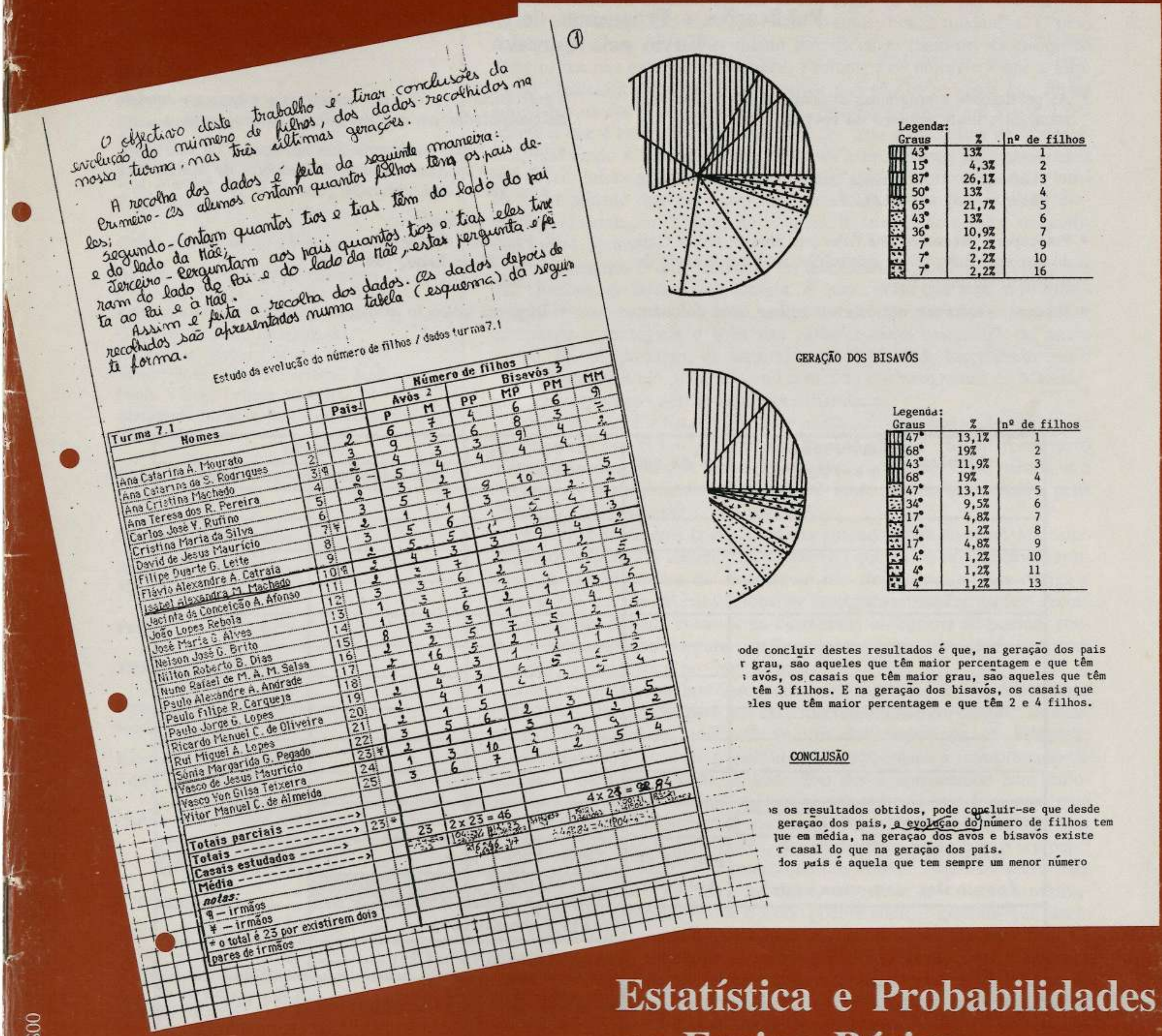
Educação e Matemática

N.º 9

1.º trimestre de 1989



Estatística e Probabilidades no Ensino Básico

Revista da Associação de Professores de Matemática

Publicações e Programas de Computador
Envio pelo Correio

- As publicações e programas disponíveis são os que vêm anunciados **neste número da revista**, sob os títulos

  — *Publicações APM*
  — *Publicações e Programas Educacionais do Projecto Minerva, Pólo do DEFCUL.*

- Fotocopie e **preencha** uma ficha (ver abaixo; utilize mais do que uma ficha se for necessário; note que o envio de software tem porte fixo).
- No caso de software, não deixe de indicar, além do título, **a referência** (51, 52, etc.) respectiva e a **marca e modelo do computador** em que vai utilizar os programas.
- Envie a ficha, juntamente com um cheque ou vale postal em nome da **Associação de Professores de Matemática** e no **valor total** calculado, para

  Paulo Abrantes
  Faculdade de Ciências
  Av. 24 de Julho, 134 - 4.º
  1300 Lisboa

- Escreva a indicação «pedido de publicações» no sobrescrito.

Títulos publicações ou software	nº de ex.	preço unitário (*)	custo publicações	custo software
SÓCIO DA APM ☐ Nº ☐	subtotais ⟶			
NÃO SÓCIO ☐ (assinalar com uma cruz)	portes do correio	pub. 15%	+	
		software fixo 120$00		+
Nome		totais parciais	(1)	(2)
Morada		valor total ((1) + (2)) ⟶		
Código Postal		Para uso da APM	Pedido recebido em	
Data do pedido		ass.:	Respondido em	

(*) note bem: as publicações da APM têm custos unitários diferentes para sócios e não sócios da APM

FICHA TÉCNICA

Título da publicação:

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
N.º 9, 1.º trimestre de 1989

Directora: Leonor Moreira

Redacção:

António Bernardes
Eduardo Veloso
Fernando Nunes
Henrique Guimarães
José Manuel Duarte
Paulo Abrantes

Colaboraram neste número:
Albano Silva, António Bernardes, Cristina Loureiro, Eduardo Veloso, Fernando Nunes, Graça Correia, Graciosa Veloso, Henrique M. Guimarães, Isabel Garton, João F. Matos, José Alberto Ferreira, José Paulo Viana, Leonor Moreira, Margarida Silva, Odete Bernardes, Paulo Abrantes

Capa: concebida e executada por Eduardo Veloso

Entidade Proprietária:

Associação de Professores de Matemática

Periodicidade: Trimestral

Tiragem: 2000 exemplares

Fotocomposição, montagem e fotolito:

Execução e oferta da Texto Editora, Lda.

Impressão: Costa e Valério

N.º de Registo: 112807

Correspondência:

Associação de Professores de Matemática
a/c de Leonor Moreira
Av. 24 de Julho, 134, 4.º
1300 LISBOA

NOTA: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

As probabilidades da estatística

Estamos numa altura em que vão ser propostos novos programas que irão substituir os actuais, alguns já em vigor há mais de 10 anos. No mundo em permanente evolução onde vivemos, houve mudanças. O peso de algumas áreas do conhecimento modificou-se bastante. O ensino da Matemática não escapou à mudança, evoluiu, e os objectivos que a Educação Matemática coloca como centrais não são os mesmos que foram adoptados na época da elaboração dos programas ainda em vigor. Consoante o que é entendido como finalidades para a disciplina de Matemática, têm vindo a lume diferentes opiniões acerca das linhas orientadoras que devem informar os currículos. As possibilidades formativas deste tema ou a actualidade daquele outro são razões apontadas para a sua inclusão ou remodelação. Existe, no entanto, unanimidade quando se analisam certos assuntos.

Senão vejamos o que acontece, ao tentarmos caracterizar a época em que vivemos, de uma forma sucinta. É quase certo que a palavra **informação** é mencionada. De facto, a quantidade de informação produzida, compilada e divulgada é uma das características marcantes do nosso tempo. Não é, portanto, de admirar a constatação do incremento que o uso da Estatística tem tido. E como conteúdo dos programas de Matemática, quais poderão ser as suas potencialidades?

Creio que não é a Estatística, nem qualquer outro conteúdo, que pode modificar só por si um programa de ensino. É que não interessa tanto transmitir conhecimentos como desenvolver capacidades que permitam o domínio do conhecimento humano. Será neste sentido que valerá a pena discutir o seu interesse como conteúdo.

Não existe ainda uma tradição da sua aprendizagem ao nível do ensino básico ou mesmo do secundário, fenómeno que não é tipicamente português. A falta de dados daí decorrente não impossibilita, mas obriga a colocar em termos probabilísticos as hipotéticas transformações decorrentes da sua entrada como tema curricular, embora já se possam enumerar razões objectivas para justificar essa entrada, que têm a ver com o papel da Estatística no mundo actual.

Somos regularmente bombardeados com resultados de inquéritos, estimativas e extrapolações para nos esclarecerem e situarem melhor. E esclarecem? E situam-nos melhor? Se um dos objectivos da Educação Matemática deve ser o de possibilitar a compreensão e interpretação do que se passa à nossa volta, quando isso nos é apresentado com dados estatísticos, é necessário que saibamos compreendê-los. Esta será uma razão para incluir a Estatística nos currículos do ensino obrigatório. Mas há mais, e não menos importantes, que se prendem ainda com o seu papel actual, como por exemplo a motivação dos alunos. Algumas vezes feita de forma um pouco forçada e artificial, no estudo deste tema a motivação existe naturalmente, já que o aluno poderá abordar assuntos que fazem parte do seu meio envolvente e, talvez, até das suas preocupações. A própria invasão da estatística no nosso quotidiano fornece obviamente um campo alargado e de fácil acesso para o desenvolvimento de hábitos de consulta e pesquisa. É também importante reconhecer que o seu campo de aplicação é muito diversificado, possibilitando a ligação com várias áreas, potencialidade que pode ser usada abrindo horizontes nas aplicações da Matemática e explorada, por exemplo, em trabalhos de projecto. A diversidade alcançada é capaz de elevar o trabalho em grupo à categoria de forma organizativa mais própria e natural.

Para os que acham importante que a Educação Matemática proporcione, não só o desenvolvimento de capacidades de compreensão e interpretação, mas que permita também a aquisição de atitudes críticas, há ainda um outro aspecto relevante que diz respeito à identificação daquilo que se pode chamar de *poluição informativa*. Não deixa de ser curioso observar como a Estatística é por vezes usada de forma truncada e nitidamente parcial, induzindo em erro os receptores. É importante que quem frequente a Escola possa aí desenvolver as suas capacidades de análise, de crítica e de intervenção, incluindo na sua bagagem cultural as armas necessárias para se defender, evitando os erros por vezes veiculados nas informações recebidas. Usando a Estatística como suporte, a Educação Matemática pode viabilizar o desenvolvimento destas capacidades, muitas vezes ignoradas no nosso ensino.

Fala-se muito das vantagens e desvantagens relativas ao uso de materiais já correntes ou em vias de banalização. Refiro-me às calculadoras e aos computadores. É interessante verificar que poderão ser usados pertinentemente aqui, pois se encontram vocacionados para tarefas estatísticas.

Ainda não referi um capítulo da Matemática que está indissoluvelmente ligado à Estatística: a Teoria das Probabilidades. Há expressões como *Programação a médio ou longo prazo, Factores de decisão* ou *Estimativa de resultados*, para falar apenas em algumas, que fazem parte do vocabulário corrente e que estão normalmente ligadas ao conceito de probabilidade. O estudo das probabilidades também pode partir do dia-a-dia e encerra em si o aspecto lúdico, sempre atraente para quase todos os alunos, além de lhes possibilitar uma visão não maniqueísta da Matemática. O habitual *só pode estar certo ou errado* é substituído por *é impossível, é certo, é pouco provável, é muito provável*... Este é também um assunto onde facilmente se vislumbra a possibilidade de realização de actividades capazes de proporcionar o prazer da descoberta.

Os diferentes cenários, aqui focados ou não, resultantes da introdução curricular da Estatística não se podem tomar como inevitáveis ou impossíveis. Alguns terão probabilidade de concretização tendente para zero, enquanto noutros a probabilidade será sensivelmente maior. Pode até haver quem pense que ela será um conteúdo *novo* mas tratado de forma *velha*, mudando pouca coisa, ou mesmo nada. Se o seu estudo for feito de forma a reduzi-la ao seu esqueleto técnico, apenas acompanhada da transmissão de alguns conceitos, então será mais um assunto que os alunos terão de memorizar sem a preocupação de desenvolver outras capacidades. Nestas condições, terá razão quem não acreditar que alguma coisa irá mudar.

Este número de *Educação e Matemática* dedica algum espaço a estes temas, o que aliás já tinha sido feito em números anteriores, sabendo-se haver uma probabilidade de 0,99 no que diz respeito à inclusão de items de Estatística nos novos programas.

Fernando Nunes

Estatística nas aulas do 7.º ano de escolaridade

Margarida Cristina Silva, Escola Secundária D. Pedro V

Nesta era da informação e tecnologia, existe uma necessidade crescente de transformar o ensino em geral, e o da Matemática em particular, num sentido capaz de responder às necessidades dos alunos enquanto indivíduos e às novas exigências da sociedade moderna.

Na realidade, o ensino da Matemática necessita não só de uma mudança ao nível dos conteúdos programáticos como, fundamentalmente, ao nível dos métodos, das formas de organização das actividades de aprendizagem, do papel do professor (dentro e fora da aula), dos processos de avaliação, do papel dos computadores e calculadoras, etc.

Para além de analisar e discutir estas questões importa ensaiar práticas educativas que melhorem efectivamente o que se sabe estar já inadequado. É neste âmbito que surge o Projecto **MAT**$_{789}$ — que está a desenvolver um currículo experimental de Matemática para os 7.º, 8.º e 9.º anos (futuro 3.º ciclo do ensino básico). O Projecto iniciou-se no corrente ano lectivo com duas turmas do 7.º ano de escolaridade, na Escola Secundária de D. Pedro V.

Entre as situações de aprendizagem proporcionadas aos alunos dessas duas turmas incluiu-se uma sequência de actividades de Estatística, de acordo com o seguinte esquema genérico:

- Números naturais — Problemas: Divisores, múltiplos, números primos (uso sistemático de calculadoras);
- Contagem — Problemas;
- **Iniciação à Estatística;**
- Introdução ao estudo dos gráficos de funções;
- Números relativos — Operações em Z e Q;
- Geometria.

A Estatística é um tema que ainda não foi contemplado nos programas destes níveis de escolaridade. Por outro lado, ocupa um lugar de pouco destaque no Ensino Secundário uma vez que surge apenas no final do programa do 11.º ano e por isso é geralmente *esquecido*. Muitos alunos terminam assim o seu ciclo de estudos secundários sem contactarem sequer com as noções mais elementares da Estatística.

Estatística na escola: porquê?

Conceitos estatísticos como o de média, mediana, acaso, dependência e independência de fenómenos, variância, desvio padrão, percentagem, etc., são actualmente indispensáveis para compreender o mundo que nos rodeia. Desde a formulação das novas teorias da Cosmogénese até às previsões eleitorais ou sondagens da opinião pública, diariamente difundidas pelos *mass media*, a Estatística tem vindo cada vez mais a assumir um papel fundamental.

Por outro lado, ela surge no seguimento da crescente necessidade de compreender e organizar grandes quantidades de dados. Na nossa sociedade quase tudo está massificado: «Há muitos habitantes», «há muitos automóveis», «há muitas opiniões»,... Para interpretar esta realidade é imprescindível *resumir* a informação e portanto utilizar métodos estatísticos de modo a evidenciar o que de mais significativo existe nesse conjunto numeroso de observações.

Também na investigação científica e tecnológica, a Estatística tem assumido cada vez maior importância.

Por tudo isto, a Estatística constitui um tema actual e interdisciplinar, permitindo nas aulas de Matemática a abordagem de variadíssimos assuntos, o que poderá proporcionar factores potenciais de motivação dos alunos e também incentivá-los a assumirem uma atitude mais crítica perante todo o tipo de resultados com que são diariamente confrontados (taxa de inflação, temperatura média, salários reais, risco sísmico, índices de poluição, variação de popularidade, etc.).

A Estatística poderá proporcionar com naturalidade situações favoráveis ao desenvolvimento de capacidades como conjecturar, matematizar, discutir, tomar decisões, comunicar; à realização de actividades no âmbito das aplicações da Matemática, e de projectos; ao trabalho de grupo; à utilização das calculadoras e dos computadores.

A Estatística nas aulas de Matemática do 7.º ano

As actividades foram desenvolvidas ao longo de 14 aulas.

Os alunos trabalharam em grupos de 3 a 5 elementos em torno das seguintes situações:

A — Distribuição de ordenados: O ordenado médio dos funcionários de duas empresas é o mesmo mas o sindicato de uma delas protesta. Porquê?

B — Análise dos resultados de um teste: Perante os resultados de um teste realizado em duas turmas, qual delas tem melhor aproveitamento?

C — Evolução do número de filhos: Como estará a evoluir o número de filhos ao longo das três últimas gerações?

As duas primeiras situações foram apresentadas aos alunos em fichas de trabalho. A última constituiu o tema de um trabalho prático envolvendo recolha, organização e representação de dados.

Esta sequência de actividades pretendia proporcionar aos alunos experiências de trabalho que contribuissem para o desenvolvimento do espírito crítico e para o reconhecimento da necessidade de tratar de forma adequada informações de *carácter estatístico*, nomeadamente:

— reconhecer a necessidade das medidas de centralização;
— escolher a medida de centralização mais conveniente a uma dada situação;
— construir gráficos e tabelas;
— reconhecer a necessidade das medidas de dispersão;
— fazer conjecturas, tirar conclusões e discuti-las.

A — DISTRIBUIÇÃO DE ORDENADOS

Duas empresas (empresa A e empresa B) têm ao seu serviço 9 funcionários, cada uma. Cada um dos directores afixou na respectiva empresa, a seguinte informação:

O ordenado médio dos funcionários é de 54 000$00

O sindicato da empresa B contestou a afirmação, dizendo que o ordenado médio era apenas de 20 000$00. O sindicato da empresa A não levantou quaisquer problemas.

Por que razão isto aconteceu?

No caso da empresa B quem é que tem razão? A direcção da empresa ou o sindicato?

Tabela de Ordenados

FUNCIONÁRIOS	EMPRESA A	EMPRESA B
A	55 c	20 c
B	51 c	27 c
C	58 c	32 c
D	56 c	341 c
E	54 c	5 c
F	51 c	24 c
G	56 c	9 c
H	53 c	12 c
I	52 c	16 c

Pretendia-se, numa primeira fase, que os alunos tomassem contacto com a situação tentando compreender as diferentes reacções dos sindicatos.

