Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2010
107
Março ∞ Abril

Preço 5.75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Abril 2010
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530–250 Torres Vedras

Depósito Legal n° 72011/93
Registo no ICS n° 124051
ISSN 0871-7222

Porte Pago

Sobre a capa

Detalhe de uma reprodução efectuada pelo British Museum do famoso Engenho Analítico. Este «engenho»—um computador mecânico—foi concebido pelo matemático britânico Charles Babbage e descrito pela primeira vez em 1837. Trata-se de um marco na história dos computadores e do cálculo automático.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Caseiro, Anabela Oliveira, Ana Coelho de Paiva Pico, Fernando Nunes, Helena Amaral, José Dilson Beserra Cavalcanti, Magda Nunes Pereira, Manuel Joaquim Saraiva, Marcelo Câmara Santos, Paulo Afonso, Pedro Almeida, Rui Feiteira, Sónia Figueirinhas.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, N° 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

O outro lado da Lua

Fernando Nunes

A *Educação e Matemática*, no seu número temático de 2009, elegeu o novo programa de Matemática para o ensino básico, como assunto a ser discutido, explicado e reportado. Seria difícil escolher um tema melhor, mais actual e importante para os professores de Matemática, dada a relevância que um texto programático apresenta, nomeadamente quando é uma proposta nova que terá necessariamente de ser clarificada, e os desafios que decorrem dessa proposta terão de ser identificados, analisados e reflectidos. Foi o que aconteceu nas páginas da revista. Os autores defenderam os seus pontos de vista e justificaram algumas das opções que tomaram, outros professores comentaram o programa, debruçaram-se sobre aspectos particulares analisando a filosofia subjacente, a coerência existente, as implicações emergentes, tanto no realçar de aspectos essenciais, como na possível actuação de quem vai ter a responsabilidade de gerir e aplicar o novo programa. Muitas vezes as observações estão colocadas na forma de interrogação, e não de afirmação, para assinalar facetas e temas que devem ser considerados e aprofundados em discussão.

A par dos artigos de índole mais teórica, o número temático oferece ao leitor um conjunto de informações sobre as medidas institucionais existentes para auxiliar os professores na empresa da passagem do programa à prática, a narração comentada de episódios de sala de aula, no contexto do novo programa, e as conclusões de um questionário realizado no ProfMat2009, sobre o então conhecimento dos professores acerca do programa.

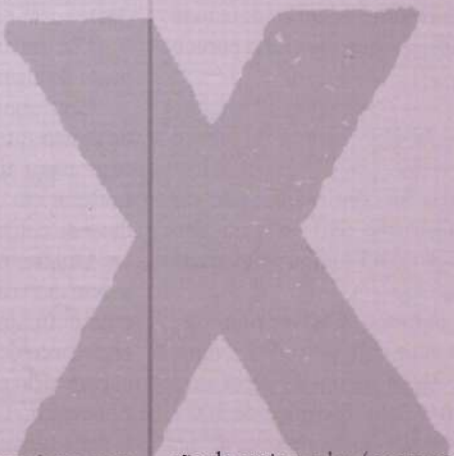
Temos também oportunidade de saber o que pensam professores experimentadores sobre o programa, as potencialidades e as dificuldades sentidas no decurso da sua actividade. No trabalho com o novo programa vieram juntar-se neste ano lectivo os professores que em mais de quatrocentos agrupamentos começaram a trabalhar nele com os seus alunos, com os seus colegas de agrupamento ou escola e, eventualmente, com outros professores, nomeadamente formadores. A par desta quantidade de intervenientes directos, existe um universo amplo de questões que necessitam de discussão e reflexão. Uma leitura rápida das páginas desta revista temática permite avançar já com algumas questões ligadas às percebidas potencialidades que o programa oferece ou às dificuldades relativas à sua gestão. Parece ser fulcral a cooperação entre os professores e, nesse sentido, a criação de espaços na escola que a possibilite será essencial. O trabalho integrado no desenvolvimento das capacidades transversais, a identificação de conexões, com outras disciplinas ou dentro do próprio programa, a adequação do programa ao tempo dedicado à Matemática, a sua gestão por grupos de anos de escolaridade, a relação que poderá ser estabelecida com o Currículo Nacional do Ensino Básico, a clarificação de conceitos, de terminologia e de propostas diferentes do que era tradicional em programas anteriores, ou a forma de gerir o problema relativo aos alunos que iniciam os novos programas em anos diferentes do 1° ano de escolaridade, são apenas alguns dos aspectos que podem ser discutidos e reflectidos, em contextos colaborativos ou em acções individualizadas.

As oportunidades de melhorar o ensino e aprendizagem que o programa oferece devem ser aproveitadas e rentabilizadas, enquanto as dificuldades que levanta terão de ser enfrentadas, de forma a serem minimizadas. Para que isso aconteça a um nível alargado, seria da maior importância que quem teve a oportunidade de trabalhar com o novo programa de Matemática para o ensino básico pudesse expressar as suas opiniões e elas fossem levadas em conta, pelos que têm a responsabilidade de decidir as medidas institucionais e organizar a sua articulação, no sentido da criação de condições que facilitem uma empresa que é complexa e não vai ser realizada num curto espaço de tempo. De facto, uma efectiva e harmoniosa entrada em vigor do novo programa, nas aulas de Matemática do ensino básico em Portugal, muito questionavelmente será possível sem a participação e o empenho dos professores.

Fernando Nunes
EB 2,3 de Fitares

Qual é o maior produto?

Ana Caseiro



Certo dia ao preparar uma das minhas aulas deparei-me com um desafio que me pareceu extremamente interessante, não só para mim como para propor aos meus alunos.

O desafio designava-se «Tenta-estima-tenta» e consistia em pedir que em cada alínea da questão 1 se descobrisse como distribuir 5 algarismos dados num esquema de multiplicação _ _ _ × _ _, de modo a obter-se o maior e o menor produto. Na questão 2 era pedido que se referisse como distribuir 5 algarismos dados de modo a obter o maior e o menor quociente e com 6 algarismos dados a maior e a menor soma e a maior e a menor diferença.

Ao longo de todo o texto vai ser necessário utilizar várias vezes a expressão «maior (ou menor) número representado pelo algarismo» que irei substituir por maior (ou menor) algarismo.

No caso da divisão pareceu-me evidente que para obter o maior quociente teria de colocar os algarismos do maior para o menor pela seguinte ordem: 5° 4° 3° 2° : 1°, ou seja, se pretendo obter o maior quociente possível torna-se necessário ter o maior número possível a dividir pelo menor dos algarismos; no caso de pretender obter o menor quociente, tenho de ter o menor número possível a dividir pelo maior número que se consiga formar, tendo de se dispor os algarismos do seguinte modo: 1° 2° 3° : 5° 4°.

No que diz respeito à adição pareceu-me evidente que para obter a maior soma teria de ter as maiores parcelas que fosse possível formar. Na situação de cinco algarismos, para formar duas parcelas: uma com três algarismos e outra com dois, o procedimento é colocar o maior algarismo na posição de maior valor (centenas), os dois seguintes indiferentemente na posição das dezenas dos dois números e, finalmente, os dois algarismos menores indiferentemente na posição das unidades. Exemplo:

$$\begin{array}{r}542\\+31\\\hline 573\end{array}\qquad\begin{array}{r}541\\+32\\\hline 573\end{array}\qquad\begin{array}{r}532\\+41\\\hline 573\end{array}\qquad\begin{array}{r}531\\+42\\\hline 573\end{array}$$

Deste modo se chega à conclusão que não existe apenas uma hipótese de resposta certa, mas sim várias (no exemplo apresentado, quatro). Com o mesmo raciocínio se verifica que para se ter a menor soma se tem de utilizar as menores parcelas que se consigam formar e, do mesmo modo, será indiferente em termos de resultado trocar entre si os algarismos em posições do mesmo valor em ambas as parcelas.

Na subtracção, para obter a maior diferença tornou-se evidente que teria de colocar o maior número que conseguisse formar como aditivo e o menor número que se pudesse formar como subtractivo. Por outro lado, para obter a menor diferença é necessário formar os dois números o mais próximo possível um do outro, ou seja, formar como aditivo o menor número possível e como subtractivo o maior número possível.

Verificando todas as situações apresentadas o grande desafio que desperta real interesse prende-se com a descoberta do maior e do menor produto e, como tal, a ordem pela qual os algarismos devem ser colocados para se obter tais resultados.

Começando por pensar que se tem de colocar os maiores algarismos disponíveis nas posições de maior valor, na primeira situação em que os algarismos eram 1, 2, 3, 4 e 5, teria que se colocar o 5 na única casa das centenas, o 3 e o 4 nas duas casas das dezenas (não se sabendo com que ordem, isto é, se o 3 no primeiro factor e o 4 no segundo factor ou vice-versa) e o 1 e o 2 nas duas casas sobrantes, isto é, nas unidades.

Seguindo este pensamento cheguei ao produto:

$$5\,3\,1 \times 4\,2 = 22\,302.$$

Não estando confiante de que este seria realmente o maior produto que se consegue obter continuei a tentar, deixando de seguir a constatação acima referida que me tinha parecido óbvia, até que cheguei a

$$4\,3\,1 \times 5\,2 = 22\,412$$

Ao olhar novamente para os factores continuou a não me parecer muito óbvio o maior algarismo não estar na única posição das centenas (a posição com maior valor nesta multiplicação).

Após um olhar mais atento pensei que talvez não fosse tão absurdo aquilo que via, pois mais vale ter o 431 a repetir-se 52 vezes do que o 531 a repetir-se apenas 42 vezes, uma vez que entre o 531 e o 431 temos uma diferença de 100 e entre o 52 e o 42 temos uma diferença de 10, ou seja, de dez vezes o outro factor.

Tal constatação parece levar-nos a pensar que só acontece com algarismos consecutivos, pois se trabalhar com outros algarismos a diferença entre os factores das duas situações já iria ser superior o que talvez fizesse com que já não fosse vantajosa essa troca.

Experimentei, então, com os algarismos dados na alínea B: 2, 4, 5, 6 e 9. Depois de muito testar verifiquei que para obter o maior produto teria de colocar os algarismos segundo a mesma ordem estabelecida anteriormente (na alínea A do desafio), ou seja, cheguei a:

$$6\,5\,2 \times 9\,4$$

Depois de chegar a este produto, experimentei com outros algarismos (mas sempre apenas com 5 algarismos) tendo chegado à conclusão que a ordem de distribuição dos algarismos se mantém constante, sendo os algarismos apresentados por ordem crescente, ou seja, o 1° o menor e o 5° o maior:

$$4°\ 3°\ 1° \times 5°\ 2°$$

Para perceber se esta regra se mantinha constante utilizando outro número de algarismos fui experimentando várias situações que foram desde os dois factores com o mesmo número de algarismos até aos dois factores com uma diferença de quatro algarismos. No quadro síntese seguinte, onde sistematizo todas as experiências feitas, cada quadrado representa uma posição dos algarismos nos numerais, em dois factores dispostos segundo o algoritmo tradicional. As linhas que unem os quadrados significam a ordenação do posicionamento dos algarismos do maior (mais à esquerda) para o menor (mais à direita). Por exemplo, na terceira situação analisada estamos perante um produto de um factor com três algarismos por um outro de dois algarismos. O esquema de colocação dos algarismos do maior para o menor mostra que o maior dos cinco algarismos em presença deve ficar na ordem das dezenas do segundo factor; o seguinte em valor deve ser o algarismo das centenas do primeiro factor, seguindo-se as dezenas no primeiro factor, as unidades no segundo factor e, finalmente, o de menor valor na ordem das unidades do primeiro factor (Quadro 1).

Por uma questão de arrumação, o factor com maior número de algarismos aparece sempre como o primeiro factor.

Conforme fui preenchendo o quadro reparei que no caso de existir diferença entre o número de algarismos dos factores o maior algarismo deverá ser colocado no factor com menor número de algarismos enquanto que o menor algarismo deve-se colocar no factor com maior número de algarismos.

Observando cada um desses esquemas da esquerda para a direita verifica-se que a colocação dos algarismos se inicia com um U invertido e inclinado e, posteriormente, com os algarismos dos dois factores intercalados até só existirem algarismos do primeiro factor que ficaram sem correspondente no segundo factor e, por isso, se mantêm todos ligados entre si por ordem.

Ao analisar novamente os resultados obtidos verifica-se que quando os dois factores têm igual número de algarismos a regra de colocação dos algarismos é a de que o factor que contém o menor algarismo também contém o maior, ao contrário do que acontece quando existe diferença entre o número de algarismos dos factores.

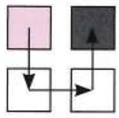
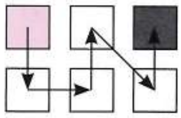
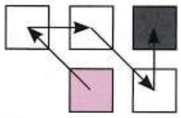
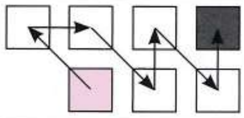
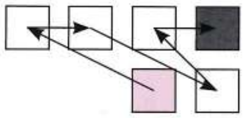
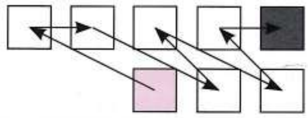
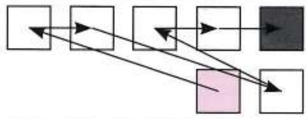
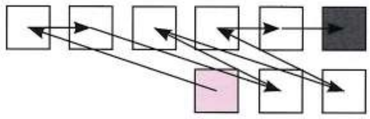
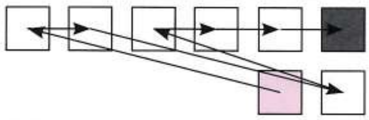
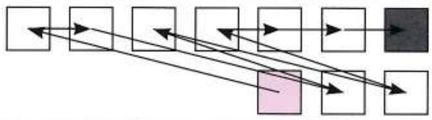
Para mim foi bastante interessante chegar a esta regularidade pois nunca me tinha ocorrido que existisse sempre uma determinada ordem para colocar os algarismos, independentemente da sua quantidade, de modo a obter o maior produto possível.

Mas qual a explicação matemática para esta regularidade se manter? Porque é que o maior algarismo tem de ficar no factor com menor número de algarismos? Não faria mais sentido ser ao contrário, isto é, colocar o maior algarismo no maior factor? Matematicamente é possível provar todas estas constatações?

Para tentar responder a estas questões explorei mais pormenorizadamente, que operações ocorriam em cada um dos casos e qual a mais vantajosa para a nossa situação-problema, ou seja, qual a que daria o maior produto.

Comecei por pensar no desafio que me tinha sido colocado inicialmente, ou seja, um factor com três algarismos e o outro com dois. Como me é pedido o maior produto, sei que os factores têm de começar com os maiores algarismos, embora ainda não saiba com que ordem colocá-los.

Considerando os algarismos ordenados do menor para o maior como: a, b, c, d, e e, temos as seguintes possibilidades de colocação dos algarismos, tendo em consideração que o

Nº algarismos 1º factor	Nº algarismos 2º factor	Diferença entre o nº de algarismos do 1º e do 2º factor	Esquema de colocação dos algarismos (o percurso é iniciado com o algarismo maior (quadrado a rosa) e segue por ordem decrescente até ao algarismo menor (quadrado cinzento))
2	2	0	
3	3	0	
3	2	1	
4	3	1	
4	2	2	
5	3	2	
5	2	3	
6	3	3	
6	2	4	
7	3	4	

Quadro 1. Esquema de colocação dos algarismos em produtos de dois factores

a (algarismo de menor valor absoluto) só poderá ficar numa posição, enquanto que o *d* e o *e* podem ficar em duas posições distintas (trocando entre si), assim como o *b* e o *c*:

A
$$\begin{array}{r} d\,b\,a \\ \times \quad e\,c \\ \hline cd\ cb\ ca \\ ed\ eb\ ea \quad \end{array}$$

B
$$\begin{array}{r} e\,b\,a \\ \times \quad d\,c \\ \hline ce\ cb\ ca \\ de\ db\ da \quad \end{array}$$

C
$$\begin{array}{r} d\,c\,a \\ \times \quad e\,b \\ \hline bd\ bc\ ba \\ ed\ ec\ ea \quad \end{array}$$

D
$$\begin{array}{r} e\,c\,a \\ \times \quad d\,b \\ \hline be\ bc\ ba \\ de\ dc\ da \quad \end{array}$$

O número obtido que vai ficar na posição com maior valor relativo (o resultante do produto **ed** ou **de** (igual)) é igual em todas as hipóteses, portanto não é este que irá influenciar no resultado final.

Observando a posição relativa seguinte, verifica-se que já existe uma diferença:

- A = D → be + dc
- B = C → bd + ec

a b c d e

Como **e** é o maior algarismo convém tê-lo sempre a multiplicar pelo maior algarismo possível, por isso, há vantagem nas hipóteses *B* e C, tal como se pode verificar no esquema acima apresentado. Vejamos alguns exemplos numéricos:

1

1 2 3 4 5

$2 \times 5 + 3 \times 4 = 22$

$2 \times 4 + 3 \times 5 = 23$

2

1 2 3 8 9

$2 \times 9 + 3 \times 8 = 42$

$2 \times 8 + 3 \times 9 = 43$

Pensando que **b** e **c** se mantêm constantes nos factores, o que influencia o produto é a distribuição de **d** e de **e**, que apenas podem ficar um a multiplicar por **b** e o outro por **c**.

Como os algarismos se encontram ordenados é fácil perceber que o mais rentável é ter o **e** a multiplicar pelo maior algarismo possível, neste caso o **c**.

Sendo assim, as hipóteses A e *D* já se encontram excluídas. Resta-nos saber entre as hipóteses *B* e C qual a mais vantajosa.

B
$$\begin{array}{r} e\,b\,a \\ \times \quad d\,c \\ \hline ce\ cb\ ca \\ de\ db\ da \quad \end{array}$$

C
$$\begin{array}{r} d\,c\,a \\ \times \quad e\,b \\ \hline bd\ bc\ ba \\ ed\ ec\ ea \quad \end{array}$$

Como é possível verificar estas duas situações diferem apenas nas zonas assinaladas:

a b c d e **a b c d e**

Se repararmos, na primeira situação o C fica em vantagem comparativamente com o *B* enquanto que na segunda situação apresentada é o C que fica em desvantagem. Mas qual será a situação com maior interferência no resultado final? A primeira porque se está a trabalhar numa posição superior, ou seja, nas dezenas.

Neste caso, e verificando todas as hipóteses, chega-se à conclusão que a possibilidade mais vantajosa para se obter o maior produto é a C, ou seja:

$$\begin{array}{r} d\,c\,a \\ \times \quad e\,b \\ \hline \end{array}$$

(tal como estava referido anteriormente no quadro 1)

Mas será que esta regularidade se mantém quando a diferença entre o número de algarismos de cada factor é outra? Pensemos num produto com um factor com quatro algarismos e outro com dois algarismos, ou seja, onde a diferença entre o número de algarismos dos factores é de 2.

Neste caso, e seguindo o mesmo raciocínio, os maiores algarismos têm de ser colocados nas posições com maior valor de cada factor e assim continuamente.

Considerando os algarismos ordenados do menor para o maior como: ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, e e ***f***, temos as seguintes possibilidades de colocação dos algarismos:

A
$$\begin{array}{r} e\,c\,b\,a \\ \times \quad f\,d \\ \hline de\ dc\ db\ da \\ fe\ fc\ fb\ fa \quad \end{array}$$

B
$$\begin{array}{r} f\,d\,b\,a \\ \times \quad e\,c \\ \hline cf\ cd\ cb\ ca \\ ef\ ed\ eb\ ea \quad \end{array}$$

C
$$\begin{array}{r} e\,d\,b\,a \\ \times \quad f\,c \\ \hline ce\ cd\ cb\ ca \\ fe\ fd\ fb\ fa \quad \end{array}$$

D
$$\begin{array}{r} f\,c\,b\,a \\ \times \quad e\,d \\ \hline df\ dc\ db\ da \\ ef\ ec\ eb\ ea \quad \end{array}$$

Tal como no primeiro caso estudado, o número obtido que vai ficar na posição com maior valor (o resultante do produto **ef** ou **fe** (igual)) é igual em todas as hipóteses, portanto não é este que irá influenciar no resultado final.

No que diz respeito à posição seguinte, verifica-se que já existe uma diferença:

- A = D → de + cf
- B = C → df + ce

a b c d e f

Tal como já vimos anteriormente é vantajoso ter o maior algarismo (**f**) a multiplicar pelo maior algarismo restante possível, neste caso entre **c** e **d** é preferível multiplicá-lo por **d** e isso só se verifica nas hipóteses *B* e *C*, ficando as restantes duas já excluídas.

$$B \quad \begin{array}{r} f\,d\,b\,a \\ \times \quad e\,c \\ \hline cf\ cd\ cb\ ca \\ ef\ ed\ eb\ ea\ \ \ \ \end{array} \qquad C \quad \begin{array}{r} e\,d\,b\,a \\ \times \quad f\,c \\ \hline ce\ cd\ cb\ ca \\ fe\ fd\ fb\ fa\ \ \ \ \end{array}$$

Como é possível verificar estas duas situações diferem apenas nas zonas assinaladas, mas como já vimos anteriormente o que nos interessa verificar é sempre a diferença entre as hipóteses que se encontrem na posição com maior valor possível. Deste modo, será a seguinte diferença:

a b c d e f

Neste caso, e verificando todas as hipóteses, chega-se à conclusão que a possibilidade mais vantajosa para se obter o maior produto é a C, ou seja, aquela que apresenta, neste último caso, o **b** a multiplicar pelo maior dos algarismos (**f**) uma vez que na hipótese *B* este aparece a multiplicar pelo segundo maior algarismo (e), logo, indo dar um produto menor do que o primeiro. Deste modo, a situação mais vantajosa é a C:

$$\begin{array}{r} e\,d\,b\,a \\ \times \quad f\,c \\ \hline ce\ cd\ cb\ ca \\ fe\ fd\ fb\ fa\ \ \ \ \end{array}$$

(tal como estava referido anteriormente no quadro 1)

Daqui se verifica que o número de algarismos do maior factor não altera a posição anteriormente estudada. Resta-nos, então, saber se isso se altera quando os dois factores têm igual número de algarismos.

Neste caso, e seguindo o mesmo raciocínio, os maiores algarismos têm de ser colocados nas posições com maior valor de cada factor e assim continuamente.

Considerando os algarismos ordenados do menor para o maior como: ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e*** e ***f***, temos as seguintes possibilidades de colocação dos algarismos:

$$A \quad \begin{array}{r} e\,c\,a \\ \times \quad f\,d\,b \\ \hline be\ bc\ ba \\ de\ dc\ da\ \ \ \ \\ fe\ fc\ fa\ \ \ \ \ \ \ \ \end{array} \qquad B \quad \begin{array}{r} f\,c\,a \\ \times \quad e\,d\,b \\ \hline bf\ bc\ ba \\ df\ dc\ da\ \ \ \ \\ ef\ ec\ ea\ \ \ \ \ \ \ \ \end{array}$$

$$C \quad \begin{array}{r} e\,b\,a \\ \times \quad f\,c\,b \\ \hline be\ bd\ ba \\ ce\ cd\ da\ \ \ \ \\ fe\ fd\ fa\ \ \ \ \ \ \ \ \end{array} \qquad D \quad \begin{array}{r} f\,d\,a \\ \times \quad e\,c\,b \\ \hline bf\ bd\ ba \\ cf\ cd\ ca\ \ \ \ \\ ef\ ed\ ea\ \ \ \ \ \ \ \ \end{array}$$

Tal como nos restantes casos estudados, o número obtido que vai ficar na posição com maior valor é igual em todas as hipóteses, portanto não é este que irá influenciar no resultado final.

No que diz respeito à posição seguinte, verifica-se que já existe uma diferença:

- A = D → de + cf
- B = C → df + ce

a b c d e f

Tal como já vimos anteriormente é vantajoso ter o maior algarismo (**f**) a multiplicar pelo maior algarismo restante possível, neste caso entre **c** e **d** é preferível multiplicá-lo por **d** e isso só se verifica nas hipóteses *B* e *C*, ficando as restantes duas já excluídas.

$$B \quad \begin{array}{r} f\,c\,a \\ \times \quad e\,d\,b \\ \hline bf\ bc\ ba \\ df\ dc\ da\ \ \ \ \\ ef\ ec\ ea\ \ \ \ \ \ \ \ \end{array} \qquad C \quad \begin{array}{r} e\,b\,a \\ \times \quad f\,c\,b \\ \hline be\ bd\ ba \\ ce\ cd\ da\ \ \ \ \\ fe\ fd\ fa\ \ \ \ \ \ \ \ \end{array}$$

Como é possível verificar estas duas situações diferem apenas nas zonas assinaladas, mas como já vimos anteriormente o que nos interessa verificar é sempre a diferença entre as hipóteses que se encontrem na posição com maior valor possível. Deste modo, será a seguinte diferença:

a b c d e f

Neste caso, e verificando todas as hipóteses, chega-se à conclusão que a possibilidade mais vantajosa para se obter o maior produto é a *B*, ou seja, aquela que apresenta, neste último caso, o b a multiplicar pelo maior dos algarismos (**f**) uma vez que na hipótese C este aparece a multiplicar pelo segundo maior algarismo (**e**), logo, indo dar um produto menor do que o primeiro. Deste modo, a situação mais vantajosa é a *B*:

$$\begin{array}{r} f\,c\,a \\ \times \quad e\,d\,b \\ \hline bf\ bc\ ba \\ df\ dc\ da\ \ \ \ \\ ef\ ec\ ea\ \ \ \ \ \ \ \ \end{array}$$

(tal como estava referido anteriormente no quadro síntese)

E assim se comprova que realmente existe uma única maneira de colocar os algarismos de modo a obter o maior produto possível entre dois factores, independentemente do número de algarismos dos dois factores e da diferença entre esse número.

