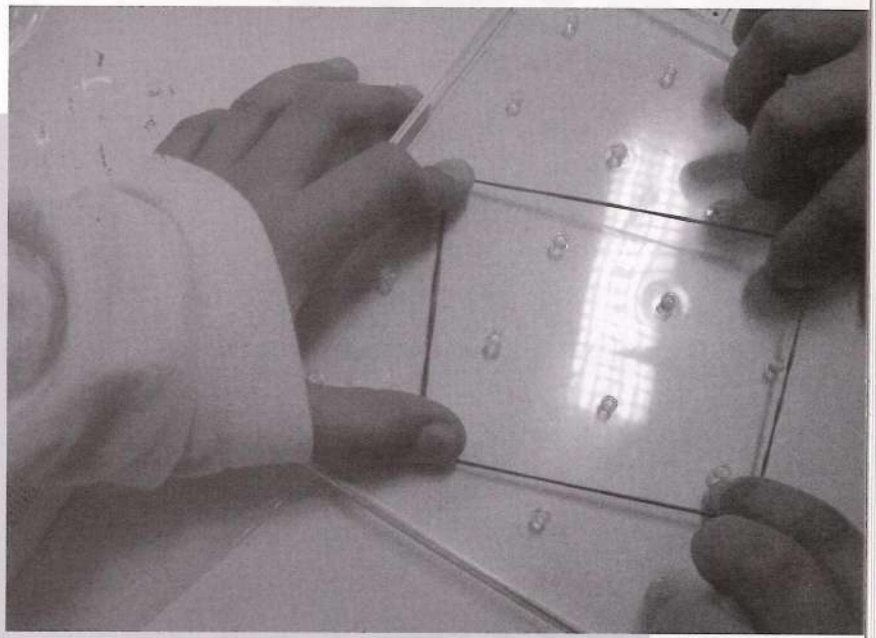


Figura 2

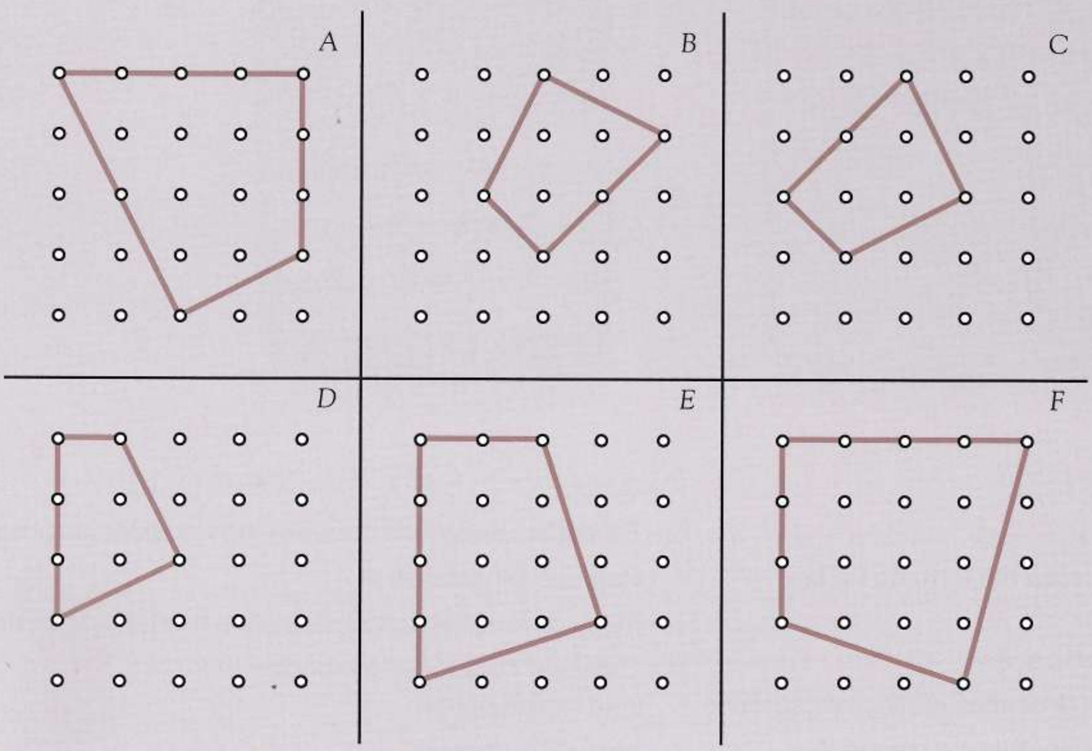


Figura 3

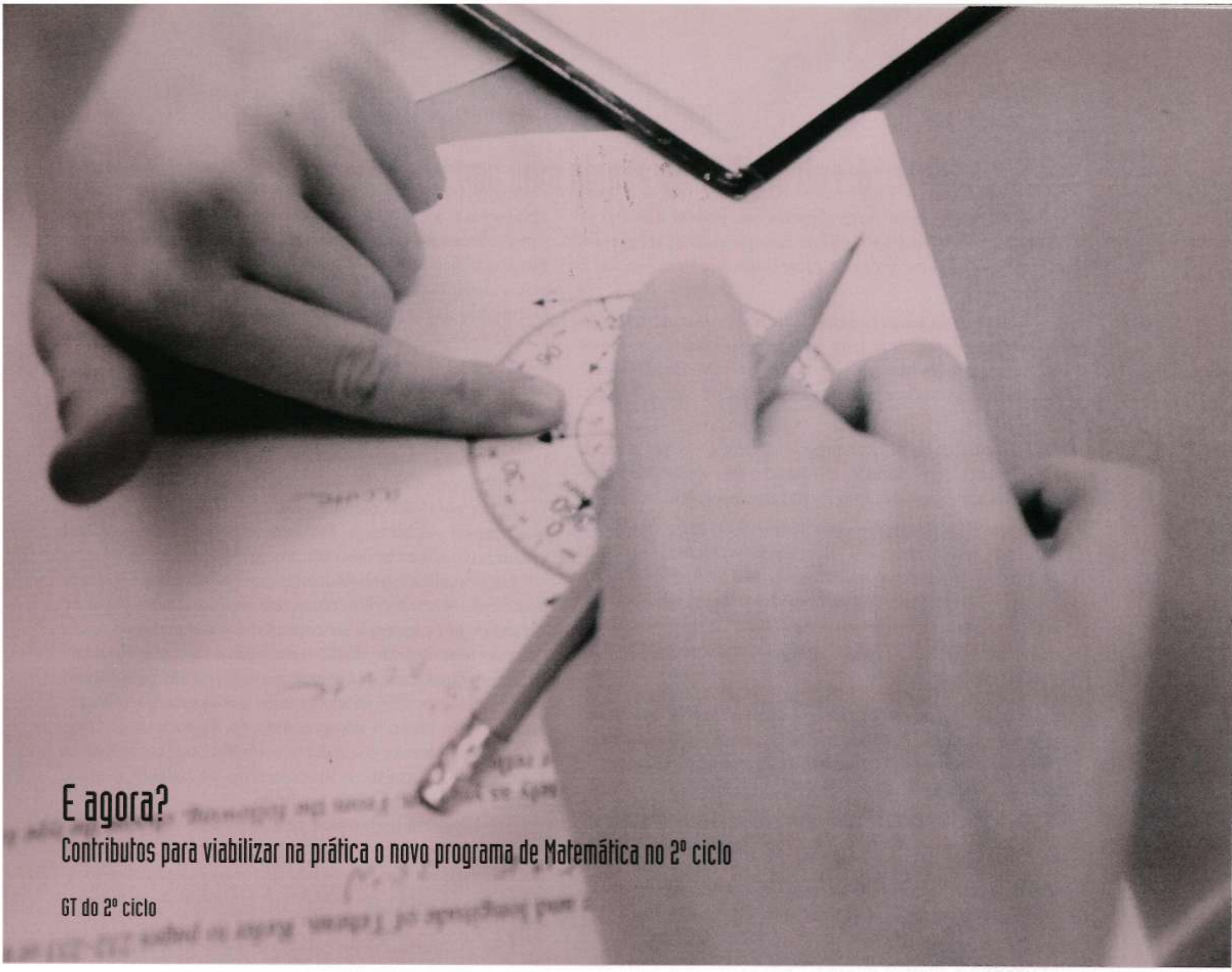
Procurar um exemplo de existência é um tipo de acção fundamental no raciocínio geométrico. Assim como é próprio da geometria, no caso de não se obter nenhum exemplo, procurar uma explicação para essa inexistência. O raciocínio geométrico consolida-se a partir das relações que se vão estabelecendo na procura de objectos geométricos com determinadas condições. A geometria elementar pode ser fértil neste tipo de situações desde que se tenha o cuidado de criar condições para isso.

Nota

Este artigo é o primeiro de uma série de textos curtos sobre ideias matemáticas importantes. Cada artigo será a discussão de uma ideia com base numa experiência ou num episódio de sala de aula.