Alguns alunos fizeram logo o seguinte reparo:

«O sindicato da empresa B protestou porque o chefe recebe mais que os outros todos. Muito mais: 341 c»

Seguiu-se então a fase do tratamento e análise dos dados:

1. Cálculo da média dos ordenados

Os alunos começaram por verificar que a média para ambas as empresas era de 54 contos, o que levou alguns a fazer o seguinte comentário: *«Afinal os directores não mentiram».*

Como justificar então os protestos do sindicato da empresa B?

Será que todos os funcionários concordaram que se devia protestar?

A estas questões os alunos foram unânimes em responder:

«Porque havia uma grande diferenciação de salários
Exemplo: D — 341; E — 5 c
Nem todos protestavam porque o funcionário D tinha um ordenado altíssimo»

Na realidade, os funcionários da empresa B têm em geral um ordenado muito inferior à média pois o funcionário D usufrui de um ordenado extremamente elevado.

Esta situação ilustra como dois conjuntos de dados podem ser *completamente distintos* e ter, no entanto, a mesma média.

Para o segundo conjunto de dados a média não se aproxima dos valores mais frequentes, isto é, não se refere ao *comportamento médio*, não sendo por isso uma medida de centralização muito significativa.

Isto levou os alunos ao cálculo de outra medida de centralização:

2. Cálculo da mediana dos ordenados

	MÉDIA	MEDIANA
Empresa A	54 c	54 c
Empresa B	54 c	20 c

Neste exemplo a mediana é uma medida de centralização mais relevante do que a média.

Por que razão isso acontece?

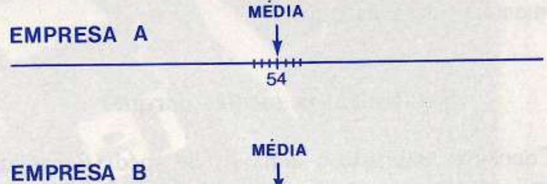
Quais as características destes dois conjuntos de dados que fazem com que a média seja significativa num caso e noutro não?

«É que na empresa A os ordenados estão igualmente divididos o que faz com que os ordenados estejam todos perto da média, enquanto na empresa B há um grande desequilíbrio entre o menor e o maior ordenado».

Torna-se então claro que a média de um pequeno conjunto de dados é afectada, se um deles (no caso da empresa B o ordenado do funcionário D) for significativamente diferente dos restantes. A mediana, no entanto, não é afectada.

Na situação em estudo, a *vantagem* da mediana sobre a média aritmética é que ela é menos influenciada pelos valores extremos.

Os alunos aperceberam-se que apenas com a média e a mediana não é possível caracterizar por completo aqueles dois conjuntos de ordenados. De facto estas medidas «nada nos dizem» sobre o modo como os dados estão *dispostos* em torno da média — dispersão.



3. Desvios — uma medida de dispersão

Os alunos construíram uma tabela dos desvios dos ordenados para cada uma das empresas, calculando para isso a diferença entre cada ordenado e a média.

EMPRESA A	DESVIOS	EMPRESA B	DESVIOS
55	1	20	–34
51	–3	27	–27
58	4	32	–12
56	2	341	287
54	0	5	–49
51	–3	24	–30
56	2	9	–45
53	1	12	–42
52	–2	16	–38

Analisando a tabela dos desvios, fica-se com uma ideia do grau de dispersão dos ordenados, concluindo mais uma vez que na empresa B estes estão mais dispersos — os valores absolutos dos desvios são maiores. O desvio é pois um indicador importante do modo como os dados se agrupam em torno da média. Pode ser útil calcular-se o *desvio médio* — média dos valores absolutos dos desvios. Esta medida de dispersão foi utilizada pelos alunos na situação seguinte.

Os alunos utilizaram as calculadoras como instrumento *natural* de trabalho, sendo interessante notar que usaram os números negativos sem qualquer dificuldade, apesar de não ter havido qualquer estudo prévio formal sobre o conjunto Z.

B — RESULTADOS DE UM TESTE REALIZADO EM DUAS TURMAS

Os dados seguintes representam os resultados de um teste (na escala 0-100) feito em duas turmas. Cada turma tem 20 alunos.

Turma A: 83, 79, 57, 92, 29, 81, 86, 49, 83, 68, 99, 69, 84, 12, 87, 86, 38, 81, 58, 79

Turma B: 71, 81, 73, 83, 80, 84, 76, 12, 72, 71, 70, 93, 13, 90, 80, 73, 91, 70, 99, 88

Qual das duas turmas tem melhor aproveitamento? A rápida leitura destas notas não deixa *má impressão*, mas uma vez que se pretende apreciar objectivamente os resultados, devemos fundamentar o nosso juízo.

Para isso, os alunos começaram por calcular algumas medidas estatísticas:

1. Cálculo da média, mediana e desvio médio

	TURMA A	TURMA B
Média	70	73,5
Mediana	80	78
Desvio médio	18	13,7

Observando os resultados obtidos nada se pode concluir sobre a eventual diferença de aproveitamento entre as duas turmas uma vez que as medidas encontradas são valores muito próximos.

Por essa razão procedeu-se à classificação das notas, mediante a sua condensação numa tabela indicando o número de vezes que cada nota se repete: frequência absoluta dos resultados.

As notas são agrupadas em classes.

2. Construção da tabela de distribuição das frequências

Dados agrupados	Turma A	Turma B
10-19	I	II
20-29	I	
30-39	I	
40-49	I	
50-59	II	
60-69	II	
70-79	II	~~IIII~~ III
80-89	~~IIII~~ III	~~IIII~~ I
90-100	II	IIII

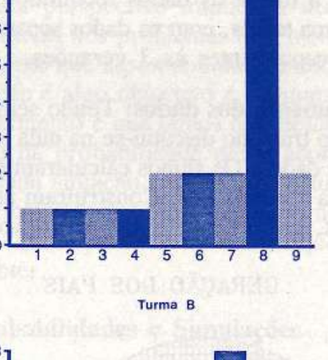
Ficámos assim com uma ideia aproximada da distribuição das notas em ambas as turmas. A conclusão a que os alunos chegaram foi exactamente que:

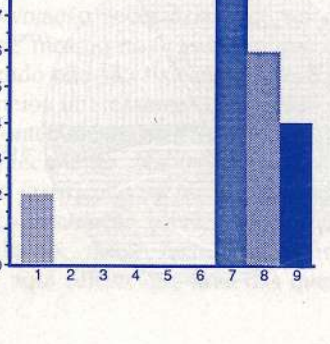
«Na turma A os valores estão mais distribuídos do que na turma B, que é mais concentrada nos valores mais altos».

Esta situação ilustra a importância de recorrer a tabelas de frequências quando se faz uma análise de dados.

No entanto, a representação gráfica é por vezes muito mais sugestiva acerca da distribuição duma variável do que uma tabela de frequências.

3. Construção de gráficos de barras





4. Conclusões

Efectuado o pequeno estudo estatístico sobre a situação apresentada, é necessário responder à questão inicial: Qual das duas turmas tem melhor aproveitamento?

«Eu acho que a turma B é melhor, porque a turma A tem mais alunos com notas negativas e razoáveis.

A média das notas dos alunos da turma A foi de 70 e da turma B foi de 73,5. A turma B foi melhor.

Também acho que a turma B é melhor porque tem 18 alunos com notas entre 70 e 100 enquanto a turma A só tem 12 alunos com notas entre 70 e 100. A turma B tem mais alunos com melhores notas. (vê-se nos gráficos muito bem)»

C — EVOLUÇÃO DO NÚMERO DE FILHOS NAS 3 ÚLTIMAS GERAÇÕES

Esta terceira actividade consistiu num projecto realizado pelos alunos e envolvendo trabalho individual e trabalho de grupo.

1. Objectivo: Estudar a evolução do número de filhos nas três últimas gerações, utilizando como amostra o conjunto dos alunos da turma, os seus pais e avós.

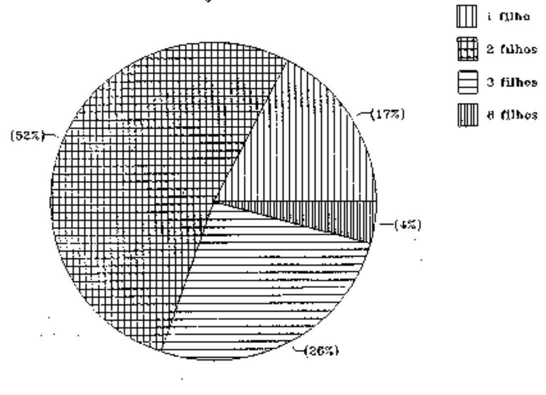
2. Recolha de dados: Cada aluno registou o número de filhos dos seus pais (o próprio e os irmãos), dos seus avós (paternos e maternos), e dos seus bisavós (4 casais).

Pai Mãe Pai Mãe	Pai Mãe Pai Mãe	Bisavós
Pai Mãe	Pai Mãe	Avós
Pai	Mãe	Pais
Aluno		

Prosseguiu-se com o registo de todos os dados que seriam depois utilizados por cada grupo. Cada aluno comunicou à turma os dados recolhidos, organizando-se assim uma tabela, com os dados separados em 3 conjuntos correspondentes às 3 gerações.

3. Tratamento dos dados: Tendo sempre presente o objectivo do trabalho discutiu-se na aula a melhor forma de tratar os dados. Os alunos calcularam para cada geração a média e a mediana. Construíram ainda tabelas de frequências, gráficos de barras e gráficos circulares.

GERAÇÃO DOS PAIS



4. Discussão dos resultados: Os resultados foram analisados e discutidos pela turma. Para auxiliar e enriquecer a discussão foram fornecidos dados relativos à evolução ao longo deste século (em Portugal e na França) da taxa de natalidade.

5. Relatório final: Cada aluno dispôs de uma semana para organizar e apresentar um relatório sobre o estudo feito. O tipo de relatório foi discutido na turma, tendo-se estabelecido que deveria incluir: o objectivo do trabalho; os métodos que foram utilizados; uma apresentação dos dados da forma considerada mais conveniente; e uma secção final de conclusões.

Balanço final

As actividades de Estatística realizadas pelos alunos constituiram globalmente um dos momentos de aprendizagem mais interessantes e significativos. As situações escolhidas revelaram-se motivadoras e proporcionaram oportunidades para se discutir e relacionar, com muita *naturalidade*, questões aparentemente muito diversas (tanto *externas* como *internas* à Matemática).

Para o bom ambiente de aprendizagem conseguido, terá contribuído o *carácter problemático* das situações propostas assim como as formas de trabalho adoptadas. O trabalho de grupo e a realização de um *pequeno* projecto revelaram-se metodologias apropriadas. A Estatística parece ser de facto uma fonte de interessantes actividades na escola mas não é difícil imaginar formas aborrecidas e desmotivadoras de a *ensinar*...

O principal foco das atenções foi sempre colocado no estudo das situações concretas e nunca nos «assuntos» matemáticos envolvidos. Isto não quer dizer que não tenha havido preocupação com os conceitos. Foi mesmo elaborado um texto de apoio, contendo diversos outros exemplos e uma sistematização dos conhecimentos adquiridos, que foi distribuído aos alunos na altura em que estavam a preparar os relatórios finais.

Estes relatórios sobre o estudo da evolução do número de filhos deram preciosas indicações para uma avaliação global do trabalho desenvolvido. Alguns alunos apresentaram trabalhos muito cuidados tanto do ponto de vista do conteúdo como da forma (textos dactilografados com gráficos bastante perfeitos). Um dos alunos incluiu gráficos feitos por computador, através de uma folha de cálculo. As trocas de impressões com a professora, durante a elaboração do relatório, mostraram que este trabalho era, para muitos alunos, uma *coisa importante*.

Nota final. As experiências de trabalho descritas neste artigo inserem-se como foi referido, no Projecto MAT_{789}, tendo sido por isso planeadas, executadas e avaliadas por uma equipa constituída, para além da autora do artigo, por Leonor Cunha Leal, Eduardo Veloso e Paulo Abrantes.

Computadores e Probabilidades

João Filipe Matos, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

É importante compreender os desafios colocados pela utilização das novas tecnologias de informação — e em particular dos computadores — em todas as esferas da sociedade, e as suas implicações na educação. E neste domínio é necessário explicitar propostas pedagógicas consistentes para a utilização curricular dos computadores em Matemática, quer na sala de aula, quer em contextos informais de aprendizagem como os Clubes e Núcleos de Informática.

Por outro lado, é igualmente importante contribuir para a compreensão das implicações que a utilização dos computadores poderá ter na relevância dos diversos tipos de actividades a realizar em Matemática.

É nesse contexto que se aborda, através de um exemplo concreto, a problemática da utilização do LOGO em actividades de investigação no domínio das Probabilidades e se pretende contribuir para a clarificação do *interface* entre o LOGO e a Matemática.

Os computadores como tecnologias cognitivas

Muito antes da era dos computadores, diversos instrumentos — tais como a linguagem escrita — permitiram realizar a extensão do nosso pensamento. Esta extensão pode ser conceptualizada sobretudo como contributo para a elaboração e descoberta. Estes instrumentos são designados por Pea (1987) como *tecnologias cognitivas.* Os computadores constituem um dos melhores exemplos de instrumentos propiciadores de desenvolvimento cognitivo e de produção intelectual. Por exemplo, no domínio da Matemática, ao permitirem a análise e discussão dos passos dados na resolução de um dado problema, eles têm a particularidade de «tornar externos os produtos intermédios do pensamento» (Pea, 1987, p. 91) e dessa forma contribuir para uma melhor compreensão dos aspectos mais profundos da questão ou problema em estudo.

A utilização do computador, como ferramenta, para realizar uma abordagem dum problema (por exemplo através de uma simulação) ou para ensaiar uma dada estratégia, constitui um exemplo do papel do computador como tecnologia cognitiva na educação matemática.

Probabilidades e Currículo

A ideia de que as Probabilidades devem ser um tema integrante dos currículos de Matemática tem vindo a ser defendida desde há alguns anos, em Portugal, por diversos autores (Matos, 1983; Ponte, 1985; Abrantes e outros, 1986) e, mesmo, desde os primeiros anos de escolaridade (Bernardes, 1987; Sousa, 1987). Reflectindo por um lado uma preocupação já sentida a nível internacional (NCTM, 1980), a introdução de elementos de Probabilidades e Estatística no currículo é também justificada na medida em que pode constituir ela mesma uma oportunidade de abordar, de uma forma natural, diferentes temas e aplicações da Matemática.

No entanto, a concepção tradicional de Matemática, tende a privilegiar o raciocínio dedutivo na resolução de problemas envolvendo Probabilidades, dando pouco ênfase a abordagens de tipo intuitivo. A razão geralmente apontada é a impossibilidade de considerar um «número adequado» de ensaios de um dado acontecimento para obter uma solução do problema (Matos, 1989). Se tomarmos em consideração as actuais potencialidades dos computadores, esta posição, deverá ser naturalmente reavaliada.

Assim, ao admitir a inclusão de Probabilidades no currículo de Matemática, desde os primeiros anos de escolaridade, deve ser objectivo central a sensibilização dos alunos — a partir de uma avaliação qualitativa do grau de incerteza de um acontecimento aleatório — para o facto de que também o fortuito pode ser analisado racionalmente. Simultaneamente, os alunos deverão ser progressivamente sensibilizados para a realização de uma avaliação quantitativa da probabilidade de um dado acontecimento ocorrer.

Este tipo de proposta deverá passar pela ideia de que a probabilidade de um acontecimento ocorrer é uma avaliação ligada à informação que é possível obter sobre esse acontecimento. E é, actualmente, indiscutível que a recolha de informação pertinente, a sua análise e tratamento, com vista à elaboração de conjecturas, constitui um dos objectivos mais importantes da Educação Matemática. Esta perspectiva implica a aceitação de abordagens intuitivas aos problemas de Probabilidades. Pesci (1988) admite que a probabilidade associada a um acontecimento não é algo objectivo e estritamente «contido» no acontecimento e que temos que descobrir, mas sim a avaliação da probabilidade desse acontecimento ocorrer numa dada situação. Ao fazermos uma avaliação daquela probabilidade baseamo-nos na nossa compreensão da situação e portanto na informação que dele conseguimos obter.

Probabilidades e Simulações

O tipo de informação necessária pode ser obtido por via experimental, mesmo nos casos em que os acontecimentos em estudo não são fisicamente realizáveis. De facto, um dos meios interessantes de estudar a probabilidade de um acontecimento ocorrer é o recurso à simulação desse acontecimento. Naturalmente que o recurso à simulação será justificado na medida em que for possível repetir essa simulação (tantas vezes quantas quisermos) acumulando, dessa forma, mais informação sobre ele. Cabe aqui referir que uma das questões centrais das Probabilidades é a ligação entre os conceitos de frequência e de probabilidade de um dado acontecimento, o que por si só justificaria uma abordagem experimental deste tipo de problemas.

No entanto, uma das dificuldades inerentes ao desenvolvimento de simulações em Probabilidades é a escolha de questões interessantes para a realização de propostas de actividades inovadoras. Se é fácil encontrar bons problemas com «respostas teóricas» interessantes, tal não acontece em geral com as simulações (Chance & Brazier, 1986).

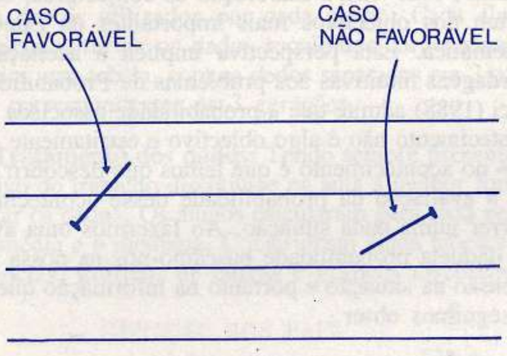
As simulações podem ser realizadas numa variedade de contextos e utilizando uma variedade de materiais manipuláveis. Naturalmente que os computadores assumem, neste contexto, um papel relevante, já que permitem a construção de simulações de acontecimentos (inclusivamente de realização perigosa ou mesmo impossível) e a sua repetição com grande economia de tempo.