Ana Caseiro, ESE de Lisboa

Que resposta dar à Carolina?

Eduardo Veloso

Os colegas que gerem o *Pergunta Agora* — um serviço de consultório matemático *online* oferecido pela APM a professores e alunos —, pediram-me para responder à seguinte pergunta da Carolina, uma aluna do terceiro ciclo (12 anos):

Porque é que o baricentro divide uma mediana em duas partes em que uma é o dobro da outra?

Tenho sempre prazer em tentar responder a este tipo de perguntas, pois aprende-se sempre qualquer coisa e é estimulante ver alunos (e colegas) curiosos em perceber a *razão das coisas* e não apenas *como se faz isto ou aquilo*. Mas não é fácil escolher a resposta adequada, pois desconhece-se em geral um conjunto de factores importante: conhecimentos anteriores de quem pergunta, maturidade do aluno ou aluna que faz a pergunta, motivações para fazer uma pergunta específica, etc.

Duas respostas

Pensei numa resposta a dar, redigi uma primeira versão e enviei para crítica aos colegas do *Grupo de Trabalho de Geometria* da APM e a outros colegas que sei que gostam destas coisas. É a *Resposta à Catarina — versão* A (ver caixa). Como não gostava muito desta minha primeira resposta, por razões que explicarei mais à frente, fui fazer uma pesquisa na *Web*. Encontrei, ao consultar os arquivos do *Ask Dr. Math*, um serviço semelhante do *Math Forum*, que nos inspirou — a mim, à Alexandra Pinheiro e ao Fernando Nunes —, no saudoso grupo de trabalho da Internet, a criar o *Pergunta Agora*, uma resposta que, por razões que também darei a seguir, me pareceu melhor estruturada, e resolvi seguir essa estrutura e redigir uma segunda versão (*Resposta à Carolina — versão B*, ver caixa). Acabei por enviar esta versão como resposta do *Pergunta Agora*, pois me parecia definitivamente melhor que a primeira que tinha imaginado. Enviei também para críticas aos mesmos colegas a quem tinha enviado a *versão* A. Da Carolina não tive qualquer reacção. Algum tempo depois, discutimos as duas respostas numa reunião do GTG. Mais do que relatar o que discutimos — sem chegar naturalmente a qualquer conclusão definitva —, esta nota destina-se a suscitar a reflexão dos nossos leitores sobre esta questão: se um dos vossos alunos vos fizesse aquela pergunta, qual vos parece a melhor resposta? Porquê? Que conhecimentos anteriores dos vossos alunos poderiam ser úteis para facilitar essa escolha? Que lacunas tem, a este respeito, o ensino da geometria? Como poderia ser melhorado? Parece-nos que uma tal reflexão pode ter utilidade para o nosso desenvolvimento profissional sobretudo se tiverem a paciência e generosidade de enviar para a revista resultados dessa reflexão, embora infelizmente isso não seja muito habitual nos leitores da *Educação e Matemática* (que até tem uma secção dedicada e essas reacções...).

Estrutura e fundamento das duas respostas

Sabemos que depois do disparate que se fazia antigamente de obrigar os alunos a decorar, na maior parte dos casos sem perceber, as demonstrações de muitas proposições dos *Elementos* de Euclides, passou-se para o extremo oposto em que praticamente, salvo alguns pequenos argumentos isolados, os alunos passam ao lado da demonstração, que deveria ser uma base fundamental do estudo da matemática, em particular da geometria. Mas, precisamente, o que a Carolina está a perguntar é como se demonstra que «*o baricentro divide uma mediana em duas partes em que uma é o dobro da outra*». Portanto, se queremos responder à Carolina, teremos que incluir, obviamente, demonstrações na resposta a dar. Além disso, para quem acredita que o principal objectivo do ensino da Matemática no ensino básico e secundário é a progressiva compreensão da natureza da matemática como ciência, deve tudo fazer para que os alunos possam ir intuindo, a partir de alguma prática — como por exemplo do que é explicado nestas respostas — que para demonstrar alguma afirmação *temos que partir de outras que admitimos como verdadeiras*. Por outras palavras (que não são empregues, evidentemente, no diálogo com os alunos) *a verdade em matemática é relativa.*

Como se vê pelo modo como está formulada a pergunta da Carolina, estamos a admitir que aceita como verdadeiro o facto de que existe um ponto, o baricentro, que pertence às medianas de um triângulo e que o que se pretende demonstrar é que esse ponto divide cada mediana em duas partes, na proporção de um para dois.

Resposta à Carolina: Versão A

1. O que é uma mediana?

Mediana é o segmento que num triângulo une um vértice com o ponto médio do lado oposto. Assim, o segmento CD é uma mediana do triângulo ABC (fig. 1). Como todo o triângulo tem três vértices, tem sempre três medianas (fig. 2).

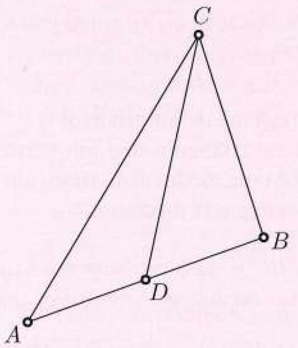


Figura 1

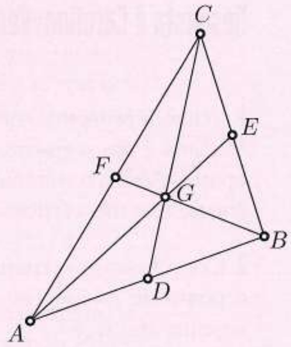


Figura 2

2. O que é o baricentro?

Repara que no triângulo ABC as três medianas encontram-se num mesmo ponto, a que chamei G. *Isso não acontece por acaso*. As medianas de qualquer triângulo encontram-se sempre num mesmo ponto. Vê na figura 3 quatro exemplos de triângulos diferentes e nota que as medianas se cruzam sempre no mesmo ponto.

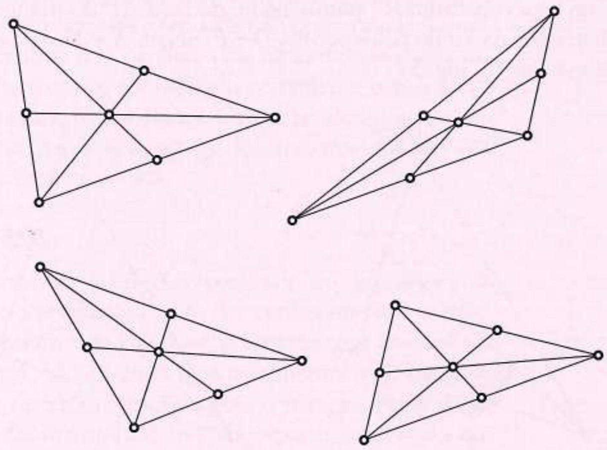


Figura 3

Mas como há infinitos triângulos, quatro exemplos não chegam para termos a certeza que a afirmação «as medianas de um triângulo encontram-se sempre num mesmo ponto» é verdade, ou seja é um teorema da matemática. É preciso demonstrar essa afirmação, o que está já feito em muitos livros... Mas se vamos demonstrar tudo nesta resposta só escrevendo um novo livro! Portanto vamos acreditar nesses livros e aceitar que realmente é sempre assim:

As medianas de um triângulo encontram-se sempre num mesmo ponto.

(Se quiseres saber a demonstração, escreve outra vez ao *Pergunta Agora*, que eu respondo-te!)

Pois bem, chama-se baricentro de um triângulo ao ponto de encontro das suas medianas.

3. Agora, que já sabemos o que são *medianas* de um triângulo e o que é o *baricentro*, posso tentar responder à tua pergunta, que vou repetir aqui:

Porque é que o baricentro divide uma mediana em duas partes em que uma é o dobro da outra?

Vamos desenhar de novo o triângulo ABC com que começámos, mas agora apenas com uma das medianas (CD) desenhada e com o ponto G assinalado. Vamos ainda traçar os segmentos que unem os pontos médios D, E, F (fig. 4). Além disso vou assinalar alguns ângulos.

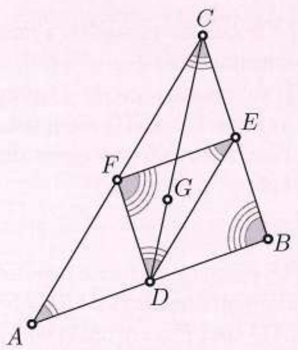


Figura 4

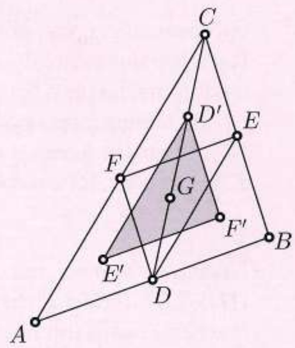


Figura 5

Repara que o triângulo EFD é mais pequeno mas tem a mesma forma que o triângulo ABC de que partimos (costumamos dizer que são *semelhantes*). Vou fazer algumas afirmações que são verdadeiras, mas que, pela mesma razão anterior não vamos demonstrar (algumas julga-se que foram demonstradas pelo matemático grego Tales há 2600 anos!):

- os lados do triângulo ABC são paralelos aos lados do triângulo EFD (AB a EF, BC a FD e DE a CA) e têm o dobro do comprimento;
- os ângulos assinalados com o mesmo número de tracinhos são iguais: por exemplo, o ângulo EDF é igual ao ângulo BCA.

Para vermos melhor a situação, vamos imaginar que o triângulo EFD era uma peça de plástico e o rodávamos 180° (meia-volta) em torno do ponto G. Obteríamos um novo triângulo $E'F'D'$, igual a EFD mas noutra posição (fig. 5). Percebe-se ainda melhor agora que o triângulo ABC é uma ampliação do triângulo $E'F'D'$. Uma ampliação para o dobro, pois sabemos que o lado AB de ABC tem um comprimento igual ao dobro do lado EF de EFD. Tudo aumenta para o dobro!

Por exemplo, o segmento GD' transforma-se em GC. e portanto o comprimento de GC é o dobro do comprimento de GD' (que é igual a GD).

Mas isto responde exactamente à tua pergunta!.

Carolina (ou alguma outra pessoa que leia esta resposta), esta tua pergunta é um pouco avançada, julgo, para o 7° ano. Mas é muito interessante e ainda bem que a enviaste. A resposta, como vês, é longa, pois tem que se apoiar em conhecimentos anteriores. Por esta razão, esta resposta deve ser lida devagar, e se não perceberes alguma destas explicações faz outra pergunta, pois teremos muito gosto em te responder.

Resposta à Carolina: Versão B

1. Vejamos primeiro o que é a mediana de um triângulo
Mediana é um segmento que num triângulo une um vértice com o ponto médio do lado oposto. Assim, o segmento AD é uma mediana do triângulo ABC (fig. 1). Como todo o triângulo tem três vértices, tem sempre três medianas.

2. Consideremos o triângulo ABC e duas das suas medianas, AD e BE (fig. 2). Seja G o ponto de intersecção das duas medianas. Vamos ver que, sendo assim, é verdadeira a seguinte afirmação:

O segmento AG tem um comprimento igual ao dobro do comprimento do segmento GD.

Para isso. construímos o ponto médio do lado AB do triângulo, e traçamos paralelas à mediana BE passando pelos pontos D e F. Sejam X e Y os pontos de intersecção dessas paralelas com AC (fig. 3).

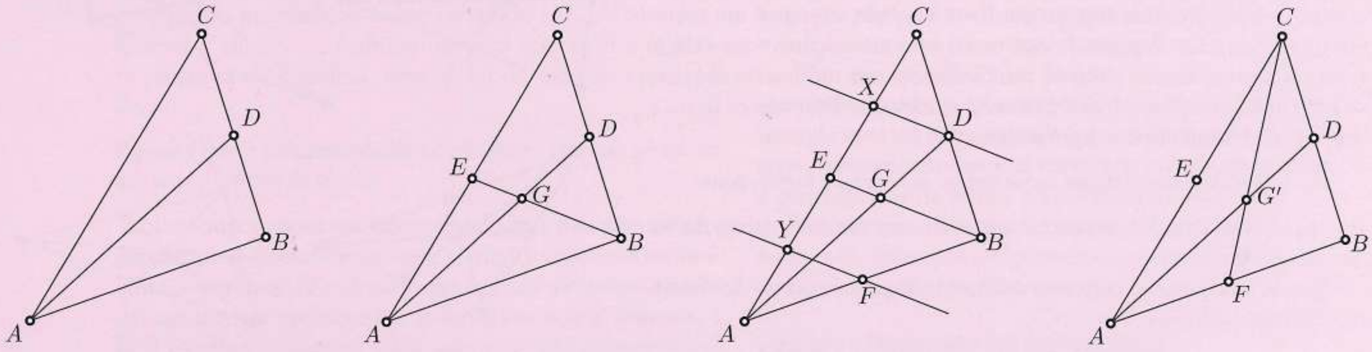


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Sabemos que[1], como as rectas FY e BE são paralelas, a razão entre os segmentos AY e YE (ou seja o quociente dos seus comprimentos) é igual à razão entre AF e FB. Mas sendo F é o ponto médio de AB, AF e FB são iguais, logo AY é também igual a YE.

Da mesma forma podíamos ver que EX e XC são iguais, e como E é o ponto médio de AC, os quatro segmentos AY, YE. EX e XC são iguais. E então, como AE é o dobro de EX, também AG é o dobro de GD.

3.
Utilizámos as medianas AD e BE para chegar a este resultado, mas podíamos ter escolhido AD e CF. Teríamos chegado ao mesmo resultado? Certamente que sim, pois suponhamos que neste caso a intersecção de AD com BE era um ponto G' (fig. 4). Por uma demonstração semelhante à anterior, chegaríamos à conclusão que AG' era o dobro de $G'D$. Sendo assim, G tem que coincidir com G'.

Ou seja:

As medianas de um triângulo encontram-se num único ponto.

A esse ponto costuma chamar-se *baricentro*. E como vimos, o baricentro divide cada uma das medianas em duas partes, sendo uma o dobro da outra.

Nota

1. Não há a certeza, mas julga-se que demonstração foi feita pelo geómetra grego Tales há 2600 anos! Podes ver uma demonstração (em inglês!) no *site http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookVI/propVI2.html*

Carolina, se tiveres algumas dúvidas sobre esta resposta, diz as tuas dúvidas ao *Pergunta Agora*, pois teremos muito gosto em te responder.

Na *versão* A, portanto, parti desta admissão e assim, depois de recordar a definição de mediana, salientei qual era o nosso *ponto de partida:* que as três medianas, em qualquer triângulo, se encontravam sempre num mesmo ponto. Insisti que admitíamos esse facto como verdadeiro, que era um teorema que estava demonstrado «em muitos livros...» e que não íamos ali demonstrar. Na realidade, estava a pensar no teorema de Ceva, pois a partir dele é imediato que as medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto.

Teorema de Ceva[1]

Seja ABC um triângulo e K, L e M três pontos respectivamente sobre as rectas AB, BC e CA (fig. 1). Consideremos os segmentos orientados AK, KB, BL, LC, CM e MA. Então, as rectas AL, BM e CK encontram-se num mesmo ponto se e só se

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \qquad (1)$$

Ora, se os pontos K, L, e M são os pontos médios dos lados, é imediato que a igualdade (1) se verifica e daí que as medianas de qualquer triângulo se encontram num mesmo ponto.

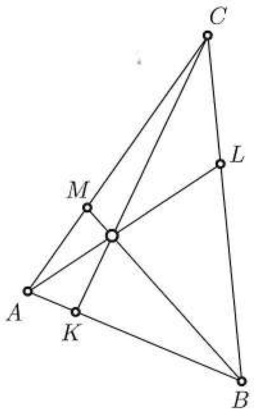


Figura 1

Mas o teorema de Ceva não tem uma demonstração acessível aos alunos do ensino básico, e o próprio enunciado é tudo menos evidente. Foram estas constatações que me levaram a abandonar a ideia de dar esta resposta à Carolina e a procurar outra via para a demonstração.

Ainda relativamente à versão A, a opção de obter a imagem do triângulo medial por uma meia-volta com centro no baricentro deveu-se à minha hesitação em utilizar homotetias de razão negativa, pois desconheço se são correntemente utilizadas no ensino, actualmente. Pareceu-me que por meio desta meia-volta poderia depois recorrer directamente a uma simples ampliação e que isso tornaria mais provável a compreensão da demonstração por parte da Carolina. Mas não tenho a certeza se terá sido uma boa opção.

Quanto à *versão* B, o ponto de partida utilizado é fácil de aceitar sem demonstração. Quando o aprendi pela primeira vez — nos anos quarenta do século passado —, esse resultado era conhecido como teorema de Tales[2], e enunciado (mais ou menos) da seguinte forma:

Os segmentos determinados em duas rectas oblíquas por um feixe de rectas paralelas são directamente proporcionais, ou seja, se as rectas a, b, c, ... são paralelas e intersectam as rectas r e s nos pontos A e A', B e B', C e C', ..., respectivamente, então tem-se

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \cdots$$

Pareceu-me assim que este ponto de partida seria muito mais aceitável que o da *versão* A. No entanto, nesta versão existe um inconveniente: não é assumido de princípio que as medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto, e assim a resposta que está a ser dada não corresponde inteiramente à pergunta da Carolina, pois esta refere-se explicitamente ao baricentro, considerado certamente como ponto de encontro das três medianas. Ora, o resultado de que tal ponto existe, na *versão* B, apenas é obtido mais tarde, e não quando se inicia a resposta.

Moral desta nota

Verdadeiramente, apenas o professor ou professora da Carolina, supostamente ciente dos conhecimentos e maturidade matemática da Carolina, pode imaginar uma resposta adequada à sua pergunta. Desejavelmente, o diálogo com a Carolina deveria continuar, pois o mais provável é que novas dúvidas lhe tenham surgido, a partir da resposta que foi dada.

Que pensa de tudo isto, leitor? Quer propor uma resposta alternativa que poderia ter sido dada à Catarina?

Notas

1. Os irmãos Ceva, Giovanni (1647–1734) e Tommaso (1648–1737), foram dois matemáticos italianos. Giovanni ficou célebre por este teorema, que serve de ponto de partida para a demonsração de diversos teoremas da geometria elementar.

2. Nos *Elementos* de Euclides, trata-se da proposição n° 2 do livro VI:

   Se uma recta r é paralela ao lado AB de um triângulo e intersecta os outros dois lados AC e BC nos pontos D e E respectivamente, então AD está para CD como BE está para CE. E reciprocamente (fig. 2).

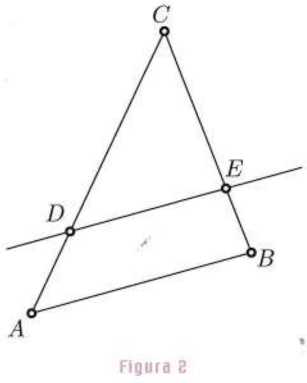
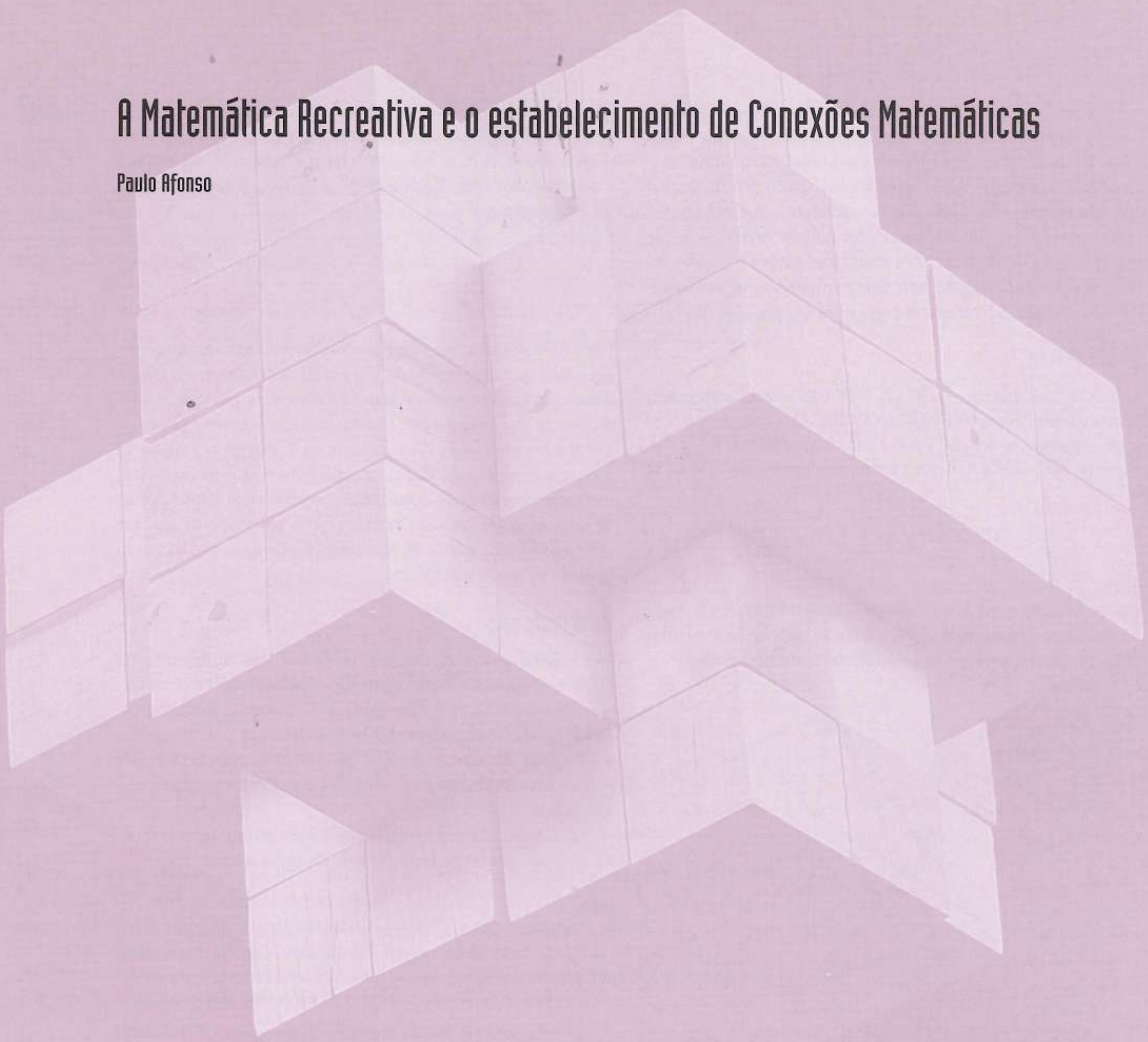


Figura 2

Eduardo Veloso

A Matemática Recreativa e o estabelecimento de Conexões Matemáticas

Paulo Afonso



Introdução

A experiência tem-me feito ver que quando os alunos, designadamente os do ensino básico, são desafiados com actividades associadas à matemática recreativa, evidenciam comportamentos muito diferentes de quando são confrontados com tarefas ditas da matemática formal ou da matemática convencional, pois mostram-se mais entusiastas e interessados pela resolução das tarefas.

Ainda que concorde com Balbuena e Coba (1992), quando referem que não é fácil definir matemática recreativa de forma consensual, tentarei clarificar o que quero dizer quando me refiro a esta perspectiva, bem como à matemática formal. Sobre este último caso, refiro-me à matemática prescrita nos curricula, que depois é implementada ao nível da sala de aula, muitas vezes enfatizando uma «tendência para o algebrismo árido e enfadonho» (Tahan, 2003, p. 6).

Por norma, as actividades propostas segundo esta componente da matemática têm como principal finalidade as aprendizagens matemáticas enunciadas nas planificações a curto e a médio prazo, elaboradas pelos professores, e exigem que na sua resolução os alunos dominem os respectivos conteúdos matemáticos. Além disto, por se tratar de uma matemática escolar, as tarefas propostas não podem ser dissociadas da componente da avaliação, isto é, o facto de o professor ter que avaliar aprendizagens e o facto de o aluno saber que tem que ser avaliado sobre as matérias que trabalha em sala de aula, poderá estar na base da existência desse tal cenário referenciado por Tahan (2003).

Já a matemática recreativa costuma ser associada não a contextos formais de ensino-aprendizagem nem de avaliação, mas, sim, a contextos de lazer, ludicidade, ocupação de tempos livres, exercitação e desenvolvimento do raciocínio lógico, etc. Contudo, a fronteira entre estas duas perspectivas não é muito evidente, pois muitos livros de texto já costumam apresentar tarefas vulgarmente associadas a esta perspectiva, servindo essencialmente como motivação inicial para os conteúdos matemáticos a explorar em sala de aula (Balbuena e Coba, 1992).