Referências Bibliográficas

Stewart, Ian. (2006). *Cartas a uma jovem matemática*. Lisboa: Relógio d' Água.



E agora?

Contributos para viabilizar na prática o novo programa de Matemática no 2º ciclo

GT do 2º ciclo

No ano lectivo passado, começou a leccionação do novo programa de Matemática (npMeb) em turmas piloto, espalhadas pelo país. Este ano, vieram juntar-se as turmas de mais de 400 agrupamentos que escolheram começar o trabalho com alunos tendo por base o novo programa. Embora ainda seja prematuro para o retirar de conclusões seguras, já será com certeza possível fazer um balanço provisório de como se está a desenrolar a actividade, que potencialidades ele encerra, como podem ser aproveitadas, que problemas coloca e como poderão ser enfrentados.

Vamos centrar-nos principalmente no programa do 2º ciclo, tomando como evidente uma preocupação expressa pela totalidade dos experimentadores deste ciclo e que se refere à extensão do programa. Parece-nos ser um dado avassalador, mesmo tendo em consideração que se torna mais visível e pressionante numa altura de início da generalização, em anos intermédios que são constituídos por alunos que tiveram a sua aprendizagem de acordo com o programa de 91 e não se debruçaram sobre alguns dos tópicos que passaram a integrar os novos programas. Apesar de ser um aspecto referido também nos outros ciclos como um «ponto fraco» do programa (53% do total e 88% dos experimentadores do 3º ciclo fizeram-no) é no 2º ciclo que se torna mais presente esta preocupação, com a unanimidade já referida de todos os professores experimentadores. Esta impressão parece ser confirmada por muitos dos colegas que começaram este ano a organizar o seu ensino segundo o novo programa de Matemática. Se compararmos a lista dos tópicos propostos no programa de 91 com os que integram o actual, pode-se dizer que o npMeb é mais extenso, o que levanta problemas relativamente ao tempo disponível para abordar com a profundidade e integração desejável o programa. Todas estas constatações obrigam a que seja urgente que se tomem medidas para minorar os problemas decorrentes de algo que se poderá considerar já um facto: o programa proposto terá muita dificuldade em ser leccionado com base no actual tempo curricular que a Matemática tem neste ciclo.

Existem algumas medidas, mais ou menos evidentes, para a resolução do problema temporal que tem sido assinalado. Vamos tentar dizer algumas que podem existir, colocando evidentemente a ênfase nas que podem ser geridas e organizadas pelos próprios professores nas suas escolas e comunidades.

1. Aumento da carga horária dedicada à Matemática. Não temos competência para legislar nesse sentido e temos a consciência que isso iria muito provavelmente mexer directamente com o espaço curricular de outras disciplinas.
2. Diminuição de tópicos programáticos. Deve ser reflectido com algum cuidado, evitando o desvirtuar das linhas fortes do programa, sem introduzir incoerências.
3. Apostar numa gestão mais racional do programa privilegiando conexões e o tratamento integrado de tópicos dentro do mesmo tema, ou em temas diferentes. Este é o meio que está mais ao alcance dos professores. Tem sentido se as decisões forem tomadas em conjunto e colaborativamente, evitando actuações individuais e não concertadas.

Em relação à medida 2., existem alguns tópicos que aparecem um pouco isoladamente e que podem ser considerados para um menor investimento ou até um eventual desaparecimento do programa:

- A determinação do mmc e do mdc, através da decomposição em factores primos, não parece fundamental, a ponto de ser obrigatório a aplicação de regras, tanto mais que existem outras formas de os calcular, como por exemplo o cálculo mental.
- Porque falamos, no 2° ciclo, em ângulos verticalmente opostos e alternos internos? Não existe uma contextualização forte que a isso obrigue.
- Por que razão se voltou a dar importância às regras na multiplicação e divisão de potências, com a mesma base ou o mesmo expoente?
- Falar de ângulos complementares e suplementares, sem falar de ângulos adjacentes, parece ser destinado a introduzir uma obrigação de decorar definições, sem uma real necessidade.

Veríamos com bons olhos que as ilações que se tiraram da experimentação e da prática já conseguida pudesse informar alterações a aplicar, no sentido de tornar exequível a prática concordante com o programa.

Não sendo um ponto forte do programa a menção a possíveis conexões a estabelecer entre os temas matemáticos, e na busca de um aproveitamento mais racional do tempo disponível, é importante identificar as oportunidades de existir um tratamento mais integrado e integrante, evitando a apresentação de perspectivas diferentes do mesmo tópico. Por exemplo, a menção das expressões numéricas nos temas «Números e operações» e «Álgebra» pode apontar para uma sobrevalorização do conhecimento de regras para o cálculo mecânico de expressões longas, quando o que importa é que elas sejam utilizadas para representar uma dada situação, esclarecendo-a. Do mesmo modo, o conceito de percentagem é multifacetado e pode ajudar a estabelecer associações e conexões entre temas. Aliás, como aspecto mais geral, fará sentido compartimentar o estudo da Álgebra, ou pelo contrário este é um tema que é transversal e vai sendo trabalhado nos vários temas? Não deve ser por acaso que é neste tema que há mais repetições de conteúdos com outros tópicos. As propriedades das operações são mais um exemplo.

A par com estas recomendações, existem preocupações que a nosso ver terão de ser consideradas para ser possível um efectivo e harmonioso tratamento do programa.

Há conceitos a trabalhar neste programa e que merecem aprofundamento teórico, por serem «novos» neste nível de ensino ou por estarem a ser considerados numa metodologia que não tem tradição. Estão neste caso o conceito de simetria e as transformações geométricas prescritas para estudo neste ciclo e os diferentes sentidos das operações mencionados, assim como a compreensão de algoritmos da divisão, nomeadamente o que é tradicionalmente considerado. É também importante o investimento no cálculo mental, enfatizando técnicas que o facilitam.

Também será importante que, apesar de não estar muito explícito no programa, se trabalhe a ordem de grandeza dos números e a sua leitura não de forma isolada, mas integrada, por exemplo, em cálculos de potências ou sequências numéricas.

Um documento deste tipo pode dar sempre azo a interpretações muito diferentes por parte dos professores, no entanto, é muito importante que se torne ainda mais visível a mudança que se pretende ao nível das metodologias, das capacidades transversais a desenvolver e da forma como se orienta o trabalho dos alunos. Nesta linha, será absolutamente necessário que os professores tenham momentos para trabalharem em conjunto, pelo que os órgãos de gestão das escolas devem atribuir tempo para isso no horário dos professores, enquanto sentem fazer parte de uma comunidade em que é possível o diálogo e a entreajuda, apontando para uma riqueza de recursos e para a sua acessibilidade.

Para um programa que apresenta um evidente aperfeiçoamento em relação ao que veio substituir, será uma pena que se desperdice uma oportunidade de realizar as potencialidades que ele encerra. Para que isso aconteça, além de ser necessário que os professores o trabalhem, os responsáveis institucionais devem levar em conta o que pode facilmente ser retirado da experimentação e propor alterações que obviem aos estrangulamentos que entretanto forem detectados.

Incursão pelo Geometer'Sketchpad com alunos do 1º Ciclo do E.B.

Fernando Bravo

As orientações curriculares para o ensino da Matemática, quer em Portugal quer noutros países, enfatizam a capacidade que os computadores têm de desenvolver o raciocino das crianças. Por isso consideram indispensável a utilização, na sala de aula, da tecnologia, nomeadamente dos computadores.

O Currículo Nacional para o Ensino Básico — Competências Essenciais (M. E., 2001) — refere, por sua vez, que o professor deve abordar os conteúdos da área do saber com base em situações e problemas e organizar o ensino apoiando-se em materiais e recursos diversificados, dando atenção preferencial a situações do quotidiano. Também o Ministério da Educação no seu relatório sobre os resultados das provas de aferição para os 4°, 6° e 9° anos (M.E. 2006) salienta que continua a verificar-se que é nas questões que envolvem as competências de comunicação, raciocínio e resolução de problemas onde os alunos revelam maiores dificuldades. Assim os alunos devem adquirir a sensibilidade para a geometria e devem ser capazes de reconhecer ideias geométricas quando observam e quando comunicam as suas «descobertas». Estas duas competências podem ser atingidas com o uso de diversos recursos, nomeadamente com *software* de geometria dinâmica.

Embora a opinião de um aluno sobre o ensino da geometria,

> Fazemos geometria, por exemplo, quando já acabamos o que tínhamos que fazer e ainda é cedo para sairmos (aluno do 4° ano de escolaridade)

não permita fazer generalizações, vários autores, tais como Abrantes, Serrazina, Oliveira, Loureiro e Nunes (1999), Veloso (1988) e Lehrer e Chazan (1998), consideram que há uma tendência para encarar a geometria como tendo um papel secundário no ensino/aprendizagem da Matemática.