O problema do Conde de Buffon

Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon, biólogo naturalista do século XVIII e um dos primeiros matemáticos a explicitar a abordagem geométrica de problemas de Probabilidades, enunciou o seguinte problema:

Se, num conjunto de rectas paralelas desenhadas à distância D (constante), lançarmos um alfinete de comprimento L, qual é a probabilidade de que o alfinete toque uma das rectas?

Poderíamos discutir o que vai ser considerado como caso favorável neste problema e iniciar o estudo de casos particulares (ver fig. 1). Vamos no entanto abordar o problema de uma forma mais global, tomando-o como referência para o desenvolvimento de algumas ideias.



Recorrendo a alguma Matemática menos elementar, Dörrie (1965) discutiu largamente esta questão no caso de ser L $\leqslant$ D, e demonstrou que a seguinte expressão permite calcular o valor teórico da probabilidade em causa, p:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{2\,L}}{\mathbf{D}}$$

O recurso à interpretação geométrica da probabilidade (Dahlke & Fakler, 1982) poderia levar a uma abordagem diferente desta questão.

A construção de uma simulação poderá permitir analisar este problema através de uma perspectiva experimental envolvendo questões e problemas interessantes. Consideremos o caso particular em que o comprimento dos alfinetes é igual à distância entre cada duas rectas paralelas consecutivas (L=D). Poderíamos desenhar sobre uma cartolina um conjunto de rectas paralelas à mesma distância e lançar sobre elas «ao acaso» um determinado número *n* de alfinetes. A contagem do número de alfinetes que fica em posição favorável poderá dar um primeiro valor experimental da probabilidade. E poderemos repetir este processo acumulando mais informação acerca do problema. Diversas perspectivas podem ser encaradas na construção de uma simulação deste problema (ver por exemplo, Carlson, 1981).

Um dos instrumentos de que dispomos para a construção de processos de simulação é a linguagem LOGO e esta actividade pode assumir um carácter pedagógico relevante. Tratando-se de uma linguagem de programação «transparente», acessível e simultaneamente bastante potente (Matos, 1987), o LOGO constitui um instrumento de trabalho que pode permitir fazer da própria construção da simulação uma actividade educativa, quer pelos problemas que surgem associados, quer pela clarificação que exige em termos de definição do problema a estudar e do tipo de resultados que se pretende obter.

Além disso, uma das características interessantes do LOGO é permitir a abordagem de problemas através do aproveitamento da «informação local» a que o computador tem acesso uma vez que, em cada momento, a tartaruga «conhece» as suas coordenadas, a sua orientação, a sua cor, a sua forma, a cor do ecrã no ponto em que se encontra, etc.

A Simulação

Em termos de definição da simulação, em termos gráficos, poderíamos caracterizar os seguintes passos para cada ensaio:

(i) desenhar as rectas paralelas;

(ii) desenhar um alfinete lançado aleatoriamente sobre as rectas;

(iii) verificar se o alfinete corta ou não uma das rectas.

Pondo de lado a preocupação com questões de carácter gráfico, vamos centrar-nos no processo de lançamento de um alfinete. A posição de um alfinete pode ser caracterizada, no plano das rectas paralelas, por um ponto e uma direcção.

Através da operação **random** o computador é capaz de simular a criação de números aleatórios (ver a este respeito a secção LOGO.MAT neste número da revista). Assim, por exemplo, random 60 gera um número aleatório entre 0 e 59. Tomando o exemplo de um conjunto de rectas distando de 10 unidades e um alfinete de comprimento 10, e depois de desenhadas as rectas em cor magenta (código 2 na versão LOGOWRITER), o procedimento **buffon** permitirá criar a posição aleatória e desenhar o alfinete verificando ao mesmo tempo se ele corta uma das rectas:

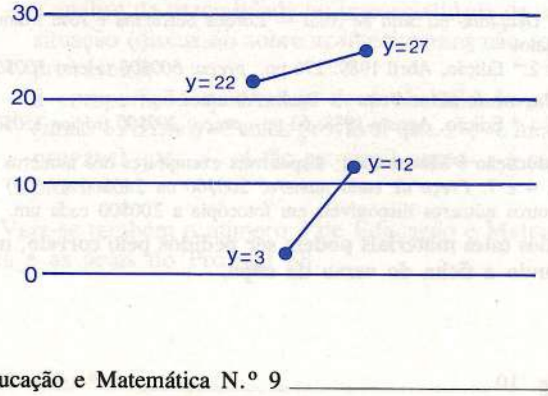
```
to buffon
make "posicao list random 60 random 60
pu setpos :posicao
seth random 360
repeat 10 [forward 1 teste]
setpos :posicao pd forward 10
end
to teste
if equal? colorunder 2 [make "cf :cf+1]
end
```

A variável **:posicao** é criada aleatoriamente com a operação **random** e a tartaruga é colocada nessa posição. Depois de ser orientada também aleatoriamente com a instrução **seth random 360**, é realizado o processo de identificação da situação do alfinete; passo a passo, é executado o procedimento **teste** que verifica se o traço debaixo da tartaruga é de cor magenta (código 2) e em caso afirmativo é incrementada uma unidade na variável acumulação **:cf**. Finalmente é desenhado o alfinete através da última linha do procedimento **buffon**.

Uma outra abordagem poderia tirar partido de um traçado cuidado das rectas. Se as paralelas forem desenhadas em posição horizontal a partir da origem [0 0] em intervalos de 10 unidades, bastará comparar as ordenadas dos pontos inicial e final de cada alfinete para verificar se este corta ou não uma das rectas. O procedimento **novo.buffon** resolve o problema:

```
to novo.buffon
make "posicao.ini list random 60 random 60
pu setpos :posicao.ini
seth random 360
pd forward 10
make "posicao.fin pos
novo.teste
end
to novo.teste
make "oi last :posicao.ini
make "of last :posicao.fin
if not equal? int (:oi/10) int (:of/10) [make "cf :cf+1]
end
```

Neste caso o alfinete é desenhado de uma vez, mantendo-se em memória os valores das posições inicial (**:posicao.ini**) e final (**:posicao.fin**) da tartaruga, isto é, das extremidades do alfinete. O procedimento **novo.teste** selecciona as ordenadas daquelas duas posições e verifica se são iguais os valores inteiros dos quocientes das divisões dessas ordenadas por 10. A fig. 2 justifica de imediato esta condição.



A utilização da simulação na repetição do número de ensaios poderá induzir uma ideia acerca do valor aproximado da probabilidade. Estes valores aproximados que é possível obter através da simulação podem constituir referências para a análise teórica do problema na medida em que se trata de informação recolhida no próprio acontecimento. Para além dos valores probabilísticos experimentais obtidos será necessário desenvolver outras abordagens de índole teórica que permitam resultados definitivamente exactos. Mas aquele tipo de abordagem pode proporcionar e iluminar novas formas de encarar o problema inicial.

Através do registo sistemático das conclusões de cada sucessão de ensaios poderá ser possível obter indicações úteis acerca do problema. Se a definição da simulação incluir parâmetros que permitam fazer variar o comprimento do alfinete e a distância entre as rectas paralelas será possível estudar a variação desses factores na tendência do valor da probabilidade.

Investigar para Aprender

Pela sua natureza, as investigações em Matemática estão estreitamente ligadas aos conteúdos matemáticos. Mas o foco dessas actividades é o processo utilizado para lidar com aqueles conteúdos. Alguns dos processos relevantes para a Matemática passam pela formulação de problemas, generalização e particularização de soluções, desenvolvimento de simbologia e notações, registo de observações, exploração sistemática de questões, elaboração de conjecturas e tentativa da sua demonstração, etc. Alguns destes processos são componentes daquilo que é geralmente descrito como pensamento matemático e constituem actividades em que não existe substituto para a experiência pessoal. Ao realizar investigações em Matemática, os alunos são em grande parte responsáveis pela definição e exploração das questões, deixando, dessa forma, de ser tarefa do professor. Kissane (1988) apresenta cinco tipos de razões para a realização de actividades de investigação:

1. Trata-se de uma actividade que tem a ver com a natureza da actividade matemática — a formulação de problemas.
2. Coloca o ênfase da formação em Matemática naqueles aspectos menos susceptíveis de serem substituídos pela tecnologia.
3. Contribui para o desenvolvimento da persistência dos alunos.
4. Propicia uma melhor compreensão da natureza da Matemática através da sua construção e da realização de experiências.
5. As investigações em Matemática fornecem um contexto no qual os alunos poderão envolver-se no desenvolvimento de Matemática, através de uma motivação intrínseca progressivamente adquirida pela experiência.

Assim, a realização deste tipo de actividades constitui uma contribuição importante para a educação matemática. E os computadores podem contribuir de forma significativa para a criação de um ambiente de trabalho em que as actividades de investigação se desenvolvam com facilidade, constituindo verdadeiras «bancadas» para realizar experiências em Matemática. É neste sentido que a proposta de envolvimento dos alunos em actividades de investigação com base em micromundos é colocada.

Conclusão

Ao possibilitar a construção de diferentes micromundos matemáticos — e simultaneamente a simulação de processos e fenómenos que podem constituir um contexto interessante para a construção da Matemática — a utilização do LOGO coloca desafios permanentes. Em particular, o LOGO permite a construção de simulações de processos aleatórios que possibilitam aos alunos a realização de sucessivos ensaios, proporcionando uma abordagem experimental de diversos problemas de Probabilidades. As características da linguagem LOGO e a facilidade de manipulação de variáveis, propiciam o desenvolvimento de uma atitude investigativa da parte dos alunos, através da alteração de parâmetros e subsequente análise dos resultados.

Ao propor a utilização dos computadores no ensino da Matemática devemos ter em consideração que os êxitos dessa utilização poderão passar muito mais pela qualidade das propostas pedagógicas que consigamos explicitar do que pela quantidade de *software* específico que consigamos reunir.

Referências

Abrantes, P., Barros, C., Cerqueira, F., Couto, H. & Mesquita, C. (1986). Estatística no Ensino Secundário: uma oportunidade para renovar. *PROFMAT*, 2, p. 93-107.

Bernardes, O. (1987). Probabilidades no Ensino Básico? *PROFMAT*, 3, p. 147-158.

Carlson, R. (1981). Buffon's needle problem on a microcomputer. *Mathematics Teacher*, 74(8), p. 638-640.

Chance J. & Brazier . (1986). Two Problems that Illustrate the Techniques of Computer Simulation. *Mathematics Teacher*, 79(9) , p. 726-731.

Dahlke, R. & Fakler, R. (1982). Geometrical Probability — a Source of Interesting and Significant Application of High School Mathematics. *Mathematics Teacher*, 16, p. 736-745.

Dörrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. New York: Dover.

Kissane, B. (1988). Mathematical Investigation: description, rationale and example. *Mathematics Teacher*, Oct. 88, p. 520-528.

Matos, J. F. (1983). A Estatística no Ensino Secundário. *Página da Educação Diário de Notícias*.

Matos, J. F. (1987). *A Natureza do Ambiente de Aprendizagem Criado com a Utilização da Linguagem LOGO no Ensino Primário e as suas Implicações na Construção do Conceito de Varável.* Lisboa: Projecto MINERVA, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Matos, J. F. (1989). O LOGO e a Educação Matemática: um exemplo de Probabilidades. *Aprender*, 7, p. 19-25.

NCTM (1980). *Agenda for Action*. Reston: NCTM.

Pea, R. (1987). Cognitive Technologies for Mathematics Education. In Schoenfeld, A. (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* New Jersey: LEA.

Pesci, A. (1988). *Proposal fo curriculmum for teaching Probability and Statistics.* Comunicação apresentada no International Congress on Mathematical Education, Budapest.

Ponte, J. P. (1985). O impacto dos computadores no currículo de Matemática. *PROFMAT*, 1, p. 25-39.

Sousa, M. A. (1987). Estatística no Ensino Primário. *PROFMAT*, 3, p. 111-114.

Medir a sorte ou o azar? Porque não uma actividade para o ensino da Matemática do 2.º Ciclo?

Odete Bernardes, Escola C+S de Montelavar

O desenvolvimento do pensamento probabilístico, da capacidade de interpretar, criticar e prever resultados deve ser um dos objectivos gerais do programa de Matemática do 2.º ciclo do ensino básico.

Propor actividades que permitam ao aluno do 2.º ciclo iniciar-se no pensamento probabilístico e retomar, mais tarde, essas actividades, de forma a ampliar e desenvolver o raciocínio probabilístico, é uma tarefa do ensino da Matemática.

Privar os alunos do 2.º ciclo de noções ligadas às probabilidades é dar-lhes uma visão deformada da Matemática e negar-lhes a capacidade de utilizar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.

Proporcionar aos alunos a iniciação às noções de probabilidade elementar, é, ainda, integrar no programa uma componente lúdica que a Matemática tem e que é muitas vezes propositadamente ignorada.

Um dos primeiros passos para a compreensão do conceito de probabilidade passa por assumir atitudes perante situações aleatórias. Mais importante do que calcular a probabilidade da frequência de um determinado acontecimento, é o raciocínio que se faz e a atitude que se toma. Entre o provável, o mais provável, o pouco provável e o certo, há tomadas de atitudes diferentes.

Actividades com jogos, em que a possibilidade de ganhar é a mesma para todos os jogadores, e jogos em que a possibilidade de ganhar não é a mesma, são do ponto de vista didáctico actividades a privilegiar. A resolução de problemas que conduzam ao mundo probabilístico e que permitam aos alunos fazer experiências, utilizando os próprios objectos, ou outros que os simbolizem, é outra actividade a ter em conta.

Perante situações aleatórias, o aluno inicialmente pensa que pode prever o resultado, consoante se coloca na perspectiva da sorte ou do azar. Após a vivência de situações aleatórias, o aluno já responde que nada de certo se pode afirmar. Mais tarde descobrirá que no caos aparente do mundo aleatório existem leis que permitem analisar melhor a realidade.

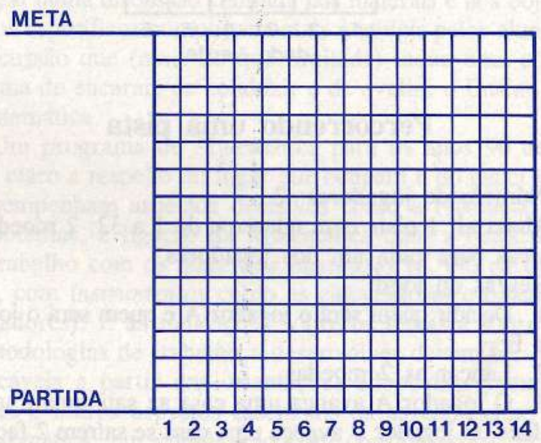
Seguem-se alguns jogos e problemas que permitem:

- a vivência e análise de situações que envolvem o conceito de probabilidade;
- a análise da parcialidade ou imparcialidade de uma situação (discussão sobre acontecimentos não equiprováveis);
- a comparação qualitativa de probabilidade utilizando os termos «é mais provável que...», «é menos provável que...», «é tão provável como», «é equiprovável».

Veja-se também o número 3 de Educação e Matemática e as actas do Profmat 88.

Qual a soma?

Jogo 1 — Um jogo no pátio?
Número de jogadores: 14
Material: 14 cartolinas numeradas de 1 a 14; 2 dados numerados; 1 traçado como o da figura.



Regras do jogo:

1. Distribuir as 14 cartolinas pelos 14 jogadores. Cada um deles coloca-se, na linha de saída, na casa correspondente ao número da cartolina que lhe foi entregue.
2. Lançar os 2 dados e adicionar os pontos saídos. O jogador que tem o número igual à soma dos pontos saídos nos dois dados avança uma casa.
3. Ganha o primeiro jogador a chegar à meta.

Colocar as seguintes questões:

- Todos os jogadores têm igual probabilidade de ganhar o jogo? Haverá jogadores com mais probabilidades do que outros?
- Haverá jogadores sem qualquer oportunidade de ganhar o jogo?

Jogo 2
Número de jogadores: 3
Material: 2 dados de cor diferente; 33 cartolinas numeradas de 2 a 12 (3 de cada); tabela de jogo como a da figura.

Regras do jogo:

1. Na sua vez, cada um dos jogadores escolhe uma cartolina, e de seguida lança os dados.
2. Sempre que a soma dos pontos saídos nos dois dados for igual ao número que tem na cartolina, o jogador coloca a cartolina na casa correspondente da tabela.
3. O vencedor será o primeiro jogador a colocar as cinco cartolinas.

Jogar 2 ou 3 vezes o jogo. Depois responder às seguintes perguntas:

— Haverá alguma soma mais frequente do que a outra?

— Em que números se deve apostar para se ter mais probabilidades de ganhar?

Percorrendo uma pista

Número de jogadores: 2

Material: 1 pista com números de 1 a 32; 2 moedas; marcas para cada um dos jogadores.

Regras do jogo:

1. Decidir quem será o jogador A e quem será o jogador B;

2. Lançar as 2 moedas.

3. O jogador A avança uma casa se sair uma e uma só face. O jogador B avança uma casa se saírem 2 faces. Caso contrário (saírem 2 coroas) ninguém se move.

Jogar durante 3 minutos.

Depois responder às seguintes perguntas:

— Os jogadores têm, ambos; igual probabilidade de ganhar?

— Consideras o jogo justo?

— Como estabelecerias as regras do jogo para que o modo de avançar fosse imparcial?

Problemas

1. Num saco, colocar 3 bolas vermelhas, 3 bolas brancas e 3 bolas verdes.

Quantas bolas teremos de tirar para estarmos certos que obtemos as 3 cores?

Após as experiências realizadas e depois de conversarem uns com os outros os alunos tiram conclusões do tipo: se tirarmos 7, 8 ou 9 é certo que teremos as 3 cores; se tirarmos 3, 4, 5 ou 6 é possível mas não é certo que teremos as 3 cores; se tirarmos 1 ou 2 é impossível obter as 3 cores.

2. Num saco, colocar 3 bolas amarelas, 3 bolas azuis e 3 bolas vermelhas.

Efectuar extracções sucessivas de 4 bolas com reposição, ou seja voltando a colocá-las no saco.

— Podem ser todas da mesma cor?

— Podem ser de 4 cores diferentes?

— Podem ser de 2 ou 3 cores?

— Qual é o acontecimento mais provável?

3. O Rodrigo tem, na sua cómoda 8 meias brancas, 6 meias azuis, 2 meias vermelhas e 4 meias cinzentas, mas estão todas misturadas.