Comparando as tarefas associadas à componente da matemática recreativa com as que costumam ser associadas à matemática dita formal, aquelas parecem não exigir o domínio de grandes conhecimentos matemáticos para se conseguir uma correcta resolução, e podem ser resolvidas, não ao ritmo imposto pelo professor, mas, sim, ao ritmo imposto por cada um que as queira resolver. Por norma apelam à intuição, à perspicácia, ao pensamento criativo, à persistência, à proposição de conjecturas e à utilização da estratégia da tentativa e erro. Além disto, incutem à matemática um cariz enigmático e mágico, atributos indispensáveis para contagiar positivamente os resolvedores para esta ciência.

Em síntese, concordo com a visão apresentada por Espinoza, González e Monge (2002), quando referem que a matemática recreativa é:

«[...] todo aquel conjunto de actividades, juegos, y pasatiempos matemáticos que regularmente se plantean más como «curiosidades» que como conocimiento matemático verdadero, y que, dicho sea de paso, pocas veces se les encuentra en los libros de texto radicionales de esta asignatura en cualquier nivel educativo» (p. 2).

Relevância das conexões matemáticas

Como referi num outro momento (Afonso, 2006), o tema das conexões matemáticas é explicitamente assinalado pelo documento americano Standards do National Council of Teachers of Mathematics, traduzido para língua portuguesa pela APM e IIE em 1991. Para cada conjunto de ciclos de escolaridade (K–4, 5–8 e 9–12), esta associação de professores encara este tema como sendo uma das mais de dez normas básicas consideradas para o ensino e aprendizagem da matemática. A sua justificação assenta no pressuposto de que se o ensino-aprendizagem da matemática enfatizar a inter-relação das ideias matemáticas, leva a que os alunos não aprendam somente matemática, mas aprendam, também, a reconhecer o seu sentido útil (NCTM, 2000). Assim, na matemática dever-se-iam estabelecer ligações entre os aspectos conceptual e processual, bem como entre os diferentes tópicos programáticos a considerar, para além da ligação da matemática a outras áreas do currículo ou a vários aspectos da vida quotidiana dos alunos (House e Coxford, 1995; Afonso, 2008b).

Esta associação americana salienta que «só um vasto contacto com tópicos integrados poderá proporcionar uma melhor retenção dos conceitos e destrezas ensinados» (APM e IIE, 1991, p. 42). Trata-se, pois, de uma visão contrária à concepção da matemática como sendo um mero somatório de matérias avulsas, planeadas para serem ensinadas em momentos perfeitamente delimitados no tempo e sem ligação entre si.

Mais recentemente, o reajustamento do Programa de Matemática para o ensino básico, produzido por Ponte *et al.* (2007), refere várias vezes o tema das conexões matemáticas como sendo uma orientação metodológica importante ao serviço dos docentes.

Como verdadeiros agentes do currículo, os professores deveriam fazer um esforço para não ficarem reféns da estruturação segmentada do programa veiculado pelos manuais escolares adoptados. Aos professores caberá, pois, a função de envolver os alunos na resolução de tarefas que impliquem o estabelecer de relações entre os conceitos e os procedimentos matemáticos (APM e IIE, 1994; NCTM, 2000). No cumprimento dessa função, as actividades de recreação matemática poderão ser um palco privilegiado para se motivarem os alunos para a matemática, ajudando-os a perceber o sentido estético desta ciência e levando-os a constatar o quão útil ela é para o seu dia-a-dia.

Assim, os exemplos seguintes pretendem evidenciar como actividades aparentemente associadas à recreação matemática podem contribuir para, em contexto de sala de aula, potenciar verdadeiras aprendizagens matemáticas aos alunos. Iniciarei um percurso a partir do número 111 e conectá-lo-ei a outros números «mágicos», que por sua vez nos levarão a viajar por determinados conteúdos matemáticos, como seja a adição de números inteiros, os números pares e ímpares, os números primos, os padrões numéricos e as capicuas.

Propriedades mágicas do número 111

Cada soma seguinte — 111 — resulta da adição de seis parcelas. O total das trinta e seis parcelas envolvidas nestas seis adições utilizam os trinta e seis números naturais apenas uma vez, não havendo, portanto, nenhum número que se repita. Distribua esses números pelos espaços correspondentes, de modo que cada soma fique correcta (adaptado de Balbuena e Coba, 1992, p. 30):

__	__	__	__	__	__
__	__	__	__	__	__
__	__	__	__	__	__
__	__	__	__	__	__
__	__	__	__	__	__
__	__	__	__	__	__
111	111	111	111	111	111

Perante esta tarefa, e após alguma perseverança, intuição e até mesmo devido a um eventual golpe de sorte, os resolvedores poderiam sugerir múltiplas respostas, como sejam as seguintes:

a)

1	5	9	13	17	21
25	29	33	2	6	10
14	18	22	26	30	34
36	32	28	24	20	16
12	8	4	35	31	27
23	19	15	11	7	3
111	111	111	111	111	111

b)

1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	33	35
36	34	32	30	28	26
24	22	20	18	16	14
12	10	8	6	4	2
111	111	111	111	111	111

Como podemos verificar, a resolução da tarefa ou quebra-cabeças anterior não implica o domínio de grandes conhecimentos de matemática. Ainda que pouco provável, o simples recurso à estratégia de resolução da tentativa e erro pode gerar a resposta correcta. Contudo, a mesma tarefa pode ser resolvida através de uma estratégia matematicamente mais estruturada. Um raciocínio possível é tentar averiguar se a soma 111 é divisível por seis (número de parcelas). Como o resultado é 18,5 pode-se concluir que cada par de parcelas terá que originar a soma 37. Logo, por cada soma 111 somente há que se encontrar três pares de parcelas cujas somas sejam 37. Assim, uma possível resolução poderia ser a seguinte:

36	33	30	27	24	21
1	4	7	10	13	16
35	32	29	26	23	20
2	5	8	11	14	17
34	31	28	25	22	19
3	6	9	12	15	18
111	111	111	111	111	111

Esta tarefa poderia servir de motivação para se abordar, de uma forma simplificada, isto é, sem a duplicação da sequência de números envolvida, o episódio de sala de aula relacionado com o tema da soma de Gauss. De facto, ter seis vezes a soma 111, isto é, ter o valor 666, é o mesmo que encontrar dezoito pares de somas cujo valor é sempre trinta e sete:

1 + 36	2 + 35	3 + 34	4 + 33	5 + 32	6 + 31
7 + 30	8 + 29	9 + 28	10 + 27	11 + 26	12 + 25
13 + 24	14 + 23	15 + 22	16 + 21	17 + 20	18 + 19

Conectando o valor 111 com determinadas somas mágicas

Por baixo do número 111 escrever duas parcelas formadas por três algarismos, se possível diferentes. Quais as duas novas parcelas, contendo três algarismos cada, a adicionar a estas três anteriores para que a soma seja 2109?,

Na resolução deste desafio torna-se importante comparar o valor da primeira parcela — 111 com o valor da soma — 2109. Note-se que a diferença entre ambos os valores é 1998. Logo, as outras quatro parcelas, quando adicionadas, deverão perfazer o valor 1998. Por outro lado podemos verificar que o valor 1998 também pode ser lido como sendo dois mil menos dois. Esta constatação é muito importante, pois permite que se pense a resolução do desafio anterior da seguinte forma: a quarta parcela deverá ser formada por três algarismos de modo a permitir a soma 999 quando adicionada com a segunda parcela. Isto é, estas duas parcelas originam uma soma intermédia de mil menos um (999). Por sua vez, a quinta parcela também deverá ser formada por três algarismos de modo a permitir a soma 999 quando adicionada com a terceira parcela. Logo, surge uma nova soma intermédia de mil menos um. Assim, comparando a soma final — 2109 com a primeira parcela — 111, a diferença entre ambos os valores é de 1998, ou seja dois mil menos duas unidades. Exemplifiquemos:

```
         111
         235
 [999]   481
         764   [999]
     +   518
        2109
```

Esta tarefa pode ser muito interessante em contexto de sala de aula, pois o professor pode envolver vários alunos numa mesma situação. Assim, pode começar por pedir a um aluno para escrever no quadro um número formado por três algarismos diferentes, por exemplo, 824.

De seguida, o professor pode passar por esse aluno e entregar-lhe um bilhete contendo o valor 3821, sem que o aluno veja, para ser apenas divulgado no final da tarefa. Em continuação pode pedir a outro aluno que escreva por baixo do número já escrito no quadro, um novo número formado por três algarismos, preferencialmente diferentes entre si e diferentes dos que já foram usados no número anterior, por exemplo, 357. De seguida pede a outros dois alunos para escreverem, cada um, um novo número formado por três algarismos, por exemplo, 615 e 273.

Finalmente será o professor a completar a operação de adição, criando o ambiente de magia necessário para que ele tenha que escrever as três parcelas que faltam, que serão: 642, 384 e 726. Ora, efectuando a adição destas sete parcelas, obtém o esperado valor 3821:

```
   824
   357
   615
   273
   642
   384
+  726
  3821
```

Após o professor pedir ao aluno para revelar o valor que contém no bilhete que lhe entregou, deverá desafiar os alunos na procura da justificação matemática para esta magia verificada. Espera-se que sejam capazes de ver que o valor final é maior em três mil menos três unidades do que o valor da primeira parcela.

Conectando o valor 111 aos valores 1001, 111111, 37037 e 142857

Se ao número 111 acrescentarmos novamente este número obtém-se um outro, formado por seis dígitos — 111111. Qual a ordem de grandeza deste novo número quando comparado com o inicial, formado pelos três uns? Servirá de ajuda se se pedir para se multiplicar o valor inicial por sete, depois, o resultado obtido por 11 e, por fim, o novo produto obtido por 13?

Perante esta tarefa, é possível que a maioria dos resolvedores refira apenas que:

$111 \times 7 = 777$; $777 \times 11 = 8547$; $8547 \times 13 = 111111$

ou $111 \times 7 \times 11 \times 13 = 111111$. Contudo seria desejável responderem que o 111111 é 1001 vezes maior do que o 111. Esta relação pode ser confirmada pela seguinte multiplicação:

$$7 \times 11 \times 13 = 1001$$

Logo, $111 \times 7 \times 11 \times 13 = 111 \times 1001 = 111111$.

Este exemplo, para além de poder servir como motivação para o estudo do tema dos números primos (quer o sete, como o onze ou o treze são números primos consecutivos), poderia ser conectado a uma outra situação envolvendo uma certa magia matemática:

Escrever em seis cartões os seis primeiros números naturais, conforme a figura seguinte:

1	2	3	4	5	6

Depois, no verso de cada cartão deve-se dar continuidade à sequência numérica, iniciando no último cartão agora escrito e terminando no primeiro.

Fazer uma situação semelhante, escrevendo em seis novos cartões os primeiros seis números pares, conforme a figura:

2	4	6	8	10	12

Depois, no verso de cada cartão devem-se escrever os primeiros seis números ímpares, iniciando no último cartão agora escrito e terminando no primeiro. Comparar os dois conjuntos de seis cartões e tirar conclusões.

Em contexto de sala de aula o professor poderá colocar no estojo de um aluno um papel escrito com o valor 1001, sem que o aluno o veja. Após lançar esta tarefa à turma, dividindo-a ao meio, isto é, metade trabalha com os números naturais e a outra metade trabalha com os números pares e ímpares, o professor pode pedir para cada aluno escolher o cartão que preferir e, após adicionar ambos os valores desse cartão, deve multiplicar a soma obtida pelo sete e pelo onze. Como todos os resultados coincidirão com o valor 1001, o professor deve solicitar ao aluno que retire o papel existente no seu estojo e leia para a turma o valor aí escrito (esta situação terá maior impacto junto dos alunos se o professor conseguir colocar o valor 1001 no estojo do aluno ou em outro local sem que ninguém se aperceba). Face a esta magia matemática o professor deve desafiar os alunos a serem eles próprios a descobrir a causa desta coincidência.

De facto, esta tarefa está conectada com a anterior, porque a soma dos dois valores existentes em cada cartão, independentemente do conjunto a que pertençam, é sempre treze. Ora, este valor a multiplicar por sete e depois pelo onze, origina, como se viu acima, o valor 1001. A magia matemática pode voltar a ser usada no novo exemplo seguinte:

Multiplicar o número 37037 pelo número preferido, de um a nove, que é o número secreto. O resultado agora obtido deve ser multiplicado por três. Qual foi o valor final? Tem alguma relação com o número inicial secreto?

Esta tarefa revela-se muito enigmática, pois o resolvedor terá vontade em saber o porquê de funcionar com qualquer número secreto, do um ao nove:

$37037 \times \mathbf{1} = 37037$ $37037 \times 3 = \mathbf{111111}$	$37037 \times \mathbf{2} = 74074$ $74074 \times 3 = \mathbf{222222}$
$37037 \times \mathbf{3} = 111111$ $111111 \times 3 = \mathbf{333333}$	$37037 \times \mathbf{4} = 148148$ $148148 \times 3 = \mathbf{444444}$
$37037 \times \mathbf{5} = 185185$ $185185 \times 3 = \mathbf{555555}$	$37037 \times \mathbf{6} = 222222$ $222222 \times 3 = \mathbf{666666}$
$37037 \times \mathbf{7} = 259259$ $259259 \times 3 = \mathbf{777777}$	$37037 \times \mathbf{8} = 296296$ $296296 \times 3 = \mathbf{888888}$
$37037 \times \mathbf{9} = 333333$ $333333 \times 3 = \mathbf{999999}$	

Uma vez mais, a magia reside no facto de o valor 37037 originar o 111111 após ser multiplicado pelo valor 3. Logo, multiplicando o 111111 pelo número secreto só pode originar as sucessivas réplicas desse número secreto.

Este exemplo, transportado para o ambiente de sala de aula, poderá levar o professor a questionar os alunos sobre se haverá outros dígitos inteiros, do 2 a 9, que dividam exactamente o número 111111. Espera-se que identifiquem o divisor sete, pois $111111 / 7 = 15873$.

De seguida poderia sugerir-se aos alunos para serem eles os dinamizadores de uma situação semelhante à anterior, que vise adivinhar o número secreto do colega a partir do valor inicial 15873. Seria interessante que os alunos solicitassem a multiplicação deste valor por um determinado número secreto, do um a nove, e depois pedissem para o produto obtido ser multiplicado pelo valor 7, com o intuito de adivinharem o valor secreto usado pelo colega.

De facto:

15873 × **1** = 15873 15873 × 7 = **111111**	15873 × **2** = 31746 31746 × 7 = **222222**
15873 × **3** = 47619 47619 × 7 = **333333**	15873 × **4** = 63492 63492 × 7 = **444444**
15873 × **5** = 79365 79365 × 7 = **555555**	15873 × **6** = 95238 95238 × 7 = **666666**
15873 × **7** = 111111 111111 × 7 = **777777**	15873 × **8** = 126984 126984 × 7 = **888888**
15873 × **9** = 142857 142857 × 7 = **999999**	

Tirando partido, ainda do número 111111, sabe-se que multiplicado por nove origina este valor 999999. Este número, dividido por sete origina outro número mágico, que é o seguinte: 142857. Curiosamente, ao converter-se a fracção 1/7 em número decimal, volta a obter-se este valor: 0,(142857).

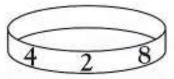
Multiplicar o número 142857 por cada dígito do um ao nove e verificar se existe alguma regularidade matemática nos nove produtos obtidos.

Em contexto de sala de aula, a magia deste número leva a que os produtos obtidos mereçam ser alvo de reflexão, pois são todos formados pelos mesmos algarismos de onde se partiu, dispostos da mesma maneira (142857), iniciando, apenas, num algarismo diferente. Exceptuam-se os casos em que se multiplica por sete, por oito e por nove. Note-se que no caso de o número ser multiplicado por oito ou por nove, o valor excedente, existente à esquerda dos seis números obtidos deve ser adicionado ao respectivo valor obtido, de seis dígitos, voltando a originar o número 142857:

142857 × **1** = 142857	142857 × **2** = 285714
142857 × **3** = 428571	142857 × **4** = 571428
142857 × **5** = 714285	142857 × **6** = 857142
142857 × **7** = 999999	142857 × **8** = 1142856
142857 × **9** = 1285713	

Como refere Barry (1995), é fácil o professor saber por quanto foi multiplicado o número 142857. Basta pedir ao resolvedor o algarismo das unidades do produto obtido. Se se tratar do sete, saberá que o número foi multiplicado por um (pois, 1 × 7 = 7). Se for o quatro, saberá que multiplicou o número por dois (pois, 2 × 7 = 14), e assim sucessivamente.

Outra possível exploração mágica, proposta por Martín (2006), é o professor levar para a sala de aula várias coroas numéricas (tiras de cartolina), formadas pelo número 142857. Como os algarismos estão dispostos em círculo, os alunos não se apercebem que se trata do número 142857, pois apenas será dito que se trata de uma coroa numérica. O professor coloca a coroa na cabeça e pede a um aluno para escrever no quadro aquele número de seis algarismos. Depois pede-lhe que o multiplique pelo número que sair no lançamento de um dado. Enquanto os alunos efectuam a multiplicação, o professor rasga a coroa no sítio certo, de modo a que ao mostrar a tira de cartolina, apareça o resultado dessa operação aritmética. Veja-se o seguinte exemplo: Se o número multiplicado pelo 142857 for o 3, o produto final será 428571, pelo que o professor deverá cortar a coroa a seguir ao número 1:



4	2	8	5	7	1

Conectando o 111111 com o tema das capicuas e dos padrões numéricos

Qual o produto do 111111 por si próprio? E qual o produto de 11111 por si próprio? E qual o produto de 1111 por si próprio? E qual o produto de 111 por si próprio? Há algo de comum nos vários resultados obtidos? Se assim for, qual o produto de 11111111 por si próprio?

Esta simples tarefa de recreação matemática, envolvendo o conceito de potência, pode, em contexto de sala de aula, levar a que os alunos concluam a existência de algo comum a todos os produtos obtidos, que é o facto de serem capicuas. Além disto, facilmente descobrirão que estão perante um padrão ou regularidade numérica, pois o valor central de cada capicua coincide com o número de uns envolvidos em cada factor respectivo. Logo, para o caso de a multiplicação envolver oito uns em cada factor, o resultado obtido será novamente uma capicua, tendo o valor oito como valor central:

111111 × 111111 = 12345654321
11111 × 11111 = 123454321
1111 × 1111 = 1234321
111 × 111 = 12321
...
11111111 × 11111111 = 123456787654321

Esta tarefa permite, pois, que o professor a possa conectar com o fascinante tema dos padrões numéricos, levando os alunos a detectar a lei de formação de determinadas regularidades, dando-lhes continuidade. Eis possíveis exemplos a serem usados (recolhidos de Santos, 1997):

Dar continuidade aos seguintes padrões:

111111 = 6 + 12345 × 9 11111 = 5 + 1234 × 9 1111 = 4 + 123 × 9 111 = 3 + 12 × 9 ... *Quanto será* *10 + 123456789 × 9?*	111111 × 24 = 2666664 11111 × 32 = 355552 11111 × 13 = 144443 11111 × 21 = 233331 ... *Quanto será* *111111111 × 72?*

Note-se que no padrão da esquerda, o número de uns em cada linha é exactamente igual ao valor da parcela que se adiciona ao produto envolvido nessa linha.

No padrão da direita, os dois dígitos de um dos factores surgem nas extremidades do produto respectivo. Além disto, o algarismo que se repete em cada produto resulta da soma desses dois dígitos. A sua quantidade é igual ao número de uns envolvidos na respectiva multiplicação menos uma unidade.

Após a análise de cada um destes padrões fica sempre a dúvida relativamente à pergunta que se deve colocar, no sentido de ser a mais interessante para proporcionar o sentido de indagação empenhada dos alunos. No primeiro caso, como alternativa à pergunta colocada, seria interessante analisar o desempenho dos alunos face ao seguinte desafio: «Dar continuidade ao padrão para o caso do produto obtido ser 1111111111». Por sua vez, para o outro padrão, um desafio alternativo à pergunta colocada seria: «Dar continuidade ao padrão, de modo a descobrir os dois factores que originam o produto 7999999992».

Estes são apenas alguns exemplos, muito associados à recreação matemática, mas que podem servir de base para que os alunos entendam a matemática como a ciência dos padrões (Devlin, 2002).

Conclusão

Muitos poderiam ser os exemplos a acrescentar a esta reflexão, como seja a conexão ao tema das potências (Afonso, 2008a) ou inclusivamente ao fascinante e enigmático triângulo de Pascal (Pappas, 1995 e Ensensberger, 1998), entre outros. Estou em crer que se os múltiplos problemas, quebra-cabeças, enigmas, ou jogos existentes em variadíssimas publicações, não necessariamente escolares ou académicas, forem bem aproveitados pedagogicamente para a sala de aula de matemática, contribuirão decisivamente para aumentar a motivação dos alunos para com esta disciplina e favorecerão o desenvolvimento do seu raciocínio lógico.

O que a experiência também me diz é que quando os alunos gostam da magia matemática incutida em aulas onde a recreação matemática existe, isso leva a que se sejam eles próprios a contar, com entusiasmo, aos colegas e aos familiares os episódios matemáticos ocorridos nessas aulas. Este aspecto contribui necessariamente para o desenvolvimento da comunicação matemática.

Não queria terminar esta reflexão sem, contudo, referir que a matemática recreativa transportada para a sala de aula não deveria ficar apenas pela função de motivação inicial para os conteúdos matemáticos a abordar. Além dessa importante função, também deveria ser criado o ambiente de indagação e pesquisa acerca do porquê da magia matemática ocorrer. É na procura e na compreensão das causas que se aprecia com mais paixão a beleza desta ciência!

Bibliografia

Afonso, P. (2006). A Magia das Conexões Matemáticas — um caso envolvendo os números triangulares. *Educação e Matemática*, Novembro/Dezembro, pp. 35–38.

Afonso, P. (2008a). Conexões Matemáticas: As Potências de Base 2. *Educação e Matemática*, Março/Abril, pp. 33–36.

Afonso, P. (2008b). *O mundo Mágico das Conexões Matemáticas*. Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco.

APM e IIE (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Tradução portuguesa dos Standards do National Council of Teachers of Mathematics*. Lisboa: Autor.

APM e IIE (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática. Tradução portuguesa dos Professional Standards do National Council of Teachers of Mathematics*. Lisboa: Autor.

Balbuena, L. e Coba, M. (1992). *La Matemática Recreativa vista por los alumnos*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

Barry, S. (1995). *Brincadeiras e Truques para Atrapalhar os teus Amigos*. Lisboa: Replicação.

Devlin, K. (2002). *Matemática — A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Enzensberger, H. (1998). *O Diabo dos Números*. Porto: ASA.

Espinoza, G.; González, G. e Monge, A. (2002). *De la matemática recreativa a la matemática formal: una herramienta didáctica para la enseñanza de la geometria en sétimo año*. Consultado no dia 25 de Junho de 2008 em: *http://www.cimm.ucr.ac.cr/una/tesis/De%20la%20matematica%20recreativa%20a%20la%20matematica%20formal.pdf*

House, P. e Coxford, A. (1995). *Connecting Mathematics across the Curiculum*. Reston: NCTM.

Martín, R. (2006). *Magia fácil para todos*. Málaga: Ediciones Aljibe.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: Autor.

Pappas, T. (1995). *More Joy of Mathematics:exploring mathematics all around you*. San Carlos: Wide World Publishing/Tetra.

Ponte, J. *et al.* (2007). *Programa de Matemática para o ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Santos, N. (1997). *Curiosidades Numéricas*. Porto: Menabel.

Tahan, M. (2003). *Matemática Divertida e Curiosa*. Rio de Janeiro: Dinalivro, 19ª Ed.