Para Douek e Pichat (2002), na última década, o desenvolvimento das capacidades argumentativas dos alunos mais novos tornou-se um assunto da maior preocupação para os educadores matemáticos por diferentes razões: (a) a necessidade de uma aproximação, desde muito cedo, a competências que são relevantes no processo de justificação, (b) a exploração do potencial da interacção social no desenvolvimento tanto do conhecimento matemático como das competências matemáticas, (c) a importância das competências de argumentação ao nível do currículo, direccionadas para o aumento da autonomia intelectual dos alunos.

Os autores sustentam ainda que as capacidades de argumentação não podem ser desenvolvidas a não ser num ambiente multidisciplinar, com a utilização de uma gestão interactiva da aproximação à escrita e às discussões sobre os textos produzidos, que reflictam a situação trabalhada pelos alunos, de modo a que estes obtenham imediato *feedback*. A utilização de ambientes de geometria dinâmica vem permitir que os alunos sejam confrontados com situações que podem estimular as suas capacidades de argumentação e dar uma outra relevância ao estudo da geometria.

Segundo Markopoulos e Potari (1996) os alunos, partindo de considerações visuais das formas geométricas, desenvolvem relações entre as figuras e as suas propriedades e constroem relações hierárquicas entre diferentes classes de figuras. O pensamento envolvido nesta construção não foi só resultado ou conjugação de um número de atributos críticos que correspondem à figura, mas foi, pelo contrário, inseparável dos modelos intuitivos e dinâmicos desenvolvidos pelas crianças, que, ao basearem-se neles, usaram o raciocínio para integrar aspectos perceptivos, imaginários e factuais, para justificar as suas opções.

Por outro lado, o estudo de padrões e regularidades está intimamente ligado com a compreensão da génese da Matemática. Segundo Mason (2002), as regularidades devem ser tratadas mesmo nos anos de escolaridade mais baixos, como forma de introdução à *generalização* e à *justificação*; é o que o autor apelida de «discipline of noticing», e que considera fundamental para a aquisição de conceitos, tal como o conceito de propriedade. Esta capacidade consiste na aptidão para reparar nos pormenores relevantes, nas regularidades indispensáveis para a resolução de um determinado problema.

É difícil o desenvolvimento de competências de análise e construção de padrões (Garrick e Orton, 1999), mas o desenvolvimento do raciocínio e da capacidade de argumentação está dependente de a criança fazer experiências, procurar regularidades e depois comunicar aos outros as suas descobertas.

O estudo das formas no espaço e das relações espaciais oferece às crianças e aos jovens, no dizer de Abrantes *et al.* (1999), uma das melhores oportunidades para relacionar a matemática com o mundo real. As primeiras experiências das crianças são geométricas e espaciais, ao tentarem compreender o mundo que as rodeia, ao distinguirem um objecto de outro e ao descobrirem o grau de proximidade de um dado objecto.

O recurso a *software* de geometria dinâmica dá ao aluno a possibilidade de fazer construções no ecrã de um computador, tendo em conta as propriedades das figuras geométricas, e de manipular essas construções, mantendo as referidas propriedades.

Estes ambientes informáticos permitem um maior leque de acções e o trabalho com objectos mais complexos relativamente à utilização das ferramentas clássicas (papel, lápis, régua e compasso) e, fundamentalmente, permitem que os alunos contactem com um grande número de situações em tempo real e se apercebam do domínio de validade das propriedades estudadas. Trabalhar com estes ambientes ajuda os alunos a dar sentido ao processo da justificação. A sua aprendizagem decorre por etapas e a formulação de conjecturas e a sua validação com a análise de exemplos e contra-exemplos, é facilitada pelo vai e vem contínuo facultado pelas ferramentas.

Os ambientes de geometria dinâmica permitem a realização de actividades centradas na resolução de problemas e que solicitam dos alunos um certo número de competências que eles já possuem ou que poderão desenvolver com a sua utilização. Também possibilita a reflexão no seu próprio processo de pensamento quando resolvem tarefas nestes ambientes.

Aplicação

Tomando em linha de conta o que foi referido, desenvolvi um estudo com crianças do 4° ano de escolaridade, todas com 9 anos, em que foram utilizadas diversas tarefas, construídas ou adaptadas, que necessitavam da aplicação de uma ambiente de geometria dinâmica (AGD): o *Geometer's Scketchpad* (GSP).

As tarefas focavam aspectos como a «descoberta» de relações e propriedades das figuras geométricas e das isometrias, nomeadamente das reflexões.

Os alunos foram iniciados na utilização de algumas ferramentas básicas da aplicação. Foram-lhes apresentadas algumas tarefas preparatórias com o fim de observar as suas reacções tanto à aplicação informática, como ao tipo de questões que lhes iriam ser colocadas. A implementação das tarefas propostas decorreu em dois dias da semana durante dois meses.

Para cada tarefa e para cada grupo foi feita a gravação áudio das discussões e das conclusões obtidas no final de cada tarefa realizada. Para além disto, os alunos tinham à sua disposição um caderno de notas onde escreviam as suas conclusões relativamente aos procedimentos a efectuar perante a tarefa a resolver e as suas conclusões.

Algumas Tarefas

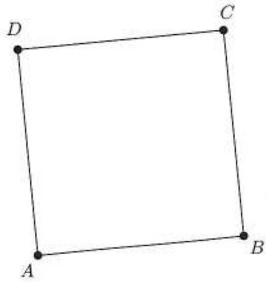
Apresentam-se em seguidas algumas das várias tarefas utilizadas.

1. Triângulo[s]

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos construíssem e manipulassem um triângulo, a partir de um dos lados, depois de um vértice, ampliando-o, reduzindo-o e fazendo-o rodar, e tentassem responder se o «produto final» das suas manipulações, era ainda um triângulo e se seria, ou não o mesmo triângulo.

Houve respostas curiosas. Para alguns alunos, o facto de se dizer «o mesmo triângulo» implicava uma de duas coisas: Para uns, «o mesmo» parecia querer dizer unicidade, ou seja, se lhes fossem apresentados dois triângulos geometricamente iguais e na mesma posição, eles diziam que eram triângulos diferentes na medida em que não eram o mesmo (haveria dois desenhos de triângulos), mas tinham a mesma forma, eram iguais. Quando deformavam um dos triângulos consideravam que se tratava de triângulos diferentes do original. Outros alunos, na mesma situação, diziam que era o mesmo triângulo a mudar de forma, quando ampliavam, rodavam e deformavam o triângulo inicial. Esta observação dos alunos revela a sua não preocupação com a dimensão.

Também foi interessante observar que para alguns alunos, o facto de marcarem três pontos quase alinhados e depois traçarem os lados do triângulo, não lhes colocava qualquer problema de identificação da figura como se o segmento de recta visível fosse um triângulo perpendicular ao campo visual do observador.



Medidas dos lados

$AB = 3{,}30$ cm

$BC = 3{,}30$ cm

$CD = 3{,}30$ cm

$DA = 3{,}30$ cm

Medidas dos ângulos

$m\angle ABC = 90{,}00°$

$m\angle BCD = 90{,}00°$

$m\angle CDA = 90{,}00°$

$m\angle DAB = 90{,}00°$

Figura 1

2. Quadrado e suas propriedades

Comecei por pedir aos alunos que dissessem o que era para eles um quadrado. Sem excepção, todos disseram que era uma figura que tinha os lados todos iguais.

Depois pedi que manipulassem um quadrado dinâmico e que fossem observando as alterações que iam ocorrendo (figura 1).

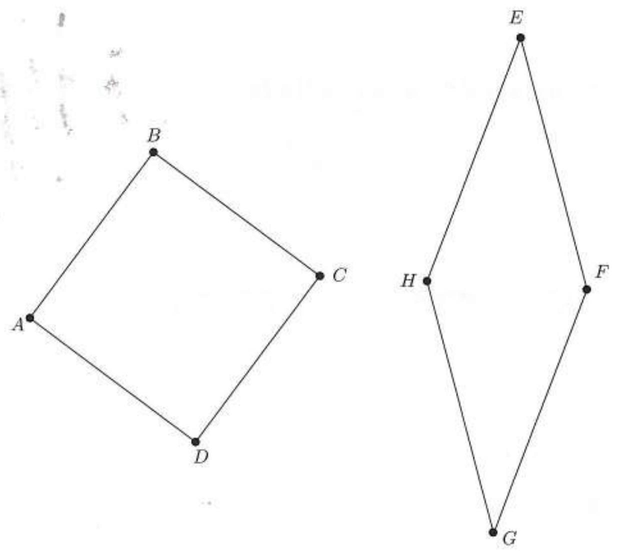
Só após manipularem e verificarem que a amplitude dos ângulos se mantinha é que alguns alunos disseram que o quadrado tinha todos os ângulos iguais e rectos.

3. Comparação Quadrado-Losango

Nesta tarefa, comecei por perguntar aos alunos qual destas duas figuras era um quadrado. Identificaram imediatamente a figura ABCD e tiveram dúvidas sobre a HEFG, parecendo-lhes que também seria um quadrado (figura 2).