Para não acordar o seu irmão, o Rodrigo pega em algumas, às escuras, sem lhes ver a cor.

Qual o menor número de meias que deve pegar para ter a certeza de conseguir, pelo menos, duas meias da mesma cor?

4. Na loja do Sr. Rui, há uma caixa com 10 pares de luvas castanhas e 10 pares de luvas pretas.

Quantas luvas precisa o Sr. Rui tirar da caixa para, sem olhar, tirar um par de luvas da mesma cor?

Bibliografia

— Varga, T e Glaymann, M. (1975). *Las probabilidades en la escuela*, Barcelona: Teide.

— NCTM (1981). *Teaching Statistics and Probability*. Reston: NCTM.

PROFMAT 89

Um apelo

O Profmat está (quase) aí e Viana já nos espera. Este ano as inscrições ultrapassaram o meio milhar o que, sem dúvida, é um bom indicador do interesse dos professores de Matemática e do dinamismo da nossa Associação. Queríamos aproveitar a saída deste número de «Educação e Matemática» para pedir às pessoas inscritas que não enviaram a ficha D (azul) preenchida, o favor de o fazerem com a máxima brevidade. É sempre importante ter-se uma ideia das intenções de participação das pessoas nos Grupos de Trabalho para optimizar a sua organização e funcionamento. Isto mais premente se torna quando se espera a presença de mais de 500 pessoas!

Obrigado.

Mais cursos

Recentemente, alguns colegas nossos mostraram-se interessados em orientar dois cursos nos dias que antecedem o Profmat. Trata-se de:

Exp — um processamento de texto de Matemática — Pedro Girão

Utilização de máquinas de calcular programáveis — Arsénio Coelho e César Viana

Assim, quem estiver interessado e não estiver ainda em nenhum curso, poderá inscrever-se até 8 de Setembro. As condições são as que indicámos no aviso de abertura do Profmat.

Até Viana.

Parecer sobre os projectos de novos programas de Matemática para o Ensino Básico

1.

A Associação de Professores de Matemática (APM) acaba de receber os projectos referentes a alguns dos novos programas de Matemática para o Ensino Básico, concretamente:

- do 1.º ciclo, primeira fase (anos 1 e 2 de escolaridade);
- do 2.º ciclo (anos 5 e 6), sem as indicações relativas às *sugestões de estratégias/actividades*;
- do 3.º ciclo (anos 7, 8 e 9), contendo apenas os *objectivos gerais*.

A APM tem promovido o debate sobre a renovação curricular em Matemática através de diversas formas, entre as quais se destacam o seminário que deu origem ao livro «Renovação do Currículo de Matemática» (Abril de 1988), vários artigos publicados na sua Revista (desde 1987), e as discussões realizadas em diferentes pontos do país e em Encontros Nacionais e Regionais. Esse debate, embora evidenciando a complexidade das questões em jogo, foi revelando um conjunto de aspectos que os membros da APM, bem como muitos outros professres de Matemática, consideram essenciais na renovação em curso.

Por isso, a Direcção da APM está em condições de fazer um primeiro comentário sobre os projectos agora submetidos à sua apreciação. No entanto, a Direcção entende que o debate em torno dos novos programas deve constituir, acima de tudo, um processo colectivo que mobilize oo maior número possível de professores de Matemática para uma reflexão profunda sobre o ensino e aprendizagem desta disciplina em todos os níveis escolares. Por essa razão, apela aos núcleos e membros da Associação para que se envolvam activamente nesse debate, e espera que a abertura revelada pelos responsáveis e autores dos actuais projectos quanto às pessoas e entidades a consultar seja alargada a todas as escolas e professores.

2.

Um programa deve constituir um *instrumento* útil nas mãos dos professores, apresentando opções claras sobre os objectivos prioritários e as grandes orientações para o nível de escolaridade correspondente, e contendo, **como consequência dessas opções**, indicações quanto aos temas a explorar, aos princípios metodológicos a seguir e às formas de avaliação a praticar. Ao mesmo tempo, deve ser flexível e *libertador*, no sentido de *facilitar* a inovação e o progresso — tendo-se consciência de que esse progresso não resulta directamente do texto do programa mas sim da *qualidade* de factores como a formação dos professores, as condições de ensino, etc.

Um programa de Matemática para o Ensino Básico deve partir de uma questão chave: porquê e para quê uma formação matemática e uma disciplina de Matemática para todos os alunos durante nove anos consecutivos? Manter no primeiro plano a reflexão sobre as finalidades do Ensino da Matemática, e sobre os seus grandes objectivos de natureza cognitiva, afectiva e social, permite *dar sentido* aos temas a tratar e às metodologas a adoptar. Sem esse *pano de fundo*, rapidamente se cai numa discussão centrada nas matérias e nos objectivos específicos comportamentais a atingir pelos alunos, discussão que (mais do que limitada) induz uma certa forma de encarar, de conduzir e de avaliar o Ensino da Matemática.

Um programa de Matemática para os anos 90 deve ser claro a respeito do lugar que ocupam e do papel que desempenham aspectos decisivos como a resolução de problemas, a ligação da Matemática com a realidade, o trabalho com os *materiais auxiliares* (e, em particular, com *instrumentos* como as calculadoras e os computadores). E as indicações sobre os temas e sobre as metodologias de trabalho a desenvolver devem ser justificáveis a partir das orientações adoptadas quanto a esses e outros aspectos essenciais da aprendizagem da Matemática, em conjugação com considerações relativas à caracterização dos alunos do nível etário respectivo.

Um programa de Matemática, hoje, não deve ser **nem correr o risco de ser interpretado** essencialmente como umma *lista de matérias a dar*. Pelo contrário, deve ser claro a respeito do tipo e da natureza das actividades matemáticas a desenvolver ao longo do ciclo de estudos, e em particular a respeito da importância que assume a diversidade das formas de trabalho, dentro e fora da sala de aula. Por isso, um programa de Matemática, hoje, deve referir-se explicitamente (muito para além das formas de ensino tradicionais como a exposição pelo professor e a resolução de exercícios) ao papel do trabalho de grupo e do trabalho prático, das actividades de exploração e de investigação, da realização de projectos quer *internos* à Matemática quer de natureza interdisciplinar.

3.

Não há dúvida que algumas importantes *tendências* no Ensino da Matemática se vêem reflectidas, de formas diversas, nos vários projectos: a importância da resolução de problemas, a necessidade de considerar as potencialidades educativas do uso das calculadoras, a valorização da Geometria, a inclusão de temas de Estatística. Estes factos são positivos, sendo de lamentar que não tivessem merecido a mesma atenção outros aspectos relevantes como o *trabalho concreto* em torno das relações da Matemática com a realidade e com outras disciplinas, o uso de materiais manipulativos, o papel que a utilização dos computadores pode assumir, ou o interesse educativo de elementos ligados à História da Matemática.

Parece existir em todos os projectos um tipo de tratamento dos temas dos programas *excessivamente* traduzido na forma de objectivos comportamentais, em detrimento de uma abordagem, porventura mais frutuosa, baseada nas possibilidades de exploração e utilização e na relevância desses temas face aos diversos objectivos gerais da disciplina.

Por outro lado, a natureza das actividades de aprendizagem é quase sempre *demasiado geral* em contraste com o tratamento que é dado aos objectivos relativos aos temas do programa. As atitudes, os hábitos e as capacidades não são aspectos necessariamente *iguais* para todas as disciplinas, têm a ver também com a natureza específica de cada uma delas. Aspectos como experimentar, explorar, conjecturar, argumentar, etc. têm uma especificidade no caso da Matemática que devia ser contemplada ao nível dos *conteúdos* da disciplina.

Sem dúvida, é necessário um estudo, uma reflexão e uma discussão mais profundas sobre pontos concretos das propostas agora apresentadas. Mas parece importante fazermos desde já uma apreciação global sobretudo porque grande parte das nossas críticas estão relacionadas com a lógica adoptada para os programas e com a sua estrutura, e não tanto com questões pontuais relativas a certos temas ou capítulos.

4.

Um dos aspectos que imediatamente ressaltam quando se analisam os actuais projectos diz respeito à diferença de *apresentação* entre o do 1.º ciclo e os restantes. Uma apreciação mais atenta parece indicar que não se trata apenas de uma *questão de estilo* mas sim o reflexo de concepções não coincidentes sobre a natureza e o papel de um *programa* e, eventualmente, de perspectivas também diversas sobre as grandes opções a fazer no Ensino da Matemática — ou, pelo menos, sobre a necessidade de as indicar de uma forma clara e convicta.

(a) **A clareza e convicção quanto às opções fundamentais.**

O projecto referente ao 1.º ciclo começa da seguinte forma:

«A tarefa principal que se impõe aos professores é a de conseguir que as crianças desde cedo aprendam a gostar de Matemática porque é necessário que esta deixe de ser um factor de selecção e se converta num instrumento de desenvolvimento de todos os alunos».

Depois de afirmar que os capítulos deverão ser desenvolvidos a partir de uma actividade considerada fundamental — a resolução de problemas — o projecto apresenta um esquema no qual os problemas surgem no centro, o que é justificado do seguinte modo:

«A localização dos *Problemas* no centro decorre da concepção de que a resolução de situações problemáticas (numéricas e não numéricas) deverá constituir a actividade fundamental desta área e estar presente no desenvolvimento de todos os tópicos».

Quanto ao projecto para o 2..º ciclo (e o mesmo sucede com o do 3.º ciclo), começa por afirmar que o novo currículo resulta da «necessidade da sua adaptação ao nível de desenvolvimento e da progressão dos alunos e a novas exigências da sociedade, fundamentalmente impostas pelas evolução e divulgação das novas tecnologias», e em seguida atribui-lhe:

«uma tripla função: desenvolvimento de capacidades e atitudes; aquisição de conhecimentos e de técnicas para a sua mobilização; obtenção dos pré-requisitos necessários para a prossecução de estudos».

Verifica-se assim que, no projecto do 1.º ciclo, a primeira preocupação é com o aluno e de carácter afectivo; além disso, apresenta-se uma opção clara sobre o *aspecto central* do Ensino da Matemática. Ora, claramente, o mesmo não sucede nos restantes projectos.

(b) **A interligação entre os objectivos, temas e metodologias.**

No projecto do 1.º ciclo, cada capítulo é iniciado com uma referência geral às características dos alunos do respectivo nível etário, e com indicações de natureza metodológicas daí resultantes. Por exemplo, no capítulo sobre Números e Operações no 1.º ano:

«Cada criança vai construindo o conceito de número segundo um modo e ritmo próprios.

É necessário proporcionar-lhe uma grande variedade de experiências...

Partindo de situações vividas e com suporte no concreto...

As crianças nesta idade precisam de um longo período de experiências informais... antes de iniciarem a escrita simbólica das operações».

No projecto do 2.º ciclo, embora existam duas secções intituladas «A razão dos conteúdos», e «Linha metodológica», nas quais são apresentadas indicações gerais, os temas do programa surgem depois *apenas acompanhados* de listas de objectivos específicos de tipo comportamental. Por exemplo:

«1. Sólidos geométricos.

— Identificar poliedros.

— Identificar, num poliedro, faces, arestas e vértices.

— Identificar cubos, paralelepípedos...

— ...»

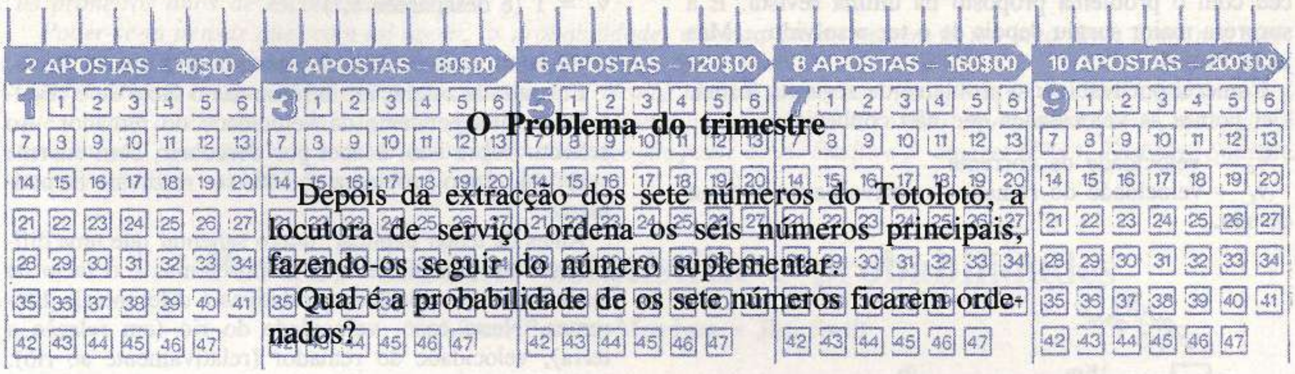
O projecto do 2.º ciclo deveria ser remodelado de forma a apresentar, para cada capítulo, indicações sobre a relevância dos temas propostos face aos objectivos gerais, propostas de natureza metodológica, sugestões sobre formas de trabalho e de avaliação a desenvolver.

Sem este esforço de *integração* não será possível ultrapassar aquilo que é afinal uma das grandes limitações dos programas ainda em vigor — não se compreenderá como se pensam alcançar alguns dos objectivos gerais propostos nem como se pretendem ver concretizadas as linhas metodológicas apresentadas.

(continua na pág. 32)

PROBLEMA DO TRIMESTRE

Tal como foi anunciado e iniciado no número 8 de Educação e Matemática, será proposto, em todos os números da revista, um «problema do trimestre». De acordo com os critérios da redacção de Educação e Matemática, será publicada a melhor resposta, recebida até ao fecho do número seguinte.



O Problema do trimestre

Depois da extracção dos sete números do Totoloto, a locutora de serviço ordena os seis números principais, fazendo-os seguir do número suplementar.

Qual é a probabilidade de os sete números ficarem ordenados?

Sobre o problema anterior

Repetimos aqui para os novos leitores de Educação e Matemática o enunciado do problema proposto no número 8 da revista:

> Um remador subia o Tejo contra a corrente. Um quilómetro depois de passar em frente ao Terreiro do Paço, cruzou-se com um toro de madeira que ia rio abaixo. Continuou a remar mais meia hora, voltou para trás e, sempre a remar, passou ao lado do toro, agora em frente ao Terreiro do Paço.
>
> Qual era a velocidade da corrente?

Atenção! Se não quer perder o prazer de tentar resolver este problema, não leia mais para a frente, pois vamos apresentar comentários sobre a solução do problema.

Comentários sobre as respostas recebidas

Foram recebidas ao todo 5 respostas, que agradecemos. Duas delas (Paulo Abrantes e Eduarda Fonseca-Leonor Moreira), embora chegando às mesmas conclusões que José Paulo Viana, não foram consideradas para publicação por serem de (ou incluírem) elementos da redacção de E. e M.

O nosso colega Mário Picca Gonçalves, do Porto, enviou-nos uma extensa resposta, envolvendo também o estudo gráfico da situação e até um programa de computador. Chega por vários processos ao resultado de 1 km/hora e agradece termos-lhe «estragado o domingo». A outra resposta é de Fernando Duarte, de Viseu, e além de apresentar um sistema de equações que resolve o problema, indica um processo de testar outras hipóteses com uma folha de cálculo.

Das três respostas em jogo, apenas a de J. Paulo, partindo da constatação do resultado ser independente da velocidade do remador, esclarece completamente a situação: afinal, *como o toro e o remador são arrastados pela mesma corrente, tudo se passa como se não houvesse corrente, e o tempo que o remador leva a afastar-se do toro é igual ao que leva a dirigir-se de novo até ele.*

O exemplo do comboio é magnífico e não deixa quaisquer dúvidas. Mas nem sequer é preciso metermo-nos no comboio: quando saímos de casa para dar um passeio de uma hora a pé, afastamo-nos de casa meia hora e depois achamos natural levar o mesmo tempo a voltar para casa... Mas a casa, entretanto, onde ela já vai... Numa hora, a Terra rodou 15 graus, e sendo o raio da terra cerca de 6 300 km, a casa já se deslocou cerca de 1 650 km... só por causa do movimento de rotação. Depois há a translação da Terra, o sistema solar em movimento dentro da nossa galáxia, e a própria Via Láctea a afastar-se das outras galáxias... Se pensamos nisto demais, nem saímos de casa!

Talvez a grande lição deste problema seja a de que, quando se trata de movimentos, devemos sempre perguntar: *de quê* em relação *a quê*? Se nos interessa o movimento do *remador em relação ao toro* — para saber quanto tempo passou até ele voltar a encontrar o toro — então abstraímos de tudo o resto, e é evidente que foi uma hora. Se depois nos interessa o movimento do *toro (ou da corrente) em relação à margem* vemos logo que ele percorreu um quilómetro. E o problema fica resolvido. Outra lição é talvez que a nossa cabeça está demasiado cheia de fórmulas e processos algébricos, que nos impedem por vezes de enfrentar de maneira simples problemas simples. Não será de tentar que o mesmo não venha a acontecer com os nossos alunos?

Nota: todas as respostas ficam arquivadas na nossa redacção e poderão ser consultadas.

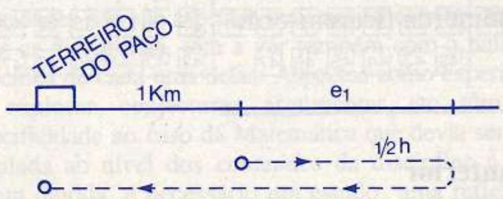
O problema do remador e do toro

José Paulo Viana, E. S. Marquês de Pombal

Gosto muito de problemas. Gosto ainda mais de problemas que me reservem surpresas. Foi o que aconteceu com o problema proposto na última revista. E a surpresa maior surgiu depois de o ter resolvido... Mas já lá vamos.

Comecei por resolver o problema da seguinte forma. Dei nomes às velocidades que não conhecia:

v_c — velocidade da corrente
v_r — velocidade do remador **relativamente à água do rio.**



Assim, o nosso homem, quando rema contra a corrente, vai a uma velocidade $\mathbf{v_r - v_c}$ relativamente às margens. Quando vai a favor da corrente, a sua velocidade, em relação a terra firme, é $\mathbf{v_r + v_c}$.