Paulo Afonso

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco

Problemas sem solução

Uma pequena investigação sobre o problema de Collatz

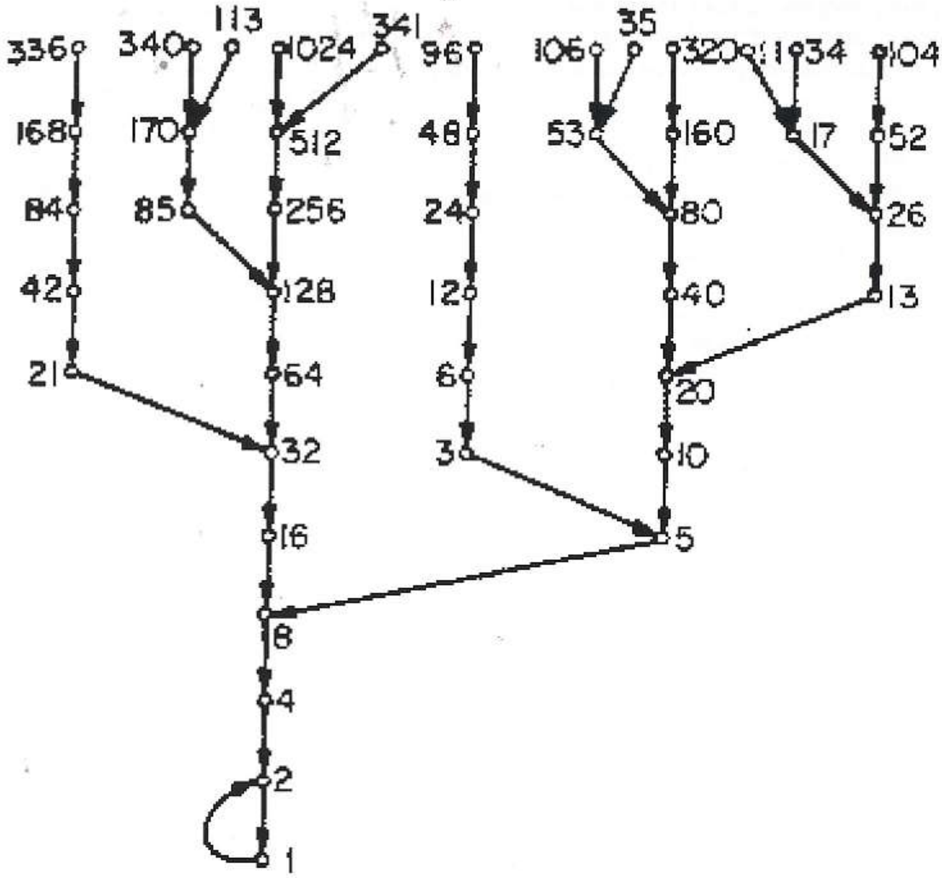
Rui Feiteira

O processo iterativo ou recursivo é um dos processos mais importantes e actuais dentro da Matemática, pois podem modelar processos sequenciais, desempenhando, por exemplo, um papel extremamente importante na teoria da computação. Segundo a NCTM (2008), estes processos devem ser desenvolvidos de forma sistemática desde o final do 3.° ciclo do Ensino Básico. No que concerne aos documentos nacionais, o Currículo Nacional do Ensino Básico (2001) afirma que a disciplina de Matemática deve proporcionar um contacto com ideias e métodos fundamentais e deve permitir que os alunos apreciem o seu valor e a sua natureza. O novo programa do ensino básico também reserva um papel importante às sequências numéricas:

«O estudo de sequências envolve o trabalho com números e operações e proporciona o estabelecimento de relações e a explicitação de leis de formação. Os alunos devem ganhar desembaraço na manipulação de expressões numéricas, compreendendo o papel e a necessidade dos parênteses, a prioridade das operações e os efeitos das operações sobre os números.» (Programa de Matemática do Ensino Básico, p. 40)

Por outro lado, os alunos nestas idades tendem a olhar para a matemática como um produto acabado e, muitas vezes, desinteressante. As tarefas e/ou actividades que o professor escolhe para a sala de aula, ajudam, ainda que inconscientemente, a que os alunos tenham uma determinada visão da Matemática. Uma forma de contribuir para a formação de jovens matematicamente competentes e críticos é confrontá-los, ao seu nível, com problemas reais com que os verdadeiros matemáticos se confrontam no dia-a-dia. Foi com este intuito que apresentei o problema de Collatz, também conhecido como o problema $3x + 1$, a uma turma do 8.° ano de escolaridade. Este problema que é muito fácil de enunciar é, de facto, muito difícil de resolver, e ainda hoje é um problema em aberto.

Figura 1



O problema 3n+1

Escolha um número natural qualquer. Se esse número for par divida-o por 2. Se o número escolhido for ímpar, multiplique-o por 3 some-lhe 1 e, de seguida, divida o resultado anterior por 2. Obtido um número através deste processo repita-o várias vezes. Descobriu alguma invulgaridade? A sucessão de números criada atinge inevitavelmente o número 1.

Segundo alguns autores este problema teve origem, nos anos 30, do século passado, na Universidade de Hamburgo, onde Lothar Collatz preparava o seu doutoramento. O problema foi ganhando alguma dimensão, mas apenas como uma pequena curiosidade matemática, até que, na década de 50, Hasse o discutiu intensamente no meio académico. O problema ganhou outra dimensão, e na década de 60, os melhores matemáticos de Yale e de Los Alamos trabalharam intensamente neste problema, mas sem o conseguir demonstrar.

Mas o que torna realmente interessante este problema? Comecemos por formalizar matematicamente o mesmo. Seja $C : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$C(n) = \begin{cases} \dfrac{3n+1}{2}, & n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{n}{2}, & n \text{ é par} \end{cases}$$

Vejamos como partindo desta função podemos obter uma sucessão de valores. Comecemos por escolher, por exemplo, o número 5 e vamos repetir várias vezes o processo. Como 5 é ímpar, o número seguinte será 8, o seguinte 4, o seguinte 2, o seguinte 1, e a partir daqui iremos entrar no ciclo 1, 2, 1, 2, ... Curiosamente se o leitor escolher inicialmente outro número natural qualquer, irá atingir sempre o ciclo anterior. Seja $C^2(n) = C(C(n))$ e $C^3(n) = C(C(C(n)))$, então dizemos que a sucessão $C^k(n)_{k\in\mathbb{N}}$ que é obtida por iteração pela função C, é a órbita de n. A conjectura principal, que deu origem a todo o problema, afirma que: começando num número natural qualquer, a sucessão $C^k(n)_{k\in\mathbb{N}}$ atingirá, a partir de uma certa ordem, o valor de 1, sendo que depois de tal acontecer, o valor das iterações oscilará entre 1 e 2.

Além desta existem várias conjecturas associadas a este problema, sendo que a conjectura principal apenas tem sido comprovada experimentalmente. A este propósito o investigador português Tomás Oliveira testou todos os números inteiros[1] até $20 \times 2^{58} \approx 5,8 \times 10^{18}$ e não encontrou um número que não atingisse 1, ou que equivalentemente, não atingisse o ciclo 1, 2, 1,2 ...

Para melhor compreender o comportamento das órbitas, de qualquer número natural, podemos pensar num digrafo ou grafo dirigido (Figura 1), onde os vértices correspondem aos números naturais e os arcos correspondem ao valor que cada iteração vai assumindo.

Neste dígrafo[2], vê-se claramente as órbitas de vários números. Se escolhermos, por exemplo, 113, vemos que a órbita assume os seguintes valores 113, 170, 85, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. Podemos notar ainda que as iterações têm comportamentos bastante distintos, pois existem órbitas bastante curtas e outras mais longas . A título de exemplo a órbita de 27 leva 70 iterações[3] até atingir finalmente 1. Outras considerações se poderiam fazer para melhor entender este problema mas este não é o espaço próprio, nem o objectivo do presente trabalho.

A preparação

Apesar de ser um problema que se enuncia facilmente, não é um problema fácil de colocar a uma turma do 8.º ano de escolaridade. De qualquer forma, a turma em questão, estava, naquele momento, a trabalhar a unidade temática de sequências e já conseguiam determinar os termos de uma determinada sequência através do seu termo geral, completar sequências numéricas ou geométricas, e posteriormente, foi feito um trabalho que encaminhasse os alunos para o estudo de progressões aritméticas. Vejamos, um exemplo, de como os alunos abordaram um problema que pode ser modelado através de uma progressão aritmética.

Uma sala de cinema tem 8 filas paralelas de cadeiras. A primeira fila tem 10 cadeiras, e todas as outras filas têm mais 4 cadeiras em relação à fila anterior. Quantas cadeiras tem a última fila da sala de cinema?

Apresentamos nas figuras 2 e 3 algumas das resoluções dos alunos.

Sem o saberem, para darem uma resposta à questão anterior, em qualquer das resoluções apresentadas, os alunos utilizaram implicitamente um processo recursivo, pois o número de cadeiras da fila da frente corresponde à soma do número de cadeiras da fila anterior com quatro. Portanto, para dar a resposta final, basta actualizar o número de cadeiras por fila. De facto, este problema pode ser modelado pela sucessão, definida por recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 4, n \geq 2 \end{cases}$$

Começamos por onde?

A abordagem ao problema $3x + 1$ dividiu-se em duas fases: numa primeira fase, os alunos deveriam compreender o enunciado do problema e deviam tentar calcular correctamente alguns termos; numa segunda fase, era minha intenção que os alunos concluíssem (experimentalmente) que todas as sequências terminavam em 1 ou no ciclo 1,2 independentemente do valor inicial.

De seguida apresentamos o problema tal como foi colocado aos alunos.

Considera uma sequência em que a lei de formação de cada um dos termos é:

- *Se o termo anterior for par, divide-o por 2;*
- *Se o termo anterior for ímpar, multiplica-o por 3, soma-lhe 1 e, depois divide esse número por 2.*
  Descobre como se comporta esta sequência.

O problema com este pequeno enunciado colocava-se a dois níveis distintos: primeiro, os alunos debatiam-se com uma lei geral bastante diferente daquilo a que estavam habituados; segundo, os alunos necessitavam de compreender o enunciado para não se enganarem a calcular os termos da sequência, pois corriam o risco de não efectuarem as operações pela ordem correcta. Para garantir que todos os alunos da turma estariam em igualdade de circunstâncias, começou-se por analisar em grande grupo o enunciado.

A primeira dificuldade, que não havia previsto inicialmente, mas que agora, fazendo uma retrospectiva, fazia todo o sentido prever, acabava de aparecer: *começamos por onde, professor?* De facto, em todos os exercícios e problemas de sequências antes colocados era sempre fornecido o primeiro termo da sequência.

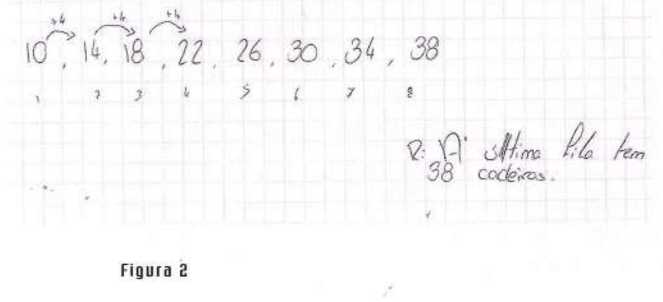


Figura 2

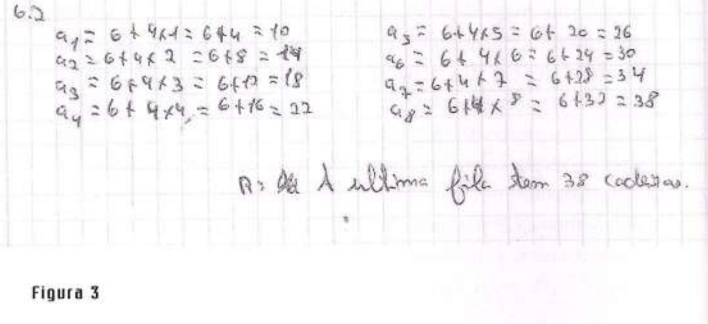


Figura 3

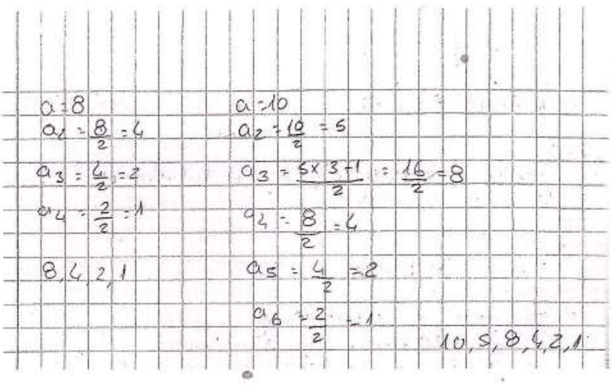


Figura 4

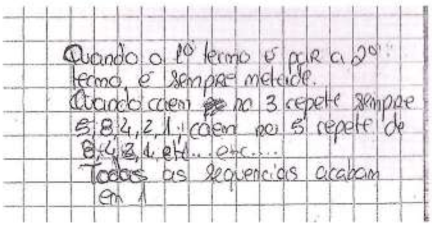


Figura 5

Aluno 1: Professor, qual é o primeiro número?

Aluna 2: Começamos por qual, professor?

Professor: Escolham vocês um número qualquer, mas escolham um número pequeno, ok?

Aluno 3: Um qualquer? E isso pode-se fazer?

Aluno 1: Esta é diferente, professor. As outras tinham sempre uma regra ...

Professor: Esta tem duas regras. Quando obténs um número par fazes isto [apontei para o primeiro ponto da lei de formação]. Quando obténs um número ímpar fazes isto [apontei para o segundo ponto da lei de formação].

Aluna 4: Escolho 6, professor. Pode ser?

Passada esta fase onde a turma, enquanto grupo, tentava perceber o que fazer, visto que a regra de formação geral era bastante diferente daquilo a que estavam habituados. Estava na altura de, em grande grupo, começarmos a calcular alguns termos da sequência.

Professor: 6 é par. Então fazemos o quê?

Aluna 4: Divido por 2. Dá 3. Agora divido outra vez?

Aluna 2: Não. 3 não é par. Tens que usar a debaixo. [aluno refere-se ao segundo ponto da lei de formação geral].

Aluno 3: Dá um número decimal ... 9,5 não é par, nem ímpar.

Professor: Como é que fizeste?

Aluno 3: 3 vezes 3 dá 9 mais um e meio dá 9,5.

Nesta altura tornava-se claro que o aluno em questão — e este aluno não foi o único a cometer este erro — não tinha percebido que primeiro deveria somar 9 com 1 e, só depois dividir o resultado por 2. Para conseguirem calcular os termos da sequência era fundamental que os alunos respeitassem a prioridade das operações. Depois de esclarecida esta questão a turma estava pronta para continuar a calcular mais alguns termos, para que desta forma, a turma se sentisse suficientemente confortável para que de uma forma, mais ou menos, autónoma, começassem a estudar o comportamento desta sequência numérica.

Nesta fase inicial, em que os alunos, aos pares, calculavam alguns termos, alguns iam reparando em algumas curiosidades.

Aluno 6: Professor, a mim deu-me sempre 1,2,1 ... Continuo?

Aluno 5: Não ... vai dar sempre a mesma coisa. É sempre assim?

Este grupo tinha redescoberto o primeiro ciclo que esta sequência assume. Esta é, de facto, uma das outras conjecturas a que já tínhamos feito referência anteriormente, pois este é o único ciclo conhecido até ao momento. Nesta altura um dos alunos, a propósito dos cálculos da Figura 4, referiu ainda que «era engraçado» que quando os termos «caem» no 8 todos os outros termos se repetiam. Seria este um caso único? Pedimos então que continuassem a calcular mais alguns termos para ver se este padrão se repetia noutros casos.

Como alguns alunos estavam a começar a ficar bastante curiosos sobre o comportamento da sequência dividi a turma em grupos de 4 elementos, isto para aumentar a velocidade dos cálculos a efectuar e para aumentar o número de sequências a estudar. Metade destes grupos começou por estudar o comportamento desta sequência para os números pares, enquanto que a outra metade estudava o comportamento da sequência para os números ímpares. Depois de calcularem alguns termos da sequência, cada grupo foi convidado a tentar colocar por palavras aquilo que estavam a observar.

Independentemente, os diferentes grupos começavam a retirar as suas primeiras conclusões. A título de exemplo, na Figura 5, o grupo destacava dois pontos interessantes: i) quando a sequência assume o número 3 todos os outros termos se repetem, assumindo sucessivamente 5, 8, 4, 2, 1; ii) todos as sequências que estudaram terminavam em 1. Curiosamente, este último aspecto, que é o mais interessante do ponto de vista matemático, não foi o aspecto mais interessante que este grupo decidiu destacar. Neste ponto, é justo afirmar que, como todos os grupos estavam a chegar à mes-

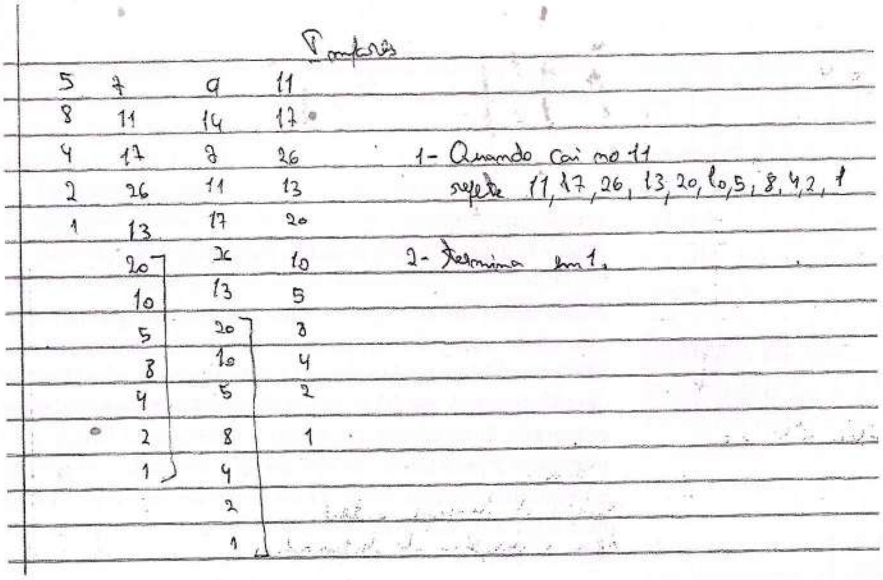


Figura 6

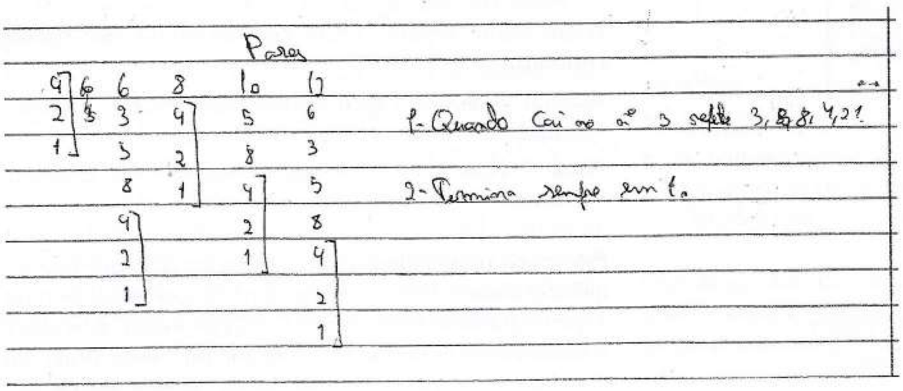


Figura 7

ma conclusão, isto é, que todas as sequências terminavam em 1, 2 e depois repetiam sempre estes mesmos números, decidi que os grupos, assim que nos seus cálculos, atingissem o número 1 podiam começar a estudar a sequência para outro valor inicial.

Para que toda a turma tivesse conhecimento de todas as trajectórias calculadas, comecei por pedir, que cada um dos grupos, dissessem em voz alta os termos das sequências pelas quais tinham ficado responsáveis.

Como ilustra a Figura 6, coloquei no quadro todas as trajectórias para os números ímpares, sendo que, de seguida, os alunos deveriam ler em voz alta as suas conclusões ou conjecturas. No entanto, quando estava no quadro a escrever a trajectória do número 9, um dos alunos interrompeu.

Aluno 3: Do 20 para frente repete tudo, não é, professor?

Aluno 6: Não … é a partir do 11! Todos os outros repetem …

Professor: Esperem. Vamos acabar, falta apenas o 11.

Aluno 5: 11, 17, …

Aluno 6: Já sei. Pára. 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 3, 4, 2, 1. [os dois alunos diziam em simultâneo os diferentes termos que a sequência ia assumindo].

O aluno 6, não conhecia à partida, o comportamento da sequência para o valor inicial de 11, isto porque tinha calculado apenas as trajectórias de alguns números pares. Pensamos que este aluno ao observar o que estava a ser escrito no quadro e, tendo presente as conjecturas que tinha construído para os números pares (Figura 5), facilmente as adaptou para o caso do valor inicial ser um número ímpar.

A turma, enquanto grande grupo, tinha conseguido verbalizar o que vemos no dígrafo da Figura 1, quando as iterações atingem um determinado valor é fácil de prever quais os valores que as seguintes iterações irão assumir. Se considerarmos apenas o trabalho efectuado em pequenos grupos, todos eles, independentemente, conseguiram formalizar a conjectura principal associada a este problema. Mas, talvez, o mais interessante, desta aula, ainda estivesse para acontecer. Depois de toda a turma ter discutido este problema para cerca de 10 valores iniciais diferentes, expliquei que este ainda era um problema em aberto e, portanto, ainda não resolvido. Informei ainda que a conjectura, que eles tinham acabado de testar, tinha sido verificada para todos os números naturais inferiores a, aproximadamente, 10^{18}.

Aluno 1: Que grande número ... Não sei dizer ...

Professor: Quantos zeros tem este número depois do 1?

Aluno 2: Muitos ...

Aluno 1: dezoito, professor. É mesmo muito grande. Tá em ... notação científica, não é, professor?

Os alunos ficaram um pouco espantados com a ordem de grandeza deste número, pois este é muito superior, aqueles números com os quais estão habituados a trabalhar. Ficaram ainda mais espantados quando afirmei que para além daquele número, aproximadamente, 10^{18}, não havia certezas e, por isso mesmo, estávamos perante uma conjectura e não um resultado matemático demonstrado e aceite. Um dos alunos referiu que pensava que em matemática isso era impossível. Outros indagavam-se sobre a razão pela qual não se estudavam todos os números.

Aluno 6: E porque é que não estudam todos os números?

Aluno 1: Porque são infinitos, não é professor?

Este aluno, que tinha estado bastante activo, desde o início da aula, tinha tocado, num ponto fundamental. Informalmente a resposta que deu o aluno 1 está correctíssima. A nível computacional torna-se muito complicado estudar todas as trajectórias, pois esta abordagem consome muito tempo e memória aos computadores à medida que a ordem de grandeza dos números vai aumentando e, simultaneamente, o espaço de memória disponível vai diminuindo. Mas o aluno 6 ainda não estava satisfeito com a resposta que recebeu.

Aluno 6: E porque é que não dividem os números todos? Uns ficam com uns e outros com outros?

Curiosamente esta ideia, a de investigar uma certa propriedade usando uma rede de computadores, que valeu alguns comentários jocosos por parte da turma, já foi implementada, com sucesso, na procura dos primos de Mersenne[4], na década de 90. Este projecto deu ainda a oportunidade a que pessoas, que não fossem cientistas de participar numa descoberta científica.

Considerações finais

Durante toda a actividade os alunos mantiveram-se bastante empenhados e foram revelando bastante curiosidade acerca de todos os cálculos que iam fazendo e do comportamento que cada sequência ia assumindo. A curiosidade foi, de facto, um factor determinante para que os alunos se mantivessem empenhados, pois os cálculos ao fim de algum tempo passam a ser rotineiros e pouco interessantes. Todos os grupos, independentemente, fizeram referência à conjectura principal, o que aconteceria sempre, eventualmente, se os alunos controlassem o processo de cálculo de cada iteração. Foi interessante verificar que, grande parte dos alunos, conseguiu perceber que os valores que as diferentes sequências iam assumindo eram afinal previsíveis. Sem usarem uma linguagem muito matemática conseguiram replicar o que a Figura 1 ilustra. Esta actividade foi ainda uma oportunidade de para que os alunos vejam a Matemática não como uma ciência fechada e acabada, mas sim, o oposto, é uma ciência aberta a todas as contribuições e está longe de se poder considerar acabada.

Notas

1 Resultado obtido em Janeiro de 2009.

2 Para sermos mais rigorosos este dígrafo representa apenas parte de todas as órbitas possíveis.

3 Em *www.numbertheory.org/php/collatz.html* está disponível uma calculadora de trajectórias para este problema.

4 *www.mersenne.org*

Referências

Araújo, V. (2004). *O problema 3x+1*, *Gazeta da Matemática*, n.º 146, pp. 38–44, Lisboa: SPM.

Buescu, J.(2001). *O Mistério do Bilhete de identidade e Outras Histórias, crónicas das Fronteiras das ciências*, Lisboa: Gradiva.

Departamento do Ensino Básico, (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico* — competências essenciais. Disponível em

http://www.dgidc.min-edu.pt/public/compessenc_pdfs/pt/LivroCompetenciasEssenciais.pdf

NCTM [National Council of Teacher of Mathematics]. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, Lisboa: APM.

Oliveira e Serra,. T. (2009). *Computational Verification of the 3x+1 conjecture*. Disponível em *www.ieeta.pt/~tos/3x+1.html*

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação — DGIDC.

Rui Feiteira
Escola Secundária Poeta António Aleixo, Portimão

José Paulo Viana

A hora dos biscoitos

Fomos fazer uma caminhada pela serra do Gerês.
Depois de atravessarmos a sempre emocionante Fenda da Calcedónia, sentámo-nos a recuperar forças e abrimos o pacote de biscoitos que tínhamos levado.
A Ana tirou um biscoito e a décima parte dos que sobravam.
A Beatriz tirou dois biscoitos e a décima parte dos restantes.
O Carlos tirou três e a décima parte dos que sobejavam.
E assim sucessivamente até chegar a minha vez, ficando eu com os que ainda estavam no saco.
Curiosamente, acabámos por comer todos a mesma quantidade de biscoitos.
Quantas pessoas tinha o grupo e quantos biscoitos comeu cada um?

(Respostas até 27 de Junho para zepaulo@armail.pt)

Nota

Devido a uma gralha na data limite de entrega das respostas ao problema «Triângulos coloridos» da Educação e Matemáitca nº 105, a sua resolução só será apresentada no próximo número da revista.