Após manipularem as figuras, imediatamente referiram, correctamente, que só uma é que era quadrado, pois a outra deixava de ter os ângulos rectos. Instados a referir o nome da figura «deformável», todos disseram que era um losango. Pedi-lhes seguidamente que dissessem quando é que um losango poderia ser um quadrado. Depois de manipularem e observarem as alterações ocorridas responderam que isso só acontecia quando os ângulos fossem rectos. Perguntei, em seguida, se era possível transformar o quadrado num losango e a resposta foi de que tal era impossível, porque o quadrado tinha sempre os ângulos rectos e no losango isso nem sempre acontecia.

Esta sucessão de respostas é esclarecedora da evolução que se operou no conceito de quadrado que estes alunos tinham. Primeiro, os ângulos serem ou não rectos, parecia fazer pouca diferença, uma vez que, para os alunos, dizer que o quadrado tinha os lados iguais parecia bastar. Após terem manipulado e tentado deformar as figuras a questão da igualdade dos ângulos do quadrado passou a ser uma propriedade importante, uma vez que a referiram como fundamental para distinguir o quadrado e o losango.



Medidas dos ângulos

$m\angle ABC = 90°$

$m\angle BCD = 90°$

$m\angle DAB = 90°$

$m\angle CDA = 90°$

Medidas dos lados

$m\overline{AD} = 3$ cm

$m\overline{BC} = 3$ cm

$m\overline{CD} = 3$ cm

$m\overline{AB} = 3$ cm

Medidas dos ângulos

$m\angle FHG = 144°$

$m\angle HGF = 36°$

$m\angle GFE = 144°$

$m\angle FEH = 36°$

Medidas dos lados

$m\overline{HE} = 4$ cm

$m\overline{HG} = 4$ cm

$m\overline{GF} = 4$ cm

$m\overline{EF} = 4$ cm

Figura 2

4. RooBooGoo

Nesta tarefa, os alunos deveriam arrastar os pontos que lhes apareciam no ecrã e tentar descrever, as figuras feitas com os rastos dos dois pontos. O que estava em causa eram algumas transformações geométricas, tais como meias-voltas e reflexões, sendo quie os eixos das diferentes reflexões não eram visíveis (figura 3).

Numa primeira fase, os alunos pareceram não se aperceber de que esta tarefa não era um jogo e foram muito parcos em justificações às perguntas: «Onde é que o Roo consegue apanhar o Goo?», «Faz o Roo desenhar uma linha horizontal. O que acontece ao Goo?»; «Faz o Roo desenhar uma circunferência. O que acontece ao Goo?»

Após terem «gasto» algum tempo a responder às diversas perguntas, a maior parte dos alunos começou a fornecer mais detalhes quanto à sua percepção do comportamento dos pontos. Para eles os pontos já não só «faziam o mesmo», como passaram a descrever os ângulos «ao contrário». Quando solicitados a desenhar com um dos pontos uma figura que o outro ponto copiasse do mesmo modo, um grupo escolheu o quadrado (porque tinha tudo igual) e outro escolheu a circunferência (porque não tinha ângulos).

Arrasta o Roo à tua vontade. O que é que acontece ao Goo?

Apagar linhas | Um Goo diferente | Avançar

1. Onde é que o Roo consegue apanhar o Goo?
2. Faz com que o Roo desenhe uma linha horizontal.
   O que é que acontece ao Goo?
3. Faz o Roo desenhar um círculo. O que é que acontece ao Goo?

Figura 3

Na última questão «Será que o Roo e Boo conseguem fazer juntos um coração) três dos grupos foram bem sucedidos, fazendo com que os pontos começassem o seu movimento juntos (no eixo de simetria) e um desses grupos chegou mesmo a justificar deste modo a sua opção.

Conclusões

Após a análise dos dados recolhidos foi possível concluir que:

(I) *Relativamente à aprendizagem da geometria:*

a) Ao longo das tarefas, as concepções destes alunos sobre a matemática e a geometria parecem ter-se alterando, devido à utilização do AGD. Tal convicção é apoiada em dois factos: Os alunos incluíram as tarefas de geometria que realizaram nos desenhos que fizeram, relativamente à matemática, quando este pedido lhes foi feito pela segunda vez e, segundo a professora, passaram a integrar gestos indicando movimento, quando davam justificações orais na sala de aula.

b) Os alunos manifestaram diversas competências. Identificaram conceitos, reconheceram formas geométricas simples, descreveram e identificaram figuras geométricas e suas propriedades, assim como construíram figuras geométricas simples. Apenas pontualmente apresentaram argumentos com base na visualização e no raciocínio espacial. Tal facto, apesar de ter sido esporádico, resultou indubitavelmente da utilização do AGD. Esta presunção baseia-se em várias situações observadas e também no que uma das alunas disse, referindo-se ao GSP, quando questionada na entrevista final: «para ver se entendemos mais coisas».

c) Inicialmente foram detectadas nos alunos, diversas dificuldades. Algumas, tais como a aquisição incorrecta de conceitos e a não aplicação de conceitos previamente adquiridos, foram-se atenuando sensivelmente com o decorrer das tarefas e, inclusivamente, os alunos conseguiram superar as dificuldades com que certos casos limite os confrontaram. Isto deveu-se também à utilização do AGD.

d) A utilização do AGD possibilitou também situações curiosas de aprendizagem, das quais destaco a percepção a 2 ou 3 dimensões de transformações de imagens a 2 dimensões. Este tipo de percepção visual pode vir a ser útil para os alunos, facilitando a aprendizagem de novos conceitos, tal como sustentam Abrantes (1999) e Perry e Dockett (2002).

e) A utilização do AGD parece ter possibilitado que os alunos começassem a «reparar» mais nos pormenores, nos invariantes das figuras, apesar desta «conquista» ter sido muito incipiente.

(II) *Relativamente ao ensino da geometria,* a utilização de um AGD em sala de aula implica aspectos, como os que a seguir se referem, que não resultaram directamente do estudo, mas que nele estiveram sempre implícitos. Assim, é necessário que o professor consiga:

a) Criar ambientes de sala de aula propícios à experimentação, ao questionamento, discussão e reflexão.

b) Aprofundar os seus conhecimentos matemáticos (geométricos), tecnológicos e didácticos.

c) Investigar para recolher, adaptar e criar tarefas ricas de conteúdo.

d) Criar formas de avaliação adequadas que permitam integrar este tipo de tarefas, de modo a que a avaliação esteja alinhada com o tipo de ensino praticado.

e) Discutir com os seus pares sobre o ensino e aprendizagem da matemática, de modo a trocar experiências, ouvir opiniões e reflectir sobre o seu trabalho.

Por fim, a utilização de um AGD coloca o professor perante uma dificuldade significativa, que se prende com o modo com deverá colocar as questões aos seus alunos. Estas terão de alcançar o ténue equilíbrio entre o serem sugestivas e directivas.

Considerações finais

Perante o exposto considero que as tarefas foram um instrumento muito útil para a construção, por parte dos alunos, de um pensamento matemático mais profundo e consistente, na medida em que, tal como diz Mason (1997), não só o «como», mas também «o porquê» estiveram sempre presentes ao longo do processo de resolução das tarefas. Este segundo «ingrediente» do pensamento matemático foi elevado a uma dimensão diferente e mais rica, pelo facto de os alunos poderem participar na construção e na movimentação das figuras, focando a sua atenção nas suas propriedades, realçadas pela característica dinâmica da aplicação.

É de salientar um facto, entre vários a que tive oportunidade de assistir, e que foi a resposta dada de forma natural à questão «porque é que temos de marcar dois pontos antes de traçarmos uma recta?»[1]. Foi imediatamente perceptível aos alunos quando usaram o GSP que o primeiro ponto servia para «marcar» a recta e o segundo servia para a «segurar». Esta resposta foi dada enquanto os alunos faziam oscilar a recta por eles próprios construída. A justificação que deram foi-lhes «sugerida pela construção», porque puderam ver o movimento da figura enquanto a manipulavam. As justificações dadas não foram fruto da construção e da observação de um ou dois casos pontuais, como o seriam se os alunos estivessem a utilizar, nas suas «investigações», apenas material manipulável concreto ou papel e lápis. Pelo contrário e porque o GSP, pela sua génese, permitiu analisar muitos casos, promoveu, por parte dos alunos do estudo, mais do que qualquer outro material manipulável, a visualização e o sentimento de que não bastava uma justificação pontual caso a caso. As justificações tornavam-se necessárias para englobar todos os casos que eram percepcionados, à medida que a figura mudava continuamente. É o que Perry e Dockett (2002) chamam pensamento espacial. Os alunos eram motivados a fazer, à sua maneira, generalizações, que são importantes para o ensino-aprendizagem da matemática.