A distância percorrida pelo remador ao subir o rio vai ser então:

$\mathbf{e_1 = 1/2\ (v_r - v_c)}$

Sei ainda que o tempo $\mathbf{t_1}$ que o toro demorou a descer 1 km levado pela corrente é igual ao tempo $\mathbf{t_2}$ levado pelo barco a subir o rio (meia-hora) mais o tempo $\mathbf{t_3}$ que ele levou a descer até ao Terreiro do Paço.

Assim, lembrando-me que tempo = espaço/velocidade, tenho que:

$$\frac{1}{v_c} = \frac{1}{2} + \frac{1/2\ (v_r - v_c) + 1}{v_r + v_c}$$

Ora, tenho apenas uma equação e duas incógnitas. Que se há-de fazer? O melhor é simplificar e ver o que acontece.

$$\frac{2}{v_c} = 1 + \frac{v_r - v_c + 2}{v_r + v_c} \quad \text{ou}$$

$$\frac{2}{v_c} = \frac{v_r + v_c + v_r - v_c + 2}{v_r + v_c} \quad \text{ou}$$

$$\frac{2}{v_c} = \frac{2\ v_r + 2}{v_r + v_c} \quad \text{ou}$$

$$2\ v_r\ v_c + 2\ v_c = 2\ v_r + 2\ v_c \quad \text{ou}$$

$$v_r\ v_c = v_r$$

$$v_c = 1 \text{ (e desaparece } v_r\text{!)}$$

Portanto, a velocidade da corrente do Tejo é 1 km/h.

Encontrada a solução, intrigou-me o facto de o resultado ser independente da velocidade do remador. Ao reflectir sobre isto, acabei por descobrir, com enorme surpresa, que o problema poderia ser resolvido mentalmente!

Antes de tentar explicar, quero salientar que uma dificuldade habitual neste tipo de problemas é o facto de termos várias velocidades, relativas a diferenciais diferentes. Neste caso, velocidade do rio (em relação a terra), velocidade do remador (relativamente ao rio). Além disto, temos a tendência (pelo menos, eu tenho...) para raciocinar relativamente ao referencial terra, quando podemos perfeitamente escolher outro referencial mais conveniente (por exemplo, a água do rio).

Nesta perspectiva, antes de vermos o que acontece neste caso, comecemos com uma situação semelhante mas que parece mais simples de interpretar.

Imaginemos que estou num comboio em andamento. A certa altura, saio da minha cabina e ando meio minuto em direcção à locomotiva. Se então inverter a marcha e caminhar em direcção à cauda do comboio, quanto tempo demoro a regressar à minha cabina? Evidentemente, meio minuto, qualquer que seja a velocidade do comboio.

Recapitulando, se andar um certo tempo numa direcção e o mesmo tempo noutra, volto ao ponto de partida (cabina). Claro que o comboio, em vez de estar na Damaia, já vai talvez na Amadora, mas isso não influi no tempo que demoro a ir lá à frente e voltar.

O mesmo se passa no nosso rio Tejo, mas temos é que nos preocupar em olhar para as margens. Reparem na semelhança com a situação do comboio: o remador vai sempre à mesma velocidade relativamente à água, quer vá a subir ou a descer o rio, tal como o passageiro anda dentro do comboio sempre à mesma velocidade, quer vá em direcção à locomotiva, quer em direcção contrária.

Ora, o nosso remador parte do toro e rema meia hora. Depois, dá meia volta e onde vai parar? Outra vez junto ao toro, ou seja, regressa ao ponto de partida relativamente à água. É como o passageiro do comboio: o toro funciona aqui como a cabina.

Mas então, se ele andou (remou!) meia hora numa direcção, precisou obrigatoriamente de remar outra meia hora na direcção contrária para voltar ao ponto de partida. Ou seja, o nosso homem esteve uma hora a remar, afastando-se e aproximando-se do toro. Ora, sabemos que, nesse intervalo de tempo, o toro se deslocou 1 km. Logo, a velocidade do rio é 1 km/h.

PARA ESTE NÚMERO SELECCIONÁMOS...

Nas últimas três décadas, o conteúdo dos currículos de Matemática, tem sido objecto de constante debate. Numerosas recomendações, no sentido da mudança, têm sido feitas por diferentes grupos nacionais e internacionais. Uma recomendação bastante persistente tem sido a de introduzir a estatística e as probabilidades nos currículos, desde os primeiros anos de escolaridade.

Poder-se-ia pensar que, com tal apoio, as probabilidades e a estatística tivessem já um lugar bem firme nos currículos escolares de muitos países. Porém, tal não parece ser o caso.

Numa altura em que estão em debate os novos currículos nacionais, parece-nos oportuno publicar aqui um artigo que defende a introdução da estatística e das probabilidades nos currículos escolares americanos, fornecendo, simultaneamente, uma série de pistas de abordagem. O artigo faz parte de A. Shultz e J. Smaret (Eds.), Teaching Statistics and Probability — 1981 Yearbook, Reston: NCTM.

Porquê ensinar estatística e probabilidades

Lionel Pereira-Mendoza e Jim Swift

Mesmo um simples relance de olhos sobre os jornais mostra em que extensão a linguagem da estatística e das probabilidades se tornou parte da vida de todos os dias. Compreender essa linguagem tornou-se, assim, claramente importante.

Mas o papel significativo que, quer a estatística, quer as probabilidades, têm na nossa vida, não constitui a única justificação para as incluir no currículo escolar. Uma fundamentação mais completa envolve três componentes: utilidade, estudos posteriores e estética.

Utilidade. Todos os indivíduos precisam de alguns conhecimentos sobre estatística e probabilidades, para funcionarem na nossa sociedade. Análises de produtos para defesa do consumidor, índices do custo de vida, sondagens e amostras fazem parte do nosso quotidiano. Os alunos devem ficar aptos a interpretar formulações como «A probabilidade de encontrar petróleo na costa portuguesa é de 1 em 100 000» ou «As sondagens mostram que o partido no governo só obteria 22% dos votos, se agora se realizassem eleições legislativas». É, pois, necessário que os alunos desenvolvam competências em aspectos utilitários da estatística e das probabilidades para processarem informações que lhes chegam todos os dias.

Estudos posteriores. Também para tratar situações com que se podem confrontar posteriormente, quer no campo da matemática, quer noutros campos científicos, os alunos precisam de ter conhecimentos na área da estatística e das probabilidades. Áreas científicas como a Biologia e as Ciências Sociais, que, ainda há pouco tempo, requeriam conhecimentos matemáticos mínimos, estão progressivamente a ficar dependentes de técnicas matemáticas sofisticadas, a maioria delas de natureza estatística. Técnicas de simulação e os métodos de Monte Carlo são, agora, usados num leque largo de disciplinas.

Num mundo em rápida mudança, o conhecimento da probabilidade de ocorrência de acontecimentos futuros tem um papel importante na tomada de decisões.

Estética. As considerações estéticas têm um papel importante na apreciação da beleza do assunto, quer na área da matemática, quer nas suas aplicações aos vários ramos da ciência, tecnologia e natureza. Esta atracção estética proporciona, quer uma apreciação do poder das técnicas, quer um conhecimento da responsabilidade da aplicação dessas técnicas.

A abordagem estética está estreitamente ligada à selecção de materiais que melhor desenvolvam uma apreciação da matemática.

Actividades para a aula

Examinaremos, de seguida, actividades que reflectem os três distintos (mas interligados) aspectos, considerados anteriormente, e apresentaremos situações em que as ideias estatísticas e probabilísticas são aplicadas.

Toda a gente sabe que grupos diferentes interpretam a informação de forma diferente e chegam, também, a diferentes conclusões. Por exemplo, examinando as estatísticas sobre desemprego, alguns grupos chegam à conclusão que a percentagem é pequena, porque não incluíram pessoas que, ainda que procurando emprego, não se dirigiram às instituições consultadas para o estudo. Entretanto, outros grupos concluem que a percentagem de desemprego é demasiado alta, porque, por exemplo, incluíram, nos desempregados, os indivíduos que, para melhorarem o nível de vida, procuram um segundo emprego.

O facto de poderem existir diferentes interpretações demonstra a importância de ensinar os alunos a examinar os pressupostos subjacentes a conjuntos de dados estatísticos, antes de interpretarem os resultados. O uso incorrecto dos dados só é possível enquanto a população for estatisticamente analfabeta.

Juntar recortes de jornais que falam, de maneira diferente, do mesmo assunto, pode ser uma ajuda valiosa para os alunos aprenderem a detectar os pressupostos subjacentes às diferentes conclusões e pode conduzir a projectos interessantes.

Os alunos de todos os níveis devem ser encorajados a recolher e analisar os seus próprios dados. Podem usar dados acerca da sua localidade, região ou país para prever futuras tendências e, se for possível, conferir as suas previsões. Quando for necessário fazer previsões dentro de um determinado intervalo, particularmente em situações em que não existam tendências óbvias, os alunos podem começar a desenvolver ideias sobre o nível de confiança e a constituir uma base sólida para trabalho posterior.

Na escola secundária, o mesmo projecto pode ser desenvolvido, pondo agora toda a ênfase nos aspectos relativos às previsões, intervalos de confiança e probabilidade de ocorrência. Para além disso, os alunos devem, neste nível, discutir como foram (ou vão ser) obtidos os dados: como era formada a amostra? Os dados variam de região para região, de localidade para localidade? Que significa desempregado? Como foram obtidos os dados? Estas questões podem levar a discussões sobre os processos de amostragem.

Um conjunto de dados particularmente importante é o que envolve a previsão do estado do tempo. Estes dados, por um lado permitem a recolha e o tratamento gráfico e, por outro lado, podem levar a uma discussão sobre a probabilidade, o rigor e a significância das previsões.

Considere-se, por exemplo, as previsões de chuva. A maioria das rádios locais e a televisão fazem previsões sobre a probabilidade de chover no dia seguinte. Pode-se discutir a afirmação de haver uma probabilidade de 10% de chover no dia seguinte. Pode-se fazer um registo diário da probabilidade anunciada e do que aconteceu realmente. Os alunos podem, assim, ajuizar o rigor das previsões dos serviços meteorológicos.

Actividades envolvendo o estado do tempo são particularmente úteis para mostrar como é impossível estar certo do tempo que vai fazer e como as previsões são feitas numa base probabilística.

A partir destas experiências, os alunos poderão perceber como se conclui, por exemplo, qual a probabilidade de fuga de radiações numa qualquer central nuclear.

A publicidade pode ser outra fonte de actividades. Particularmente, afirmações do tipo «quatro em cinco pessoas usam o produto A». Escolha uma afirmação deste tipo, leve o produto para a aula, divida em turma em grupos de cinco. Cada grupo determinará a percentagem dos que usam o produto. Discuta os resultados: porque é que os resultados foram diferentes? Teria sido melhor se se tivessem usado um grupo maior? Há diferença nas respostas dos rapazes e das raparigas? Finalmente, use a percentagem citada na publicidade como base de comparação com a turma. Esta actividade permite avaliar a importância do tamanho da amostra, bem como da sua composição.

As dúvidas, as suspeitas com que são vistas as sondagens de opinião, nomeadamente em vésperas de eleições, sublinham a necessidade de ensinar as ideias subjacentes aos processos de auscultação de opiniões.

Também o conceito de correlação aparece, frequentemente, e é muitas vezes associado à procura de causas para determinados efeitos.

Suponhamos que, num país A, nos últimos 25 anos, os crimes violentos aumentaram de 1080% e, no mesmo período, os divórcios aumentaram 300%. Será legítimo só com estes dados, concluir que os divórcios e os crimes estão correlacionados, isto é, que os primeiros são causa dos segundos?

Também os censos, os recenseamentos, contêm uma grande quantidade de informação vital. Mas que rigor têm estes dados? Algumas famílias preenchem os formulários de uma forma mais detalhada do que outras. Porquê? Estas e outras questões conduzem a aprendizagens significativas. Novas ideias, como as curvas de Lorenz, que mostram a distribuição dos resultados, podem ser usadas para comparar os estilos e nível de vida de vários países.

Os dados obtidos nos censos são particularmente importantes para sublinhar duas ideias-chave: (1) os pressupostos subjacentes à recolha e interpretação dos dados e (2) a confiança que se pode atribuir a estas previsões.

Consideremos, ainda, outro exemplo: o índice do custo de vida. Para calcular este índice, os investigadores consideram uma variedade de artigos e de serviços. Estes incluem a renda de casa, certos items de alimentação e despesas com seguros. Então, um aumento de quatro pontos neste índice afecta, diferentemente, pessoas diferentes. Este aumento de quatro pontos pode ter resultado, sobretudo, do aumento do preço da alimentação. Assim, uma família em que a verba para alimentação é uma parte essencial das despesas, será mais afectada do que uma família em que esta verba não tenha grande peso no orçamento familiar.

Se pretendermos que os nossos alunos interpretem e usem os dados estatísticos apresentados pela televisão, rádio, jornais e revistas, é essencial desenvolver, neles, competências que lhes permitam questionar e interpretar a informação. Estas ideias, contudo, não requerem conhecimentos matemáticos muito profundos e, portanto, o desenvolvimento dessas competências pode começar, muito cedo, na vida escolar da criança.

É também importante que os alunos tenham uma ideia do grau de confiança a atribuir às previsões. As previsões da taxa de inflação e do estado do tempo não são certas, são de natureza probabilística. Construindo intervalos, os alunos podem começar a ter um sentido do rigor das previsões. Analisando previsões sobre a taxa mensal da inflação, os alunos começam a compreender que a previsão de uma taxa de inflação de 1% significa que, 9 em 10 vezes, a taxa real de inflação se situará entre 0,7% e 1,3%. Este sentimento intuitivo pode ser formalizado, mais tarde, quando os alunos examinarem situações, com base em modelos de distribuição teórica.

A área dos desportos e jogos fornece actividades altamente motivadoras. A maioria dos alunos atravessam fases em que as estatísticas desportivas os interessam muito: a percentagem de remates concretizados pelo Rui Águas, a percentagem de lançamentos da zona de 3 metros concretizados pelo Carlos Lisboa, a percentagem de derrotas em casa da equipa favorita. Estas estatísti-

(continua na pág. 36)

PENSE NISTO

Num número em que a «Educação e Matemática» se dedica em especial à Estatística, transcrevemos a seguir alguns dados numéricos publicados no passado dia 22 de Abril no jornal Expresso sob o título «Três épocas em números».

ASSUNTOS	1958	1973	1987
População	8 889 700(1)	8 629 600(2)	10 270 000(3)
População < 20 anos	37,5%(1)	36,7%(2)	34,3%(3)
População > 65 anos	8,0%(1)	10,2%(2)	11,4%(3)
População urbana	22,6%(1)	26,4%(2)	29,7%(3)
População activa	35,8%	36,6%	40,6%
Taxa de natalidade	23,7%	20,0%(2)	12,0%
Mortalidade infantil	84,0/mil	44,8/mil	14,2/mil
Casamentos	73 096	84 334	71 656
Inflação	1,8%	10,5%	9,6%(4)
Televisores	17 569	608 003	1 676 185
Telefones	332 309	948 003	1 676 185
Habitantes por médico	1 341	968	389
Despesas educação	720 836 c.	4 398 000 c.	254 300 000 c.
Estudantes Ensino Primário	851 675	971 512	846 318
Estudantes Ensino Secundário	156 804	333 322	647 391
Estudantes Ensino Superior	19 88	53 999	107 650
Professores Ensino Primário	30 071	44 231	76 221
Analfabetismo	44,3%(1)	29,0%(2)	20,6%(3)

(1) 1960; (2) 1970; (3) 1980; (4) 1988

Estes números constituem apenas uma pequena parte de um enorme quadro que vale a pena consultar e que é apresentado como «o perfil numérico de três momentos distintos da nossa história recente» ou como uma «descrição aritmética da evolução do nosso país nos últimos 30 anos» no referido jornal. A recolha foi realizada por Joaquim Vieira e Telma Miguel e dá para algum trabalho com dados numéricos e, muito possivelmente, alguma discussão e reflexão.

Henrique M. Guimarães

Um procedimento de cada vez...

Random, por acaso!

João Filipe Matos

Em inúmeras situações se torna necessário obter números ao acaso, isto é, números aleatórios. Se quisermos obter um número aleatório compreendido entre 0 e 9 poderemos utilizar 10 bolas «iguais» numeradas de 0 a 9 escolhendo uma «ao acaso» de dentro de um saco onde previamente as introduzimos e «baralhámos». Dado o elevadíssimo número de variáveis que influenciam e determinam a «escolha aleatória» que fazemos, admitimos como bom este processo de gerar um número aleatório. E na prática poderíamos «verificar» que não existe uma lei de repetição dos números que vão saindo em sucessivos ensaios.

Os computadores simulam este processo. No LOGO é o procedimento **random** que executa esta tarefa. Na versão LOGOWRITER a operação **random** admite um input numérico inteiro não negativo e tem como output um número «aleatório» inteiro compreendido entre 0 e o input dado. Em geral, o resultado de **random n** poderá ser 0, 1, ..., n – 1 (Fig. 1).

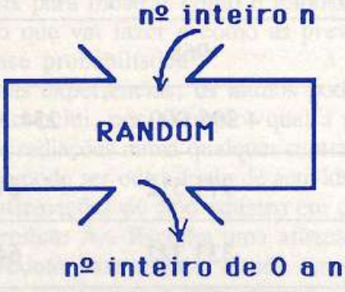


Figura 1

O período de repetição da sequência de valores que obtemos com a operação **random** é de tal modo elevado que consideramos habitualmente como bom este processo de simular a obtenção de números aleatórios.

Como operação que é, **random** pode servir de input para um outro comando ou operação. Eis dois exemplos:

1) **fd random 20** deslocamento aleatório da tartaruga em frente (Fig. 2).

2) **print item 1 + random 5 [a e i o u]** escolha aleatória de uma vogal e impressão no ecrã (Fig. 3).