Materiais para a aula de Matemática

Problemas com ângulos que variam

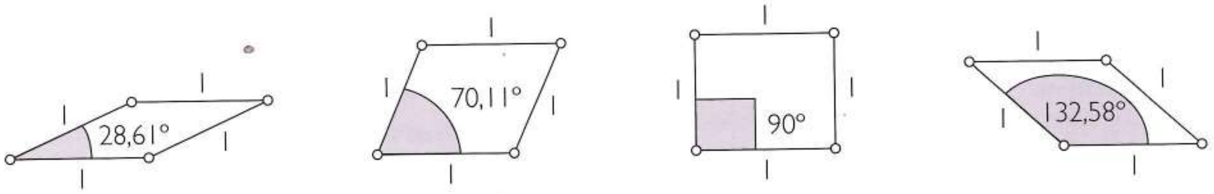
A tarefa *problemas com ângulos que variam* foi adaptada a partir da proposta incluída na página 91 da brochura de Geometria 11° ano de escolaridade (Loureiro et al., 1998), que apoiou o programa ajustado de 11° ano, em 1998. Às vezes procuramos a tarefa ideal para concretizar com os nossos alunos e não a encontramos. Também, eu já tinha visto esta tarefa, mas nunca a tinha usado. Este ano lectivo, 2009/2010, foi diferente, e resolvi implementar esta tarefa em sala de aula com alunos do 11° ano, Matemática A, em Trigonometria.

Os alunos envolveram-se, activamente, no cálculo das áreas, quer recorrendo ao papel e lápis, quer recorrendo ao programa Geogebra. Não havia limites à exploração, com ou sem a tecnologia que está disponível em todas as aulas. Apenas, foi pedida a redacção de um pequeno relatório que abordasse os tópicos definidos pelos pontos de 1 a 8, da tarefa. A actividade desenvolvida a pares permitiu, aos alunos, o primeiro contacto com as funções trigonométricas, e relembrarem algumas relações entre os elementos de uma figura. Discutimos a definição de losango e a de quadrado, marcámos pontos num referencial do plano, traçámos gráficos, conjecturámos, testámos e concluímos. De certo que foi uma tarefa enriquecedora para todos.

Paulo Dias
Escola Secundária da Moita

Problemas com ângulos que variam

Observa os quatro losangos seguintes.



Considera que a unidade de comprimento é o lado dos losangos da figura.

1. Determina a área de cada um deles.

2. Completa a tabela, e assinala, num referencial *xoy*, os pontos (x, y)

x ângulo	y área do losango
28,61°	
70,11°	
90°	
132,58°	
α	

3. Descreve a variação da área do losango, como função de um dos seus ângulos.

4. Indica o valor de que se aproxima a área, quando o ângulo é quase nulo.
   E se fosse quase raso?

5. Qual é o losango que tem maior área?

6. Quantos ângulos diferentes dão origem à mesma área? Explica porquê.

7. E existem losangos diferentes com a mesma área?

8. Experimenta com outros losangos e comprova as tuas conjecturas....

Notações geométricas em debate

Foi com satisfação que o Grupo de Trabalho de Geometria (GTG) recebeu a notícia de que à Educação e Matemática chegara uma reacção à Nota publicada no número 103, com o título *Notações: basta de confusões!*. Também a referência, por parte de José Avelino Carmo, a outras Notas, é estimulante para o grupo que vê, assim, manifestado o interesse por estes assuntos e alargada a discussão, como sempre tem pretendido.

Posto isto, consideramos que é de continuar este debate também nas páginas da revista, razão pela qual nos atrevemos a pegar nalgumas afirmações e provocações lançadas pelo nosso leitor.

Sobre as notações

É nossa opinião que, no primeiro artigo referido, publicado no número 42 da revista, não se fazia uma proposta completa e consequente de notações a usar em geometria mas tentava-se, sobretudo, salientar a mistura de tradições (da Matemática Moderna) existente. Ao contrário do afirmado por José Avelino Carmo, o GTG acredita que as poucas sugestões feitas na altura não foram consolidadas e que, actualmente, persistem muitos dos problemas descritos. A nossa mudança de opinião tem sido encarada, internamente, como uma evolução, e fruto de várias discussões, e não como uma moda.

Se é certo que não advogamos sempre a economia, no exemplo dado parece-nos que esta não fica obrigatoriamente comprometida por poder-se, nos cálculos, definir que $x = comp(BC)$ e passar a escrever-se $x^2 + 4^2 = 5^2$. A ideia fundamental é que o aluno, quando escreve, saiba a que se refere e que distinga, por exemplo, o segmento do seu comprimento. E embora a notação $\overline{BC}$ seja vulgarmente aceite entre os professores do ensino básico e secundário, a verdade é que num dos poucos livros de geometria euclidiana em português, de Franco de Oliveira[1], ela nem sequer é usada, à semelhança do que sucede com vários outros autores, sobretudo ingleses.

Sobre as definições

Na nossa forma de entender a natureza e organização da geometria, um triângulo equilátero pode ou não ser isósceles, dependendo da definição. Se adoptarmos classificações hierárquicas e inclusivas, como defendemos que se adopte na maioria das situações que trabalhamos com os nossos alunos, um triângulo equilátero é isósceles. Na realidade, mesmo a definição de triângulo não é única porque umas vezes estamos a considerar o interior e outras vezes não. Ainda que, em Portugal, tenhamos palavras diferentes para designar circunferência e círculo, o mesmo já não sucede no caso dos polígonos e, em inglês, usa-se a palavra *circle* para designar ambos e *circumference* é normalmente o termo usado para o perímetro de uma curva fechada.

Aceitando a figura 4 (p. 26, E&M 106) como um quadrilátero (o quadrilátero $PRQS$), em que os lados se cruzam, têm de ser repensadas coisas básicas como a amplitude dos ângulos (vamos considerar a sua orientação para a soma algébrica dos quatro ângulos ser 360°, à semelhança do que sucede com os quadriláteros com que se trabalha usualmente?) e até mesmo como determinar a área nestes casos (pode suceder que a área deste polígono seja menor que a soma das áreas dos dois triângulos que parecem estar definidos na figura?), aspectos que têm sido alvo de reflexão no GTG sem que tenham sido estudados até ao fim. Nestes assuntos, o GTG tem encontrado inspiração para muitas das suas ideias no trabalho de Coxeter, literatura que recomendamos vivamente. Por exemplo, em *Geometry Revisited*[2], nas páginas 51 a 53, os autores tecem algumas considerações sobre a extensão do conceito de área de um quadrilátero, quando se amplia o conjunto dos quadriláteros, incluindo os não convexos e os *cruzados*.

Em jeito de conclusão, não podemos deixar de referir que o que o GTG pretende, acima de tudo, é encontrar sugestões para um uso o mais significativo possível das notações, e nunca impor qualquer uniformidade ou substituir um dogma por outro. Queremos, apenas, simplificar e fazer com que os alunos se preocupem principalmente com a geometria, e com os raciocínios geométricos acima de tudo, e não com as notações para exprimi-los. E defendemo-lo em sala de aula, nos textos de apoio para alunos, e em quaisquer

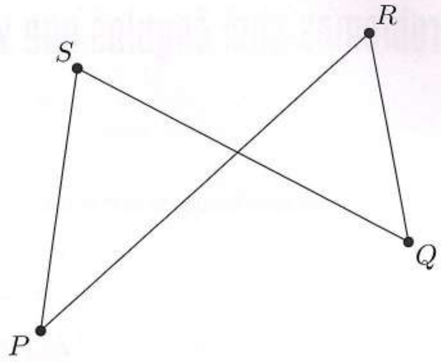


Figura 4

enunciados, incluindo os de provas ou exames, onde as questões não deveriam em caso algum depender do entendimento das notações usadas mas sim estarem escritas de modo a não subsistirem dúvidas sobre o que está ser questionado.

Notas

[1] Oliveira, A.J. Franco de, 1995. *Geometria Euclideana*. Lisboa: Universidade Aberta.

[2] Coxeter, H.S.M. e Greitzer, S.L. 1967. *Geometry Revisited*. USA: The Mathematical Association of America.

Sónia Figueirinhas

Grupo de Trabalho de Geometria

Em Matemática não se avalia só o produto final . . .

O mundo actual, e a realidade em que nós e as nossas crianças e jovens vivemos, está em constante evolução, poderemos até dizer, que nos encontramos numa alucinante revolução de ideias, de pensamentos, de recursos, e de aquisição de informação. A Matemática, mais propriamente o ensino da Matemática, não é excepção. Novas práticas educativas surgem. Novas estratégias, instrumentos e recursos estão ao nosso dispor para acompanhar essas novas vivências, e criarmos nos nossos alunos diferentes formas de aprendizagens e de aquisição de conhecimentos e desenvolvimento de competências.

Uma das minhas grandes inquietações no que diz respeito à prática enquanto docente, prende-se com a prática avaliativa. Certamente que a todos já sucedeu, a mim confesso que muitas vezes, surgirem situações na prática de sala de aula, que nos fizeram questionar: *E agora como avalio?*

À luz do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB), e dos Programas das «diferentes Matemáticas» do ensino secundário, assim como das práticas educativas correntes não devemos, nem podemos, restringir a avaliação dos nossos alunos apenas ao produto final do trabalho por si produzido.

Se efectuarmos uma análise dos programas da disciplina da Matemática, nos diferentes anos de escolaridade, no que se refere às práticas educativas, às formas de avaliar e aos instrumentos de avaliação passíveis e indicados para serem utilizados, verificamos que são imensas as possibilidades existentes. Assumindo que a avaliação é parte integrante do processo de aprendizagem, ela deverá ser compatível com as práticas pedagógicas implementadas. A avaliação terá assim de acontecer ao longo de toda a aprendizagem, tornando-se geradora de situações que a favoreçam.

Uma ideia muito importante fica retida. O que se pretende é que a avaliação em Matemática não se restrinja a avaliar só o fim, mas também o meio, ou seja, o processo de aprendizagem, o qual deve permitir que o aluno seja um elemento activo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem. A avaliação deve constituir uma parte integrante do processo de ensino e aprendizagem. Deve ser vista como um processo contínuo, dinâmico e, por vezes informal. Isto significa que, para além dos momentos e tarefas de avaliação formal, a realização das tarefas do dia-a-dia nos devem permitir, a nós professores, a recolha de informação para avaliar o desempenho dos alunos e ajustar a nossa prática de ensino. Sendo diversos os objectivos curriculares a avaliar e sendo também diversa a forma como os nossos alunos podem evidenciar os seus conhecimentos, capacidades e atitudes, torna-se evidente o uso de uma maior diversidade de formas e instrumentos de avaliação, possibilitando-nos, assim, uma maior clareza e objectividade no processo de avaliação.

A análise dos programas curriculares, nomeadamente o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (em início de implementação), os textos subordinados à utilização de diferentes instrumentos de avaliação no que se refere às práticas de investigação em Matemática, assim como a diversidade de tarefas e recursos ao nosso dispor, enriquecem-nos a galeria de conhecimentos para aplicar na nossa prática lectiva. Possibilita-nos a dinamização de sessões de trabalho nas nossas escolas, com os nossos alunos, para implementar e testar diferentes formas de trabalhar a Matemática, de lhes expor as actividades e, não menos importante, de avaliar as mesmas. As situações de avaliação devem ser geradoras de oportunidades para os alunos aprenderem e melhorarem o seu trabalho, e fornecerem informação ao professor, sobre a evolução e preferências dos alunos, ajudando-o a melhor preparar e executar o seu trabalho.

O trabalho colaborativo e de equipa entre docentes é, também, muito importante e extremamente enriquecedor à aplicação de algumas práticas. Uma mesma actividade pode, por exemplo, ser trabalhada em conjunto e aplicada em níveis diferentes de ensino, em contextos diferenciados na sala de aula, indo ao encontro das competências de cada aluno. Ao optar, por exemplo, por dinamizar uma actividade de investigação, esta pode ser trabalhada de forma diferenciada pelos alunos, atribuindo-lhes tarefas diferentes. É certo que deve existir uma escolha cuidadosa, e criteriosa, das tarefas a desenvolver, analisados e seleccionados os instrumentos de registo de avaliação/classificação do trabalho a aplicar e os calendários de aplicação, assim como o material de suporte para apresentação das tarefas e elaboração de guiões descritivos das tarefas e indicações sobre os recursos a utilizar. De relevância extrema é, também, a discussão e acordo dos critérios de avaliação do trabalho com os alunos na sala de aula. Este acordo efectuado previamente com os alunos tem muitas vezes resultados positivos, pois eles sabem muito bem o que devem e não devem fazer. A negociação da aplicação de critérios para os avaliar faz com que no final ambas as partes tenham uma acção concertada.

Para diferentes propósitos, diferentes tarefas, diferentes instrumentos de recolha de dados para a avaliação podem ser utilizados. Tabelas de descritores, grelha de registo de observação directa, registo de correcção de exercícios por *feedback*, fichas de diagnóstico, fichas de avaliação formativa, relatórios escritos, elaboração e apresentação de trabalhos. Todos são importantes, pois permitem averiguar de modos diferentes os saberes e conhecimentos apreendidos pelos nossos alunos. Quanto à natureza das tarefas sucede o mesmo. Diferentes tarefas, diferentes recursos, permitem aos alunos diferentes formas de expressão. As tarefas de cariz mais prático são mais receptivas para a maioria dos alunos, porém nem todos se conseguem expressar igualmente nas diferentes tarefas. Para alguns, os relatórios escritos são mais fáceis, para outros a pesquisa na internet, para outros, ainda, a construção de modelos. No fundo o que é importante é que se faculte aos alunos diversas formas de expressão matemática para que seja também mais facilitadora a sua aquisição de conhecimentos, desenvolvimento de capacidades, e incremento de competências, assim como para nós a avaliação do seu saber matemático.

No meu entender, temos de envolver os alunos, os encarregados de educação e também os professores de Matemática mais resistentes às novas práticas pedagógicas, porque também os há. Temos de resistir às pressões externas que muitas vezes fazem com que a nossa atenção seja deslocada de uma avaliação verdadeiramente ao serviço da aprendizagem, para aquela que serve outro tipo de interesses. Há que procurar desenvolver um ensino coerente com o que se entende por saber matemática, em vez de um ensino ao serviço da preparação de qualquer prova externa. Para tal, tem de existir um trabalho colaborativo entre professores, com a correspondente partilha de objectivos, interesses e responsabilidades, e negociado com alunos e encarregados de educação. Só assim conseguiremos levar a bom termo tão exigente tarefa que é a de ensinar Matemática, e mais árdua ainda a de avaliar Matemática.

Anabela Oliveira
Escola Básica 2, 3 de Pinhal de Frades

A escrita simbólica de uma generalização[1]

Magda Nunes Pereira
Manuel Joaquim Saraiva

Uma criança quando entra para a escola já leva consigo alguma experiência em generalizar e em abstrair a partir de casos particulares — o que é a essência da Álgebra. O expressar a generalidade é inteiramente natural, causa prazer e faz parte do «fazer sentido» do ser humano. Porém, a Álgebra também fornece uma linguagem simbólica dentro da qual se expressam as generalidades conjecturadas.

A aprendizagem da Álgebra envolve saber trabalhar com os símbolos, mas de forma significativa — um processo que não é fácil nem é linear. Recordem-se, por exemplo, as dificuldades reveladas por muitos alunos quando tentam dar sentido a uma expressão algébrica, ou a uma letra nessa expressão, ou quando atribuem significados concretos às letras, ao transitarem da linguagem natural para a algébrica, ou quando tentam escrever simbolicamente uma generalização.

O pensamento e a linguagem algébricos permitem ao aluno expressar-se matematicamente, comunicar as suas generalizações, e estabelecer conexões e formulações matemáticas. Ao professor de Matemática é confiada a missão de criar e adaptar tarefas variadas que promovam nos alunos a formulação de conjecturas, o estabelecimento de estratégias de resolução, a argumentação e a comunicação matemáticas, fazendo face a situações improvisadas. E, sob este ponto de vista, inserir na aula de Matemática tarefas que permitam aos alunos explorar e investigar pode facilitar o desenvolvimento de raciocínios e a aprendizagem de processos matemáticos, nomeadamente os algébricos.

Neste artigo apresentamos alguns resultados de um estudo efectuado com alunos do 7° ano de escolaridade, no uso das letras, quando investigam e resolvem tarefas matemáticas envolvendo generalizações[2]. Faremos uma análise das dificuldades que manifestaram e terminaremos com uma reflexão orientada para o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra relativa ao desenvolvimento da escrita simbólica de uma generalização.

Da aritmética à generalização simbólica

A experiência mostra que muitos alunos têm grandes dificuldades nos números e suas operações. Outros conseguem um nível de desempenho razoável neste campo, mas deparam-se depois com grandes dificuldades na resolução de problemas envolvendo equações e construção de generalizações simbólicas, onde a interpretação que é feita dos símbolos

O João marcou a sua festa de aniversário para sábado às 15 horas. Convidou um grupo de amigos, mas não sabemos quantos irão à festa. Sabemos que, quando os amigos se encontrarem, todos se cumprimentarão entre si.

a) O João, por ser o aniversariante, é o primeiro a chegar, portanto ainda não tem cumprimentos a fazer. Mas, passados alguns instantes chegam ao mesmo tempo, vindos de locais diferentes, dois amigos do João. Quantos cumprimentos há?

b) Passado algum tempo, chega o terceiro amigo do João à festa. Quantos cumprimentos vai ele fazer? E quantos cumprimentos já houve no total?

c) Passado algum tempo, chega mais um amigo à festa. Quantos cumprimentos vai ele fazer? E quantos cumprimentos já houve no total?

d) Imagina que houve no total 15 cumprimentos. Quantos amigos, afinal, foram à festa do João?

e) Consegues encontrar um processo que nos indique o número total de cumprimentos dependendo do número de amigos que foi à festa? Explica-o.

(*Tarefa proposta e discutida na aula de Matemática, 16/01/2008*).

Figura 1.

matemáticos é, muitas vezes, desprovida de sentido. Estas dificuldades devem-se, em grande parte, à mudança de significado dos símbolos dum contexto aritmético para um contexto algébrico (Usiskin, 1988), à (in)compreensão dos símbolos em expressões aritméticas e algébricas e ao respectivo estabelecimento de conexões entre eles (Schoenfeld, 2005). Um aluno ensinado para responder apenas a questões que impliquem a aplicação de um algoritmo, por exemplo, tem sérias dificuldades quando confrontado com questões que impliquem a compreensão e exploração de um conceito.

A Álgebra pode ser vista sob várias vertentes, tendo em conta o uso que se faz das letras, usualmente designadas por *variável:* símbolo da vida colectiva de um conjunto, que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros (Caraça, 1998). As letras são símbolos usados em vários contextos. Küchemann (1981) identifica várias interpretações distintas das letras numa expressão algébrica, das quais destacamos três: *letra como incógnita* — quando a letra assume um valor desconhecido que pode ser determinado, como ocorre com a incógnita x na equação $x + 5 = 7$; *letra como número generalizado* — quando a letra pode ser substituída por vários valores, como acontece a n na sucessão dos números naturais pares representada pelo termo geral $u_n = 2n$; e *letra como variável* — quando a letra representa um conjunto de valores, como, por exemplo, $A = \{1, 3, 5, 7\}$. Os símbolos permitem agrupar e compactar ideias, transformando-as em informação fácil de entender e manipular (Linchevski, & Sfard, 1991). Porém, a simbolização centrada na manipulação simbólica pode levar ao descurar a compreensão do conteúdo implícito nos símbolos (Davis & Hersh, 1995) e pode condicionar a sua aprendizagem. No processo de ensino e aprendizagem dos Números e da Álgebra devem estar contempladas, a par e de modo harmonioso, a linguagem matemática e a sua compreensão.

Para Rojano (2002), o processo de generalização de um padrão requer a passagem por quatro fases: 1ª) construção mental da regra geradora dos termos desse padrão — é um processo mental que ocorre, por exemplo, quando o aluno é capaz de obter qualquer termo de uma sequência sem ter necessidade de calcular consecutivamente todos os termos da sequência até chegar ao termo daquela ordem; 2ª) escrita da regra em linguagem corrente — é a obtenção da regra mental, com recurso à linguagem natural, ou numérica; 3ª) tradução da regra em simbologia algébrica — obtenção da fórmula que corresponde à generalização simbólica; e 4ª) manipulação da generalização — através do seu uso na resolução de problemas que envolvam a sequência em causa. Trata-se de um ciclo que deve ser visto de modo flexível, mas que contém os momentos principais que constituem um processo de generalização. As quatro fases cruzam-se e apresentam-se muito ligadas, podendo aparecer por outra ordem que não a indicada em cima. O importante é relevar a construção mental da regra geradora, a sua comunicação em linguagem natural e em simbologia algébrica e a sua manipulação.

Dificuldades dos alunos em generalizar

Consideremos, como exemplo, a seguinte situação proposta numa aula de Matemática do 7° ano de escolaridade, no início do estudo do tema Números e Cálculo[3] (figura 1).

Quando confrontados com a situação, os alunos estabeleceram uma correspondência entre cada dois amigos e, em seguida, contaram essas correspondências, no exemplo que se segue está representada a situação para cinco amigos, contando com o João (figura 2).

Seguidamente, os alunos construíram uma tabela, como a seguir se apresenta, o que lhes permitiu testar valores de

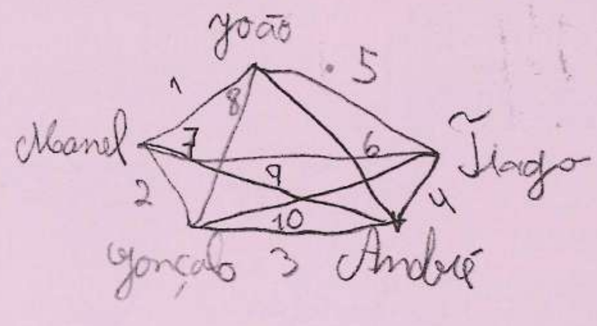


Figura 2. O esquema da tarefa O aniversário do João, do grupo 1

modo a construírem cada novo termo, recorrendo ao termo anterior — realçando aspectos numéricos, estratégicos e intuitivos, que promoveram a compreensão do processo de generalização da sequência em causa (figura 3).

Como forma de estender a tarefa, a professora propôs o estabelecimento da generalização sem uso recursivo, em relação à qual os alunos manifestaram algumas dificuldades. E, nesse caso, após a exploração da situação, para valores concretos de amigos, a professora sugeriu a construção de uma tabela onde se destacaram alguns valores, com circunferências, triângulos e quadrados a circundar valores específicos, como se apresenta na figura 4.

Para a exploração visual da tabela e consequente construção intuitiva da generalização da situação, a professora promoveu uma discussão como a seguinte:

Professora: O que é que acontece aos valores que estão no interior das circunferências? Podemos obter o *valor 1* da direita à custa dos valores da esquerda?

Manuel: Eu já descobri uma coisa, acho eu!

Professora: Diz lá, Manuel.

Manuel: 3×4 é 12. E $12 \div 2$ é 6. Acontece o mesmo para os valores que estão dentro dos triângulos. E para os outros valores também é igual.

Professora: Muito bem. E se tivermos um número muito grande de amigos, como é que podemos pensar?

Manuel: Da mesma maneira. Por exemplo se houver 1000 amigos. Para saber o número de cumprimentos é 999×1000. E depois dividimos por dois.

Professora: E se tivermos um número qualquer de amigos?

António: Então é esse número qualquer vezes o número antes desse e depois dividimos por dois.

(*Aula 16/01/2008*)

Com a ajuda da professora, os alunos generalizaram a situação até 1000 amigos e verbalizaram uma forma de calcular o número de cumprimentos. À questão da professora acerca do que acontece para um número muito grande de amigos, tão grande quanto queiramos que seja, o António respondeu que o processo era o mesmo, que se multiplicava o número pelo que estava antes dele e que depois se dividia por dois. Contudo, a maioria dos alunos não conseguiu sozinho escrever uma expressão para representar a generalização pedida.

João + amigos	Cumprimentos	
3	3	
4	6	+3
5	10	+4
6	15	+5
7	21	+6
8	28	+7
9	36	+8
10	45	+9
11	55	+10
12	66	+11
13	78	+12
14		+13
⋮	⋮	

Figura 3. A tabela da tarefa O aniversário do João, do grupo 2

nº de amigos com o João	nº de cumprimentos
1	0
2	1
$\boxed{3}$	3
$\boxed{4}$	$\boxed{6}$
5	10
6	15
7	21
...	...

Figura 4. Tabela com valores destacados pela professora, no quadro

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 3\\
1\quad 3\quad 5\\
1\quad 3\quad 5\quad 7\\
1\quad 3\quad 5\quad 7\quad 9\\
1\quad 3\quad 5\quad 7\quad 9\quad 11\\
\ldots
\end{array}
$$

Figura 5. A torre de ímpares

8x8 =64 =1+3+5+7+9+11+13+15
9x9= 81 = 1+3+5+7+9+11+13+15+17
10x10=100 = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19
O número da linha do triângulo que dá 100 é o número 10

Figura 6. A resposta da Isa à tarefa A torre dos ímpares

Vamos semple multiplicando o número da linha.
Por exemplo se quiser saber o resultado da linha 18 só tenho que
fazer 18x18=324.