Em conclusão, considero que um AGD, como o GSP, é uma aplicação útil, interessante e «provocadora das aprendizagens». Ao proporcionar ao utilizador, com relativa facilidade, a possibilidade do movimento «contínuo», provoca-o a experimentar e a tentar descobrir as razões, tanto da construção, como do comportamento das figuras que ele próprio constrói e manipula, contribuindo assim para o desenvolvimento de uma visão diferente e mais rica da geometria. A sua utilização com crianças de um nível de escolaridade inicial, apesar de poder fazer surgir problemas de diversa ordem, permite que estes alunos contactem, desde cedo, com novas exigências tanto ao nível do pensamento lógico, como ao nível da justificação. Assim, considero fundamental que esta aplicação informática seja explorada, pelo menos, com alunos do 4° ano de escolaridade, de modo continuado e procurando diversificar as tarefas para que os benefícios decorrentes desta utilização possam ser mais consistentes, significativos e duradouros.

Nota

1 Nas tarefas introdutórias pedi a muitos dos alunos da turma que desenhassem uma «recta» paralela à borda do quadro. Quase todos o faziam «a olho» sem preocupação de medir distâncias e marcar pontos. Quando o faziam não sabiam explicar as razões porque o tinham feito.

Bibliografia

Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In E. Veloso, H. Fonseca, J. Ponte e P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da geometria ao virar do milénio* pp. 51–62. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I., Loureiro, C e Nunes, F. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Associação de Professores de Matemática (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Battista, M. (2000). *Learning geometry in a dynamic computer environment*. Berkely: Key Curriculum Press.

Biehler, R, Scholz, R., Winkelman, B. (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bravo, F. (2005). Impacto da utilização de um ambiente de geometria dinâmica no ensino-aprendizagem da geometria por alunos do 4° ano do 1° ciclo do ensino básico. Tese de Mestrado. Universidade do Minho.

Douek, N. e Pichat, P. (2003). *From oral to written texts in grade 1 and the long term approach to the mathematical organization*. Paris: UFR de Psychologie, Université Paris-8.

Lehrer, R. e Chazan, D. (1998): *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. London: Lawrence Earlbaum Associates, Publishers.

Markopoulos, C. e Potari, D. (1996). Thinking about geometrical shapes in a computer-based environment. In L.Puig e A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 337–344. Valencia: Universitat de Valencia

Mason, J. (1997). O «quê», o «porquê» e o «como» em matemática. In *Investigar para aprender matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Mason, J. (2002). Explorando imagens mentais no ensino/aprendizagem de matemática. In *Actas do ProfMat* Viseu. Lisboa: APM (cd-rom).

Ministério da Educação-Departamento de Educação Básica (2001). *Currículo nacional do ensino básico, competências essenciais*. Lisboa: Antunes & Amílcar, Ldª.

Ministério da Educação-Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário (1990). *Ensino básico. Programa do 1° ciclo*. Algueirão: Editorial do M. E.

Perry, B. e Dockett, S. (2002). Young children's access to powerful mathematical ideas. In L.English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, pp. 81–105. London: Lawrence Earlbaum Associates, Publishers.

Veloso, E. (1998). *Geometria. Temas actuais. Materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Fernando Bravo
Escola EB 2,3 Gonçalo Nunes

À mesa de jogo

Em cima da mesa estavam dois baralhos de 52 cartas cada um.
Cada um dos jogadores retirou para si algumas cartas, ficando as restantes no meio da mesa. Depois e simultaneamente:

— a Ana deu metade das suas cartas à Beatriz,

— a Beatriz entregou um terço das suas ao Carlos,

— o Carlos deu um quarto das que tinha ao Diogo,

— o Diogo passou um quinto do seu monte à Ana.

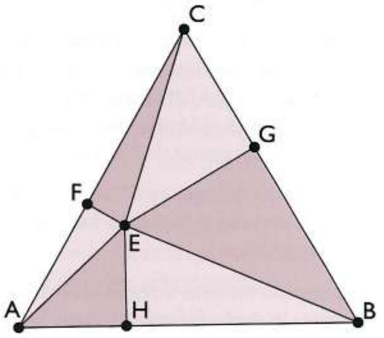
Feito isto, verificaram que todos ficaram com igual número de cartas. Quantas cartas sobraram no meio da mesa?

(Respostas até 30 de Setembro para zepaulo@armail.pt)

Triângulos coloridos

O problema proposto no número 105 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

O professor disse aos alunos para desenharem um triângulo equilátero ABC e para escolherem um ponto qualquer E no seu interior. Depois pediu-lhes que unissem esse ponto com cada um dos vértices e que, também a partir de E, traçassem os segmentos perpendiculares a cada um dos lados do triângulo.

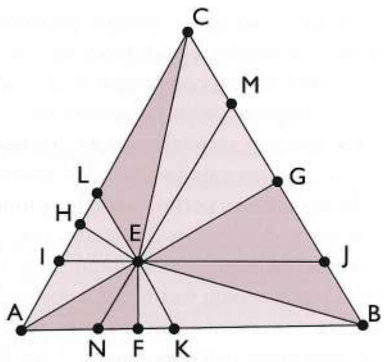


O triângulo inicial ficou assim dividido em seis triângulos mais pequenos que foram depois pintados alternadamente de vermelho e de amarelo. A Catarina garante que a área total dos triângulos vermelhos é igual à dos amarelos mas a Diana afirma que isso vai depender da posição do ponto E. Quem tem razão?

Recebemos nove respostas: Alice Bárrios (Catujal), Ana Leiria (Covilhã), Edgar Martins (Queluz), Eduardo Veloso (Cascais), Francisco Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Leonel Vieira (Braga), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Rita Bastos (Lisboa).

Houve quem usasse programas da geometria dinâmica para verificar que as áreas são iguais, houve quem recorresse à geometria analítica para o provar, mas as resoluções mais interessantes, puramente geométricas, são do Leonel e da Rita. Eis como eles fizeram.

Pelo ponto E traçamos paralelas aos lados do triângulo.



O triângulo inicial fica dividido em 12 triângulos, congruentes dois a dois. Vejamos porquê.

Os triângulos EJB e EKB têm a mesma área porque EB é a diagonal do paralelogramo EJBK e a diagonal de um paralelogramo divide-o em duas partes congruentes.

Os triângulos ENF e EKF têm a mesma área porque o triângulo ENK é equilátero (todos os seus ângulos medem 60°) e a altura EF divide-o em duas partes iguais.

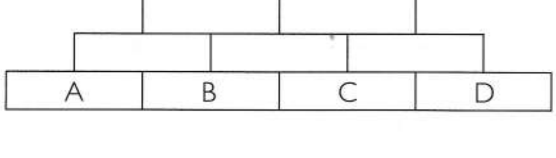
E assim sucessivamente.

Conclusão: quem tem razão é a Catarina.

Pirâmide multiplicativa

O problema proposto no número 106 de Educação e Matemática foi o seguinte:

A Catarina desenhou uma pirâmide de quatro andares formada por rectângulos iguais. Em cada rectângulo da linha inferior escreveu um número inteiro até 10. Depois, preencheu a pirâmide com números de acordo com a seguinte regra: o número de cada rectângulo é igual ao produto dos números que estão nos dois rectângulo em que ele se apoia.



No topo da pirâmide apareceu o número 3 556 224.

Que números pôs a Catarina na linha inferior?

Recebemos catorze respostas: Afonso Garcia (Torres Novas), Alberto Canelas (Queluz), Alice Bárrios (Catujal), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Lopes (Abrantes), Carminda Marques (Fafe), Catarina Ferreira (Lamego), Edgar Martins (Queluz), Francisco Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), João Sá, Leonel Vieira (Braga), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Rafael Félix (Bombarral).

As estratégias seguidas foram muito parecidas.

Sejam A, B, C e D os números da linha inferior.

Na linha acima estão os números AB, BC e CD.

Na linha seguinte teremos AB^2C e BC^2D.

Portanto, o número superior será AB^3C^3D.

Decompondo o número no topo da pirâmide em factores primos, temos:

$$3556224 = 2^7 \times 3^4 \times 7^3 = AB^3C^3D.$$

Podemos já concluir que B (ou C) tem de ser 7. Seja B=7.

Como 3 aparece quatro vezes, terá de estar uma vez como factor de A e outra de C.

Não esquecendo que os números iniciais são inferiores a dez, o 2, que aparece sete vezes, estará uma vez como factor de C, outra em A e elevado ao cubo em D.

Conclusão, A = 6, B = 7, C = 6, D = 8.

	3556224		
	1764	2016	
42	42	48	
6	7	6	8

Note-se que A e D podem trocar entre si, bem como B e C.

Número Temático da Educação e Matemática de 2010

Na revista *Educação e Matemática* n° 107 publicámos uma pequena nota anunciando as *Conexões Matemáticas* como tema para o número temático da revista, este ano. Frisámos nessa altura que, quer nos documentos dedicados ao ensino da Matemática, quer nos programas curriculares, se fazem várias referências e recomendações para o trabalho em sala de aula contemplado o estabelecimento de conexões matemáticas nas suas diferentes dimensões. Destacamos agora, com excertos, algumas dessas referências nos programas do ensino básico e do ensino secundário.