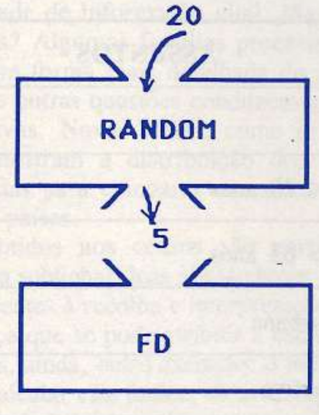


Figura 2

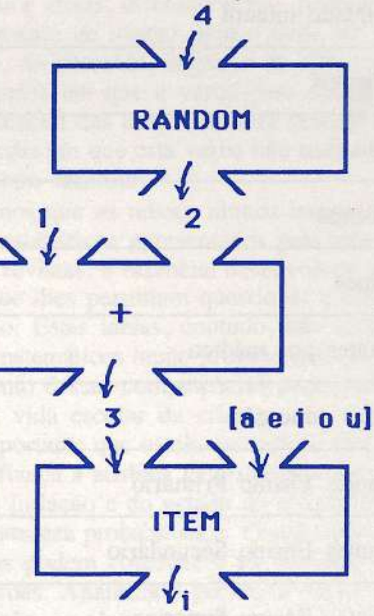


Figura 3

Em particular o resultado de **random** pode ser o input de um novo **random**. Poderíamos por exemplo experimentar obter uma série de resultados para **random 10, random random 10, random random random 10,** etc. Em geral, o que aconteceria com **random random... random n**?

Pode desta forma adivinhar-se o tipo de estudo que esta operação poderá permitir quer por si só, quer integrada em projectos mais complexos, no domínio das Probabilidades. Um destes exemplos é apresentado neste mesmo número da revista no artigo Computadores e Probabilidades.

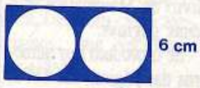
2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado

ABRIL

1

3

Determine a área da zona sombreada.



4

Se $4^x - 4^{x-1} = 24$, descubra o valor de $(2x)^x$.

5

Considere dois triângulos equiláteros com 15 cm de lado. Os dois triângulos formam uma estrela regular com seis pontas.

Qual é a área da região sombreada?

6

7

O produto das idades de três rapazes é 1872. A diferença entre as idades dos dois mais velhos é igual à diferença entre as idades dos mais novos.

Qual é a idade de cada um deles?

8

A soma das médias aritémica e geométrica de dois números positivos é 200.

Determine a soma das raízes quadradas dos dois números.

10

Descubra os números naturais a, b e c, tais que:

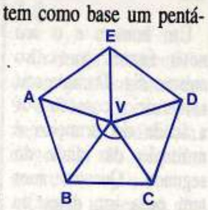
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

11

A pirâmide [VABCDE] tem como base um pentágono regular, e as suas faces laterais são triângulos equiláteros.

Qual é a amplitude do ângulo AVC?

12



13

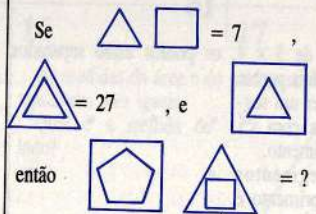
Descubra o termo seguinte da sequência:

0, 2, 6, 12, 20, ...

Qual é o n-ésimo termo?

14

Se



então

15

17

Quais são as letras maiúsculas que são simétricas relativamente a um eixo vertical?

18

Qual é o algarismo das unidades do número 2^{2391}?

19

As medidas dos lados de um triângulo são 6, 8 e 10.

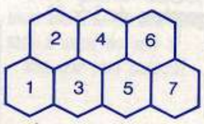
Qual é a distância entre o centro da circunferência inscrita e o centro da circunferência circunscrita ao triângulo?

20

Quantos caminhos existem de 1 para 7, se se deslocar sempre para um número adjacente e sempre para a direita?

(Por exemplo: 1-2-3-5-7)

21



22

Determine n, se $(10^{12} + 25)^2 - (10^{12} - 25)^2 = 10^n$

24

Qual é o maior número de dois algarismos que é igual ao quádruplo da soma dos seus algarismos?

25

Feriado

26

Para k inteiro positivo, o número k.1984 tem 21 divisores.

Descubra os valores possíveis de k.

27

Que percentagem dos quadrados perfeitos entre 0 e 1000 é que são ímpares?

28

O Alfa, o Beta e o Gama são suspeitos num caso de roubo. O seu julgamento revelou os seguintes factos: Ou o Gama está inocente ou o Beta é culpado. Se o Beta é culpado, então o Gama está inocente. O Alfa e o Gama nunca trabalham juntos e o Alfa nunca faz um trabalho sozinho. Por outro lado, se o Beta é culpado, o Alfa também é.

Quem é culpado?

29

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado

MAIO

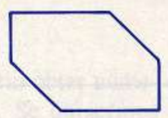
1

Feriado

2

Como é que se pode dividir a figura em quatro partes geometricamente iguais?

3



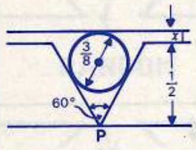
4

Desloque um algarismo de modo a obter uma igualdade verdadeira:

101 - 102 = 1

5

Determine o valor de x.



6

Escreva por ordem crescente os números:

2^{55}; 3^{44}; 5^{33}; 6^{22}

8

Preencha os espaços em branco:

3	4	5	6	7	8	9	10
		52	63	94	46		

9

Determine o quinto termo da sequência:

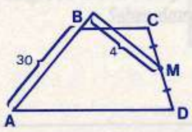
77, 49, 36, 18, ...

10

O número $(2^{48} - 1)$ é divisível por dois números entre 60 e 70. Quais são os números?

11

Determine a área do trapézio [ABCD].



12

Considere

$a = (((2^2)^2)^2)^2$

e

$b = 2^{2^{2^2}}$

Determine b/a na forma 2^n, em que n é um número inteiro.

13

Quando abro o meu livro de Matemática vejo duas páginas.

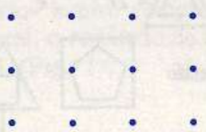
Se o produto dos números das páginas for 1806, quais são os números?

15

Numa grelha de 3 × 4, os pontos estão separados por 1 cm. Una dois pontos de modo a obter um segmento de recta com $\sqrt{5}$ cm de comprimento.

Quantos segmentos com este comprimento é possível desenhar na grelha 1.

16



17

Considere agora uma grelha de 4 × 4.

Quantos segmentos com $\sqrt{10}$ cm de comprimento é possível desenhar?

18

Um homem e o seu neto fazem anos no mesmo dia. Durante seis aniversários consecutivos a idade do primeiro é múltiplo da idade do segundo. Quantos anos tem cada um deles no sexto destes aniversários?

19

Deixe seis números adjacentes na mesma posição e rearranje os outros seis de modo que a soma de qualquer par de números adjacentes seja um número primo.

20

22

Coloque dois sinais «+» e dois «—» à esquerda do sinal «=» de modo a obter uma expressão verdadeira.

3344556677 = 153

23

Quantos triângulos isósceles é possível construir num geoplano de 3 × 3?

24

25

Traçando duas rectas, divida a face do relógio em três partes, de modo que a soma dos números das três partes seja igual.

26

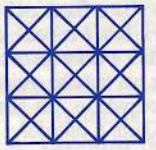
27

Qual é maior, 2^{100} ou 3^{75}?

29

Quantas figuras com a forma , de qualquer tamanho, consegue descobrir na figura?

30



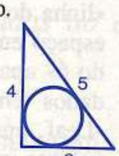
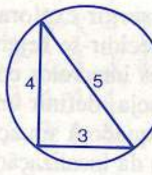
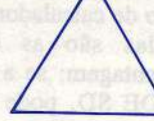
31

Que fracção da figura está sombreada?

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado

JUNHO

			1 No lançamento de dois dados, qual é o produto mais provável de surgir? 	**2** Os planos determinados pelas faces de um tetraedro dividem o espaço tridimensional em várias regiões. Quantas?	**3** 
5 Descubra o número ABCDE, com cinco algarismos, que verifica a igualdade: 1ABCDE = 3 × ABCDE1	**6** Qual é o número primo que é divisor de qualquer número palindromo de quatro algarismos?	**7** Determine o raio da circunferência inscrita no triângulo. 	**8** Um dado tem uma face em branco em vez de um 1, outro tem uma face em branco em vez de um 4. Qual é a probabilidade de surgir, num lançamento uma soma igual a 7?	**9** 	**10** Feriado
12 Determine o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.	**13** 	**14** Os lados consecutivos de um paralelogramo têm 9 e 7 cm de comprimento, e as medidas das diagonais são números inteiros. Quanto medem as diagonais?	**15** Quantos números naturais entre 1 e 1000 podem ser escritos na forma a^n, em que a e n são números naturais e $n \neq 1$?	**16** As medidas da área e do perímetro de um triângulo equilátero são iguais. Qual é a medida do lado?	**17** 
19 Qual é o menor número que dividido por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 dá os restos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, respectivamente?	**20** Quantos algarismos tem o número 5^{5^5}?	**21** As medidas da área e do volume de uma esfera são produtos de números de quatro algarismos por π. Qual é a medida do raio da esfera?	**22** 	**23** Uma pessoa nascida num dos últimos dez anos terá x anos no ano x^2. Em que ano nasceu?	**24** Descubra três números inteiros, em progressão aritmética, cujo produto seja um número primo.
26 Qual é a soma de n-ésima fila? 1 2 + 3 4 + 5 + 6 7 + 8 + 9 + 10	**27** O relógio da Ana adianta-se 1 s por hora, e o da Joana atrasa-se 1,5 s por hora. Neste momento marcam a mesma hora. Quando voltará a suceder o mesmo?	**28** 	**29** Escreva 96 como a diferença de dois quadrados perfeitos, de quatro maneiras diferentes.	**30** Quantos números palindromos de quatro algarismos existem?	

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Ao propormos estas actividades, pretendemos contribuir para a produção de materiais de utilização no ensino e aprendizagem da Matemática. Pensamos que à Estatística deverá ser dada maior ênfase em todos os níveis de escolaridade, porque:

É um campo de aplicação da Matemática.

Os processos de recolha, organização, representação, análise de dados podem permitir um envolvimento dos alunos na construção de aprendizagens significativas: estes ambientes podem favorecer o desenvolvimento de capacidades de compreensão e comunicação, de atitudes críticas e de pesquisa.

Defendemos a utilização das calculadoras na aprendizagem da Matemática, porque:

São um poderoso instrumento de cálculo.

Podem permitir o acesso a situações interessantes, do ponto de vista pedagógico, cuja natureza dos dados impossibilitaria o seu tratamento se não se utilizasse a calculadora.

Podem constituir uma ferramenta na resolução de problemas, na medida em que permitem testar hipóteses explorar situações, apoiar conjecturas, ...

Nas actividades que propomos é conveniente a utilização de calculadora; as funções predominantemente utilizadas são as de memória (MR, M^+, M^-) e percentagem; se a calculadora que estiver a usar tiver MODE SD, pode utilizar as funções $\bar{x}$ e σ_n.

Nas actividades 1 e 2, pretende-se trabalhar o conceito de *média*, dando ênfase à importância da tentativa, com uso da calculadora, como apoio da abstracção ou da generalização. A actividade 1 pode admitir extensões como por exemplo: «indica 5 números inteiros consecutivos cuja soma seja 100»; que relação existirá entre a média de um número ímpar (par) de termos consecutivos de uma progressão aritmética e esses termos»...

Na actividade 2 pretende-se discutir a variação de uma média, tirando partido da calculadora. Pode-se colocar a questão «a variação da média depende de quê?... valor dos dados, número de dados?». É também pertinente fazer discussão sobre arredondamento de números.

Pode-se também, em ambas as actividades, discutir por exemplo se se trata de variáveis de natureza quantitativa (discretas ou contínuas), ou qualitativa: outra abordagem que se pode fazer é a da pertinência, ou não, do cálculo de médias de favoráveis qualitativas.

Na actividade 3, pretende-se dar ênfase à organização de dados, nomeadamente sob a forma de tabelas. O critério que seguimos para a apresentação dos dados foi criado por John Tukey da Universidade de Princeton, no início dos anos 60, e foi designado por «STEM--AND-LEAF» (tronco e folhas, numa tradução à letra). Este método consiste em ordenar numa coluna, os algarismos correspondentes às ordens comuns aos dados e em acrescentar em linha, por ordem crescente, os algarismos que completam cada um dos números já inicializados na coluna. A série estatística correspondente aos dados apresentados nesta actividade é a seguinte: 49, 81, 52, 86, 71, 50, 77, 55, 62, 83, 87, 72, 61, 69, 64, 57, 88, 74, 68,, 79, 64, 81, 67, 82, 74, 67, 47, 61, 77, 63, 73, 87, 63, 77, 69, 55, 64, 84, 68, 83, 81, 71, 62, 66, 58, 79, 74, 61, 67, 88.

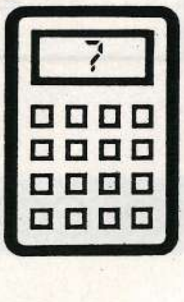
Note-se que o número de dados justifica a adopção deste processo, pois é muito mais rápido «lançar» os valores à medida que aparecem, na tabela inicializada com os algarismos das dezenas, escrevendo os algarismos das unidades, por ordem crescente, à direita de cada algarismo das dezenas — neste caso, por exemplo, na «linha do 4» registam-se os dados 47 e 49, ficando um espaço entre o 7 e o 9, por não haver o 48. Na «linha do 6» aparece duas vezes o 2 — isto significa que dois dados têm o valor 62. Esta representação, Stem-and--Leaf, apresenta já os dados organizados, conserva os valores individuais e mantém o impacto do histograma.

Nesta actividade pode propor-se aos alunos que definam a amplitude e os extremos das classes a definir, de acordo com o tipo de situação em estudo. Podem, para esta actividade, surgir explorações diversas, como por exemplo «pode decidir-se rejeitar alguns frutos, ou não»; há que definir os intervalos correspondentes a cada um dos calibres, ou seja, definir um critério de agrupamento dos dados adequado à situação. Pode-se também fazer uma abordagem da localização das medidas de tendência central como *Moda e Média*, por exemplo. Nesta actividade a calculadora torna-se útil no cálculo das percentagens.

Na actividade 4 pretende-se dar ênfase à interpretação de gráficos, por ser uma forma sugestiva e cada vez mais utilizada na caracterização de situações. Pode-se fazer alguma discussão a respeito de agrupamento de dados, como por exemplo, «o que significa haver 14 vagens com marca 5cm?» e «que vantagens pode haver em agrupar dados?» Pode-se também abordar a caracterização da distribuição normal em termos gráficos e dos parâmetros média e desvio-padrão, por exemplo.

Nesta actividade é aconselhável a utilização de uma máquina com *MODE SD* que tem incorporadas, entre outras, as funções de média e desvio-padrão.

Graciosa Veloso



ACTIVIDADES COM CALCULADORAS

Actividade 1

Escreve 5 números inteiros diferentes cuja média seja 20.
Escreve 6 números diferentes cuja média seja 10.

Actividade 2

Supõe que a média das alturas de 6 dos teus colegas é 1,35 m. Se um outro colega medir 1,25 m, qual vai ser agora a média dos 7 colegas?

Se a altura deste colega medisse 1,26 m, a média resultante manter-se-ia? E se a altura medisse 1,32 m o que aconteceria à média? Entre que valores poderia variar então a altura do colega, de modo que a média resultante fosse 1,33 m.

Supõe que, passado algum tempo, a média das alturas dos mesmos 6 coliegas passou a ser 1,37 m. Tenta justificar, com argumentos convincentes, o aumento verificado, testando diferentes hipóteses.

(Todas as médias são arredondadas ao cm)

Actividade 3

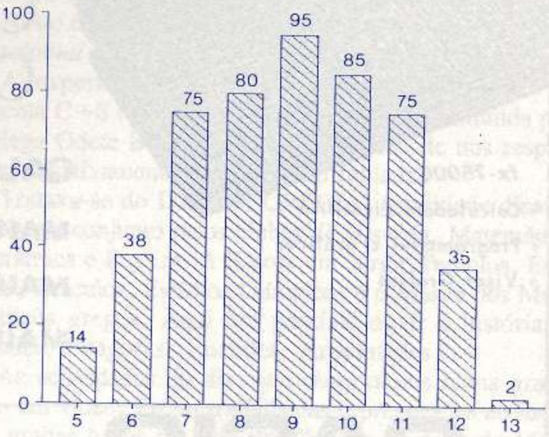
Numa cooperativa agrícola a embalagem de pêssegos é feita de acordo com seis calibres, cujos diâmetros em mm são os seguintes: 55, 60, 65, 70, 75 e 80. Os diâmetros dos pêssegos que há para embalar medem:

4: 7 9
5: 0 2 5 5 7 8
6: 1 1 1 2 2 3 3 4 4 4 6 7 7 7 8 8 9 9
7: 1 1 2 3 4 4 4 7 7 7 9 9
8: 1 1 1 2 3 3 4 6 7 7 8 8

Agrupa os dados, de acordo com um critério que consideres adequado à situação.
Constrói o histograma das frequências absolutas.
Qual é a percentagem de pêssegos com diâmetro inferior a 65 mm?

Actividade 4

O histograma seguinte representa a distribuição das frequências absolutas de vagens de favas segundo os comprimentos das mesmas.
Quantas vagens foram medidas?
Qual é a classe modal?
Qual é o comprimento médio das vagens?
A partir do histograma, constrói uma tabela que contenha as frequências absolutas, frequências relativas e frequências relativas acumuladas.
Constrói o polígono de frequências relativas acumuladas. Utilizando este gráfico estima o valor da mediana. A percentagem de casos pertencentes ao intervalo $[x - \sigma, x + \sigma]$, corresponde ao que seria de esperar, tendo em conta a curva da distribuição normal?



CASIO
fx-5000F
128 Fórmulas incorporadas
Programável
fx-82B
Calculadora Científica Básica
75 Funções
fx-7500G
Calculadora Científica
Programável c/ gráficos
Visor Gráfico
CALCULANDO O FUTURO CIENTIFICAMENTE
CALCULADORAS PARA O ENSINO
MAIS MEMÓRIAS
MAIS FUNÇÕES
MAIS QUALIDADE
exija
GARANTIA
BELTRÃO COELHO, LDA.
2 ANOS
CASIO
LIDER MUNDIAL EM CALCULADORAS

Núcleo de Lisboa Encontros APM

No decorrer do actual ano lectivo, o Núcleo de Lisboa da APM lançou uma iniciativa a que chamou **Encontros APM, Núcleo de Lisboa**, onde se pretende promover o intercâmbio de ideias, reflectindo sobre experiências realizadas por professores e alunos no âmbito da Educação Matemática.