Figura 7. A resposta da Rosa à tarefa A torre dos ímpares

A generalização ocorreu a partir da seguinte discussão:

Professora: Como é que raciocinámos para 1000 amigos? Podemos raciocinar da mesma maneira para n amigos!

(...)

Rosa: Eu acho que já sei. É n vezes o número que está antes que é $n-1$.

Professora: Então usando a letra n o que é que resulta desse raciocínio?

Rosa: Com n amigos temos de fazer na mesma

$$(n-1)\times n \div 2.$$

Professora (registando no quadro): Muito bem. Então se forem n amigos à festa vai haver

$$\frac{(n-1)\times n}{2} \text{ cumprimentos.}$$

Nelson: Professora, faça lá no quadro com 11 amigos, por exemplo, para ver como é?

Professora: Então se forem 11 amigos à festa, vamos aplicar a expressão com n e obtemos

$$\frac{(11-1)\times 11}{2}=\frac{10\times 11}{2}=\frac{110}{2}=55 \text{ cumprimentos.}$$

António: Pois! E funciona! Vou experimentar para muitos amigos!

(*Aula 16/01/2008*)

Torna-se evidente a dificuldade dos alunos na generalização para um número muito grande de amigos e na construção de uma expressão simbólica que a traduza.

Na sexta aula deste tema, os alunos já conseguiram generalizar com mais facilidade mas continuaram a evidenciar dificuldades em escrever uma expressão simbólica da generalização feita, como é evidente nas resoluções que a seguir se apresentam, referentes à tarefa A *torre dos ímpares* (*aula 30/01/2008*)(figura 5).

Era pedido aos alunos o valor da soma dos números de cada linha do triângulo, por ordem descendente. Apresentamos, como exemplo, as respostas da Isa e da Rosa a esta questão (figura 6 e 7).

À semelhança das resoluções da Isa e da Rosa, a maioria dos alunos determinou alguns termos da sequência e verbalizou correctamente a regra de construção, mas revelou alguma dificuldade em escrever simbolicamente a expressão algébrica que traduzia a generalização da situação.

Em geral, os alunos consideraram essencialmente casos concretos. Foi necessária a intervenção da professora para que os alunos dessem o passo para a generalização e para a construção da expressão algébrica generalizada. Porém, houve uma evolução positiva no que refere à capacidade da argumentação matemática. O excerto de entrevista que apresentamos a seguir, relativo à tarefa A *festa das irmãs gémeas* (análoga à tarefa O *Aniversário do João*) e realizada no fim das aulas da unidade didáctica Números e Álgebra, é exemplo disso. A aluna verbaliza correctamente a regra de generalização da sequência, sem o apoio da professora:

Rosa: Eu consigo saber sempre o número de cumprimentos, mas tenho de saber o número de cumprimentos anterior, tenho de saber sempre o que vem antes. Sabendo este número de cumprimentos, soma-se este valor ao número de amigos e dá sempre o número de cumprimentos que queremos saber.

(*Entrevista 28/05/2008, grupo A*)

No final do estudo, a generalização já é feita com mais frequência, no entanto a escrita da expressão simbólica continua a surgir apenas com o auxílio da professora. Os alunos, em geral, conseguem construir mentalmente uma regra ge-

$(n-1)\times n+n$

Por exemplo na linha 20 é:

$19\times 20+20=400$

Figura 8. A resposta do Manuel à tarefa A torre dos ímpares

$z \rightarrow$ Luís
$z-2 \rightarrow$ Sofia
$z+2 \rightarrow$ Martim

$z+z-2+z+2=$
$=3z$

Figura 9. Extracto da resolução da tarefa O problema das idades, grupo A

radora dos termos do padrão, alguns deles verbalizam-na, no entanto não conseguem expressá-la simbolicamente — talvez resulte da interpretação que dão às letras.

Dificuldade dos alunos em dar significado às letras

O uso e a atribuição de significado aos símbolos nem sempre é um processo fácil para muitos alunos. Neste estudo, os alunos manifestaram dificuldades em dar sentido a n, enquanto número generalizado, tal como sugere a seguinte discussão, ainda referente à tarefa *O aniversário do João:*

Professora: E se tivermos um número qualquer de amigos?

António: Então é esse número qualquer vezes o número antes desse e depois dividimos por dois.

Professora: Então, simplificando, se dissermos que esse número qualquer é n, como podemos determinar o número de cumprimentos?

Manuel: O número de cumprimentos é outro número qualquer, por exemplo y.

Professora: Assim, continuamos sem saber nada. Eu digo que foram n amigos à festa. Tu dizes que houve y cumprimentos. Conseguimos alguma informação?

Nelson: E com n também não sabemos nada, porque tínhamos de saber quantos amigos são n.

Professora: Como é que raciocinámos para 1000 amigos? Podemos raciocinar da mesma maneira para n amigos!

António: Mesmo sem sabermos quanto é n?

Rosa: Eu acho que já sei. É n vezes o número que está antes, que é $n-1$.

António: Então e podemos multiplicar números sem sabermos quanto valem? E depois como é que sabemos o resultado?

Rosa: O resultado depende de quantos amigos são n.

(*Aula 16/01/2008*)

Para a maioria dos alunos, nos momentos em que a letra n assumiu o papel de variável independente (como o número de amigos), eles tiveram, em geral, muita dificuldade em perceber a sua função nesse contexto. Por outro lado, a dificuldade dos alunos em atribuir um significado a n prende-se com o facto de não conhecerem o seu valor. Há também, claramente, uma dificuldade na interpretação da letra como um número generalizado, tal como se verifica no extracto de diálogo que a seguir se apresenta:

Professora: Então usando a letra n o que é que resulta desse raciocínio?

António: Eu queria chegar a uma maneira de fazer uma equação, mas não sei o que é a incógnita. Eu acho que a incógnita é o número que se vai sempre aumentando ao número de cumprimentos à medida que os amigos aumentam, mas não sei.

Professora: Pensem lá mais um bocadinho. Fizeram uma tabela, o que é que acontece à medida que o número de amigos aumenta?

Marco: Se houver n amigos, ..., não, ..., n cumprimentos. Não sei o que andamos à procura.

(...)

Professora: Se houver um número qualquer de amigos?

António: Pois isso era o que eu queria, mas não sei o que é a incógnita, porque os amigos aumentam e o número de cumprimentos também, mas não aumentam da mesma maneira, por isso o que é que vai ser a incógnita?

(*Aula 16/01/2008*)

Na tarefa *A torre dos ímpares*, a maioria dos alunos explica em linguagem natural o que acontece numa determinada linha. Porém, alguns alunos resolveram a questão designando o número de uma linha qualquer da torre por uma letra, parecendo ter construído uma relação simbólica com significado matemático, como sugere a figura 8.

O Manuel necessitou de apresentar um caso específico para confirmar a sua expressão simbólica, semelhante à usada na tarefa *O aniversário do João*, revelando um transporte de processos utilizados anteriormente — o que realça a importância da experiência matemática anterior.

Tal como sugerem os extractos de discussão apresentados, grande parte dos alunos indiciou muita dificuldade na transição do concreto para o abstracto, manifestando grandes dificuldades na escrita simbólica da generalização de uma sequência. A maioria dos alunos determinou os primeiros termos de uma sequência e descreveu a regra em linguagem natural por recorrência (usando o termo anterior),

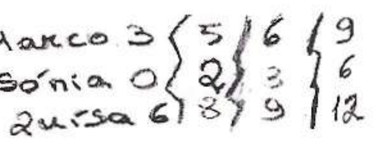


Figura 10. Extracto da resolução da tarefa Os três irmãos, grupo B

mas não conseguiu simbolizar a generalização sem uso recursivo. Ou seja, nas situações em que a letra estava inserida num contexto funcional, onde era necessário relacionar o termo (variável dependente) com a ordem desse termo (variável independente), a maioria dos alunos manifestou dificuldades na compreensão do papel da letra e em construir simbolicamente uma expressão generalizada — pois foram confrontados com dois valores desconhecidos a variar em simultâneo (termo e ordem desse termo).

Durante a entrevista (grupo A), numa questão da tarefa *O problema das idades* [O Luís tem mais dois anos que a Sofia e menos dois que o Martim. A soma das idades dos três irmãos é igual ao triplo da idade do Luís?], a compreensão conceptual da letra como valor possível indeterminado sucedeu de discussões ocorridas durante as entrevistas, como a seguinte, relativa ao significado da expressão obtida por estes alunos, $3z$, e pela extensão feita em torno de $2z$, durante a resolução da tarefa (figura 9).

Professora: Sim, mas z representa o Luís?

A professora chamou à atenção para a imprecisão, bastante frequente na maioria dos alunos, em relação ao significado da letra («z representa o Luís»).

Manuel: z representa a idade do Luís.

Professora: Ah! A idade do Luís! Então e $z-2$? E $z+2$?

Manuel: $z-2$ a idade da Sofia e $z+2$ a idade do Martim.

Professora: Sim, as idades! Então e o que é $3z$?

Rosa: A idade do Luís multiplicada por 3.

Professora: Então e o que é a idade do Luís multiplicada por 3?

Isa: É o triplo da idade do Luís.

Manuel: E se virmos bem, a soma da idade da Sofia com a do Martim, $(z-2)+(z+2)$ [escrevendo na folha de respostas] é a idade do Luís vezes dois, ou seja $2z$.

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* A)

Nas situações em que a letra assumia o papel de incógnita, os alunos manifestaram uma maior compreensão do significado da letra e evidenciaram uma boa capacidade de argumentação e resolução. Exemplo disso é a discussão que se segue, ocorrida durante a entrevista ao grupo B, numa questão da tarefa *Os três irmãos* [O Marco tem mais três anos que a Sónia e menos três que a Luísa. A soma das idades das duas irmãs será sempre um número par?]

António: Números ímpares mais números ímpares vai dar números pares.

Professora: Então e se as irmãs tiverem um número par de idades?

José e Mara: Par e par dá par.

António: Mas se for um número ímpar com um número par não vai dar.

Professora: Mas há alguma possibilidade de uma das irmãs ter um número par de anos e a outra ter um número ímpar de anos?

António: É melhor fazer aqui, assim (figura 10).

Mara: Não. As idades delas dependem da idade do Marco. E vão ser as duas números pares ou as duas números ímpares.

Professora: Se o Marco tiver um número par de anos ...

António: As duas irmãs têm idades ímpares. E se o Marco tiver um número ímpar de anos, as duas irmãs têm idades pares.

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* B)

A discussão em torno da soma de números pares e ímpares conduziu à correcta verbalização da resolução do problema, como a seguir se mostra:

Professora: Então o que é que concluem?

António: Quando o Marco tem um número par de anos, as irmãs têm as duas um número ímpar de anos e a soma das idades das irmãs é um número par. Quando o Marco tem um número ímpar de anos as irmãs têm as duas um número par de anos e soma das idades das irmãs também é um número par.

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* B)

A adopção de estratégias distintas face à mesma situação decorreu de discussões como a seguinte (referente à da tarefa *Os três irmãos*):

Mara: Então, o Marco tem 8 anos, a Sónia tem 5 e a Luísa tem 11.

MARCO $8 \times 3 = 24$
~~Sónia~~ - 5 6 7 8 9
LUÍSA - 11 12 13 14 15

Figura 11. Extracto da resolução da tarefa Os três irmãos, grupo B

x - daqui a quantos anos
8 = idade do Marco
5 = Sónia
11 = Luísa

$5+x+11+x=24$
$2x=24-5-11$
$\frac{2x}{2}=\frac{8}{2}$
$x=4$

Figura 12. Extracto da resolução da tarefa O problema das idades, grupo A

Professora: Então vamos lá escrever.

José: Vamos tentando e quando a soma das duas irmãs der 24, já sabemos daqui a quantos anos é que …

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* B)

A estratégia de resolução usada por alguns alunos foi a de calcular os valores das idades actuais de cada um dos irmãos e tentar, ano a ano, perceber o que ocorre, usando, por exemplo, um esquema como o que apresenta na figura 11.

No decurso da entrevista ao grupo A, referente à tarefa *O problema das idades*, alguns alunos optaram pela formulação e resolução de uma equação que traduzia o problema, como a resolução que a seguir se apresenta:

António: É mais fácil fazer por uma equação.

Professora: Então vá!

Mara: Pois é, se calhar é mais rápido com uma equação!

Professora: Então o que é que queremos?

Mara: Então o que queremos é somar estas duas $5+x$ com $11+x$.

Professora: Então vá!

Mara: Então $(5+x)+(11+x)\ldots$

António: Que vai dar 24.

Mara (escrevendo no caderno): Então

$$(5+x)+(11+x)=24.$$

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* A)

No entanto, a variedade de estratégias de resolução contribuiu para a sua discussão dialéctica, permitindo a partilha e a discussão de resultados, como a seguir se exemplifica com a resolução da equação $5+x+11+x=24$ (figura 12).

Mara: Já está, $x=4$. Então é daqui a 4 anos.

José: Foi o que me deu a mim! Daqui a 4 anos.

Professora: Então e o que é que significa esse $x=4$?

José: São os anos que são precisos para que a soma da idade das irmãs seja o triplo da idade do Marco.

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* A)

Outros alunos optaram por resolver mentalmente a questão, como a resolução que a seguir se apresenta, referente à tarefa *O problema das idades*:

José: António e Mara, vocês fazem com uma equação que eu vou fazer por contas, está bem?

Mara e António: Está!

José: Eu já sei! É daqui a 5 anos. Não! É daqui a 4 anos. Então não é?

Professora: Como é que fizeste? Escreve.

José: Escrever não! Fiz de cabeça. Então, não está bem?

Professora: Espera um bocadinho pelos teus colegas e já vamos ver, está bem? Então vamos lá pensar.

(*Entrevista 28/05/2008, grupo* A)

Nas situações onde a letra assumiu o papel de incógnita de uma equação possível determinada, a maioria dos alunos não manifestou grandes dificuldades em traduzir simbolicamente a situação, em resolvê-la e em dar-lhe sentido — porque nessas situações existia apenas um desconhecido que se mantinha invariante, pois a letra escolhida no início da resolução para designar a incógnita representava sempre o mesmo desconhecido ao longo da resolução do problema. Onde a letra assumiu o papel de um valor generalizado — como é o caso da letra de uma expressão, em que essa expressão pode ter um significado independente da estrutura matemática de que faz parte (neste caso a estrutura é a equação), os alunos necessitaram de um maior acompanhamento por parte da professora na análise às decisões e estratégias que adoptaram, a fim de maximizarem a compreensão dos significados matemáticos nelas envolvidos.

A concluir

Neste estudo, os alunos deram, de forma clara, um sentido à letra quando esta assumia o papel de incógnita. Porém, tiveram mais dificuldade em dar significado à letra quando esta estava enquadrada num contexto funcional, assumindo dificuldades em generalizar e na escrita simbólica da generalização de uma sequência. Os alunos determinaram os primeiros termos de uma sequência e descreveram a regra dessa sequência em linguagem natural por recorrência (usando o termo anterior), mas tiveram muita dificuldade em simbolizar tal generalização. Poder-se-á afirmar que os alunos estão na segunda etapa de generalização de um padrão referida por Rojano (2002). Talvez esta situação se deva à ambiguidade dos símbolos, pois, tal como afirma Caraça (1998), n, individualmente, não sendo um número natural representa-os a todos.

A professora, bem como as tarefas de exploração e de investigação propostas, assumiram um papel importante para a promoção, nos alunos, da sua capacidade de traduzir simbolicamente uma situação dada. Foi possível identificar as dificuldades dos alunos no que respeita à interpretação das letras e à capacidade de generalizar. Fica a certeza da importância de ter sempre presente os contextos onde as letras estão inseridas e que o significado de uma letra como incógnita é mais assumido pelos alunos do que o de uma letra como número generalizado — talvez seja necessário insistir no desenvolvimento da imaginação e, consequentemente, da abstracção, dos alunos («Então e podemos multiplicar números sem sabermos quanto valem? E depois como é que sabemos o resultado?»).

Notas

1 A investigação que serviu de base à elaboração deste artigo integra-se na Tarefa 1 (*Estimativa, Sentido do Símbolo e Funções*) do projecto de investigação *Promover a aprendizagem matemática em Números e Álgebra*, financiado pela FCT, MCTES, Portugal.

2 As resoluções apresentadas são de alunos portugueses da Escola Básica Integrada c/JI da Amareleja que frequentavam pela primeira vez o 7° ano de escolaridade e que participavam num estudo realizado por Magda Pereira (a sua professora). A metodologia de investigação foi qualitativa e interpretativa. A recolha dos dados incluiu registos escritos da professora nas aulas, resoluções e relatórios dos alunos e entrevistas.

3 Das tarefas propostas, a primeira, *O aniversário do João* (de natureza investigativa) insere-se no tema *Sequências*; a segunda, *À descoberta do valor das letras* (de natureza exploratória), insere-se no tema *Equações*; a terceira, *A torre dos ímpares* (de natureza exploratória) insere-se no tema *Sequências*; e a quarta tarefa, *Os Mealheiros* (problema) insere-se no sub tema *Resolução de Problemas Envolvendo Equações*.

Bibliografia

Caraça, B. J. (1998). *Os conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Davis, P. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11–16* (pp. 102–119). London: Murray.

Pereira, M., & Saraiva, M. J. (2005). A integração de tarefas de investigação no ensino e na aprendizagem das sucessões. *Quadrante*, 14 (2), pp. 43–69.

Ponte, J. P., Oliveira, H. & Borcardo, J. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students' Access to Significant Mathematical Ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh &D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (vol. 1, pp. 143–161). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (2005). Curriculum Development, Teaching, and Assessment. In In L. Santos, A. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Proceedings of the international meeting in honour of Paulo Abrantes Mathematics Education: paths and crossroads*, pp. 13–41. Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.

Linchevski, L. & Sfard, A. (1991). Rules without reasons as processes without object — The case of equations and inequalities. In Furenghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 317–324). Assis, Itália: PME.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (eds.), *The ideas of algebra, K–12* (1988 Yearbook, pp. 8–19). Reston, VA: NCTM.

Magda Nunes Pereira
Escola EB 2,3/S de Vilar Formoso

Manuel Joaquim Saraiva
Departamento de Matemática da UBI e CIEFCUL

Número Temático da Educação e Matemática de 2010

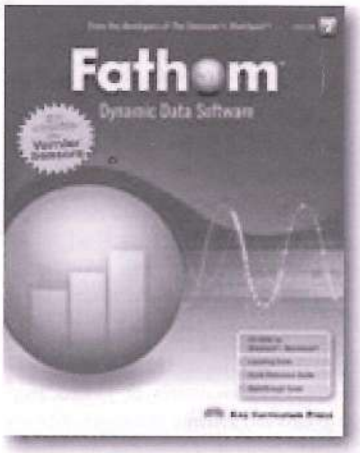
Como habitualmente o último número do ano da *Educação e matemática* será temático.

Desta vez o tema escolhido foram as conexões matemáticas. As conexões Matemáticas referidas em vários documentos, nomeadamente no *Currículo Nacional* (ME, 2001), no *Novo Programa de Matemática do Ensino Básico* (M.E., 2008) e nos *Princípios e Normas para o Ensino da Matemática* (NCTM), são potenciadoras de uma compreensão mais profunda e duradoura da Matemática.

Assim, neste número temático da E&M serão discutidos/reflectidos diferentes aspectos das conexões matemáticas, considerando as conexões com a realidade, com outras do currículo e entre diferentes tópicos matemáticos.

Aqui fica o convite a todos os interessados em escrever e/ou partilhar ideias ou reflexões sobre este tema, para que nos façam chegar os vossos contributos.

Análise de dados reais com ferramentas computacionais para Estatística



A facilidade de acesso a dados reais, veio permitir atribuir um outro significado às tarefas de Organização e Tratamento de Dados (OTD), no currículo do ensino básico e secundário de Matemática.

Por exemplo, se o objectivo é decidir criar, em Setúbal, uma empresa de desporto de lazer, um espaço polivalente de ocupação de tempos livres ou um centro de actividades de apoio a idosos, pode ter interesse aceder ao Plano de Desenvolvimento Estratégico da Península de Setúbal e conhecer dados como a população residente e a sua estrutura etária, o índice de envelhecimento, a taxa de crescimento do emprego ou a taxa de crescimento do PIB *per capita*.

Hoje encontra dados reais e actuais em diferentes sítios na Internet. A título de exemplo, refiro apenas dois que valem a pena, para além do Instituto Nacional de Estatística (INE em `www.ine.pt`) que disponibiliza todo o tipo de informação estatística, sob a forma de dados numéricos, gráficos ou indicadores, em diferentes temas como a saúde, a educação ou o comércio e serviços. Esses dados podem ser directamente importados para uma folha de cálculo ou para ‹pacotes› integrados de estatística, como o *Fathom*, de que falo adiante. Por exemplo, neste momento prepara-se o Censos 2011 que pretende realizar um recenseamento geral da população e da habitação em Portugal e existem já um conjunto de informações disponíveis.

No *site* do NCTM, em `www.standards.nctm.org`, se aceder aos exemplos relativos à análise de dados, em *Accessing and Investigating Data Using the World Wide Web* é remetido para dois sites: O Gabinete de Censos dos Estados Unidos (`www.census.gov`) e as Estatísticas do Canadá (`http://www.statcan.gc.ca/`).

No espaço do Canadá, existe uma zona especialmente dedicada a professores e alunos e há mesmo um projecto internacional que nasceu há 10 anos (*Census at School*), envolvendo alunos do 4° ao 12° ano, que permite, por exemplo, o preenchimento de questionários numa turma (com dados como a altura, tempo de deslocação de casa à escola, tema preferido, etc.) que são posteriormente adicionados a uma base de dados mundial e que lhe permite estabelecer comparações entre os dados da turma e os dados globais do país nessas variáveis.

No *site* dos Estados Unidos, pode, por exemplo, encontrar uma informação curiosa: a análise de projecções da população residente, por idade, sexo ou raça, para os próximos 40 anos. Os dados são disponibilizados em formato *xls* ou *csv*, o que permite que sejam importados posteriormente de uma folha de cálculo ou de um *package* de estatística.

Ferramentas da tecnologia para análise estatística

Para além da folha de cálculo e de alguns *applets* que já têm sido referidos nesta secção, como exemplos de ferramentas computacionais de apoio à organização e tratamento de dados estatísticos (ver a Revista *Educação Matemática* N° 106), existem no mercado vários programas que permitem apoiar estudos estatísticos mais complexos e que são usados em trabalhos académicos, como é o caso bastante divulgado do SPSS (*Statistical Package for Social Sciences*).

No entanto, fundamentalmente pela sua simplicidade, faço aqui referência a uma ferramenta computacional integrada de Estatística, lançada pela *Key Curriculum Press*, uma editora de referência que muitos conhecem pela autoria do *Geometer's Sketchpad*, uma ferramenta de Geometria Dinâmica que já vai na sua 5ª edição.

Essa ferramenta é o *Fathom* (*Fathom Dynamic Data Software*). Escolho-a por três razões essenciais: as suas enormes potencialidades pedagógicas em estudos elementares e mais avançados de estatística; o *interface* amigável que apresenta com o utilizador e a possibilidade de descarregar livremente da Internet uma versão de avaliação, válida por 60 dias, que disponibiliza todas as opções, não permitindo apenas gravar o trabalho (ver em `www.keypress.com/fathom`).

Embora ela seja também indicada com potencialidades no estudo das relações e representações algébricas, vou-me referir apenas a algumas potencialidades no domínio da organização e tratamento de dados.

O que permite o *Fathom*?