No programa de Matemática A (M.E., 2001), na definição de Objectivos e Competências gerais pode ler-se: «A Matemática nas suas conexões com todos os ramos de saber é uma contribuição decisiva na criação de condições para a consciência da necessidade da educação e da formação ao longo da vida, com vista a enfrentar mudanças profissionais e as incontornáveis adaptações às inovações científicas e tecnológicas.» Esta ideia é depois espelhada nas indicações metodológicas «Parte-se, quando possível, de problemas e situações experimentais para que, com o apoio na intuição, o estudante aceda gradualmente à formalização dos conceitos. São identificadas situações para estabelecer conexões entre os diversos temas de forma a proporcionar uma oportunidade de relacionar os vários conceitos, promovendo uma visão integrada da Matemática.» No programa, é também dado um destaque especial às Aplicações e Modelação Matemática, considerada como capacidade transversal a desenvolver nos alunos. Referências idênticas são encontradas nos programas de Matemática B, Matemática Aplicada às Ciências Sociais do ensino regular e recorrente.

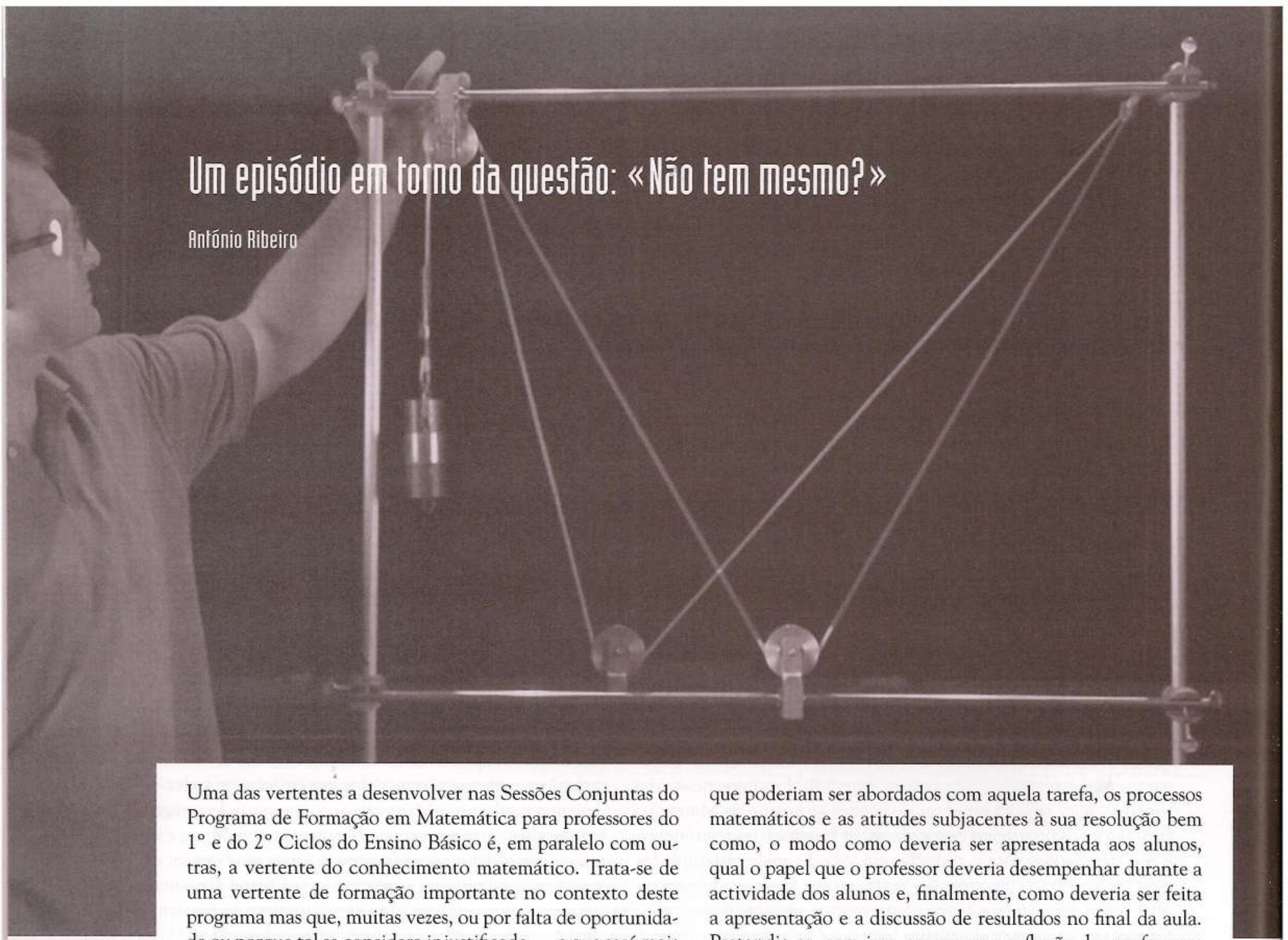
Também no *Novo Programa de Matemática do Ensino Básico* (M.E., 2008), é definido como um objectivo geral: «Os alunos devem ser capazes de estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas. Isto é, devem ser capazes de: identificar e usar conexões entre ideias matemáticas; compreender como as ideias matemáticas se inter-relacionam, constituindo um todo; reconhecer e aplicar ideias matemáticas em contextos não matemáticos, construindo modelos matemáticos simples. Os alunos devem reconhecer a Matemática como um todo integrado, estabelecendo conexões entre aquilo que já aprenderam e aquilo que estão a aprender em cada momento, mas também ser capazes de a usar em contextos não matemáticos. O estabelecimento de conexões é essencial para uma aprendizagem da Matemática com compreensão e para o desenvolvimento da capacidade de a utilizar e apreciar.»

Estas ideias são reforçadas nas orientações metodológicas: «Para além destas capacidades [Resolução de problemas, raciocínio matemático e Comunicação matemática], sobre as quais directa ou indirectamente se têm debruçado numerosas experiências curriculares em Portugal, este programa valoriza também outras capacidades como as de representação e de estabelecimento de conexões dentro e fora da Matemática, contempladas quer no trabalho com as capacidades transversais apresentadas neste ponto, quer no trabalho com os diversos temas matemáticos. A exploração de conexões entre ideias matemáticas, e entre ideias matemáticas e ideias referentes a outros campos do conhecimento ou a situações próximas do dia-a-dia do aluno, constitui também uma orientação metodológica importante. Os alunos têm de compreender como os conhecimentos matemáticos se relacionam entre si, ser capazes de usar a linguagem numérica e algébrica na resolução de problemas geométricos, nos mais diversos contextos.»

Estas e outras referências às Conexões Matemáticas nos documentos que orientam o trabalho dos professores em sala de aula têm com toda a certeza incentivado e inspirado experiências de ensino e aprendizagem que têm na sua essência o estabelecimento de conexões matemáticas. Vimos assim reforçar o convite aos nossos leitores para que partilhem reflexões, ideias ou experiências sobre este tema.

Um episódio em torno da questão: «Não tem mesmo?»

António Ribeiro



Uma das vertentes a desenvolver nas Sessões Conjuntas do Programa de Formação em Matemática para professores do 1° e do 2° Ciclos do Ensino Básico é, em paralelo com outras, a vertente do conhecimento matemático. Trata-se de uma vertente de formação importante no contexto deste programa mas que, muitas vezes, ou por falta de oportunidade ou porque tal se considera injustificado — o que será mais frequente em formações destinadas a professores do 2° Ciclo do EB — é um pouco mais esquecida. Neste texto procura-se descrever um episódio em que essa vertente foi explorada fazendo-se referência ao respectivo contexto, aparentemente, não muito favorável.

Era hábito, nas Sessões Conjuntas do Programa de Formação já referido, prepararem-se tarefas para propor aos alunos. Estas propostas partiam, sobretudo, da parte do formador mas os formandos eram encorajados a fazer as suas próprias propostas. Numa dessa sessões, logo no início, duas das professoras, da mesma escola, e que frequentavam o Programa apresentaram uma proposta de tarefa destinada a alunos do 6° ano de escolaridade de uma escola do distrito de Viseu (figura 1).

A ideia subjacente era propor aos alunos que descobrissem qual dos «caminhos (o castanho ou o preto) era o mais longo». Dados os conteúdos que aqueles alunos, naquela altura do ano, estavam a estudar, entendeu-se que seria um bom desafio. Antes de mais porque vinha de encontro aos objectivos do programa e, depois disso, também porque se entendeu que a proposta, se feita em determinadas condições, poderia contribuir para o desenvolvimento de atitudes e de processos matemáticos de elevado nível. Assim, aproveitou-se a proposta feita e procurou-se elaborar um roteiro onde se identificassem e referissem os temas e os conteúdos que poderiam ser abordados com aquela tarefa, os processos matemáticos e as atitudes subjacentes à sua resolução bem como, o modo como deveria ser apresentada aos alunos, qual o papel que o professor deveria desempenhar durante a actividade dos alunos e, finalmente, como deveria ser feita a apresentação e a discussão de resultados no final da aula. Pretendia-se, com isso, promover a reflexão dos professores em torno daquela tarefa e não pareceu oportuno (nem necessário) aprofundar o conhecimento matemático sobre os conteúdos matemáticos envolvidos.