Num ano que vai ficando marcado por reformas curriculares e novos programas, considerou-se serem de primordial importância para esta discussão os contributos que muitos professores de Matemática têm dado para uma efectiva **renovação do currículo em acção**, desenvolvendo experiências de inovação que deveriam ser consideradas quando se equacionam e delineiam novos programas. A experiência tem demonstrado que as iniciativas de inovação desenvolvidas nas escolas correspondem, na sua maioria, a significativas alterações nas práticas lectivas, porque sentidas e realizadas pela própria iniciativa dos seus protagonistas, ao contrário dos efeitos da maioria das reformas curriculares.

Porque sentidas e vividas, é natural a transmissão a outros colegas, que fora das suas horas de trabalho se dispõem a escutar e reflectir a «ideia» e a «iniciativa» que possibilita o encontrar de novas ideias e a concretização de novas iniciativas.

Porque acreditamos nesta forma de renovar o currículo (sem nos alhearmos da discussão oficial, mas antes interligando-as), a APM procurou com estes encontros dinamizar os espaços que possibilitem as trocas e as reflexões das experiências.

Clubes de Matemática, Matemática na Animação Escolar, Calculadoras na Educação Matemática, Puzzles/Jogos/Quebra-cabeças, Geoplano, Folha de Cálculo e Resolução de Problemas são os sete encontros previstos de Janeiro a Junho do corrente ano.

As sessões têm-se realizado nas próprias escolas onde as experiências de inovação têm lugar, com a presença média de 50 a 60 professores nas sessões já efectuadas.

De algumas dessas sessões damos notícias neste número da Revista, prometendo, para o próximo, um balanço das restantes.

Clubes de Matemática

No dia 24 de Janeiro deste ano, cerca de sessenta pessoas participaram, na Escola Secundária de Camões, em Lisboa, num encontro sobre Clubes de Matemática, dinamizado pelas colegas Adelina Precatado e Maria da Paz desta escola e Maria Leonor Vieira da Escola Secundária de Benfica que expuseram materiais construídos nos clubes e falaram das actividades aí realizadas e da sua experiência na animação dos respectivos clubes.

Dois clubes, duas histórias diferentes, uma aposta comum na mudança de estratégias de trabalho no âmbito da Educação Matemática.

Das diferenças, registámos, por exemplo, o papel dos alunos na coordenação dos clubes e o horário de funcionamento. Das semelhanças, atentámos na participação e entusiasmo de professores e alunos na resolução de problemas, no desenvolvimento de projectos ou na construção de materiais.

Da(s) história(s) passou-se ao debate. Deste, algumas interrogações:

— Que potencialidades de renovação curricular poderão nascer/crescer em espaços não curriculares?

— As actividades e as relações construídas nos clubes têm natureza e dinâmicas diferentes das conseguidas nas aulas. As interacções possíveis entre estes espaços que implicações podem ter na mudança de concepções e de práticas?

Matemática na animação escolar

Numa manhã de sábado, a 18 de Fevereiro do corrente ano, meia centena de professores de Matemática, de diferentes graus de ensino, reuniram-se na Escola Preparatória Marquesa de Alorna, para iniciarem uma discussão sobre a Matemática e a Animação Escolar.

Apesar de «animação escolar» ser uma noção extremamente vaga, ela transporta um certo grau de optimismo e uma mensagem de vontade de mudar o actual estado «imobilista» da maioria das escolas portuguesas.

A Animação Escolar corresponde, de alguma forma, à vontade cada vez mais sentida de dinamizar pedagogicamente as escolas para além do espaço tradicional da sala de aula, projectando e criando uma escola mais viva, mais empenhadamente sentida por alunos e professores, mais vivida, mais alegre e criativa, mais entusiasmante, mais interligada com o meio, mais de acordo com necessidades e interesses dos alunos,... um espaço de intercâmbio de experiências culturais.

Neste contexto, será a Matemática, por vocação, *uma disciplina pobre na animação da Escola*?

A experiência vivida por alunos e professores da Escola C+S de Montelavar, que nos foi transmitida pela colega Odete Bernardes, teve o condão de nos responder negativamente à questão formulada.

Tratava-se do DIA DA GRÉCIA, actividade dinamizada em conjunto pelos clubes de História, Matemática, Cerâmica e Pintura. A Escola viu surgir Templos, Estátuas, Oráculos, Estádios Olímpicos e o Museu dos Matemáticos gregos. Aqui era possível ouvir a história de Thales, Pitágoras, Euclides, Arquimedes...

As actividades do dia, que observámos numa gravação em vídeo, foram trabalhadas e preparadas ao longo de muitas horas de vida do Clube e da Aula de Matemática. Tantas e tão interligadas foram as actividades realizadas que, para nós que assistimos, não ficou claro (e ainda bem!) onde começava e acabava o trabalho da aula e do clube bem como a ligação da Matemática com as outras disciplinas envolvidas.

A finalidade não era que os alunos adquirissem grandes conhecimentos da História da Matemática, mas evidenciar que a História da Matemática pode constituir um desafio para as experiências matemáticas dos alunos. O conhecimento de experiências históricas que fizeram evoluir a Matemática são ensinamentos e desafios para alunos e professores transformarem o ensino da Matemática numa actividade própria de exploração, de investigação e descoberta, construindo, eles também, a sua própria experiência matemática.

Essa era a convicção, a grande finalidade do trabalho desenvolvido em Montelavar. E nós que assistimos à sessão sentimos esse desafio e vivemos, no vídeo, a alegria dos pequenos participantes a fazerem Matemática de uma maneira diferente!

Montelavar também nos mostrou uma montagem de páginas de trabalho no computador (utilizando a linguagem LOGO), realizado pelos alunos no clube de Matemática, produzindo um «filme» sobre a Odisseia de Homero, com cercaduras gregas, cavalo de Tróia, castelo e até Gregos e Troianos, que, claro está, agradou aos diversos «loguistas» presentes.

Após visionarmos o programa de vídeo, o programa de LOGO e contextualizada que estava a actividade, realizou-se uma pequena discussão sobre a importância da Animação Escolar e do papel da Matemática. Falou-se do peso «sisudo» da Matemática, da Matemática como uma «excelência» na escola, de clubes e jornais de escola, de centros de recursos, de dinamização de conselhos de grupo e o papel privilegiado dos conselhos de turma, e como não podia deixar de ser dos conselhos pedagógicos e da necessidade de planos de escola que englobem iniciativas e projectos de animação.

A discussão provavelmente continuou pelas diferentes escolas dos participantes da sessão e voltará a ter um momento de discussão colectiva em Viana do Castelo no decorrer do ProfMat 89, no âmbito do grupo de trabalho específico sobre o tema.

Numa das paredes da sala onde nos reunimos, podiam-se observar páginas de jornais escolares que continham desafios, jogos e artigos sobre a Matemática. Este trabalho, realizado pela colega Leonor Barão, teve como base uma recolha de jornais escolares realizada pelo Centro de Recursos da Escola Preparatória Marquesa de Alorna.

Ficou-nos a ideia de que alunos e professores de Matemática ainda contribuem pouco para os jornais que vão nascendo pelas escolas de todo o país. Será? (ver desafio no final da notícia).

O Núcleo de Lisboa também tomou nota e desfolhou os livros que serviram de referência aos trabalhos desenvolvidos sobre a História da Matemática.

«Apesar da experiência ser um privilégio de quem a vive», que bela manhã de Animação Matemática se sentiu na Marquesa de Alorna!

Desafio aos sócios da APM

Enviem para a Associação de Professores de Matemática exemplares de jornais escolares que tenham alguma notícia ou actividade relacionada com a Matemática. O pré-Centro de Recursos da APM, em fase de iniciação, fica a aguardar.

Calculadoras na Educação Matemática

22 de Fevereiro, mais uma tarde de encontro dos professores do Núcleo de Lisboa.

Na Escola Secundária Marquês de Pombal, quatro professores do 1.º grupo, estagiários e orientadora de estágio do ramo educacional, dinamizaram a sessão.

Para reflectir sobre a utilização das calculadoras na aula de Matemática, é sempre útil partir de uma base de experiência comum. E, assim, os dinamizadores optaram por propor aos participantes a resolução de algumas actividades simples, mas com capacidades formativas.

Como multiplicar dois números negativos, numa calculadora simples?

Qual é o resto de uma divisão?

Como ultrapassar as dificuldades criadas pela máquina se não respeitar a hierarquia das operações?

Estas foram algumas das questões levantadas na resolução das actividades apresentadas.

Mas também houve jogos e com alguma dificuldade, porque a estimação é uma capacidade com a qual nos temos preocupado pouco.

E das dificuldades se passou à reflexão sobre a pertinência e relevância da exploração de actividades deste tipo na aula de Matemática e sobre o papel da calculadora na Educação Matemática.

Certezas e receitas ninguém tem, mas pareceu claro que a calculadora não vem tirar nenhum poder ou valor ao ensino da Matemática, antes lhe proporciona novas perspectivas visto que, como poderoso instrumento de cálculo, pode substituir os aspectos fastidiosos, morosos e desinteressantes de cálculo.

Ficou assim evidenciado, mais uma vez, o papel da calculadora como instrumento da Educação Matemática. E foi mais um agradável encontro.

Jogos, Puzzles e Quebra-cabeças

Foi no âmbito dos encontros organizados pelo Núcleo de Lisboa da APM que, no sábado, dia 8 de Abril, se reuniram alguns professores de Matemática, na Escola Secundária da Amadora.

Ao contrário do que poderia esperar quem estivesse apenas informado do tema, o objectivo deste encontro não era discutir as potencialidades deste tipo de material no ensino da Matemática, mas sim a construção de jogos e quebra-cabeças, sob a orientação da Paula Teixeira, da Rita Vieira e do José Paulo Viana.

Foram cerca de cinquenta os colegas que conviveram e exercitaram a sua destreza manual colando, cortando, martelando, serrando, medindo e furando a matéria-prima que a APM forneceu para o efeito, numa sala de Trabalhos Oficiais da Escola Secundária da Amadora, enquanto a chuva caía copiosamente no exterior.

No final, a APM ficou com mais material para o seu centro de recursos e os participantes também tiveram a sua parte nos produtos, tal como fora prometido no convite. Os mais despachados chegaram até a experimentar os artefactos, numa atitude de curiosidade e como o controlo de qualidade impõe.

Todo o material, proveniente desta sessão, poderá, em breve, ser experimentado e mesmo requisitado para acções nas escolas.

Jornada Matemática nas Caldas da Rainha

Realizou-se no passado dia 3 de Maio, na Escola Secundária Rafael Bordalo Pinheiro, nas Caldas da Rainha, uma jornada matemática em que participaram 40 professores dos Ensinos Preparatório e Secundário das várias escolas da região.

Desta iniciatva fizeram parte duas sessões práticas: As calculadoras na Educação Matemática (Cristina Loureiro, Graciosa Veloso e Albano Silva).

Geometrias não-euclidianas no Ensino Secundário: Uma abordagem possível à Geometria Esférica (António Bernardes e José Manuel Varandas).

Esta jornada constituiu um agradável encontro de trabalho em que, para além dos temas referidos, foram discutidos alguns aspectos relacionados com o ensino da Matemática.

É de salientar a simpatia com que a organização recebeu os orientadores das sessões.

Uma palavra especial de agradecimento para o Dr. César Viana, incansável dinamizador desta jornada.

Integração dos alunos no 5.º ano de escolaridade
Algumas preocupações de pais e professores

No dia 15 de Fevereiro realizou-se uma reunião de pais e professores na Escola Primária da Voz do Operário na Ajuda. Estiveram presentes pais, professores de vários níveis de ensino, professores das escolas primárias da zona e um elemento da Direcção da APM.

Esta reunião surgiu como necessidade de discutir algumas preocupações, de pais e de professores de alunos do 2.º ano da 2.ª fase do ensino primário, quanto à passagem destes alunos para outro nível de ensino.

Nestas preocupações enquadram-se questões de vários tipos: a mudança de escola; a organização, dimensão e funcionamento da nova escola; a passagem de um para vários professores; as metodologias de ensino/aprendizagem. Estas últimas surgem com um peso relevante, na medida que os professores desta escola procuram fazer um trabalho centrado mais nos processos que nos produtos e apercebem-se das grandes diferenças de metodologias entre o trabalho que realizam e o que é realizado por muitos professores do ensino preparatório.

A realização desta reunião mostra mais uma vez o empenhamento dos professores na discussão aberta e na procura de soluções para os seus problemas.

Professores como estes poderão ser os motores das mudanças que todos desejamos para a Educação em geral e para a Educação Matemática em particular.

Revistas recebidas pela APM por permuta com «Educação e Matemática»

Epsilon, da Sociedade Andaluza de Educação Matemática (até agora tem sido recebida a revista *Thales*, antecessora de *Epsilon*), Espanha.
Números, da Sociedade Canária de Professores de Matemática, Espanha
Bulletin de l'APMEP, da Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, França.
Mathematics Teacher e News Bulletin, do National Council of Teachers of Mathematics, Estados Unidos da América.
Bulletin AMQ, da Association Mathématique du Québec, Canadá.
Temas e Debates, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
Boletim GEPEM, do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, Brasil.
ICMI Bulletin, da International Commission on Mathematical Instruction.
Boletim SPM, da Sociedade Portuguesa de Matemática.
Nonius, do Projecto «Computação no Ensino da Matemática» (Coimbra).
Revsta de Educação, do Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
Aprender, da Escola Superior de Educação de Portalegre
Forma e Viva Voz, da Direcção Geral de Apoio e Extensão Educativa.

A Madeira em destaque

Nos últimos tempos, têm-se desenvolvido no Funchal diversas iniciativas de inegável importância para o Ensino da Matemática. O I Encontro Regional de Professores de Matemática terá constituído a realização de maior impacto neste ano lectivo de 1988/89. Mas outras são igualmente merecedoras de destaque.

1º ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Entre 8 e 11 de Fevereiro de 1989, realizou-se, na Escola Superior de Educação da Madeira, o 1.º Encontro Regional de Professores de Matemática, organizado e preparado por uma comissão, constituída por cinco professores e um elemento da S.R.E. e que, desde o início foi apoiada pela Associação de Professores de Matemática e pela Secretaria Regional de Educação.

O Encontro contou com a participação de 64 professores dos ensinos preparatório e secundário, provenientes de toda a Região.

Desta iniciativa, fizeram parte várias actividades: sessões práticas, comunicações e uma sessão plenária seguida de grupos de discussão.

Os temas apresentados e respectivos orientadores foram os seguintes: Resolução de problemas (Paulo Abrantes); Computadores (João Filipe Matos); O Geoplano na sala de aula (Lurdes Serrazina); Estatística (Rita Vasconcelos); Cálculo Diferencial (Adelaide Carreira); Geometria (Eduardo Veloso); Topologia (Egídio Pereira) e a Geometria como fio condutor no 7.º ano unificado (Susana Carreira e Otília Moreirinha).

Funcionando as sessões aos pares, permitiu a cada um dos participantes uma escolha alternativa.

No espaço reservado às comunicações, dois professores estagiários da licenciatura em ensino da Matemática, relataram uma experiência que realizaram com alunos do 9.º ano na unidade Geometria Plana, na qual foi usado, como meio auxiliar de ensino, o Computador.

Os momentos mais importantes deste encontro foram, sem dúvida, os dedicados aos Currículos, durante os quais o Dr. Raul Carvalho e a Dra. Natália Vaz, elementos representantes do grupo de trabalho (coordenado pela Dra. Brigitte Tudichum) encarregue da elaboração de novos programas de Matemática, nos puseram ao corrente dos objectivos deste grupo e do trabalho por ele já realizado.

Com o intuito de recolher opiniões, lançaram-nos várias questões, as quais foram discutidas em grupos de trabalho. As conclusões obtidas foram objecto de debate final.

Entre as questões lançadas e discutidas, podemos destacar as seguintes: — Que tipo de actividades privilegiar no 3.º ciclo? — Que tipo de dificuldades podemos prever na implementação de um novo currículo? — Do cálculo dos actuais programas, o que aliviar, o que manter e o que reforçar?

Agrada-nos realçar que, por feliz acaso da sorte, fomos o 1.º grupo de professores de Matemática a ter o privilégio de comentar e apresentar publicamente sugestões directamente a dois responsáveis pela Reforma dos programas de Matemática.

Gostaríamos também de evidenciar a pronta disponibilidade e a total transparência com que nos expuseram todo o seu trabalho e as suas dificuldades, as quais sentimos como nossas.

Como conclusão final, julgamos poder afirmar que este encontro foi no seu conjunto bastante positivo.

Os temas tratados mereceram grande aceitação por parte de todos os presentes, conforme pudemos verificar nas críticas recebidas.

Durante três dias e meio, os professores de Matemática da Madeira, tiveram a oportunidade, há muito desejada, de reflectir em conjunto os principais problemas da sua actividade profissional e tomar contacto com novas abordagens curriculares. Trocaram-se ideias, analisaram-se temas e, principalmente, tomou-se consciência de que é necessário um esforço conjunto para defrontar a crise que o ensino da Matemática atravessa.

Este encontro, onde o bom ambiente geral de confraternização foi uma constante, culminou com um almoço na Quinta Magnólia, oferecido a todos os participantes, pela Secretaria Regional da Educação.

Esta iniciativa contou ainda com os apoios dos Bancos de Fomento Nacional e Pinto & Sotto Mayor, da Companhia de Seguros Bonança, do Centro de Apoio da Faculdade de Ciências, da Fundação Calouste Gulbenkian e The Madeira Regency Club.

Graça Vieira
Isabel Garton

Os Jogos «Matemática e Desporto»

No dia 16 de Dezembro de 1988, decorreu no Pavilhão da Escola Secundária Jaime Moniz a primeira fase destes jogos, organizados conjuntamente por um grupo de professores (estagiários) de Matemática e de Educação Física.

Um conjunto de actividades alternadamente de natureza desportiva e matemática proporcionou uma interessante competição entre cinco equipas de cinco alunos cada (pertencentes a diferentes anos de escolaridade) que foi seguida com grande entusiasmo por mais de quatro centenas de espectadores e que culminou com a entrega de prémios feita pelo Secretário Regional da Educação.

Do Jornal da Madeira de 17/12/88, transcreve-se com a devida vénia um registo do acontecimento.

Uma exposição... histórica

Após um longo trabalho de preparação, foi apresentada na E. S. Jaime Moniz, na última semana do 2.º período, uma exposição sobre a História do Cálculo. Esta exposição, intitulada «Números, Cálculos e Factos (um olhar ao longo do tempo)», foi organizada por um grupo de professores de Matemática daquela escola, com a colaboração de alunos.

Estruturada em sucessivos painéis e «ateliers», a exposição revelava diversos aspectos da evolução da Matemática, desde o conceito de número na pré-história até à moderna utilização de calculadoras e computadores. Para além de um filme genérico sobre a evolução do cálculo, estavam «fisicamente presentes» instrumentos usados em diferentes épocas (o ábaco, a régua de cálculo, as primeiras calculadoras mecânicas, os computadores actuais,...).

Um aspecto especialmente interessante foi o carácter inter-activo da exposição. Os alunos recebiam um guião contendo sugestões de actividades a realizar nos diversos «ateliers».

O projecto «A Matemática no Estádio dos Barreiros

Em simultâneo com a exposição atrás referida, foi igualmente apresentado na mesma escola o resultado de um trabalho realizado por um outro grupo de professores de Matemática em colaboração com alunos do 9.º ano. A apresentação incidiu nos principais aspectos do projecto desenvolvido ao longo dos três meses anteriores e que envolvia o estudo geométrico do campo de futebol e da pista de atletismo do Estádio dos Barreiros (Funchal) e, como produto, a construção de uma planta e de uma maqueta do mesmo Estádio.

Os resultados deste projecto despertaram muito interesse, nomeadamente entre as autoridades desportivas da Região que se mostraram empenhadas em que eles fossem igualmente apresentados no próprio Estádio, na altura da inauguração da nova pista de atletismo, marcada para os princípios de Abril.

Jornal «Choque Mate»

Lançado durante o ano lectivo de 1987/1988 pelos núcleos de estágio de Matemática da Escola Secundária de Jaime Moniz, o jornal destinado essencialmente aos alunos, tinha como principal objectivo despertar naqueles o interesse pela Matemática através da divulgação de temas da disciplina fora do contexto curricular, de problemas e curiosidades e da promoção de concursos.

Pretendeu-se desde o início que a sua divulgação não se restringisse a esta escola, mas sim que fosse divulgado também noutras escolas, o que é hoje um facto, chegando a praticamente todas as escolas secundárias da Madeira.

Pensamos que o jornal tem atingido satisfatoriamente os objectivos a que se propôs, com um aumento significativo da sua qualidade no aspecto gráfico e tem tido uma grande aceitação por parte dos alunos que pode ser vista pela tiragem que neste momento atinge os 2 500 exemplares por número.

Quanto à continuação do jornal para o futuro, esta ainda se mantém incerta, devido sobretudo ao problema da sua composição. Subsistindo neste momento à base da carolice de alguns (poucos) professores da Escola Secundária de Jaime Moniz, com alguma colaboração de outras escolas, o jornal terá de sofrer uma reestruturação nos moldes em que é feito, passando a sua composição a ser feita fora da escola ou então num futuro Clube de Informática da própria escola.

Se a questão da composição for resolvida, pensamos que a continuidade do jornal está assegurada, pois são ainda muitos os temas que gostaríamos de abordar, não sendo a falta de artigos para publicar que comprometerá o futuro do jornal.

José Alberto Ferreira

Parecer sobre os projectos... *(conclusão)*

Na sua actual forma, o projecto do 2.º ciclo apresenta mesmo contradições entre algumas das suas componentes. Embora afirme, na sua «linha metodológica» que «o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas é um eixo organizador do Ensino da Matemática», os problemas surgem depois na secção dedicada aos conteúdos apenas como aplicação de determinados conhecimentos muito específicos previamente adquiridos. Embora afirme que «a calculadora será usada para explorar e desenvolver conceitos matemáticos...», a sua utilização reduz-se depois ao objectivo específico de «confirmar resultados ou efectuar cálculos complicados». Embora um dos «objectivos gerais» propostos seja «tirar conclusões de experiências simples relacionadas com o conceito de probabilidade», não há qualquer referência posterior a este tema.

(c) **O peso relativo das diferentes componentes do programa.**

O projecto do 1.º ciclo dedica um grande número de páginas a aspectos essenciais que não estão presentes nos restantes projectos: gestão e desenvolvimento local do programa, relação entre o programa nacional e o projecto de cada escola, organização e diversificação das situações de aprendizagem.

5.

Num primeiro balanço global, o projecto do 1.º ciclo parece aproximar-se muito mais do que os restantes projectos daquilo que, hoje, é essencial num programa de Matemática. Embora faltem ainda, por exemplo no caso do 2.º ciclo, as indicações relativas às «sugestões de estratégias/actividades», a forma como o programa está organizado torna muito difícil ultrapassar a sua excessiva *compartimentalização*. O facto de se terem *deixado para o fim* os aspectos relativos às metodologias específicas e às formas concretas de trabalho a desenvolver pelos alunos, e não se ter desde o início uma visão integrada de todos os aspectos, parece sintomático das limitações apontadas.

As primeiras discussões realizadas por professores de Matemática sobre o projecto do 2.º ciclo mostraram aquilo que parece inevitável: rapidamente se procuram as *novidades* quanto aos temas dos programas, com o propósito de detectar aquilo *que saiu* e aquilo *que entrou* e de fazer uma primeira avaliação das possibilidades de se *dar toda a matéria*. Não será essa a intenção, mas o projecto não é suficientemente claro sobre o que é, hoje, essencial mudar no Ensino da Matemática: o ambiente de aprendizagem, os métodos, as formas de trabalhar — o objectivo e a natureza daquilo que fazem, na aula de Matemática, os alunos e o professor.

6.

Esperemos que estas observações contribuam para um aprofundamento da discussão, de forma a que seja possível caminharmos para a adopção de programas que constituam um facto de inovação (necessária) no Ensino da Matemática. Naquilo que está ao seu alcance, a Direcção da Associação de Professores de Matemática tudo continuará a fazer para isso.

Lisboa, Abril/Maio de 1989
A Direcção da
Associação de Professores de Matemática

DOIS ANOS PASSADOS...

Índice dos primeiros 8 números

de «Educação e Matemática»

Foi em 1987 no mês de Janeiro que foi publicado o primeiro número de «Educação e Matemática». Já lá vão dois anos, não muito tempo, é certo, mas tempo para oito números e matéria que julgamos suficiente para uma primeira resenha — ou índice, se quiserem — de artigos, textos e outras contribuições escritas que considerámos mais significativas.

É isso que a seguir apresentamos, em secções temáticas, indicando, em cada caso, o autor e o número da revista em que foi publicado.

Opções curriculares

Os «nossos» programas, a reforma em curso, novos temas curriculares...

(*) Conclusões dos grupos de discussão no Profmat88
(**) Entrevista de Fernando Nunes a Brigitte Tudichum, responsável pela coordenação dos novos programas

Resolução de problemas

Apresentando, resolvendo, discutindo problemas, a sua utilização no ensino, o seu papel de aprendizagem...

Duas das secções da revista — **«Problemas, ideias e sugestões»** (em todos os números excepto no n.º 8) e **«Dia a dia com a Matemática»** (em todos os números) — publicaram regularmente diversos problemas.

Os computadores em educação matemática

Programas para computador, e linguagem LOGO: hipóteses de trabalho em educação matemática.
PROBAN (*): uma simulação em computador — J. A. Duarte (E.M. n.º 1)
Os professores e a revolução informática — J. Ponte (E.M. n.º 2)
LOGO e a educação matemática — J. F. Matos (E.M. n.º 2).
RECORDES (*): um incentivo à crítica — M.ª C. Mesquita (E.M. n.º 2)
ESTIMATEMP (*): uma oportunidade para trabalhar com valores aproximados — P. Abrantes (E.M. n.º 3)
A conquista do castelo (*) e as suas implicações matemáticas — S. Carreira (E.M. n.º 4)
Passeio cronometrado (*): uma simulação gráfica — M. C. Silva e L. Lopo (E.M. n.º 5)
LOGO.GEOMETRIA (*): um desafio à geometria que ensinamos — A. V. Lopes (E.M. n.º 5)
Função quadrática e movimento de projécteis — M. C. Silva (E.M. n.º 8)
(*)Programa de computador
Saiu ainda com regularidade a secção «LOGO.MAT» (nos 2, 3, 4, 5, 6, 8) de onde salientamos:
Cruzamentos de polígonos — J. F. Matos (E.M. n.º 2)
Calculando π — J. F Matos (E.M. n.º 5)
e foram apresentados, na mesma secção, alguns procedimentos da linguagem LOGO: **OUTPUT** (E.M. n.º 3); **REPEAT** (E.M. n.º 4) e **THING** (E.M. n.º 8).

Na secção «Para este número seleccionámos», foi publicado no n.º 2, em tradução, o texto da autoria de Seymour Papert «**O computador torta de barro**».

Geometria

Novas opções para o ensino e aprendizagem da Geometria, materiais, exemplos...
Para o reforço do ensino da Geometria — A. F. de Oliveira (E.M. n.º 6)
Um exemplo de didáctica de Geometria — J. M. Matos (E.M. n.º 6)
A bola: volume e área de uma esfera — J. J. Henriques (E.M. n.º 6)
Algumas notas sobre o ensino da Geometria — L. Serrazina (E.M. n.º 7)
A dança das circunferências — A. P. Natal (E.M. n.º 7)

Probabilidades e Estatística

Dois temas de que se tem falado muito, e não só agora: Opções para a sua integração no currículo e algumas actividades de aprendizagem...
Para uma abordagem do conceito de probabilidade — O. Bernardes (E.M. n.º 3)
Estatística no Ensino Básico e Secundário: uma proposta — A. Inácio (E.M. n.º 3)
Gobin — M.ª J. Costa (E.M. n.º 3)
Esparguete, triângulos e probabilidades — J. F. Matos (E.M. n.º 5)

A Matemática e a realidade

Alguns exemplos da Matemática como instrumento para compreensão da natureza e do mundo e de como esta sua qualidade pode ser importante para a aprendizagem desta disciplina...

A geometria dos cristais — F. Michel (E.M. n.º 1)
Fractais na escola secundária — D. G. Giorgi (E.M. n.º 4)
Transformações afins, sinusóides e acústica — D. G. Giorgi (E.M. n.º 6)
Das corridas de atletismo às rodas do comboio — A. Vieira (E.M. n.º 6)

A Matemática na animação escolar

Como a Matemática pode intervir na dinamização do espaço escolar...
O Clube de Matemática: reflexão e acção — A. Silva (E.M. n.º 1)
Olimpíadas da Matemática: quem segura o facho olímpico? — J. A. Duarte (E.M. n.º 3)
Clubes de educação matemática e informática — J. Amaral e L. B. Costa (E.M. n.º 4)
É tão bom conseguir! — L. Figueiral (E.M. n.º 7)

Utilização de materiais

Algumas ideias e experiências...
Proporcionalidade: uma actividade de aprendizagem — M.ª C. Mesquita (E.M. n.º 1)
O jogo das cores — M.ª J. Costa (E.M. n.º 1)
Algumas notas sobre o ensino da Geometria (utilização do geoplano) — L. Serrazina (E.M. n.º 7)
Na secção «Para este número seleccionámos» foi ainda publicado no n.º 6, em tradução, o texto da autoria de William M. Carrol **«Seccionando sólidos de plasticina»**
Em alguns números, nas secções «Materiais para a aula de Matemática» e «Problemas, Ideias e Sugestões» foram propostas actividades que envolvem a utilização de materiais manipulativos (ver por exemplo E.M. n.º 2 e E.M. n.º 6)

Materiais para a aula de Matemática

Na secção com este nome, foram publicadas prontas para serem fotocopiadas e utilizadas em actividades com os alunos as seguintes «fichas»:
Uma investigação sobre rodas dentadas — P. Abrantes e P. Pimentel (E.M. n.º 4)
Ponto de partida — L. Moreira (E.M. n.º 5)
Construções com cubos — A. Rebelo (E.M. n.º 6)
Exercícios e problemas sem falta de memória — C. Loureiro (E.M. n.º 8)

Temas diversos

Dificuldades de aprendizagem, o papel do professor, ideias sobre a Matemática e para o trabalho com os alunos...
Um ciclo vicioso — H. M. Guimarães (E.M. n.º 2)
Saber de cor a tabuada: problema ou mito — A. Inácio (E.M. n.º 2)
Alguns obstáculos para a aprendizagem da Matemática — P. Llorente (E.M. n.º 3)
Mathema, Poiêsis, Mageia — T. Vergani (E.M. n.º 3)
A história da Matemática — H. Correia (E.M. n.º 4)
T.P.C. (Trabalho para Casa) — H. M. Guimarães (E.M. n.º 4)
A curva do dragão — M. J. Costa (E.M. n.º 4)
O milagre da multiplicação dos professores — J. M. Duarte (E.M. n.º 5)
Números pitagóricos — E. Pereira (E.M. n.º 7)

Textos seleccionados

Com o objectivo de dar a conhecer alguns textos e autores foram publicados, em tradução:
O computador torta de barro de Seymor Papert (E.M. nº 2)
Uma pequena história, adaptado de um testemunho de François le Lionais publicado por Alain Bouvier no seu livro *La Mystification Mathématique*, 1981, Paris: Hermann (E.M. n.º 2)
Ensinando o processo de investigação de Henry Borenson (E.M. n.º 4)
As calculadoras na aula de Matemática, posição oficial do *National Council of Teachers of Mathematics* (dos EUA) sobre esta matéria datada de 1986 (E.M. n .º 4)
Seccionando sólidos de plasticina de W. M. Carrol publicado pela *Aritmethic Teacher*, Março, 1988 (E.M. n.º 6)

Já agora...

Para terminar, um pouco de estatística descritiva.
Até ao número 8, e desde o seu primeiro número, enviaram contribuições escritas que vieram a ser publicadas na «Educação e Matemática» 58 pessoas. Esses colaboradores distribuiram-se do seguinte modo:
48 (84%) colaboraram em um ou dois dos números de «Educação e Matemática» já editados, estando no primeiro caso 37 (65%) desses colaboradores.
7 (12%) colaboraram em metade ou mais desses números.
Assim, se é verdade que estes números indicam que o que podemos chamar *colaboração regular* com a nossa revista é ainda reduzida, o facto da maioria das contribuições ser de carácter não regular, significa igualmente que a colaboração com a «Educação e Matemática» tem vindo a diversificar-se e está em franca expansão. O quadro seguinte reforça ainda mais esta nossa ideia:

E.M. n.º	novos colab.	novos/antigos(1) colab.
2	7	7/5
3	11	11/8
4	5	5/9
5	9	9/7
6	5	5/10
7	8	8/7
8	2	2/8

(1) «Antigos», i.e. que tenham anteriormente colaborado com «Educação e Matemática» pelo menos uma vez.

Repare-se que de número para número da revista surgiram sempre primeiras contribuições — «novos colaboradores» — e que em quatro dos oito números já editados a quantidade dos «novos colaboradores» excedeu mesmo a dos «antigos».

Registe-se, por fim, que as contribuições dos diversos colaboradores, de acordo com o *índice* que elaborámos relativo aos oito primeiros números da «Educação e Matemática», incidiu preferencialmente na problemática das **Opções curriculares** (12 artigos), na **Resolução de problemas** (11 artigos não incluindo as contribuições através das secções «Dia a dia com a Matemática» e «Problemas, Ideias e Sugestões), e na temática dos **Computadores e o ensino da Matemática** (10 artigos, não incluindo também a colaboração nas secções).

Este não será um relato completo do que foi a vida ainda curta da «Educação e Matemática». Constituirá, porventura, uma descrição da sua actividade, daquilo em que se traduziram as principais preocupações de todos os que a fizeram durante estes dois anos. Daqui a mais dois anos, por certo, haverá mais para contar.

Henrique M. Guimarães

Para este número... *(conclusão)*

cas fornecem a oportunidade para examinar o efeito dos resultados de um só jogo em conceitos como por exemplo a média.

Os alunos podem, por exemplo, seguir os resultados de diferentes jogadores de basquetebol, nomeadamente na concretização dos lances da zona de três metros. No início da temporada, podem ver como um jogo em que o jogador foi particularmente feliz (ou infeliz) afecta, de forma radical, a média desse jogador. À medida que a temporada avança, podem observar como o peso de um jogo começa a afectar, cada vez menos, a média.

Tais actividades ajudam a desenvolver a apreciação do efeito de um resultado individual nas médias, provando ser de grande valor, quando da formalização de conceitos como média, moda e mediana.

Para além disso, pode-se, também, explorar uma média para fazer previsões. Que se pode esperar de um jogador que tem uma média de 0,333 na concretização de lançamentos da zona de três metros? Qual das médias permite fazer uma melhor previsão: a média ao fim dos primeiros cinco jogos da temporada ou a média ao fim de quinze jogos? Estas questões ajudam a construir ideias acerca das previsões em situações probabilísticas e põem em evidência alguns dos paradoxos associados às médias.

Os dados e os jogos de cartas são, também, uma fonte de problemas para a discussão das probabilidades e permitem o cálculo da probabilidade teórica dos diferentes acontecimentos. Pode-se, numa turma, constituir duas equipas (A e B) e, a cada lançamento de um dado, a equipa A pontua se o número de pontos obtidos for par, enquanto, se for ímpar, pontua a equipa B. A questão que se pode colocar é se se trata de um jogo justo. E se a pontuação de cada equipa se basear no lançamento de dois dados?

Fazendo sucessivos lançamentos de um dado, pode-se determinar a distribuição de 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontos em 30, 50, 90, 120, ..., 300 lançamentos e verificar como a probabilidade de ocorrência de cada número varia, à medida que o número de lançamentos aumenta. Que número de lançamentos dá a «melhor» aproximação da probabilidade teórica? O que aconteceria se o número de lançamentos fosse ainda maior? Obteríamos uma melhor estimação? Estes problemas realçam a importância do tamanho das amostras.

A crescente complexidade do mundo de hoje produz numerosos problemas sem solução exacta. Em tais situações, os computadores, as técnicas de simulação, os números aleatórios, a estatística e as probabilidades concorrem para obter boas aproximações.

Será desejável que as actividades a propor aos alunos envolvam: (1) a análise dos pressupostos subjacentes aos dados estatísticos; (2) a exploração de regularidades «escondidas» nos dados; (3) o questionamento da relevância e do rigor das inferências e (4) a compreensão do papel do tamanho da amostra e dos métodos de amostragem.

Ensinar estes conceitos-chave é essencial, se se pretende educar os alunos para o tratamento de situações estatísticas e probabilísticas e proporcionar-lhes uma base sólida para futuros trabalhos.

Tradução e adaptação de Leonor Moreira

ÍNDICE