1) Importar dados de uma folha de cálculo

Com uma tabela de dados construída no *Excell* e gravada no formato *Texto (separado por tabulações)*, importe-a através de *File – Import* e ela fica sob a forma de uma *Collection*,

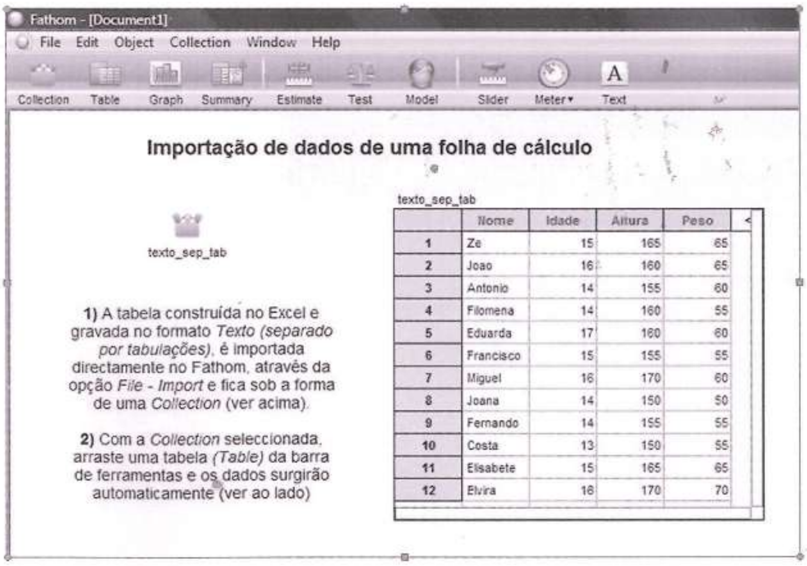


Figura 1

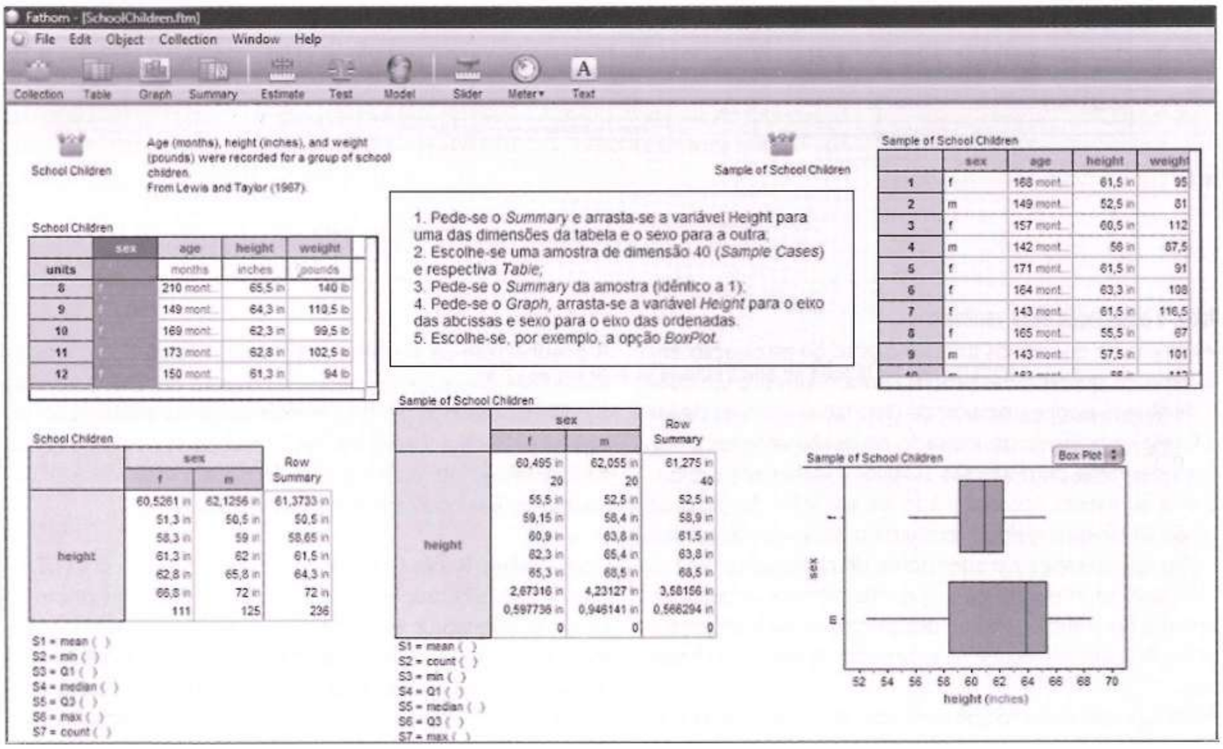


Figura 2

que corresponde à sua base de dados. Com a *Collection* seleccionada, arraste uma tabela (*Table*) da barra de ferramentas e os dados surgirão na janela de trabalho automaticamente (figura 1).

2) Seleccionar amostras e comparar variáveis

O *Fathom* permite extrair, a partir de uma população, amostras (quase) aleatórias de dimensão escolhida pelo utilizador e eventualmente obedecendo a critérios a definir e, em seguida, comparar medidas de estatística descritiva (como a média, a mediana, os quartis ou o desvio-padrão) e gráficos como histogramas ou diagramas de extremos e quartis, relativos a determinadas variáveis.

O exemplo seguinte, ilustra como, a partir da população de crianças de uma escola (*School children*), se constrói uma tabela com medidas estatísticas (em Summary), por sexo, arrastando a variável *Height* para uma das dimensões da tabela e a variável *Sex* para a outra (do lado esquerdo da figura abaixo).

Em seguida, pode extrair uma amostra de dimensão à sua escolha (em *Inspect Collection*), que surge sob a forma de uma nova *Collection* (*Sample of School Children*) e pedir para representar dois diagramas de extremos e quartis que permitam comparar a distribuição da variável altura, para ambos os sexos. Para o efeito, pede-se o gráfico (*Graph – Box Plot*), arrasta-se a variável *Height* para o eixo das abcissas e faz-se o mesmo para a variável *Sex*, agora para o eixo das ordenadas (ver diagramas na figura abaixo, do lado direito).

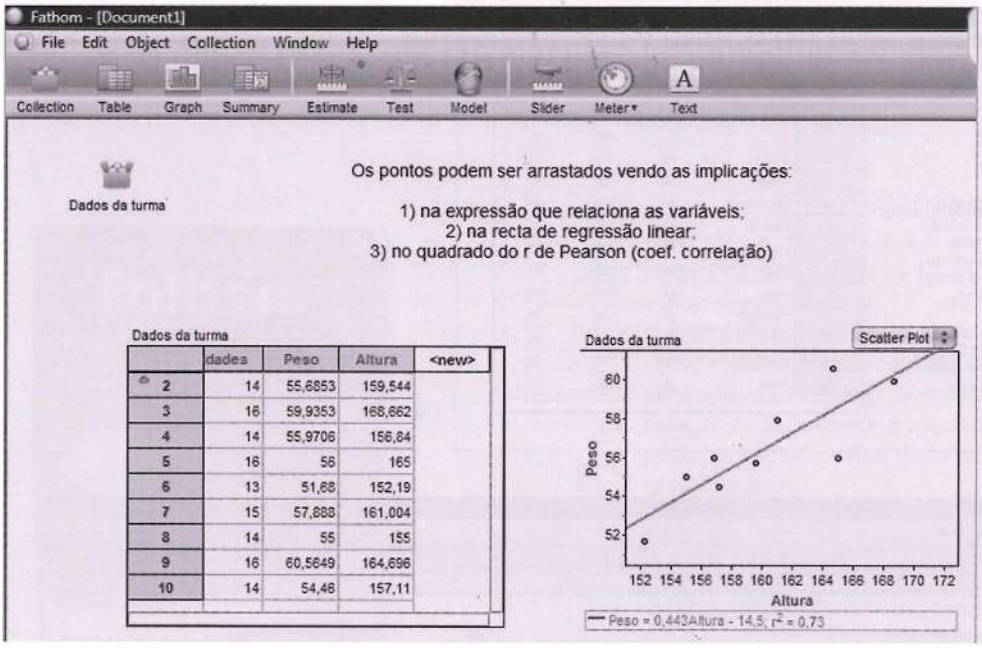


Figura 3

3] Estudar a associação entre variáveis

Por exemplo, se quisermos analisar o grau de associação entre as variáveis quantitativas peso e altura, relativas a um conjunto de alunos, podemos partir de uma tabela com os dados e, de forma semelhante ao indicado no ponto anterior, construir um diagrama de dispersão (*Graph – Scatter plot*), que o programa apresenta acompanhado da equação da recta de regressão linear, que melhor aproxima o conjunto de pontos e do cálculo do respectivo coeficiente de correlação.

Um aspecto interessante é que nos permite arrastar, directamente no gráfico, cada um dos pontos individualmente e ver as implicações na recta e na expressão da equação (figura abaixo).

Muitos outros aspectos, poderia aqui descrever para mostrar as potencialidades pedagógicas desta ferramenta e aspectos da didáctica que envolvem conceitos de OTD, como, por exemplo:

(i) assinalando uma barra de um dado gráfico de barras relativo a um conjunto de dados agrupados, na tabela ficam visíveis os respectivos valores reais que podem ser alterados de forma interactiva;

(ii) criando um gráfico com a curva da distribuição normal, podemos averiguar as alterações no mesmo, por acção directa sobre dois selectores (*Sliders*) que representam a média e o desvio-padrão.

A possibilidade de trabalhar com testes estatísticos, como os testes T de diferença de médias ou o teste do Qui-quadrado, é outra opção que permite ir mais longe na investigação de natureza quantitativa em educação, mas os tutoriais animados disponíveis no *site* do programa, fornecem mais ideias e ajudas específicas que cada professor necessite.

Como refere Robin Lock, da St. Lawrence University (USA), num artigo publicado em 2002, sob o título Using Fathom to promote interactive explorations of statistical concepts, este software «é um dos vários pacotes recentemente desenvolvidos que dá uma grande ênfase em proporcionar uma atmosfera na qual os alunos possam investigar os conceitos estatísticos. Para facilitar a aprendizagem, a premissa chave está em que todos os aspectos de uma análise estão ligados de tal forma que os alunos podem ver como as mudanças numa área se reflectem noutra. Aqueles que desenvolveram o Fathom fizeram esse esforço especial em produzir um interface intuitivo que permite aos alunos ‹arrastar e largar› para construir análises de blocos básicos de informação».

José Duarte
ESE de Setúbal

I FÓRUM DE
Jovens Investigadores
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

O evento realiza-se nos dias 2 e 3 de Julho de 2010, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, e tem como objectivo promover a reflexão e discussão dos projectos de investigação que se estão a desenvolver, no âmbito do doutoramento nas diversas áreas de especialização.

Os doutorandos do Instituto de Educação, que já tenham o seu trabalho de investigação em curso, podem apresentar o seu trabalho através de um cartaz digital. Outra modalidade de participação, assistir aos trabalhos, destina-se a todos os interessados em conhecer e discutir os referidos projectos.

Prazos a ter em conta: submissão de apresentações (resumo) de 15 de Abril a 15 de Maio; inscrições *on-line* até 1 de Junho e envio de cartaz digital até 15 de Junho.

Inscrições: `www.ie.ul.pt` `fji@ie.ul.pt`

XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática

A XIII CIAEM realiza-se no Recife (Brasil), de 26 a 30 de Junho de 2011.

Participam educadores, investigadores e especialistas em Educação Matemática. O evento aceitará trabalhos nas seguintes modalidades: comunicações orais, poster e oficinas (de 2 ou 3 horas).

As inscrições, de Agosto de 2010 a Março de 2011, poderão ser realizadas através da página oficial do evento `http://xiii.ciaem-iacme.org`.

Al-jabr: duas ou três palavras sobre o nascimento de uma nova matemática

José Dilson Beserra Cavalcanti
Marcelo Câmara dos Santos

Nesse texto buscamos discutir algumas considerações sobre a Álgebra e seus aspectos históricos. Quando se trata de discutir a história da Álgebra, é comum narrar sobre o progresso da matemática que passou por um período de desenvolvimento lento e pouco produtivo até ao momento de firmação da Álgebra que culmina com Viète e outros como Descartes nos séculos XVI e XVII.

Numa perspectiva alternativa, iniciamos pela possível origem cultural da Álgebra. Para Da Rocha Falcão (1997), a origem cultural da Álgebra seria associada a problemas de difícil resolução por meios aritméticos. Esse autor discute tal fato exemplificando com um popular caso de partilha de bens relatado pelo historiador da matemática D. Guedj (1992), e descrito a seguir:

Um homem possui uma escrava, que se torna sua amante e favorita. Um dia, esse homem morre, e aí surge um problema: se a escrava continua como tal, ela faria, de certa forma, parte da herança. Como tal deverá participar da repartição dos bens entre os herdeiros, o que não seria conveniente devida a sua condição prévia de amante do falecido. Portanto, torna-se conveniente libertá-la antes da partilha; mas assim fazendo, algum herdeiro poderá reclamar que está sendo espoliado em parte dos bens que poderiam lhe caber. Dessa forma, a própria escrava deverá se comprar. O problema agora seria: comprar-se com que dinheiro? Na condição de amante-viúva, ela teria direito a uma fração dos bens totais do falecido senhor, e seria então com essa parte que ela poderia se comprar. *Mas o total a dividir entre os herdeiros (que inclui a escrava-amante) depende do valor da escrava, que, por sua vez, depende da soma global a dividir!*

Tal situação embaraçosa de cunho jurídico-religioso seria possível de se resolver aritmeticamente? Da Rocha Falcão (1997) sugere que foram situações como essa que serviram de subsídio para um manual intitulado Al-Kitab-al-muhatasar-fi-hisab-al-d jabra-l-muqabala [O livro da concatenação (al-d jabra) e do equilíbrio (al-muqabala)]. Esse livro escrito pelo matemático Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi[1] por volta do século IX é considerado o primeiro manual de Álgebra árabe (Rashed, 1984; Dhombres *et al.*, 1987 *apud* Da Rocha Falcão, 1997).

O termo ‹Álgebra›, estranhamente, parece que não possui etimologicamente, uma tradução literal, como por exemplo acontece com o termo ‹aritmética›, que deriva do grego ‹arithmos›. Comumente quando buscamos pesquisar sobre a história da Álgebra encontramos que a palavra ‹Álgebra› tem origem árabe. Para Baumgart (1992) ‹Álgebra› seria uma variante latina da palavra árabe Al-Jabr. O tratado de Álgebra de al Khowarizmi teria sido traduzido para o latim com título *Liber algebrae et almucabala*, portanto Álgebra deriva da tradução latina de Al-Jabr.

Como já mencionámos anteriormente, a palavra Álgebra não possui etimologicamente uma tradução literal do que ela significa, mas parece bastante utilizada por alguns autores sua tradução como «Ciência da Reunião» ou da «Restauração« (*cf.* Brito Menezes, 2006).

Em relação ao desenvolvimento histórico da Álgebra como ciência, o que se encontra comumente nos manuais de história da matemática é o caráter lento do progresso da Álgebra e a periodização habitualmente definida pelos termos «Álgebra retórica», «Álgebra sincopada» e «Álgebra simbólica».

Nesse sentido, Luis Puig (1998) discute sobre essas três etapas de desenvolvimento da Álgebra. Uma etapa primitiva da Álgebra seria a da Álgebra retórica, já que os textos são escritos na linguagem vernácula da época paleobabilônica (entre 2000 e 1600 a.C.). No Egito, aproximadamente 1600 anos antes de Cristo, temos a obra conhecida como o *Papiro de Ahmes*[2]. Os problemas expressos nesse papiro dizem respeito a assuntos cotidianos dos antigos egípcios, como o preço do pão, a alimentação do gado, entre outros contextos (Teles, 2002).

Alguns problemas também tratam dos próprios números, como por exemplo, «um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Diga-me: qual é a quantidade?». Como percebemos, o número procurado ou desconhecido, foi representado pela palavra ‹montão›, o que era comum com problemas desse tipo.

Outra etapa, data aproximadamente de 400 anos antes de Cristo, na Grécia. A «Álgebra sincopada» (termo idealizado por Nesselman em 1842 apud, PUIG, 1998), seria representada pela Aritmética de Diofanto, caracterizada pelos escritos em vernáculo, porém com alguns termos técnicos escritos na forma de abreviaturas.

Ainda na Grécia, aproximadamente em 300 a.C, Euclides de Alexandria em sua obra ‹Os Elementos› dedicou dois (o livro II e o V) dos trezes livros da obra à Álgebra. Na Álgebra de Euclides, as quantidades desconhecidas eram comumente representadas por figuras geométricas. (Boyer, 1974 *apud* Teles, 2002). Conforme Puig (1998), em 1886, Hieronimus Georg Zeuthen teve a idéia de qualificar o livro II de «Álgebra geométrica».

A partir desse momento, o progresso da Álgebra seguiu a passos lentos, e só muito tempo depois é que os matemáticos passaram a substituir as palavras por letras e sinais simbólicos. Por último, surge assim, a «Álgebra simbólica» que culmina com os matemáticos Viète e Descartes nos séculos XVI e XVII. Viète introduziu o uso sistemático de letras para representar valores desconhecidos. Descartes aperfeiçoou e efetivou a Álgebra simbólica, criando a notação atual. Essa Álgebra é caracterizada assim, pela representação totalmente simbólica das equações, a exemplo de como conhecemos nos dias atuais.

Não seria elegante não ressaltarmos também os feitos dos ingleses Robert Record e Thomas Harriot contemporâneos de Viète. O primeiro contribuiu para a consolidação da Álgebra de diversas formas. Foi ele quem criou o símbolo para a igualdade como conhecemos hoje (=, dois traços paralelos e horizontais). O segundo por sua vez, criou os símbolos para desigualdades e foi o responsável por eliminar algumas palavras que restavam nos trabalhos de Viète.

Conforme Teles (2002), até ao século XVII, a Álgebra era uma generalização da aritmética. Já no século XIX ela se estenderia a elementos além dos números e operações. A teoria dos grupos, devida em parte a Gauss e, sobretudo, a Galois, marca a chamada Álgebra ‹moderna›. Na segunda metade do século XIX, o estudo principal da Álgebra eram as estruturas algébricas abstratas. Kjummer contribui com a teoria dos corpos e Dedekind com a noção de ideal de um anel. Ao final do século XIX, a Álgebra teria diversas aplicações, como por exemplo em análise, em geometria, em mecânica, em física teórica (Chambadal, 1978).

O que seria a Álgebra hoje? Definir stricto sensu o que é Álgebra não é uma tarefa fácil e nem tampouco concordante entre os vários pesquisadores. De uma maneira bastante interessante, Lee (1996) propõe que a Álgebra deve ser entendida como uma mini-cultura na cultura da Matemática. Se considerarmos as aplicações atuais da Álgebra e seu desenvolvimento histórico, podemos dizer que ela se configura como um significativo campo da ciência Matemática enquanto objeto de estudo em si e, numa perspectiva pragmática, a Álgebra também seria como um instrumento potencial para o estudo e desenvolvimento de outras ciências e das tecnologias.

Notas

1 A palavra *algarismo* seria originada em homenagem ao nome desse matemático.

2 Escrito por um escriba chamado Aahmesu, mais conhecido por Ahmes. O Papiro de Ahmes está guardado atualmente no Museu Britânico. O Papiro tem uma dimensão de 5,5 metros de comprimento por 32 centímetros de largura, e contém oitenta problemas, todos resolvidos. Para ver problemas desse papiro acesse: `http://www.malhatlantica.pt/mathis/Egipto/Rhind/Rhind.htm`

Referências

Baumgart, J. K. *Álgebra*. Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual, 1992.

Boyer. C. B. *História da matemática*. São Paulo-SP: Edgar Blucher, 1974.

Brito Menezes, A. P. *Contrato didático e transposição didática: inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à Álgebra na 6ª série do ensino fundamental*. Tese de doutorado não publicada. Doutorado em Educação. Recife: UFPE, 2006.

Da Rocha Falcão, J.T. (1997). A Álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. Em: Schliemann, A.D. e outros (1997). *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1997. pp. 85–107.

Dhombres, J., Dahan-Dalmedico, A., Bkouche, R., Houzec, C., & Guillemot, M. Mathématiques au fil des âges. Paris: Gauthier-Villars, 1987.

Guedj, D. *Sur les rives du sign égal* (Que nous raconte la naissance de l algèbre?). Libération, 1992. 32 p.

Lee, L. An initiation into algebraic culture through generalization activities. In: Bednarz, N.; Kieran,C. & Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives of Recearch and Teaching*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. pp. 87–106.

Ponte, J. P. Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Numéros e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Caminha: SEM-SPCE, 2006. pp. 5–27.

Puig, L. *Componentes de una historia del Álgebra*. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En Hitt, ed. Investigaciones en Matemática Educativa II. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica, 1998 pp. 109–131 (Versión ligeramente modificada en 2003).

Rashed, R. *Entre l'arithmétique et l'algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Paris: les Belles Lettres, 1984.

Teles, R.A.M. *A relação entre aritmética e Álgebra na matemática escolar: um estudo sobre a influência da compreensão das propriedades da igualdade e do conceito de operações inversas com números racionais na resolução de equações polinomiais do 1.° grau*. Dissertação de Mestrado não publicada. Recife: UFPE, 2002.

José Dilson Beserra Cavalcanti
UFRPE/UFPE/FADE/Liceu-UNICAP

Marcelo Câmara dos Santos
UFPE/Cap-UFPR/SBEM

A Matemática nos Primeiros Anos — XIII Encontro Nacional

Helena Amaral, Pedro Almeida

As semanas da Páscoa aproximavam-se e não havia sinais do esperado *Encontro Nacional de Professores — A Matemática nos Primeiros Anos*. Alguns professores mais atentos telefonavam para a sede da APM a perguntar a razão de não haver informação na página. Sentia-se a falta! E foi já nas semanas do 2° período que se anunciou o encontro para um único dia, um sábado, 24 de Abril, na Escola Secundária Josefa de Óbidos, em Lisboa.

Tal como em todos os outros, a realização deste encontro foi uma aventura, provavelmente pelas razões de sempre: a pouca disponibilidade que os afazeres do quotidiano da escola nos deixam. Mas a vontade de manter vivos os espaços de partilha e de reflexão da prática docente continua a vencer as contrariedades.

Foi um encontro em formato reduzido, que suscitou alguns «soube a pouco» no final. No entanto, o ambiente acolhedor e o envolvimento dos participantes possibilitou uma experiência semelhante à dos anos anteriores.

Pela manhã, um painel de professores de quatro agrupamentos da região de Lisboa deu testemunho das formas como a gestão curricular, no que respeita a planificação e avaliação, está a ser posta em prática. As diferentes experiências evidenciaram o maior ou menor impacto que o facto de estar a ser experimentado o novo programa tem tido na organização das escolas e nas formas dos professores se organizarem para concretizarem na prática os desafios do PMEB. Realçou-se a necessidade de um maior encontro entre todos os professores, uma maior partilha de planificações, tarefas e a reflexão em torno do que acontece efectivamente na sala de aula. O facto dos professores envolvidos nas diferentes experiências terem frequentado o Programa de Formação Contínua de Professores, foi referido como um contributo relevante, a par de outros espaços e tempos de encontro entre os professores, e de como estes constituem um desafio que depende da vontade dos professores e seu esforço pessoal, sacrificando tempo da vida privada.

Nos locais onde a experiência decorre pelo segundo ano, percebeu-se que a estruturação de rotinas e estratégias de planificação suportam o trabalho do professor de forma efectiva. Apesar de referidas as dificuldades de iniciar um novo percurso, perceberam-se as vantagens de ter uma base de planificação e como é compensador e interessante ter uma prática partilhada e reflectida em conjunto.

As três conferências temáticas que se seguiram abordaram questões como as conexões de temas dentro e fora da Matemática numa perspectiva prática, o desenvolvimento do sentido do número no que respeita à selecção de tarefas e a comunicação matemática como forma de desenvolvimento do raciocínio a partir da resolução de problemas (*Conexões matemáticas num projecto de natureza interdisciplinar; desenvolver o sentido do número — práticas do professor; resolver problemas, raciocinar e comunicar para aprender Matemática: contornos e desafios*). Em todas as abordagens as questões relativas ao ambiente de sala de aula e ao papel dos professor assumiram especial relevo. As conferências foram sustentadas por experiências de sala de aula, de diferentes anos de escolaridade e problematizaram a construção de ambientes de aprendizagem significativos, quer pela selecção das tarefas propostas, quer pela metodologia de organização da aula que conduza a fazer emergir e apoiar um discurso matemático favorável à compreensão de ideias matemáticas fundamentais e suas relações. Abordando os desafios que se colocam aos professores na praxis de aulas deste tipo realçou-se sempre o envolvimento dos alunos em actividades que lhes permitissem a fundamentação de raciocínios e a formulação, avaliação e testagem de conjecturas, em que a procura e pesquisa adquirem um lugar de destaque.

No período da tarde, o encontro desenvolveu-se em seis sessões práticas. *Geometria e Visualização* permitiu experimentar um conjunto de tarefas sobre figuras geométricas, dando especial ênfase à visualização para além de problematizar o desenvolvimento de raciocínios geométricos, sem descuidar os conhecimentos de geometria. A geometria também foi abordada num ambiente de Geometria dinâmica — o Geogebra. A partir da exploração de tarefas passíveis de serem implementadas numa aula de 1° ciclo, apresentaram-se as potencialidades da utilização de um programa deste tipo no que refere a visualização e propriedades de figuras geométricas no plano, na sessão *Uma visão dinâmica da Geometria oferecida pelo Geogebra. Um caso a pensar?*

Resolução de Problemas envolvendo números racionais foi o título dado a uma sessão onde para além dos conceitos matemáticos se visou a construção de tarefas significativas para a compreensão das operações com números racionais, sem esquecer as capacidades transversais e a atenção à explicitação dos raciocínios dos alunos. Outros aspectos inovadores no PNEB como a organização e tratamento de dados, a iniciação ao pensamento algébrico e o cálculo mental foram explorados em outras três sessões — *O que necessitamos saber «de matemática» para ensinar Otd: discussão e reflexão sobre um conjunto de tarefas; O desenvolvimento de ideias algébricas nos primeiros anos de escolaridade; Cálculo mental: o que é?*

No fim de um dia de trabalho intenso, quem nos visitou a meio do dia «não encontrou ninguém nos corredores», encerrámos com uma visão geral organizada a partir de imagens recolhidas e agradecemos à escola que nos recebeu. Com os costumeiros lamentos de que «não houve tempo para ver tudo o que se queria» e o sentimento de que «foi pouco» despedimo-nos até aos próximos encontros.

Helena Amaral, EB1 Parque Silva Porto
Pedro Almeida, ESE de Lisboa

O Tangram e o computador em contexto de jardim de infância

Ana Coelho de Paiva Pico

Com este texto, procuramos dar conta de um projecto realizado numa sala de jardim de infância, no domínio da Matemática, em redor do jogo manipulativo e do jogo informático Tangram.

Durante um ano lectivo, implementámos na nossa sala o projecto educativo de sala Viver a Matemática, através do qual pretendíamos iluminar e valorizar a Matemática. Encarando a aprendizagem como um processo contínuo e transformador, pretendi dar continuidade ao trabalho desenvolvido nos anos anteriores. Deste modo, parti dos conhecimentos adquiridos pelo grupo para aprofundar conhecimentos do domínio da matemática assim como para trabalharmos «ferramentas» de compreensão e raciocínio.

O projecto da sala Viver a Matemática ia ao encontro das necessidades específicas das crianças de 5/6 anos, nomeadamente no que diz respeito a uma preparação mais activa e direccionada, tendo em vista a entrada para o 1º ciclo. Foi implementada na sala de actividades uma área específica, designada o «Cantinho da Matemática».

Decorrente deste projecto de sala surgiu a ideia de realizar experimentação de materiais: o Tangram. Sentimos a necessidade de valorizar este jogo, na sua versão manipulativa e no computador. Apostar na rentabilização deste recurso pedagógico parece pertinente para proporcionar um ambiente mais estimulante para o treino da resolução de problemas no domínio da matemática. Aliás, as *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* preconizam que «Inscrevendo-se no quotidiano da educação pré-escolar, a aprendizagem da matemática implica que: O educador proporcione experiências diversificadas e apoie a reflexão das crianças, colocando questões que lhes permitam ir construindo noções matemáticas.» (p.74).

Já conhecido na China, por volta do século VII a. C., como as «Sete Táboas da Astúcia», o Tangram é um jogo figurativo, do qual se desconhece o autor e a antiguidade.

O Tangram é um jogo interessante a nível das aprendizagens da geometria e das noções espaciais, ajudando a desenvolver o raciocínio lógico-matemático. Constitui um recurso pedagógico, que pode ajudar as crianças a realizarem aprendizagens ao nível da geometria, e exercitar a orientação espacial.

O Tangram exige paciência e planeamento, convida a criança a colocar formas diferentes juntas trabalhando em simultâneo noções de geometria e pensamento lógico. A experiência do jogo no computador é por si só impulsionador de curiosidade e de uma aprendizagem autónoma, que é fundamental no desenvolvimento das crianças.

O educador enquanto agente no domínio da matemática

A investigação existente sugere que as crianças constroem activamente entendimentos matemáticos ao interagirem com o ambiente físico e social que as rodeia e ao reflectirem sobre essas experiências.

Na verdade, as *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* assinalam que «O papel da matemática na estruturação do pensamento, as suas funções na vida corrente e a sua importância para aprendizagens futuras, determina a atenção que lhe deve ser dada na educação pré-escolar, cujo quotidiano oferece múltiplas possibilidades de aprendizagens matemáticas.» (p.73).

Como educadora de infância devo ter presente a ideia de que a forma como transmito as noções matemáticas às crianças poderá condicionar todo um percurso de futuro. A educadora necessita ter presente as noções básicas da matemática, dos diferentes processos de aprendizagem e deverá ser capaz de adequar as actividades e os métodos às diferentes faixas etárias.

A idade em que as crianças se encontram requer uma aprendizagem global, interessa possibilitar à criança uma aprendizagem informal dos conceitos matemáticos, numa perspectiva globalizante. A educadora terá que ter em consideração também as necessidades específicas de cada criança e a valorização das suas capacidades. Encorajar e encaminhar por meio de perguntas, perguntas estas que apelem ao raciocínio; não dar resposta aos problemas, mas sim conduzir o esforço da resolução, são atitudes esperadas. Se a criança não conseguir resolver o problema, deve-se dar outra oportunidade, simplificando o mesmo para que desenvolva a capacidade de resolver problemas.

A educadora deverá também procurar uma postura o mais isenta e objectiva possível, de forma a providenciar um maior leque de aprendizagens a desenvolver.

A criança movimenta-se num mundo de formas e padrões, em relação ao qual forma ideias geométricas que ajudam a representá-lo e a descrevê-lo. É muito importante que a aprendizagem se faça partindo do seu conhecimento informal, com base na manipulação e na experimentação. A compreensão dos objectos e das relações em função dos contextos de espaço e tempo não se ensina, surge a partir de experiências da própria criança. Estas experiências têm de ser acompanhadas pelo adulto, que as ajuda num contexto de aprendizagem cooperativa, na construção e organização das relações espaciais nos objectos.

As crianças de 3 a 6 anos de idade têm uma compreensão das formas baseada nas experiências vividas. Partindo destas, a função como educadora é ajudar a reconhecer figuras permitindo a exploração de materiais variados com formas bidimensionais e tridimensionais, materiais esses que podem ser: rolos de papel, garrafas de água, copos de iogurte, caixas de sapatos, caixas de ovos, botões, pratos descartáveis... Com um ambiente apropriado, as crianças são encorajadas a observar e a descrever características diferentes e formas geométricas, que constituem cada elemento do seu quotidiano.

De facto, as *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* enfatizam que «A utilização de diferentes materiais dá à criança oportunidade para resolver problemas lógicos, quantitativos e espaciais.» (p. 75).

Por outro lado, Spodek (2002) refere que os computadores na educação atingem objectivos para além das aprendizagens curriculares e que os educadores têm que investir mais do que simplesmente aprender a trabalhar com eles. Os computadores só por si depressa perdem o encanto, são os educadores que desafiam as crianças com actividades estimulantes, provocam neles o interesse redobrado, descobrem motivações e, por vezes, educador e crianças aprendem juntos. Quando se aprende matemática através do computador vai-se forçosamente adquirindo conhecimentos informáticos, que incluem novos hábitos e novas perspectivas relativamente ao modo como se aprende.

As crianças aprendem coisas diferentes sempre que substituirmos o esforço solitário de papel e lápis pela utilização de material diversificado, podendo assim discutir ideias com os colegas de grupo. Elas aprendem relacionando-se uns com os outros e explicitando o seu raciocínio. Na aprendizagem da matemática usando os computadores é essencial o facto da criança ser personagem activa do seu processo de aprendizagem, aprendendo a descobrir e a desenvolver o gosto pelos processos matemáticos.

Dependendo do *software* utilizado, as crianças gostam de estar em grupo à volta do computador conversando sobre o que fazem e os alunos que têm computador para apoiar as suas aprendizagens desenvolvem comportamentos de independência e autonomia, nomeadamente por descobrirem e corrigirem os seus próprios erros (Spodek, 2002). A flexibilidade das representações e animações constituem ambientes de aprendizagem com significado para as crianças, que facilmente entendem e manobram os ícones dos ecrãs. Podemos observar que teclar ou clicar no computador é algo que a maioria das crianças pequenas faz com naturalidade e satisfação, experimentam e observam o ecrã, voltam a clicar e descobrem desta forma o que fazer de novo.

Metodologia e descrição da experiência

Esta experiência teve origem na observação do grupo de crianças da sala, durante alguns dias, através da qual percebemos o entusiasmo geral pelo computador que, após algumas reparações, tinha voltado a animar a sala e, em simultâneo, o desinteresse quase completo pelo jogo Tangram magnético, que tinha sido adquirido há poucos dias. O jogo vinha pouco apelativo dentro da sua caixa, sem nada que o valorizasse e algumas figuras vinham em versão minúscula num cartão sem cor. Perante esta realidade surgiu a preocupação de equilibrar os interesses das crianças.

As actividades a desenvolver com o Tangram e o computador foram pensadas para um grupo de 25 crianças, com idades compreendidas entre os 5 e os 6 anos. Tratavam-se de crianças que convivem entre si desde os 3 anos de idade e eram acompanhadas igualmente pela mesma equipa de adultos. O grupo era constituído por 12 rapazes sendo os restantes elementos de sexo feminino. Neste grupo não estavam incluídas crianças estrangeiras nem crianças com necessidades específicas de educação.

Para este projecto centrei o meu estudo apenas sobre quatro destas crianças, observando o seu desempenho perante o material que lhes propunha e registando as informações que elas me foram transmitindo.

Através da observação directa e da observação participada procurei informações sobre a forma como as crianças identificavam, comparavam e relacionavam no espaço as formas geométricas aplicando-as ao computador e se consideravam mais estimulante o jogo Tangram no computador ou no quadro magnético, utilizando as peças magnéticas.

As observações foram feitas durante o mês de Junho e as crianças que participaram foram voluntárias para... « jogar o jogo novo.» Conhecedora das rotinas do grupo, decidi aproveitar os dias de natação para realizar todas as minhas observações. Às quartas-feiras, o grupo dividia-se e parte saía para a natação, ficando um pequeno grupo comigo dentro da sala. O ambiente da sala era manifestamente mais calmo e permitia maior concentração. Das quatro crianças que foram observadas apenas uma não tinha computador em casa.

O computador faz parte do dia a dia das crianças na sala, pois contactam com ele como com qualquer outro material aí existente. A zona do computador está à disposição das crianças como qualquer outra área da sala e as regras de utilização são de todos conhecidas. Esta área é utilizada pelas crianças, quer individualmente quer em grupos de pares.

No início, a apresentação do Tangram no computador revelou-se como um novo jogo. As crianças procuraram interpretar a imagem que aparece no monitor construída pelas formas geométricas, trabalhando a coordenação visual-motora em conjunto com a imaginação.

« — Que formas são estas?» — perguntei.

«— Parece um castelo, este é só triângulos...» — diz a Miriam
« — Isto são casas feitas com triângulos e quadrados.»

Outras crianças rodeiam o computador e iniciam uma conversa: «— Olha lá isto tudo. O que parece isto?» Procuram interpretar a imagem. «— Isso muda logo...» Referindo-se ao facto do jogo, após a conclusão de uma imagem apresentar automaticamente outra para ser resolvida.

O entusiasmo foi crescente. A relação espacial entre as figuras geométricas fez-se sem grande dificuldade e as cores das peças permitiam fazer variações em relação à primeira vez que o jogo foi concretizado. Após o almoço, a Miriam quis continuar a fazer o Tangram no computador. À medida que realizava o jogo foi falando comigo:

«— Não consigo encaixar este, como é?» « — Este aqui está difícil... se calhar não é aqui... Ah! já descobri.»

«— Este parece um avião ou um foguetão...»

Quando termina o primeiro grupo de imagens a Miriam pede para repetir o jogo.

Noutra imagem a Miriam comenta: «— Eu antes pus os verdes primeiro, e agora pus os roxos.»

Noutro momento, as crianças verificaram que o Tangram informático inclui maior número de peças e com tamanhos diferentes que permitem realizar mais imagens, tornando assim o Tangram material manipulativo limitado aos olhos dos mais pequenos.

A Margarida sentou-se ao computador e iniciou o jogo, fazendo com rapidez as primeiras imagens e tecendo algumas comparações:

«— Isto parece uma coroa!»

«— Isto parece uma pulseira!»

A certa altura a Miriam pergunta: «— Como se chama este jogo?»

«— Eu sei o nome do jogo mas queria que vocês pensassem um bocadinho e procurassem algum jogo parecido com este cá na sala.» — respondi. Depois de olharem à volta não conseguiram encontrar nenhum jogo parecido. «— Este jogo é o Tangram, só que no computador. Vai lá buscar o quadro magnético e vais ver se é ou não parecido.»

A Miriam regressou para perto do computador com o quadro magnético e o jogo, mas reclamou: «— Mas, estàs peças são todas amarelas não são iguais às do computador...!»

	Aspectos de Desenvolvimento						
	Coordenação visual e motora	Percepção figura fundo	Constância perceptual	Discriminação visual	Percepção da posição no espaço	Percepção de relações espaciais	Memória visual
Margarida	MB	MB	MB	MB	B	B	MB
Miriam	B	S	MB	MB	S	B	B
João	B	B	MB	S	B	S	B
Pedro	B	M	MB	M	M	M	B

MB — muito bom; B — bom; S — suficiente; M — mau

Tabela 1

Noutra situação, a Margarida e a Miriam discutiram para se sentarem ao computador. Fui obrigada a intervir, a Margarida sentou-se ao computador, convenci a Miriam a ir buscar o Tangram magnético e desafiei-a a fazer as mesmas imagens do computador.

A primeira imagem foi conseguida e a segunda também, mas na terceira imagem a Miriam reclamou:

«— Mas eu não tenho quatro triângulos desse tamanho...!» A situação repete-se com a outras imagens onde existe mais um quadrado do que no jogo real. Assim o jogo perde todo o interesse e desmotiva a Miriam.

Procurámos então outro grau de dificuldade no Tangram informático, tentando assim explorar este material ao máximo e passámos a jogar com os puzzles de nível médio. Surgiram novos problemas, que levaram a uma aprendizagem em conjunto, visto que não estamos isolados e na sala qualquer criança pode intervir na solução dos mesmos. A necessidade de rodar e trabalhar as peças antes de as conseguir encaixar correctamente no puzzle ajudou as crianças na percepção da posição no espaço, mas a dificuldade apareceu desta vez ligada ao próprio computador. Como se faz rodar as peças no computador? A resolução deste problema levou-nos à descoberta de uma nova tecla no computador, que até aqui não era muito utilizada.

A Margarida começa a realizar o Tangram no nível médio:

«— Isto parece um dragão ou um cisne... como rodamos as peças? Este triângulo não cabe assim...!»

Pois é, alguém pode ajudar aqui a Margarida? Quem sabe como se faz para rodar o triângulo?

Várias crianças se aproximaram na tentativa de ajudar. O João ao fim de algum tempo diz que sabe e carrega no botão do lado direito do rato e declara:

«— O meu pai ensinou-me no jogo lá de casa.»

«— O teu pai tem um jogo igual?» — perguntei

«— Não, é do lixo com formas geométricas.»

Noutra situação, o João e o Pedro sentaram-se ao computador. O Pedro iniciou o jogo onde o João o tinha deixado. Ao fim de algum tempo reparei que o Pedro resolveu os puzzles muito depressa.

«— Então, estás a gostar de jogar com o Tangram?» — perguntei

«— Há uns difíceis e outros fáceis... estes triângulos grandes, eu não sei como ficam aqui.» Perante a dificuldade passa de imediato para a imagem seguinte sem fazer o esforço de concluir a anterior.

«— Não podes fazer isso... Tens que tentar encontrar uma solução. Vá lá eu ajudo, tira lá daí os triângulos.

Procurei explicar ao Pedro que não deveria deixar os puzzles por resolver e que deveria pedir ajuda na resolução dos mesmos. A interajuda entre as crianças é muito importante para a sua formação socioafectiva, pela criação de um espírito solidário e por uma aprendizagem em grupo na resolução de problemas.

No dia seguinte, o João e o Pedro decidiram fazer o jogo em conjunto. Disse-lhes que podiam jogar, mas não podiam passar à frente nos puzzles, que tivessem dificuldade. No entanto, percebi que as dificuldades eram muitas e que acabariam por se desmotivar do jogo, em virtude de eu também não os conseguir acompanhar devido às solicitações do resto do grupo. Assim numa das vezes que pediram ajuda fui até ao computador e eles explicaram:

«— Parece a chaminé e uma casa.»— diz o João

«— A chaminé é muito grande, o triângulo e o quadrado fazem a chaminé...mas não consigo por esta... (losango)» disse o Pedro.

«— Então vou-lhes ensinar um truque, vamos às soluções, olham com muita atenção e depois tentam fazer sozinhos. Repararam como estavam as peças, agora façam a imagem de novo.»

Na procura da resolução de um problema acabámos por encontrar nas soluções do jogo um bom trabalho de memória visual e a utilização das mesmas foi importante para a motivação das crianças e ajudou-os a concluir os puzzles.

A introdução do Tangram no computador permitiu observar os aspectos apontados por Del Grande (apud Barros e Palhares, 1997) e formular assim uma grelha de registo de cada criança, como a que apresento na tabela 1.

Com esta grelha consegui aferir o grau de desenvolvimento do sentido espacial de cada criança que participou na experiência. Apesar do seu percurso de aprendizagem estar ligado à mesma equipa de trabalho e pelo mesmo tempo, cada um, como indivíduo único, desenvolveu de forma diferente a sua aprendizagem.

Conclusão

Trabalhar a matemática no jardim-de-infância é valorizar algo intrínseco à própria criança e deverá ser estimulado igualmente de forma natural e com prazer, deixando que seja a própria a colocar e a resolver as suas questões. Sabendo que as crianças têm um caminho a percorrer, que têm aquisições no domínio da matemática que deverão mais cedo ou mais tarde atingir, o meu papel é o de guiar, deixando-as fazer por si, aconselhando sempre que necessário, colocando as questões e providenciando os materiais adequados que as ajudarão na construção do seu próprio pensamento. Na verdade, as *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar* preconizam que «Cabe ao educador partir das situações do quotidiano para apoiar o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático, intencionalizando momentos de consolidação e sistematização das noções matemáticas.» (p. 73).

A frequência do curso de complemento de formação e este estudo que realizei nesse âmbito conduziram a uma reflexão profissional e quebraram barreiras relativamente à utilização de instrumentos como o computador. Tornou-se mais claro a importância do mesmo na educação de infância e a sua utilização revelou-se fundamental para a motivação das crianças relativamente ao Tangram.

Comparando os dois tipos de jogos, percebi que o jogo manipulativo perde interesse relativamente ao jogo informático. Este apresenta mais cores, maior quantidade de sugestões de puzzles, maior número de peças intervenientes e ainda a mais valia de ser informático e ser jogado, por isso, no computador.

O jogo manipulativo é, neste caso concreto, magnético, o que inicialmente ajuda na sua exploração, mas tem apenas sete peças fazendo justiça à ideia original tornando-o porém limitado a nível da criatividade. O facto das peças serem todas da mesma cor (amarelo) também se revelou um obstáculo para motivação das crianças, se lhe adicionarmos as sugestões de puzzle em versão minúscula, facilmente conseguimos deduzir por qual as crianças irão demonstrar interesse.

No entanto, penso que o jogo manipulativo apresenta a vantagem de ser real e não virtual, pelo que as peças a três dimensões permitem um conhecimento táctil das formas geométricas e um reconhecimento das arestas e dos ângulos.

A ligação entre o Tangram material manipulativo e o Tangram material informático foi estabelecida naturalmente através da curiosidade inerente às crianças, no entanto, o primeiro perdeu interesse em relação ao segundo.

Penso igualmente que consegui alguma autonomia nas crianças perante o jogo e perante o computador.

Não pretendo com este estudo afastar nenhum dos jogos da minha prática pedagógica, uma vez que considero o Tangram um jogo fundamental na aprendizagem de várias noções geométricas e do sentido espacial. A prestação de serviço em vários jardins de infância permitiu-me ter conhecimento de realidades diferentes, onde nem sempre a situação financeira possibilita a existência de um computador na sala, por isso, o jogo manipulativo revela-se menos dispendioso e o jogo informático ficará como um devaneio da educadora na requisição de material.

O meu objectivo inicial era motivar as crianças para o jogo manipulativo, através do computador e do jogo informático, mas o jogo informático sobrepôs-se ao outro e não me permitiu atingir esse objectivo. No entanto, após esta experiência, considero que fiquei preparada para de futuro enriquecer o jogo manipulativo. Poderei procurar aumentar o número de peças adquirindo mais do que um jogo e, por outro lado, aproveitando as ideias fornecidas pelo jogo informático, realizar em papel ou cartolina outras sugestões de puzzles mais incentivadoras da sua utilização.

As educadoras de infância vêem nos computadores uma oportunidade de mudar actividades, tornando-as mais ricas e mais criativas, mas outras há que se sentem inseguras com estas tecnologias, especialmente devido à escassa formação oferecida na área específica do papel educativo das novas tecnologias na educação pré-escolar. As experiências educativas neste nível etário são pouco divulgadas o que não aumenta o entusiasmo. Assim, as educadoras de infância deverão procurar a auto-formação e a actualização pedagógica e científica, através de projectos da Internet e de outros meios que eventualmente possam dispor.

Referências bibliográficas

Barros, M. e Palhares, P. *Emergência da Matemática no Jardim de infância*. Porto: Porto Editora, 1997.

Estrela, A. *Teoria e prática de observação de classes: uma estratégia de formação de professores*. Porto: Porto Editora, 1990.

Moreira, D. e Oliveira, I. *Iniciação à Matemática no Jardim de Infância*. Universidade Aberta, 2003.

Silva, M. e Núcleo de Educação Pré-Escolar. *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica, Gabinete para a Expansão e Desenvolvimento da Educação Pré-Escolar, 1997.

Spodek, B. *Manual de investigação em Educação de Infância*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.

Ana Coelho de Paiva Pico
Centro Social e Paroquial Nª. Srª. da Anunciada
Jardim de Infância «O Peixinho», Setúbal

Os novos manuais escolares estão aí. E agora?

Os novos manuais escolares de Matemática estão aí. Aos poucos foram sendo divulgados e distribuídos aos professores de todos os ciclos e por todo o país.

Não é necessária uma análise muito aprofundada para nos apercebemos da variabilidade que revelam a nível da sintonia com as orientações expressas pelo novo programa de Matemática do ensino básico, cujo ensino e/ou aprendizagem supostamente tomam como referência. Na realidade, alguns correspondem a documentos em que é bastante difícil ou mesmo impossível identificar as ideias-chave do novo programa, não se vislumbrando qualquer preocupação consistente com o desenvolvimento do sentido de número e da fluência das operações, com a literacia estatística, o pensamento algébrico, o sentido espacial, nem com as conexões entre os temas do programa. E isto apesar de serem certificados por entidades que deveriam, como está regulamentado, não só garantir a sua qualidade científica e pedagógica, mas também «assegurar a sua conformidade com o Currículo Nacional e com os programas e orientações curriculares em vigor e atestar que constituem instrumento adequado de apoio ao ensino e à aprendizagem e à promoção do sucesso educativo».

Sabemos que um manual escolar é apenas um documento e corresponde às interpretações que o seu autor faz do programa oficial, mediado pelas suas visões particulares acerca do ensino e aprendizagem da Matemática — e não é o próprio programa. Sabemos também que as aprendizagens matemáticas propostas pelo novo programa ultrapassam em muito o que um manual escolar pode conter e que, portanto, este nunca poderá ser «completo» — sendo da responsabilidade e oportunidade do professor a concretização de aspectos essenciais através da experiência matemática que promove aos seus alunos. Assim, podemos relativizá-lo, e assumir que o manual escolar não será decisivo para as aprendizagens matemáticas dos alunos.

No entanto, sabemos que o manual escolar é um recurso curricular que muitos professores utilizam para preparar as suas práticas lectivas e que a tradição de «dar aulas pelo manual» é forte no nosso país — apesar de se reconhecer que o manual não é um conjunto de guiões de aulas. Sabemos também que o manual escolar é um instrumento por que muitos professores ansiaram este ano e, em alguns casos, até já começaram a usar as versões candidatas a adopção disponibilizadas pelas editoras — apesar de centenas de profissionais terem em 2009/10 leccionado na ausência de manual, apoiados por outros materiais de qualidade que muitos exploraram sozinhos ou em colaboração com os seus colegas, e que permitiram proporcionar excelentes aprendizagens aos alunos. Assim, não podemos ignorá-lo, e há que assumir que o manual poderá ter uma forte influência naquilo que muitos professores vão ensinar.

A escolha do manual está aí. Como vão os professores escolher o novo manual escolar? Como farão a análise de conteúdo dos manuais com vista à sua comparação e selecção? Que critérios vão adoptar nesta selecção?

Irão privilegiar o manual da editora a que estão habituados e do qual conhecem já o estilo?

Irão privilegiar o manual que mais serve à continuidade das suas práticas de ensino da Matemática e lhe proporciona maior conforto?

Irão privilegiar o manual que mais se adequa ao novo programa de Matemática e contribui para o desenvolvimento das suas principais ideias-chave?

Pense nisto!

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora

APM — 2010

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2010

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `http://www.apm.pt`

Assinaturas das revistas para 2010

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

01 O outro lado da Lua
Fernando Nunes

Artigos

03 Qual é o maior produto
Ana Caseiro

08 Que resposta dar à Carolina?
Notas para o Ensino da Geometria
Eduardo Veloso

12 A Matemática Recreativa e o estabelecimento de Conexões Matemáticas
Paulo Afonso

18 Problemas sem solução
Uma pequena investigação sobre o problema de Collatz
Rui Feiteira

28 A escrita simbólica de uma generalização
Magda Nunes Pereira, Manuel Joaquim Saraiva

40 Al-jabr: duas ou três palavras sobre o nascimento de uma nova matemática
José Dilson Beserra Cavalcanti, Marcelo Câmara dos Santos

42 A Matemática nos Primeiros Anos — XIII Encontro Nacional
Helena Amaral, Pedro Almeida

43 O Tangram e o computador em contexto de jardim de infância
Ana Coelho de Paiva Pico

Secções

24 O problema deste número *José Paulo Viana*
A hora dos biscoitos

36 Tecnologias na educação matemática *José Duarte*
Análise de dados reais com ferramentas computacionais para Estatística

25 Materiais para a aula de Matemática
Problemas com ângulos que variam

26 Pontos de vista, reacções e ideias ...
Notações geométricas em debate, *Sónia Figueirinhas*
Em Matemática não se avalia só o produto final..., *Anabela Oliveira*

48 Pense Nisto
Os novos manuais escolares estão aí. E agora?, *Ana Paula Canavarro*

39 Encontros