A proposta, trabalhada em grupos de 4 ou 5 alunos, resultou num excelente ambiente de trabalho. Com efeito, tanto as professora envolvidas como o formador consideraram que, entre outras, se criaram excelentes oportunidades para que os alunos i) pensassem; ii) experimentassem estratégias de resolução diversificadas; iii) verificassem o poder da argumentação e iv) interagissem entre si e com os professores presentes. Enquanto que alguns alunos tentaram (aparentemente sem sucesso) recorrer ao compasso, outros utilizaram fios de linha para contornar «os percursos» e posteriormente comparar, outros contaram o número de quadrículas que cada percurso atravessava, outros tentaram verificar quantas «circunferências completas» se poderiam construir com todos aqueles arcos de circunferência e outros, ainda, ensaiaram alguns cálculos no sentido de determinar a medida exacta do comprimento de cada percurso.

Na apresentação e discussão de resultados ficou claro que todos os alunos tinham chegado à mesma conclusão mas foram identificadas e analisadas algumas das dificuldades sentidas pelos alunos bem como todas as estratégias seguidas para chegar às conclusões.

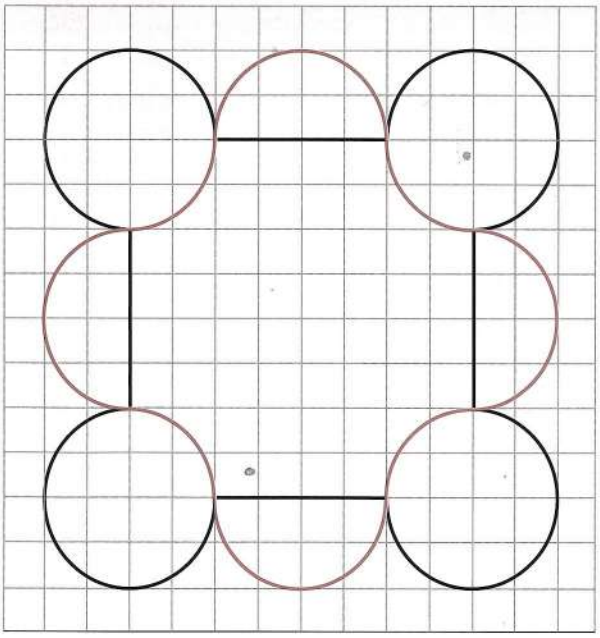


Figura 1. Descobrir o caminho mais longo.

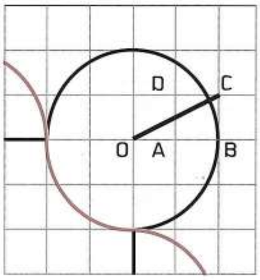


Figura 2

Na Sessão Conjunta que se seguiu a esta aula e, já num contexto de análise e de reflexão sobre o que se tinha passado, alguém referiu que a estratégia seguida por alguns alunos, designadamente, contar as quadrículas atravessadas por cada um dos percursos não tinha sentido uma vez que, na opinião desses professores, em causa não estavam medidas de superfície mas sim medidas de comprimento. Levantou-se, então, a seguinte questão: «Não tem mesmo?».

Sabia-se que os alunos não seriam capazes de responder a esta questão mas o nosso objectivo foi o de promover alguma discussão e reflexão sobre o conhecimento matemático e rever alguns conceitos de trigonometria.

Nessa sessão foi defendido que o comprimento de arco de circunferência em cada quadrícula não era sempre igual, razão pela qual não se poderia utilizar uma estratégia baseada na contagem dos quadrados atravessados. Para o demonstrar (figura 2), uma das professoras presentes apresentou o seguinte raciocínio:

1. Se traçarmos o segmento $[OC]$, o triângulo $[OBC]$ é rectângulo em B.
2. A medida do cateto $[OB]$ é o dobro da medida do outro cateto $[CB]$.
3. Resulta daí que a amplitude do ângulo formado em C é o dobro da amplitude do ângulo formado em O. Ou seja, a amplitude do ângulo formado em O é igual a 30° e a do ângulo formado em C é igual a 60°.
4. O arco de circunferência contido no triângulo $[OBC]$ deveria medir 30° porque corresponde ao ângulo ao centro BOC.
5. Uma vez que o arco de circunferência contido na quadrícula $[ABCD]$ é maior do que o arco de circunferência contido no triângulo $[COB]$, a amplitude do arco contido na quadrícula $[ABCD]$ é superior a 30°.

Esta conclusão foi aceite por todos e a justificação pareceu, na altura, razoável. Afirmámos que havia um lapso naquele raciocínio. Porque a hora já estava adiantada e, também, porque estes professores tinham tido formação em Cabri no âmbito do programa que frequentava, resolvemos pedir-lhes para pensarem, posteriormente, na questão porque seria retomada mais tarde.

Na semana seguinte retomou-se a questão que havíamos colocado. Com efeito todos os professores tinham já concluído, com recurso à aplicação, que a amplitude o ângulo formado em O não era 30° e que a amplitude do ângulo formado em B também não era 60°. Se tinha sido fácil medir as amplitudes dos ângulos, o mesmo não teria acontecido com a medição dos comprimentos dos arcos. Assim, para alguns, persistia a dúvida quanto ao comprimento dos arcos que atravessavam os quadrados e, para outros, começava a ser evidente que, evitado o erro de raciocínio que tinha sido cometido, talvez a conclusão pudesse ter sido diferente da inicial. Foi-lhes dito, ali mesmo, como medir arcos com recurso ao Cabri. Fez-se uma construção e fizeram-se as respectivas medições. De facto os comprimentos dos arcos de circunferência eram todos iguais! Restava-nos, agora, verificar onde é que se havia cometido o erro e não foi difícil perceber que, afinal, a amplitude do ângulo formado em C não era o dobro da amplitude do ângulo formado em O! (Era falsa a conclusão tirada em 3).

Esta situação prestou-se a uma revisão das principais funções trigonométricas e, ainda, para concluir que afinal, com um processo geométrico simples se pode dividir uma circunferência em 12 partes iguais.

Tratou-se, tal como se referiu no início, de uma situação que conduziu os formandos à revisão de um conjunto de conteúdos científicos conhecidos mas que, entretanto, tinham sido esquecidos e que foi induzida por uma tarefa aparentemente simples envolta numa questão também ela muito simples.

António Ribeiro
ESE/IP de Viseu

O propósito, sentido e utilidade das tarefas com tecnologia no trabalho algébrico

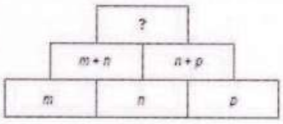
Muitas vezes sentimos que os alunos têm dificuldades quando dão os seus primeiros passos na Álgebra, nomeadamente na apropriação do conceito de variável e na falta de sentido que atribuem à representação simbólica algébrica, quando trabalham com expressões com variáveis e equações. Parece existir um fosso entre o trabalho que realizaram ao nível da Aritmética e as novas exigências na introdução à Álgebra e procurar razões que facilitem a transição entre esses dois domínios, tem sido objecto da atenção de vários investigadores e preocupação central de vários projectos.

Um artigo de Janet Ainley, Liz Bills e Kirsty Wilson de 2005[1], sobre o projecto *Purposeful Algebraic Activity*, destaca o papel que têm o sentido e a utilidade em tarefas desenhadas para utilizar a folha de cálculo, de modo a fazer sentir a necessidade da representação simbólica algébrica pelos alunos. O que procuro fazer, em seguida, é descrever e destacar as ideias principais, que emergem a partir de uma das tarefas desenvolvida com alunos de 11 a 12 anos na iniciação à Álgebra.

Uma tarefa que surge frequentemente, no Reino Unido, como recurso para o ensino da Álgebra nos primeiros anos do ensino secundário, é a que se apresenta na figura 1.
Este exemplo, incluído na secção *Equações, fórmulas e identidades*, do livro que serve de apoio ao currículo das escolas secundárias, é dirigido ao 1° ano (idades compreendidas entre os 11 e 12 anos). A tarefa parece bastante limitada porque, embora o texto se refira a números, não existe qualquer número no exemplo dado, mas um contexto puramente algébrico e não é feita qualquer ponte com exemplos de jogos numéricos semelhantes já explorados anteriormente na brochura. A pergunta que os autores colocam é a de saber qual o benefício de escrever a expressão final ‹tão simples quanto possível›, $m + 2n + p$ e no que esta se distingue de $m + n + n + p$, num contexto que não é significativo para os alunos.

No âmbito do projecto *Purposeful Algebraic Activity*, embora se critique esta limitação da tarefa, reconhece-se que a estrutura da pirâmide tem potencialidades para desenvolver a actividade algébrica, pelo que se propõe conceber uma tarefa semelhante, com base num jogo designado por Jogo das Feiras (*FairGround*), usando a folha de cálculo, sugerindo que «o arranjo espacial das células fornece uma metáfora visual para a estrutura aditiva repetitiva do problema matemático»

The number in each cell is the result of adding the numbers in the two cells beneath it.



Write an expression for the number in the top cell.
Write your expression as simply as possible.

Figura 1

(p. 19). E se a pirâmide é usada para actividades numéricas, quando se pretende elaborar tarefas com um propósito e sentido, então um conjunto de questões a colocar inicialmente deve passar por ver as implicações de mudar números da base, nas linhas acima e no total.

O jogo tem jogadores (os alunos) e um vendedor, que anima a ‹barraca› da feira. A tarefa é fornecida aos alunos numa folha de trabalho, e tem por objectivo, a partir de quaisquer cinco números, colocados numa ordem qualquer, na coluna à esquerda, conseguir obter, na célula mais à direita, o maior total possível ou um valor que seja superior a um outro, fixado pelo vendedor (ver figura 2). Ganha quem consegue ultrapassar o valor fixado ou quem atinge o máximo.

A tarefa tem várias fases e começa pela construção, pelos alunos, do modelo na folha de cálculo e sua exploração, trocando as posições dos números na 1ª coluna, de modo a obterem o máximo na última. Após um jogador ter ganho, o vendedor indica outro conjunto de números, mas os alunos são agora desafiados a encontrar um método para obter o máximo para qualquer conjunto de números. O desafio final é encontrar uma forma do vendedor calcular o total máximo, a partir de qualquer conjunto de números dados, ou seja, os alunos poderem tomar o papel do vendedor.

Uma vez que a folha de cálculo torna as fórmulas invisíveis para os alunos, as primeiras experiências destes são com números, o que passa por trocar as posições dos números iniciais e observar os efeitos nas outras células, facto que reforça a noção de referência de célula numa fórmula, como uma variável, ou seja, podendo representar qualquer número que lá se pode colocar. Face a estratégias de alunos que se centram apenas na procura do valor máximo, em tentativas sucessivas, as intervenções do professor levam-nos a pensar em como o

	A	B	C	D	E
1	4				
2	2	6			
3	1	3	9		
4	3	4	7	16	
5	5	8	12	19	35

There is a game at the school fair. Players are given five numbers to enter into column A in any order they wish. The stallholder sets a target number. If the number that appears on the right (column E) is the same as or higher than the target number then the player wins!

Figura 2

obter, procurando que eles se centrem na observação da estrutura aritmética da folha de cálculo, subjacente à matriz de números considerada.

As fórmulas da folha de cálculo tornam a estrutura iterativa de coluna para coluna muito clara, mas não estão visíveis para os alunos quando eles trabalham (figura 3).

A fase final é fazer sentir a necessidade de introduzir a notação simbólica algébrica com o propósito de fornecer ao vendedor um método expedito para calcular rapidamente o total, dado qualquer novo conjunto de cinco números, tarefa que este tem de desempenhar, logo que um jogador ganha, para o jogo prosseguir, e sem que possa usar a folha de cálculo para experimentar e validar valores. Uma vez que o efeito acumulado da estrutura aritmética numa única fórmula é invisível, porque os cálculos intermédios nas sucessivas colunas vão sendo realizados recursivamente a partir da coluna anterior, o professor sugere que o trabalho seja realizado com lápis e papel.

Um exemplo curioso, é o de um aluno que trabalha com exemplos numéricos genéricos. A partir dos números 3, 5, 4, 6, 10, colocados na 1ª coluna, por esta ordem, ele regista em papel na célula final, 3 + 5 + 5 + 4 + 5 + 4 + 4 + 6 + 5 + 4 + + 4 + 6 + 4 + 6 + 6 + 10. Ainda sem sentir a necessidade de agrupar termos e simplificar a expressão, o aluno manifesta agrado por ter mostrado que o número 4, que está na posição central, é o mais usado, enquanto os números dos extremos (o 10 e o 3) são os menos usados.

	A	B	C	D	E
1	1				
2	4	=A1+A2			
3	2	=A2+A3	=B2+B3		
4	3	=A3+A4	=B3+B4	=C3+C4	
5	5	=A4+A5	=B4+B5	=C4+C5	=D4+D5

Figura 3

Embora este e alguns outros alunos tenham preferido usar exemplos numéricos para ilustrar o método geral, uma das alunas, desafiada a encontrar a estratégia para seis números, optou por trabalhar algebricamente, iniciando com *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* e colocando na célula final $10c + 10d + a + 5e + 5b + f$, escrevendo o comentário: «*c* e *d* aparecem mais frequentemente, pelo que é onde os maiores números devem ser colocados» (p. 23). Segundo os autores, foi este desafio com seis números que permitiu ajudar os alunos a apreciar a utilidade da representação simbólica algébrica.

Este artigo começa por colocar em evidência o papel do propósito e sentido da tarefa, a par das questões que o professor coloca, quando ajuda a focar a atenção e o trabalho dos alunos em aspectos considerados importantes, tendo em conta a estrutura do jogo, as fórmulas da folha de cálculo e a notação simbólica algébrica. Outro aspecto importante, consiste em fazer evoluir os alunos das suas tentativas em encontrarem o máximo do total, para uma estratégia explicativa do seu porquê, um propósito que vai tornando a estrutura subjacente ao intervalo de números da folha de cálculo progressivamente mais visível e simultaneamente trazendo significado e utilidade à representação simbólica algébrica, nomeadamente aos conceitos de variável e de expressão com variáveis.

Nota

1 Ainley, J., Bills, L. & Wilson, K. (2005). Purposeful task design and the emergence of transparency. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 17–24. Melbourne: PME.

José Duarte

Mais um Scratch Day

No dia 22 de Maio de 2010 realizaram-se por todo o mundo eventos de celebração dos três anos de disponibilização na Internet do ambiente gráfico de programação Scratch, com aplicação em contextos educativos e também de lazer, desenvolvido pelo *Massachusetts Institute of Technology* — MIT.

O *Scratch Day* é um acontecimento mundial, onde pessoas de todas as idades se encontram para conhecer outros *Scratchers*, partilhar projectos e experiências e aprender mais sobre o *Scratch*.

Uma das celebrações deste dia, em Portugal, foi concretizada num evento gratuito, aberto a todos: formandos do Programa de Formação Contínua em Matemática, para professores do 1° e 2° Ciclos, alunos e professores da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, professores e educadores interessados, das 9 h às 13h 30min, nesta mesma instituição. Com os adultos vieram crianças...filhos, netos, alunos... Entre os monitores contavam-se mais crianças do que adultos — alunos da Escola EB 2,3 de Azeitão que frequentam o Clube *Scratch time* (5°, 6° e 7.° anos). Foi uma manhã especial que ficará na memória dos cerca de 90 participantes no encontro.

Para saber mais pode aceder: Página do evento: `http://scratchday2010.wordpress.com/`; Blogs do Clube *Scratch time*: `http://scratchtime.blogs.sapo.pt/` e `http://www.clubescratchtime.blogspot.com/`; Página do *Scratch* SAPO: `http://kids.sapo.pt/scratch/`

Teresa Martinho Marques,
Programa de Formação Contínua em Matemática,
para professores do 1° e 2° Ciclos da ESE de Setúbal

Literacia Matemática — uma procura de contributos para formar cidadãos mais críticos e intervenientes

Esta reflexão foi realizada para a apresentação do livro *20 anos de temas na EeM* do qual o texto com o mesmo nome faz parte. Foi organizada com base num conjunto de questões que podem ajudar a pensar sobre um dos maiores desafios que actualmente as escolas enfrentam, que é o de como preparar melhor os alunos para a sua vida futura depois de deixar a escola.

- O que deve oferecer a escola, e neste caso a Matemática, aos futuros cidadãos?
- Será que o entendimento de literacia matemática é único e universal?
- Um matemático e um educador matemático terão o mesmo entendimento deste conceito?
- Como é que os professores de Matemática perspectivam esta preocupação nas suas práticas?
- Como é que a formação de professores integra esta discussão nas vivências dos futuros professores?

O artigo em referência tentou responder a algumas destas questões procurando e organizando ideias sobre literacia matemática.

Literacia matemática e saber matemático básico :: Dimensões para a literacia matemática :: A literacia matemática e os estudos do PISA :: A literacia matemática dos estudantes portugueses :: Aspectos afectivos e interventivos da literacia matemática :: Os professores e a literacia matemática.

Esta reflexão termina com duas ideias fortes, uma fotografia de jovens alunos do 4° ano a trabalhar em matemática com o recurso a actividades interactivas e a dúvida sobre o que já sabemos dos contributos que a matemática pode dar para formar cidadãos mais críticos e intervenientes.

Pense nisto!

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa

APM — 2010

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2010

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `http://www.apm.pt`

Assinaturas das revistas para 2010

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções