Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática

Periodicidade ∞ 5 números por ano

2010

106

Janeiro ∞ Fevereiro

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António M. Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Fevereiro 2010
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Torreana, Indústria e Comunicação Gráfica, S. A.
Fonte Santa, Paúl
2530–250 Torres Vedras

Depósito Legal n° 72011/93
Registo no ICS n° 124051
ISSN 0871-7222

Porte Pago

Sobre a capa

Questões do tipo «o que é ‹A›?» frequentemente dão origem a respostas do tipo «o que ‹A› não pode ser». Nessa situação podemos encontrar os casos em que «A» é «verdade matemática» ou «número» mas, também poderíamos facilmente encontrar «educação matemática».

A capa deste número tenta descrever metaforicamente algo que a educação matemática não pode ser — um estéril fluxo de informação.

(Em si mesma, a imagem da capa resulta de uma colagem de diversas capas de livros, tendo com ponto de partida o quadro *Gespenst eines Genies* [O fantasma de um génio] da autoria de Paul Klee.)

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

António Guerreiro, Carlos Miguel Ribeiro, Cláudia Canha Nunes, Clicia Valladares Peixoto Friedman, Eduardo Veloso, Eulália Pereira, Filomena Baptista Soares, Hélia Pinto, José Alverto Gonçalves, José Avelino Carmo, Lino Gago, Lurdes Serrazina, Maria da Conceição de Sousa Cipriano dos Santos, Maria Paula Sousa Nunes, Ricardo Ferreira, Rui Feiteira, Samuel Jurkiewicz.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, N° 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Editorial

Liderança no contexto escolar

Cláudia Canha Nunes

A escola tem sido palco de mudança educacional, em particular, no que se refere ao ensino da Matemática. Neste quadro, as actuais orientações curriculares para o ensino desta disciplina tornam mais exigente o trabalho dos professores e requerem uma mudança efectiva. Este processo exige, no entanto, «uma intervenção simultânea e articulada ao nível do desenvolvimento profissional dos professores, dos processos de gestão curricular e do desenvolvimento da cultura e organização escolares e dos processos de liderança[1]. É sobre a organização e cultura escolar e processos de liderança que daremos particular atenção.

Na escola, este tema tem sido tabu, predominando a ideia que é preferível viver sem líderes e sem liderança. Porém, os próprios professores são chamados a agir como líderes pedagógicos transformadores, tendo a responsabilidade de contribuir para que se estabeleça uma esfera comunitária de diálogo crítico e reflexivo envolvendo a participação continuada dos diferentes actores educativos, nomeadamente, os alunos e os encarregados de educação.

A escola é uma estrutura complexa com micro estruturas que é preciso compreender para que seja possível promover o desenvolvimento da liderança e do contexto de actuação do professor. A generalização do novo programa de Matemática do Ensino Básico coloca, presentemente às escolas e aos seus professores, o desafio da sua capacidade de se organizarem, definirem os seus percursos de aprendizagem, quer por ciclo quer por nível de escolaridade, desenvolverem práticas inovadoras e enfrentarem os problemas que vão surgindo. Enfrentar estes desafios passa, necessariamente, pela capacidade de gerar dinâmicas de trabalho colaborativo entre os professores e haver uma capacidade de liderança.

Nos últimos anos tem vindo a crescer o entendimento da importância da liderança como processo catalisador da mudança educacional, ao mesmo tempo que se reconhece que os papéis de liderança são fundamentais no desenvolvimento da cultura da escola. No actual processo de mudança no ensino da Matemática do ensino básico, é fundamental que as escolas sejam capazes de identificar professores capazes de coordenar cada um dos ciclos de ensino. Neste sentido, o coordenador é o professor que tem que ser capaz de trilhar um caminho, articulando esforços e energias de um grupo alargado de professores, com vista à concretização das actuais orientações curriculares. Igualmente, o compromisso que assume exige o desenvolvimento de capacidades e um espírito empreendedor e investigativo, capaz de arrastar os seus pares, assegurando a qualidade e desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem. Porém, este trabalho também só será bem sucedido se forem criadas redes de colaboração entre professores dos diferentes ciclos dando ênfase especial à integração curricular, à articulação entre ciclos, à partilha de experiências e à promoção do desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores.

Este dispositivo é complexo e requer no grupo disciplinar líderes com visão e capacidade de gerar oportunidades de trabalho articulado como elemento facilitador de suporte mútuo e de reflexão, envolvendo processos de planificação flexíveis e partilhados, apoiado numa comunicação fluida. Incluem, igualmente, a gestão efectiva de informação e a operacionalização de procedimentos e recursos focando alvos e objectivos. Além disso, a direcção da escola deve ter conhecimento e capacidade para acompanhar as reformas curriculares em Matemática, proporcionando no horário dos professores espaços para que estes se reúnam, partilhem e reflictam sobre as suas práticas.

Hoje e de forma inadiável é fundamental assumir a necessidade de lideranças fortes, que sejam capazes de conduzir práticas inovadoras, como também de criar uma nova dinâmica de funcionamento das escolas, a começar pelos grupos disciplinares.

Nota

1 Este tema foi alvo de reflexão do terceiro ciclo de estudos do GTI — Grupo de Trabalho de Investigação da APM do qual resultou a publicação em 2008 do livro O *professor de Matemática e os projectos de escola.*

Cláudia Canha Nunes
Escola EB 2/3 Fernando Pessoa, Lisboa

Primeiros passos no pensamento combinatório

Uma experiência na sala de aula do 1.º ano de escolaridade

Eulália Pereira, Lino Gago, António Guerreiro

A estruturação do pensamento matemático dos alunos deve realizar-se preferencialmente a partir de diversas actividades que resultam do entendimento da Matemática como a ciência dos padrões. Neste sentido, o trabalho matemático começa por um olhar de identificação, seguindo-se-lhe uma estratégia de estruturação da realidade com vista à criação de padrões abstractos representativos da realidade.

Foi com este objectivo que tentámos desenvolver o pensamento combinatório em alunos de duas turmas do 1.º ano da Escola Básica do 1.º Ciclo D. Francisca de Aragão, em Quarteira. Através de um conjunto de tarefas matemáticas envolvendo pintura e localização, os alunos encontraram diferentes modos de agrupar ou localizar objectos. Ao longo destas actividades, os alunos começaram por usar uma estratégia elementar de tentativa e erro, na busca de soluções diferentes, evoluindo para a utilização de maneiras sistemáticas de proceder na identificação das soluções do problema proposto.

Alguns aspectos metodológicos

As tarefas, da responsabilidade dos professores (co-autores deste artigo), foram propostas a todos os alunos das duas turmas do 1.º ano de escolaridade, desde o início do ano lectivo. As aulas foram gravadas em vídeo e posteriormente visualizadas e comentadas pelos docentes e pelo investigador (co-autor do artigo). Apresentamos algumas das tarefas desenvolvidas nas salas de aula, exemplificadas com o desempenho particular de alunos de ambas as turmas.

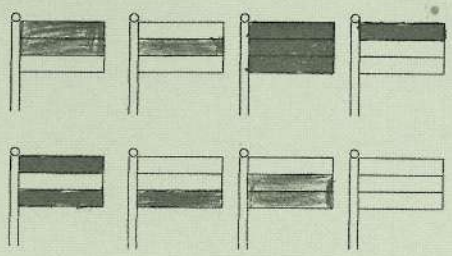


Figura 1

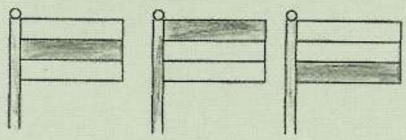


Figura 2.

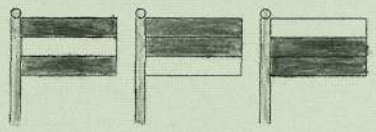


Figura 3.

Pintura de bandeiras e primeiros passos no pensamento combinatório

A primeira tarefa proposta aos alunos, envolvendo o pensamento combinatório, consistiu na pintura de listas em bandeiras, com três listas horizontais, utilizando apenas uma cor. A explicação da tarefa aos alunos foi exemplificada com a pintura de duas das bandeiras possíveis (uma com as duas listas superiores pintadas e outra com a lista central pintada).
Na fase da apresentação e discussão da tarefa, uma aluna perguntou ao professor:

Aluna: Podemos pintar as três riscas?

Professor: Acham que podem pintar as três riscas?

Alunos: Não.

Professor: Por que é que não podem pintar as três riscas?

Alunos: Sim [numa lógica de contrariar a opinião anterior].

Professor: Não é uma maneira diferente de pintar a bandeira?

Alunos: – É, sim.

Apesar da pouca autonomia dos alunos na construção de significados matemáticos, a questão introduzida pela aluna veio desencadear uma clarificação sobre o trabalho a desenvolver. Os alunos começaram por reproduzir as duas bandeiras exemplificadas e posteriormente iniciaram a pintura de novas bandeiras. Estas foram surgindo por comparação com as anteriores, por tentativa e erro (figura 1).

Apesar de a generalidade das construções não recorrer a uma sistematização, em alguns casos os alunos já apresentaram maneiras sistemáticas de proceder à identificação das bandeiras (figura 2).

Nesta situação, a aluna Inês sistematiza a pintura das bandeiras em relação a uma das listas horizontais, começando pela exemplificada na proposta de actividade.

Noutra situação, o aluno Rui sistematiza a pintura das bandeiras em relação a duas listas horizontais, começando pela pintura da primeira e da terceira (figura 3).

Na aula da professora, surgiu a situação da bandeira com as três listas por pintar, introduzida por um aluno que a denominou «a bandeira do nada». Após terem representado no quadro todas as outras sete soluções, a professora perguntou à turma se tinham encontrado mais alguma. O aluno Tiago disse que faltava uma:

Professora: O Tiago disse que falta uma, qual é a que falta?

Tiago: Falta o nada.

Professora: O nada, o que é o nada?

Tiago: Falta aí uma não pintada.

Professora: Concordam com ele?

Alunos: Não.

Professora: Então, explica lá aos teus colegas por que é que pensaste assim.

Tiago: É porque aqui não está nenhuma pintada, estão todas pintadas…

Professora: Sim…

Tiago: Mas não há nenhuma que não esteja pintada.

A professora ajudou o Tiago a clarificar a situação da bandeira com as três listas por pintar e dialogou com os alunos com vista à assumpção desta bandeira como uma das hipóteses. Questionados pela professora sobre o modo como podiam identificar essa bandeira, os alunos sugeriram a pintura dos mastros das bandeiras.

Desenvolvimento do pensamento combinatório

Após esta primeira tarefa, os alunos foram sistematizando as maneiras de representar as diferentes soluções. Um dos desafios propostos aos alunos, sensivelmente duas semanas depois, consistiu ainda na pintura de bandeiras, mas desta vez com quatro listas horizontais.

Nesta situação, a aluna Nicole começa por pintar as quatro listas, depois três listas, que esgota, apenas intervalada com uma bandeira com duas listas pintadas, segue para todas as situações com uma lista e termina com mais algumas situações de duas listas pintadas (figura 4).

Sensivelmente um mês depois da realização da primeira tarefa, os professores apresentaram aos alunos o desafio da pintura de folhas de um trevo de quatro folhas. Nesta situação, o aluno Rui já apresenta uma clara opção pela organização sistemática das soluções, revelando igualmente o desenvolvimento do pensamento combinatório (figura 5).

Nestas duas tarefas, os alunos organizaram de forma sistemática as soluções, complementadas depois pela apresen-

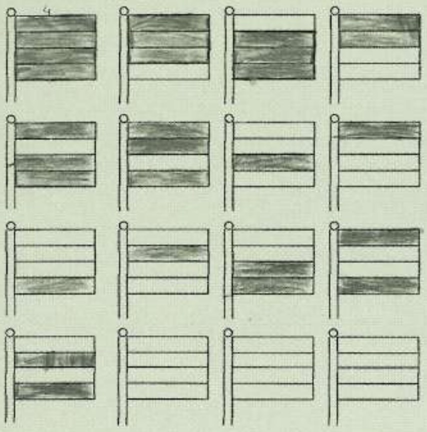


Figura 4.

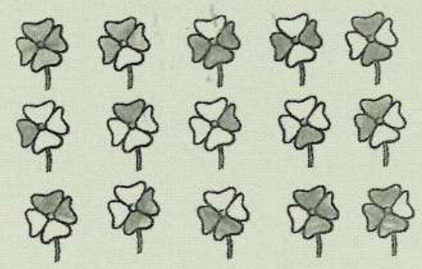


Figura 5.

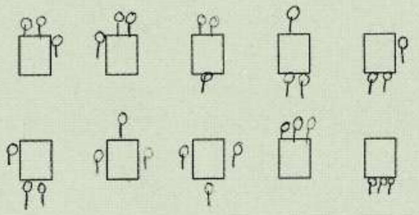


Figura 6.

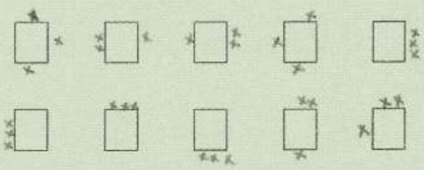


Figura 7.

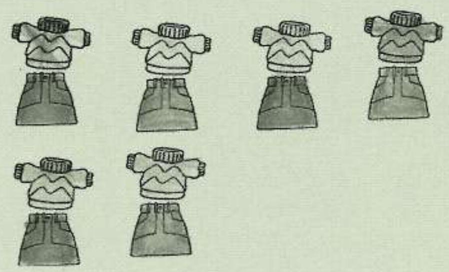


Figura 8.

tação ao grupo turma no quadro, revelando um acréscimo significativo na capacidade de organizarem os dados.

Mais tarde, foi proposta aos alunos uma tarefa sobre as diferentes possibilidades de localização de três árvores em torno das paredes de uma escola de base rectangular. Nesta situação, na turma da professora, foi necessário discutir com os alunos se podíamos ou não colocar árvores frente à porta da escola. A decisão de colocar árvores em relação a todas as paredes da escola foi assumida colectivamente, após algumas argumentações.

Nas resoluções dos alunos é já notória a intencionalidade matemática de organização sistemática da localização das árvores. Os alunos adoptaram simbologias diferentes em cada uma das turmas para representar as árvores em torno do rectângulo representativo da escola (figura 6).

Nesta resolução, a Inês optou por iniciar a representação com as situações de duas árvores num dos lados e uma árvore noutro lado. Na sequência de soluções existe alguma «simetria» entre cada duas consecutivas. Esta aluna, que na situação inicial das bandeiras de três listas já tinha apresentado em sequência a pintura de uma lista, mostra neste trabalho um relevante domínio das diferentes possibilidades de localização das árvores.

Na apresentação e discussão da resolução da tarefa em grupo turma, os alunos começaram por representar todas as situações de duas árvores junto a uma parede e a restante junto a outra parede. De seguida, representaram em sequência as três árvores separadas, uma em cada lado, e, finalmente, as três árvores juntas em relação a cada uma das paredes da escola.

Uma aluna da outra turma, a Taíssa, apresenta igualmente um bom domínio sobre a sequência lógica da localização das três árvores, aqui mais significativa na situação das três árvores localizadas do mesmo lado (figura 7).

Neste caso, parece existir de igual modo alguma associação simétrica na sequência das soluções, a esquerda alterna com a direita e o fundo alterna com a frente. Nesta turma, na apresentação ao grupo turma, no quadro, os alunos começaram por representar as quatro hipóteses de três árvores em cada lado da casa, seguindo as situações de duas árvores num lado da casa e uma noutro e finalizando com as três árvores separadas.

Nesta tarefa, um número significativo de alunos, em cada um das turmas, apresentou sequências organizadas sistematicamente da localização das árvores. Os alunos já começavam a apresentar alguns argumentos para explicarem as diferentes sequências.

Multiplicação no sentido combinatório

Ao longo do ano lectivo, os professores trabalharam também com os seus alunos do 1.º ano, situações de multiplicação no sentido combinatório, apoiados na pintura de gravuras. Um dos desafios inicialmente propostos aos alunos consistiu na combinação de três camisolas com duas saias – «A Roupa da Rita».

Os professores começaram por explicar a tarefa, introduzindo a situação com a pintura de três camisolas em cores diferentes e duas saias igualmente em cores distintas. Após esta representação das peças de vestuário da Rita, questionaram os alunos sobre o número de maneiras diferentes de a Rita usar as roupas.

O aluno Rui apresentou as suas soluções, formando um padrão na distribuição das camisolas e na distribuição das saias (figura 8).

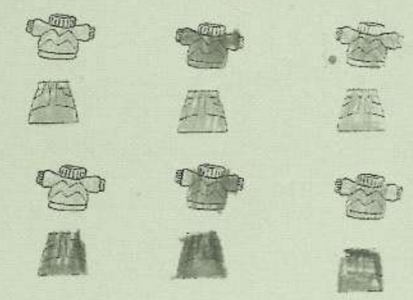


Figura 9.

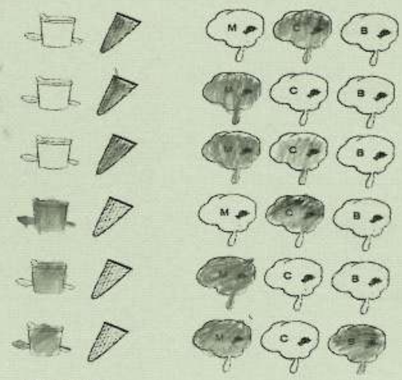


Figura 10.

Figura 11.

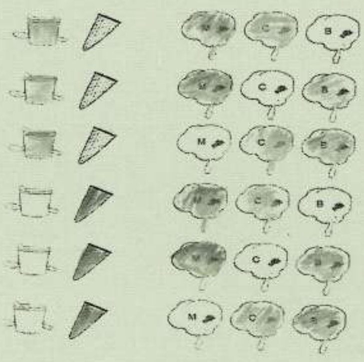
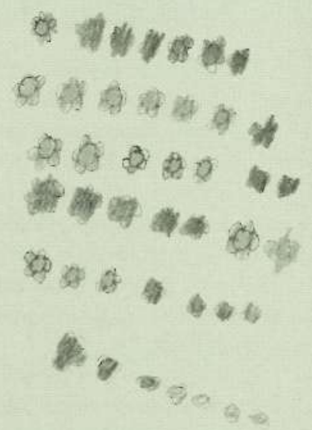


Figura 12.



A aluna Taíssa apresenta as suas soluções fixando as saias e fazendo variar as blusas, segundo um mesmo padrão (figura 9).

Em ambos os casos, os alunos revelam uma significativa abordagem matemática da representação das situações de combinação entre as camisolas e as saias. Este tipo de resoluções apareceu de modo bastante relevante nas resoluções dos alunos do 1.° ano das duas turmas envolvidas no estudo.

Numa outra tarefa semelhante, a combinação entre o recipiente do gelado — copo ou cone — e dois de três sabores — morango, chocolate e baunilha —, os alunos das duas turmas apresentaram as diferentes combinações entre o recipiente e os dois sabores.

Alguns alunos demonstraram um importante domínio na estruturação das situações possíveis. A aluna Inês, da turma do professor, fixou o cone e fez combinar dois sabores em três possíveis, depois fixou o copo e repetiu as combinações de sabores anteriores (figura 10).

De igual modo, na outra turma, a aluna Taíssa começou por fixar o copo e combinar dois dos três sabores, seguindo-se a fixação do cone com a repetição dos sabores (figura 11).

Os exemplos apresentados referem-se a algumas das produções mais significativas dos alunos e demonstram a possibilidade de estruturação do pensamento combinatório a partir dos primeiros anos de escolaridade, neste caso em duas turmas do primeiro ano.

Este tipo de trabalho levou os alunos a organizarem os dados, mesmo em relação a outro tipo de situações, com coerência e relevância matemática. Como exemplo desta forma estruturada de organização, apresenta-se um trabalho da aluna Taíssa, que se refere às diferentes possibilidades de combinar sete flores amarelas e vermelhas (figura 12).

Nesta organização, é importante referir a existência explícita da propriedade comutativa da adição entre o número de flores amarelas e o número de flores vermelhas em cada duas combinações consecutivas.

Algumas notas finais

A sucessão de tarefas eventualmente promotoras do pensamento combinatório revelou um acréscimo significativo no sentido matemático da organização e apresentação de dados. Os alunos foram progressivamente estruturando e justificando as soluções apresentadas numa perspectiva de padrão organizacional das combinações de cores, sabores ou localização de elementos.

Estas produções dos alunos revelam também algumas conexões entre a estruturação do pensamento combinatório com o conceito de simetria e de comutatividade da adição. Estas conexões revelam-nos outras possibilidades de trabalho futuro e de desenvolvimento destas mesmas tarefas.

Eulália Pereira e Lino Gago
Escola Básica do 1.° Ciclo D. Francisca de Aragão, Quarteira
António Guerreiro
Escola Superior de Educação, Universidade do Algarve

Tesourinhos nada deprimentes!

Multiplicações Divertidas

Filomena Baptista Soares
Maria Paula Sousa Nunes

Neste pequeno texto pretende relembrar-se alguns «truques» conhecidos, e muitas vezes esquecidos, que permitem frequentemente criar um ambiente positivo e animado, quando se trabalha a Multiplicação e as tão famosas «tabuadas». Apresentam-se dois casos distintos, apesar de terem como base uma manipulação «digital» similar: a tabuada dos nove e multiplicações com factores maiores do que cinco.

Não será necessária uma grande formalidade histórico-científica para que possamos afirmar, sem receios, que um dos factores determinantes para desenvolvimento do sistema de numeração decimal foi o facto do Homem possuir nas suas mãos (e nos seus pés) dez dedos, que facilmente se manipulam (encolhem-se, esticam-se, juntam-se e afastam-se ligeiramente) e que, por si só, podem representar, qualquer número (entre 1 e 10).

Foram, e são (se pensarmos nas nossas crianças), estes dez dedos que ensinaram a contar indefinidamente e a alargar a noção de número, sendo mesmo possível conjecturar que, sem estes dez dedos, o desenvolvimento do «número», tal como hoje o conhecemos, teria sido diferente.

Um caso muito especial — A Tabuada do 9

Quem não conhece os mais variados truques para obter rapidamente a famosa «Tabuada dos Nove»? A simetria e o padrão, que surge no seu desenvolvimento, são tão próprias que não existe paralelo. É frequente os alunos conhecerem o seu rápido preenchimento escrito, iniciando o movimento de cima para baixo, preenchendo os algarismos das dezenas (da esquerda) com os numerais de «0» a «9» e completando, com o movimento ascendente, os algarismos das unidades (à direita) com os mesmos numerais de «0» a «9»:

1	×	9	=	0	9
2	×	9	=	1	8
3	×	9	=	2	7
4	×	9	=	3	6
5	×	9	=	4	5
6	×	9	=	5	4
7	×	9	=	6	3
8	×	9	=	7	2
9	×	9	=	8	1
10	×	9	=	9	0

Note-se que, esta particularidade se deve ao facto de ao multiplicar 9 por um qualquer número «N», inteiro entre 1 e 10, se tem:

$$N \times 9 = \underbrace{(\mathbf{N-1})}_{\textbf{Dezenas}} \times 10 + \underbrace{(\mathbf{10-N})}_{\textbf{Unidades}} \qquad (1)$$

Assim, qualquer linha da tabela apresentada é da «forma»:

N	×	9	=	N – 1	10 – N

O resultado apresentado em (1) é, também, a justificação formal de um outro «truque» conhecido, para obter a tabuada dos nove, recorrendo apenas aos 10 dedos das duas mãos:

Tabuada dos Nove Digital

Colocando as duas mãos abertas, com os 10 dedos esticados (ver figura 1), é muito fácil obter sem utilizar qualquer outro recurso, todos os resultados da tabuada dos nove.

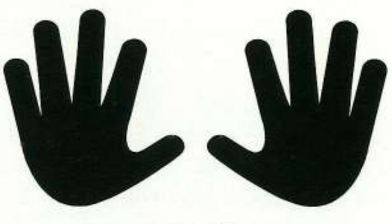


Figura 1

Para tal bastará escolher qual dos números entre 1 e 10 se pretende multiplicar por 9, e proceder como se exemplifica seguidamente.

Exemplo: **4** × 9

Para obter o produto de **4** por 9 basta «baixar» o 4.° dedo (passo 1), contando da esquerda para a direita, e ler, «numericamente», o resultado mostrado pelos dedos (passo 2):

Passo 1

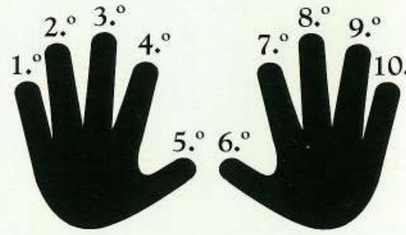


Figura 2

Figura 3

Passo 2

O resultado pode ser lido do seguinte modo: à esquerda do dedo baixado, o número de dedos levantados representam as dezenas (3, neste exemplo) e à direita, o número de dedos levantados representam as unidades (6, neste exemplo).

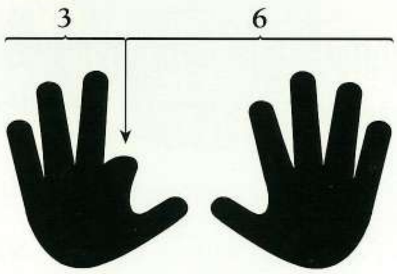


Figura 4

Isto é, tal como se lê da esquerda para a direita: o algarismo (número de dedos levantados à esquerda do «factor») das dezenas à esquerda e o das unidades (número de dedos levantados) à direita.

Não será difícil verificar que funciona para qualquer multiplicador, inclusive para o 1 e o 10, desde que se interprete a ausência de dedos (à esquerda e à direita) como o «zero».

Pode, ainda, acrescentar-se à figura 4, o resultado referido em 1:

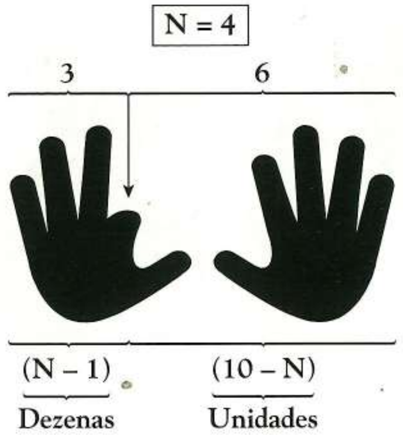


Figura 5

Uma multiplicação diferente - Tabuada só com «metade»

O «método» aqui apresentado é um processo muito curioso que recorre aos «dedos» das mãos para efectuar multiplicações entre factores superiores a 5.

Segundo o que consta, este método era usado, não tão longinquamente quanto se possa pensar, pelos camponeses de Auvergne[1] — França [1], que, conhecendo bem a tabuada até «à dos 5», utilizavam os dedos para multiplicar números compreendidos entre 5 e 10.

Mais uma vez, a «técnica» utilizada recorre ao «baixar» um certo número de dedos mas, neste caso, nas duas mãos. O resultado da multiplicação pretendida não é uma simples leitura directa, como no anterior, é necessário operar de forma distinta o número de dedos que «se baixaram» e o número de dedos que se mantêm «erguidos».

O procedimento pode ser separado em quatro passos:

Passo 1 Baixam-se, em cada uma das mãos, a diferença entre cada um dos factores e 5.

Passo 2 Contam-se o número dedos baixado nas duas mãos e multiplica-se essa soma por 10, isto é, o número de dedos baixados representam dezenas.

Passo 3 Seguidamente, multiplicam-se o número de dedos levantados em cada mão (este resultado representará «unidades» do produto final).

Passo 4 O resultado da multiplicação, isto é, o produto pretendido, é a soma dos resultados obtidos nos passos 2 e 3.

Vejamos o exemplo da multiplicação de 8 por 7:

Exemplo: 8 × 7

Passo 1
Numa das mãos, baixam-se tantos dedos quantas unidades o 8 passa de 5, portanto baixam-se 3 dedos.

Figura 6

Na outra mão, baixam-se tantos dedos quantas unidades o 7 passa de 5, portanto baixam-se 2 dedos.

Figura 7

Passo 2
Adiciona-se o número de dedos baixados, exprimindo a soma em dezenas. Neste caso temos 3 + 2 = 5 dezenas, isto é, 50 unidades.

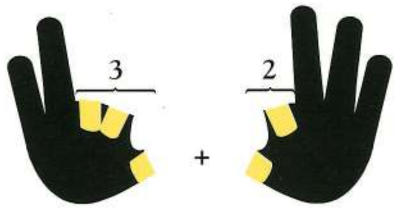


Figura 8

Passo 3
Multiplica-se o número de dedos que ficaram erguidos em cada mão: 2 × 3 = 6 unidades.

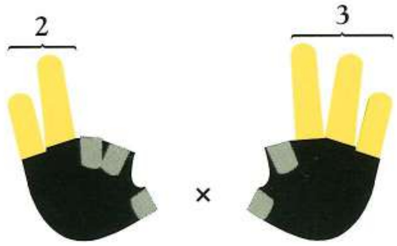


Figura 9

Para se obter o resultado final, adicionam-se os valores encontrados: 50 + 6 = 56.

O resultado não poderia ser outro... 8 × 7 = 56!

Este procedimento pode ser resumido no «esquema» da Figura 10.

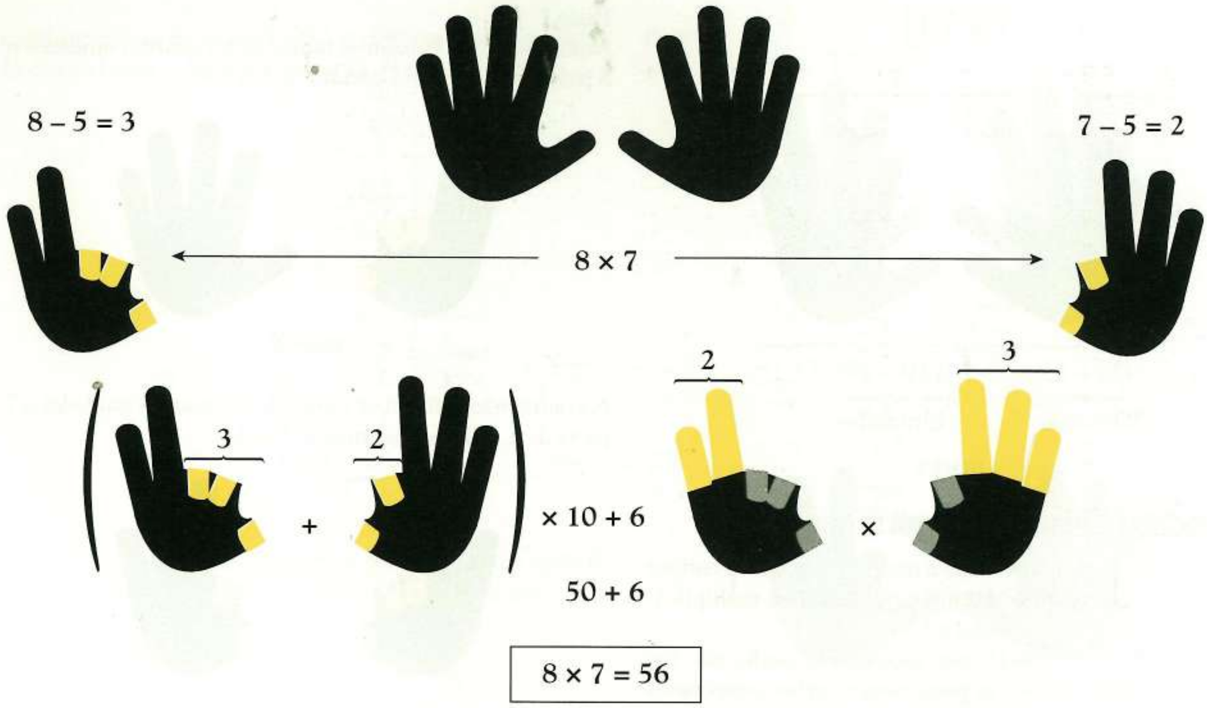


Figura 10

Embora, actualmente, este procedimento possa não ser prático, ele é, sem dúvida, curioso e válido para a multiplicação de quaisquer dois factores entre 5 e 10, inclusive, desde que se interprete, a ausência de dedos como um «zero».

Justificação Formal

Pretende-se multiplicar dois quaisquer números, X e Y, onde X e Y são naturais entre 5 e 10, conhecendo unicamente a tabuada até à dos cinco.

Considerando $X = x + 5$ e $Y = y + 5$, onde x e y são os dedos que se baixam em cada mão. Deste modo, $5 - x$ e $5 - y$, são os dedos que ficam levantados em cada mão.

O método apresentado consiste em se multiplicar por 10, a soma dos dedos que estão para baixo e, posteriormente adicionar-se o produto dos que ficam levantados, ou seja:

$$\begin{aligned} &10(x + y) + (5 - x)(5 - y) = \\ &\qquad = 10x + 10y + 25 - 5y - 5x + xy = \\ &\qquad = xy + 5x + 5y + 25 \end{aligned}$$

Ora, o produto que se pretende obter é:

$$X{\cdot}Y = (x + 5)(y + 5) = xy + 5x + 5y + 25$$

Daqui se pode concluir a veracidade do método e escrever-se:

$$X{\cdot}Y = (x + 5)(y + 5) = 10(x + y) + (5 - x)(5 - y)$$

As mãos e os números

Tal como se referiu no início deste pequeno texto, as mãos estão na génese e desenvolvimento do nosso sistema de numeração e são várias as referências aos «dedos» intimamente relacionadas com os «números».

Apenas como curiosidade, pode referir-se uma imagem obtida em [1] e reproduzida na figura 11, retirada de um manual do século XVI, onde se podem visualizar a representação de números (de 1 a 9000) com os dedos da mão esquerda (de 1 a 90) e da mão direita (de 100 a 9000).

De um modo similar, também se encontram representações «digitais» de números na base binária como é ilustrado pela figura 12, obtida em [2].

Não se poderia terminar sem fazer referência ao trabalho apresentado por Stella Baruk que propõe a utilização da representação das mãos e dos seus 5 «deditos» como um ponto de partida para a aprendizagem das operações no seu livro «*Comptes pour petits et grands : pour un apprentissage des opérations, des calculs, et des problèmes, fondé sur la langue et le sens*» de 2003.

As mãos com os seus dez dedos, tão importantes para todas as tarefas manuais, desempenham um papel fundamental, mas nem sempre referido, no nosso sistema numérico designado por *decimal*, não por acaso.

Hoje, com todos os algoritmos bem definidos e perante a acessibilidade quase imediata aos mais variados auxiliares de cálculo (desde o simples papel e lápis às máquinas de calcular), o recurso aos dedos das mãos (durante muitos anos,

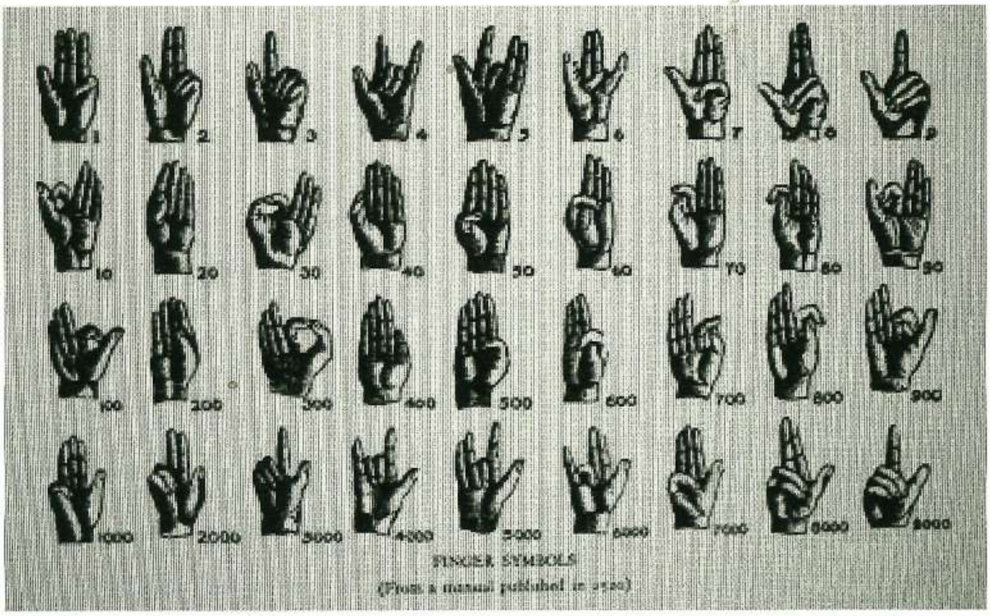


Figura 11. Símbolos «digitais»

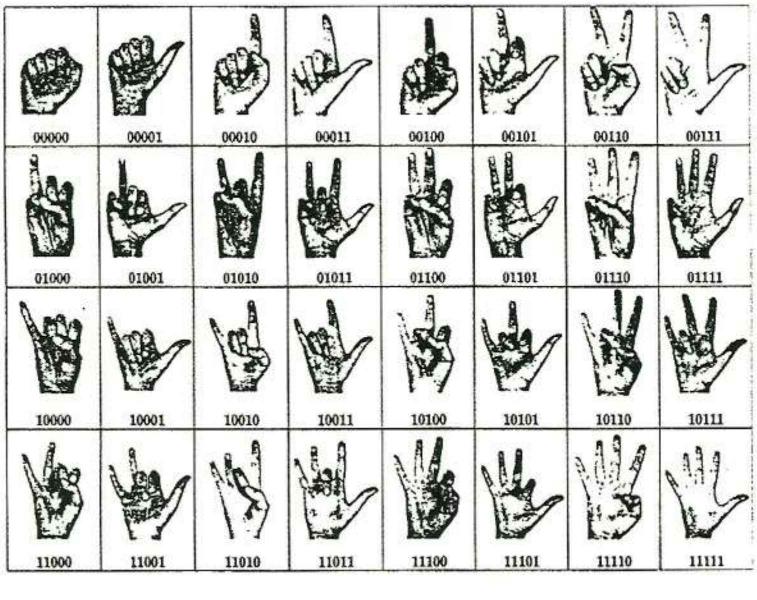


Figura 12. «Com os dedos ... na base dois!»

o único sempre acessível) parece irremediavelmente perdido. Se aqui se recordou algo esquecido, já não foi tempo perdido...

Nota

[1] Trata-se de uma região elevada, essencialmente montanhosa e, como tal, sempre um pouco isolada do resto de França.

Referências

[1] Tobias Dantzig, Barry Mazur e Joseph Mazur: *Number: The Language of Science, The Masterpiece Science Edition*, Prentice Hall, 2005.

[2] Galion Thèmes, *Brins d' Histoire des MATHS — 1. Écriture des nombres*, Galion, 1998.

[3] http://educar.sc.usp.br/matematica/

Filomena Baptista Soares

Maria Paula Sousa Nunes

Dep. Matemática

ESEIG Instituto Politécnico do Porto

A tecnologia na organização e tratamento de dados

A qualidade nutricional dos alimentos e as representações gráficas

(adaptado de *Introduction to the Practice of Statistics* de Moore & McCabe (1989))

A tabela ao lado, divulgada na revista americana *Reports Consumer*, mostra os resultados de testes realizados nas principais marcas de cachorros, ao conteúdo de calorias e sódio, em três tipos, de acordo com a sua origem: *beef* (carne de vaca), *meat* (principalmente porco e vaca) e *poultry* (carne de aves de capoeira).

Nos diagramas de extremos e quartis abaixo, encontram-se representadas as distribuições de calorias nos três tipos de cachorros.

Uma questão que podemos discutir é a variabilidade do nível calórico dos diferentes tipos de cachorros, que podem fundamentar as nossas escolhas.

Esta questão pode ser investigada usando a tecnologia, nomeadamente a folha de cálculo ou *applets* apropriados. Os histogramas, os diagramas de extremos e quartis e os diagramas de caule e folhas, podem ser uma boa opção para comparar as 3 distribuições de dados.

Na folha de cálculo (versão *Office 2003*), o processo de construção do diagrama de extremos e quartis é um pouco rebuscado e passa por, após calcular os cinco valores necessários (1° quartil, mínimo, mediana, máximo e 3° quartil, assim ordenados), seleccioná-los e escolher o *assistente de gráficos*: no tipo de gráfico, escolher *Linhas*, no sub-tipo, *Linhas com marcadores de dados mostrados em cada valor de dados* e na janela seguinte, escolher séries em *Linha* e *Concluir*.

Finalmente, com o botão do lado direito num dos pontos, seleccionar *Formatar série de dados* e, em *Opções*, activar as caixas *Linhas de máximo/mínimo* e *Barras para cima/baixo*. Em *Largura do intervalo*, pode ajustar a largura da caixa do diagrama (ver imagem acima, construída na folha de cálculo).

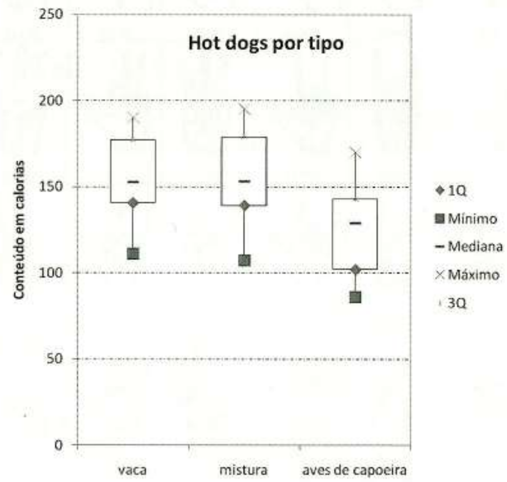
No entanto, na *National Library of Virtual Manipulatives* da Utah State University, em `http://nlvm.usu.edu/`, pode encontrar um applet que lhe permite introduzir os dados, construir um diagrama de extremos e quartis ou traçar um histograma. Entre em *Data Analisys & Probability* para *Grades 6–8* e escolha *Box Plot*. Junto aos gráficos, dispõe de informação sobre as medidas de localização e de dispersão, como a média, os quartis e o desvio-padrão. No histograma pode manipular a largura dos intervalos, de acordo com os valores da sua distribuição.

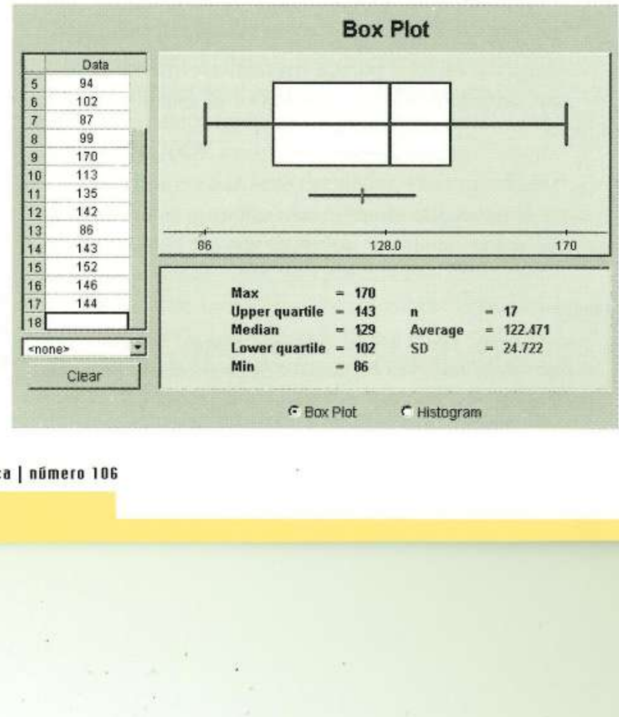
A importação de dados de outras aplicações, como uma folha de cálculo, está prevista, mas apenas disponível em CD-ROM (figura 4).

Table 1.4 Calories and sodium in hot dogs by type

Beef		Meat		Poultry	
Calories	Sodium	Calories	Sodium	Calories	Sodium
186	495	173	458	129	430
181	477	191	506	132	375
176	425	182	473	102	396
149	322	190	545	106	383
184	482	172	496	94	387
190	587	147	360	102	542
158	370	146	387	87	359
139	322	139	386	99	357
175	479	175	507	170	528
148	375	136	393	113	513
152	330	179	405	135	426
111	300	153	372	142	513
141	386	107	144	86	358
153	401	195	511	143	581
190	645	135	405	152	588
157	440	140	428	146	522
131	317	138	339	144	545
149	319				
135	298				
132	253				

Source: *Consumer Reports*, June 1986, pp. 366–367.





Outra representação que pode ser adequada, no caso de não estarmos perante um grande número de casos, é o diagrama de caule e folhas.

Em

http://bcs.whfreeman.com/ips4e/cat_010/applets/histogramIPS.html

podemos encontrar um *applet* que nos permite introduzir os dados, traçar um histograma (manipulando a largura dos intervalos e identificando os respectivos extremos), construir um diagrama de caule e folhas (permitindo parti-lo em dois ramos em *Split stems*) e obter informação sobre a média, os quartis, o máximo, o mínimo e o desvio-padrão (em *Statistics*).

No entanto, estas duas últimas aplicações da tecnologia têm a limitação de não permitirem comparar simultaneamente as distribuições no mesmo gráfico.

Usar a tecnologia para trabalhar directamente nos conceitos

O *applet* em

http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=160,

apresenta-nos a possibilidade de ter em simultâneo, na janela de trabalho, 3 diagramas de extremos e quartis, mas com a limitação de admitir um máximo de 15 valores e situados entre 0 e 100.

Mas apesar de tudo, vale a pena trabalhar com esta aplicação, quando se introduzem os diagramas de extremos e quartis no 3º ciclo do ensino básico e se pretende que os alunos entendam as implicações que têm no gráfico, na média e na mediana, a introdução ou deslocamento dos valores ao longo do eixo, ‹arrastando› as bolas para o eixo ou escrevendo directamente os valores nas pequenas caixas por baixo.

O desafio que é proposto para exploração (em *Explorations*), pode ser um bom ponto de partida:

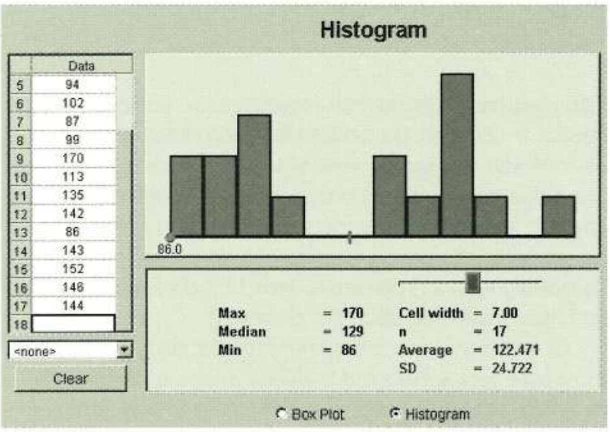
Pode criar três conjuntos de dados, todos com 6 valores, a média e a mediana iguais a 50 e de acordo com os seguintes critérios?

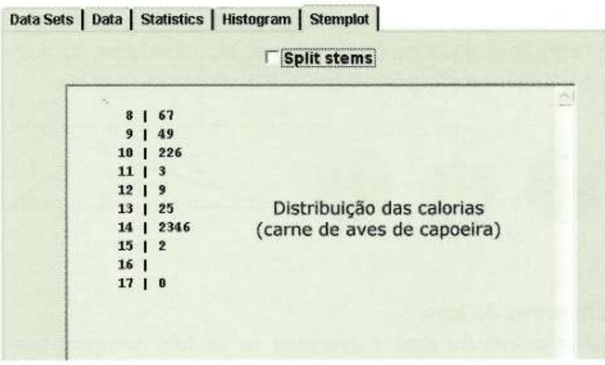
Conjunto A: Cada ponto está entre 35 e 65.

Conjunto B: Cada ponto deve ser menor do que 25 ou maior do que 75.

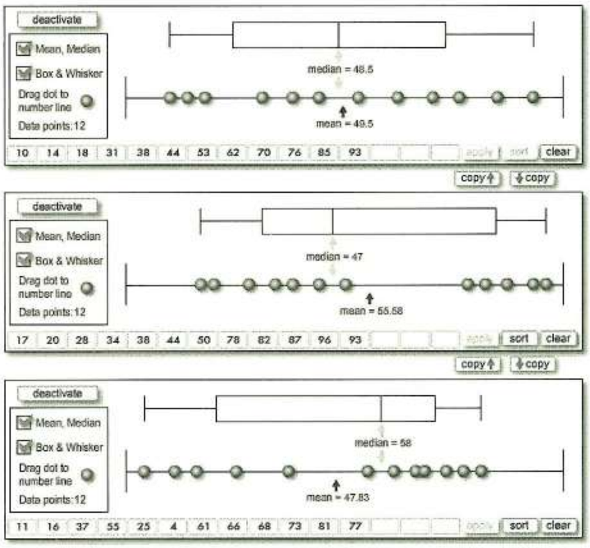
Conjunto C: A diferença entre cada par de dois pontos consecutivos é a mesma.

Como diferem estes conjuntos uns dos outros? Em que são semelhantes? Existem outros conjuntos de dados com 6 pontos, média e mediana iguais a 50 e que sejam diferentes dos três conjuntos que criou?





Distribuição das calorias (carne de aves de capoeira)



Este pequeno programa interactivo, permite investigar estas e outras questões, possibilitando a comparação e a análise das diferenças, uma vez que pode ter presentes, simultaneamente, três representações na janela de trabalho.

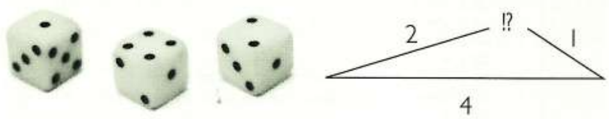
Na próxima revista, abordaremos uma nova ferramenta tecnológica que supera algumas limitações aqui identificadas e vai muito além, pelas enormes potencialidades que tem na análise estatística de dados.

José Duarte

Jogos dos triângulos

Este jogo, para dois ou mais jogadores (ou equipas), envolve apenas o conceito de *desigualdade triangular* e *classificação de triângulos*. Apesar de serem dois conceitos que qualquer aluno que conclui o ensino básico deveria dominar com facilidade, é frequente os alunos, até mesmo no ensino secundário, sentirem dúvidas na classificação de triângulos (e outros polígonos). Vem a propósito o item 11.3 do Exame Nacional de Ensino Básico de 2008 (1.ª chamada).

O carácter lúdico e experimental do jogo, que pode ser motivante para a maioria dos alunos, principalmente em aulas de apoio ou recuperação, para além os conceitos atrás referidos, também permite o desenvolvimento do cálculo mental e da adição algébrica com números relativos. Para alunos mais interessados, aquando do estudo das probabilidades, pode ser pedido um estudo probabilístico das várias pontuações.



Objectivo do jogo

O objectivo do jogo é averiguar se os três números obtidos, quando se lançam três dados, podem ser comprimentos dos lados de um triângulo e, nesse caso, classificar o triângulo quanto aos lados.

Material

Três dados, numerados de 1 a 6.

Uma tabela por jogador para registar o número de lançamentos e o número de pontos obtido em cada dado, que correspondem às medidas dos três possíveis lados de um triângulo.

Regras do jogo

1. Cada jogador (ou equipa) lança os três dados, à vez, e regista o número de pontos na sua tabela.
2. Todos os jogadores verificam se os três números obtidos podem ser lados de um triângulo e, nesse caso, classificam esse triângulo quanto à medida dos lados.

Pontuações

–5 pontos, se a soma dos dois números mais pequenos for menor do que o número maior.
0 pontos, se a soma dos dois números mais pequenos for igual ao número maior.
2 pontos, se os números obtidos formarem um triângulo isósceles.
3 pontos, se os números obtidos formarem um triângulo escaleno.
5 pontos, se os números obtidos formarem um triângulo equilátero.

Ao fim do mesmo número de jogadas, ganha o jogador que obtiver maior soma de pontos.

Jogador A Lançamento	Números obtidos	Não triângulo Classificação	Pontos

Jogador B Lançamento	Números obtidos	Não triângulo Classificação	Pontos

Desigualdade triangular

Num triângulo, qualquer lado é menor do que a soma dos outros dois e maior do que a sua diferença, isto é,

$$a - b < c < a + b,$$

sendo a, b e c a medida dos lados do triângulo.

Exemplos	*Descrição / Situação de jogo*	*Pontuação*
1, 3 e 5	Não podem ser lados de um triângulo, porque $1 + 3 < 5$ (ver notas)	– 5 pts
1, 3 e 4	Também não são lados de um triângulo, porque $1 + 3 = 4$ (ver notas)	0 pts
4, 4 e 5	Podem ser lados de um triângulo isósceles, pois $4 + 4 > 5$	2 pts
2, 3 e 4	Podem ser lados de um triângulo escaleno, pois $2 + 3 > 4$	3 pts
5, 5 e 5	Podem ser lados de um triângulo equilátero, pois $5 + 5 > 5$	5 pts

Notas

1. Para verificar se os números obtidos formam um triângulo (desigualdade triangular) basta comparar a soma dos dois números mais pequenos com o número maior.
2. Quando a soma dos dois números mais pequenos é igual ao número maior, os três vértices do «triângulo» estão alinhados.

Materiais para a aula de Matemática

O Roberto e o Diabo dos Números

A actividade que aqui apresentamos direcciona-se a alunos de 3.º Ciclo e foi enviada por Luísa Selas. O conjunto de números sugerido foi retirado do GTI (2002), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, onde é possível encontrar relatos do trabalho realizado em sala de aula a partir deste conjunto de números por Fernanda Perez.

O Roberto e o Diabo dos Números

Roberto não gosta de Matemática porque não compreende nada nas aulas. Porém, uma noite, começa a sonhar com um diabinho que se dispõe a iniciá-lo na ciência dos números.

— Alguns dos teus números atrás da virgula comportam-se de uma maneira muito estranha. Posso mostra-te como? Disse o Diabo dos Números ao Roberto.
— Se fazes o favor!
— Não te preocupes. A tua grande máquina de calcular também o faz. Tens apenas de marcar sete a dividir por onze.

O Roberto não precissou que lhe repetisse aquilo.

$$7 : 11 = 0,6363636363636363636363636363636363636\ldots$$

— O que é que se passa? – exclamou. – Sempre 63, e depois outra vez 63 e outra vez 63. É provável que continue sempre assim.
— Claro, mas isto ainda não é nada. Tenta dividir seis por sete!

O Roberto marcou:

$$6 : 7 = 0,857142857142857142857142857142857\ldots$$

— Depois de um bocado, repetem-se sempre os mesmos números — gritou ele.
— 857142, e depois começa tudo de novo. O número está a girar em círculo!
— Assim é. Os números são criaturas fantásticas. Na verdade, sabes, não há números que sejam absolutamente normais. Cada um tem o seu próprio temperamento, os seus segredos. Nunca os conhecemos completamente. Por exemplo, a serpente dos noves atrás do zero e da vírgula, que nunca termina, e que, contudo, é praticamente o mesmo que um simples um. Além disso, há outros números que se comportam de uma maneira muito mais teimosa e se tornam completamente loucos atrás da vírgula. Observa o seguinte conjunto de números.

$$\frac{7}{2} \qquad \frac{17}{10} \qquad \frac{5}{5} \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \frac{7}{35}$$

$$\frac{1}{4} \qquad \sqrt{2} \qquad \frac{9}{3} \qquad \frac{7}{4} \qquad \frac{16}{11}$$

$$\frac{24}{6} \qquad \frac{2}{7} \qquad \frac{1559}{900} \qquad \frac{5}{3} \qquad \frac{\pi}{2}$$

Estuda-os e agrupa-os de acordo com as suas características comuns, com a ajuda da tua calculadora. Ajuda o Roberto nesta tarefa. Regista o que observaste.

Adaptado «O Diabo dos Números» (1998) de Hans Margnus Enzensberger Edições ASA e «Reflectir e investigar sobre a prática profissional» (2002) GTI. APM

Geometria e centros de gravidade

Eduardo Veloso

Depois de termos tido no GTG uma discussão sobre centros de gravidade de polígonos, foi sugerido que seria um bom tema para uma destas notas... e eu aceitei a incumbência de a escrever. Naturalmente, como é já um hábito em muitos de nós, antes de começar a escrever a nota fui dar uma volta pela Internet, e coloquei no *Google* a palavra Arquimedes, pois sabia que este famoso matemático grego tinha estudado os centros de gravidade de diversas figuras, além de muitas outras coisas interessantes. Entre outros recursos, encontrei um livro *online* em português chamado *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*, de André Koch Torres Assis. Fiz o *download*, imprimi-o (243 páginas!), e pus-me a lê-lo. Trata-se de um livro que surgiu de um «curso de aperfeiçoamento para professores do ensino fundamental e médio» no âmbito do projecto *Teia do Saber* da Secretaria de Educação do Governo do Estado de S. Paulo. O livro trata dos trabalhos de Arquimedes (287–212 a.C.) e de Euclides (c. 325–c. 265 a.C.) sobre os temas indicados no título e descreve uma enorme quantidade de experiências muito sugestivas feitas com materiais simples e baratos. Entrevi um mundo maravilhoso e riquíssimo de conexões entre a geometria e a física elementar, mas consegui resistir a alterar radicalmente o tema da nota a escrever. Esse mundo será certamente explorado em futuras notas, por exemplo sobre as medidas em geometria, mas nesta nota resistiremos a alongá-la demasiado, e assim, depois de uma curta apresentação dos resultados de Arquimedes que nos serão úteis, trataremos exclusivamente da determinação de centros de gravidade de polígonos planos.

Preliminares arquimedianos...

De acordo com André Assis, o conceito de centro de gravidade de Arquimedes «não aparece definido explicitamente em nenhuma das obras existentes» de Arquimedes e apenas o conhecemos por comentários — por exemplo, de Papo de Alexandria (c. 290–c. 350) —, a obras suas desaparecidas. A sua definição poderia ser nos seguintes termos:

A1. O centro de gravidade de qualquer corpo é um ponto — pertencente ao corpo ou no espaço vazio — tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, o corpo assim sustentado permanece em repouso e preserva a sua posição original, sem se inclinar em nenhuma direcção, qualquer que seja a sua orientação inicial em relação à Terra.[1]

A primeira dúvida que pode surgir ao leitor é sobre o que se entende por *corpo*, e pedimos-lhe que entenda a palavra corpo como sinónimo de *figura* (conjunto de pontos) plana ou de figura tridimensional (que habitualmente designamos por *sólido*), mas que não devemos identificar com poliedro, pois pode tratar-se de qualquer outro corpo rígido.

Depois, um leitor professor de Matemática colocará provavelmente algumas dúvidas legítimas acerca desta «definição». Não sobre o seu sentido, mas sobre o aparente pressuposto de que existe sempre o centro de gravidade de qualquer corpo, ou seja um ponto com as propriedades indicadas. Nesse caso, pedimos-lhe que considere essa afirmação como um axioma, ou seja como uma afirmação que aceitamos sem demonstração.

Na realidade, de acordo com a tradição grega, Arquimedes abre o seu livro *Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas* com o enunciado de 7 postulados (hoje diríamos axiomas) nos quais baseia a sua teoria. Em seguida Arquimedes enuncia e demonstra um certo número de proposições. Não cabe no âmbito desta nota transcrever os postulados e as demonstrações de Arquimedes. Note-se que nas suas demonstrações Arquimedes usava processos de dedução completamente rigorosos, muitas vezes através de reduções ao absurdo. No entanto, quando se tratava de descobrir novos resultados, Arquimedes servia-se da sua grande intuição e experiência mecânica em alavancas, balanças e centros de gravidade na procura de novas relações entre, por exemplo, áreas e volumes de figuras geométricas planas e tridimensionais, como se veio a descobrir no fim do séc. XIX. O seu texto O *Método* foi encontrado em 1899, em Jerusalém, e aí estão descritos os seus processos mecânicos de descoberta de proposições matemáticas.

Arquimedes afirma nesse texto que:

«... algumas coisas tornaram-se claras para mim através de métodos mecânicos, embora tivessem que ser demonstrados depois geometricamente, porque a investigação pelo dito método não fornecia uma prova real. Mas é evidentemente mais fácil, quando se adquiriu previamente algum conhecimento das questões, pelo método mecânico, encontrar a demonstração do que imaginá-la sem qualquer conhecimento prévio».

Um resultado importante de que nos iremos servir diz respeito ao centro de gravidade de um conjunto de dois sólidos sem pontos comuns A e B (figura 1).

A2. Se os pesos de A e B são respectivamente P_A e P_B, e se os centros de gravidade são respectivamente G_A e G_B, o centro de gravidade G_C da figura C formada pelos duas figuras A e B é o mesmo que o da figura formada pelos pontos G_A e G_B, considerando agora que estes pontos pesam respectivamente P_A e P_B. E esse centro G_C está situado no segmento G_AG_B, de tal modo que se tem

$$P_A \times \text{comp}(G_AG_c) = P_b \times \text{comp}(G_bG_c).$$

Centros de gravidade de segmentos

Quando estudamos geometria, embora tracemos figuras no papel, utilizemos o *Sketchpad* para as construir no ecrã do computador, ou as manipulemos (os *polydrons*, por exemplo), os nossos raciocínios estão a ser feitos sobre imagens mentais que abstracções desses objectos concretos, como pontos sem dimensão e triângulos planos sem espessura. Essas figuras abstractas não têm, obviamente, peso.

No entanto, quando queremos determinar centros de gravidade de figuras, isso implica essas figuras tenham realmente peso, o que quer dizer que imaginamos ou construímos modelos concretos dessas figuras abstractas.

Segmentos

Por exemplo, seja AB um segmento. Podemos considerar que o segmento é constituído por uma matéria homogénea (uma haste de metal)[2]. Essa haste pode por exemplo ser cilíndrica, mas para constituir um bom modelo de segmento o diâmetro da secção desse cilindro deve ser muito pequeno quando comparado com o comprimento da haste.[3]

No que diz respeito aos segmentos, Arquimedes demonstrou que

A3. O centro de gravidade de um segmento é o seu ponto médio.

Mas podemos imaginar um modelo concreto de segmento em que o peso esteja concentrado nos vértices A e B. Ou

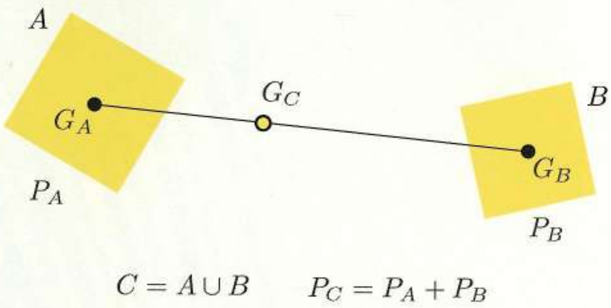


Figura 1

seja, consideramos que os pontos do interior do segmento não têm peso. Neste caso, o resultado **A2** de Arquimedes fornece-nos a determinação do centro de gravidade do conjunto desses dois pontos, como sendo um ponto do interior do segmento AB que depende (de acordo com a fórmula incluída em A2) dos pesos de A e de B. Naturalmente, se os pesos forem iguais, obtemos de novo o ponto médio do segmento. Para continuar a dar ideias sobre modelos concretos, num segmento deste segundo tipo os vértices poderiam ser pequenas esferas pesadas e o interior do segmento uma haste rígida mas de pequena secção.

Centros de gravidade de polígonos[4]

Quando passamos aos polígonos, temos diferentes possibilidades de considerar a distribuição do peso. Podemos imaginar os três casos seguintes:

I. O peso está distribuído homogeneamente pelo polígono, incluindo o interior, os lados e os vértices; um modelo concreto, neste caso, poderia ser uma lâmina (ou seja uma superfície relativamente rígida mas com muito pequena espessura) com a forma do polígono, de matéria homogénea (cartolina grossa, madeira, metal);

II. O peso está apenas nos n vértices (e distribuído igualmente por eles); a figura de que queremos encontrar o centro de gravidade é portanto o conjunto dos quatro vértices do polígono; nem os lados nem o interior têm peso; um modelo concreto neste caso é impossível de construir, mas podemos aproximá-lo com n esferas pesadas (pesos iguais) e unidas por hastes muito finas de uma material muito leve mas suficientemente rígido; tenta-se assim que o peso dessas hastes seja desprezável em face do peso das esferas;

III. O peso está apenas nos lados; um modelo concreto neste caso é fácil, pois consiste em construir com um material homogéneo a linha poligonal, tendo o cuidado de não acrescentar peso aos vértices nos pontos de união dos lados.

Note-se que Arquimedes, quando refere centros de gravidade de polígonos, *está a considerar sempre o primeiro destes casos*. E demonstra por exemplo o seguinte:

A4. O centro de gravidade de um paralelogramo é o ponto de encontro das diagonais.

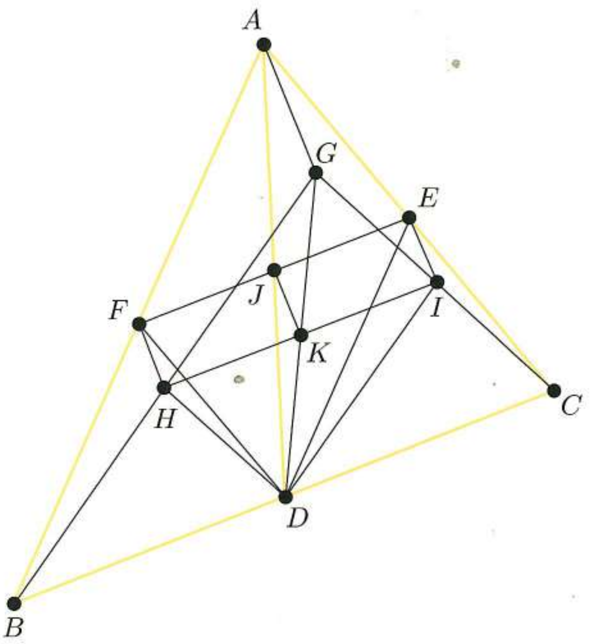


Figura 2

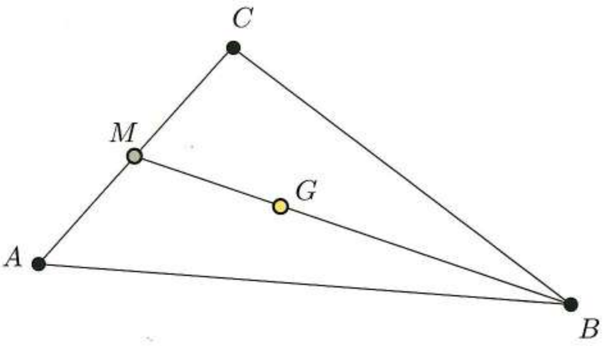


Figura 3

Tendo como base esta apresentação de alguns resultados de Arquimedes que nos serão necessários, estudamos em seguida a determinação dos centros de gravidade dos polígonos em geral. Começaremos pelos triângulos, e depois passamos aos quadriláteros, que representarão por assim dizer o caso geral.

Triângulos

Consideraremos os três casos que indicámos na página anterior.

I. Vamos enunciar e demonstrar o teorema de Arquimedes relativo ao centro de gravidade de um triângulo para ficarmos a conhecer melhor o estilo de Arquimedes. O texto é adaptado da tradução de Arquimedes feita por André Assis.

Em qualquer triângulo, o centro de gravidade está situado sobre o segmento de recta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.

Seja dado o triângulo ABC (figura 2). Tracemos o segmento AD, que liga o vértice ao ponto médio do lado BC. Afirmo que o centro de gravidade do triângulo ABC está situado sobre AD.

Com efeito, suponhamos que não é assim, mas que o centro de gravidade é, se possível, o ponto G. Tracemos os segmentos AG, BG e CG, e liguemos os pontos médios dos lados de ABC pelos segmentos FD, FE e DE. Tracemos FH e EI paralelamente ao segmento AG, e tracemos os segmentos HI, HD, DI, DG e JK.[5] Como o triângulo ABC é semelhante ao triângulo EDC, pois AB é paralelo a ED, e como, por hipótese, o centro de gravidade de ABC é G, o centro de gravidade de EDC é I, pois os pontos G e I estão situados semelhantemente em cada um dos triângulos (Arquimedes invoca aqui um dos seus postulados). Pelos mesmos motivos também o centro de gravidade do triângulo FBD é H, de modo que o centro de gravidade da grandeza que é a soma dos triângulos FBD e EDC é o ponto médio do segmento HI (invocação de uma proposição já demonstrada).

Mas esse ponto é K (quer o leitor ver porquê, usando o teorema de Tales?). Por outro lado, no paralelogramo $AFDE$, o centro de gravidade é o ponto J (ponto de encontro das diagonais). Então, o centro de gravidade da soma das três grandezas (triângulos FBD e EDC e paralelogramo $AFDE$) está sobre a recta JK. Mas como a soma das três grandezas é o triângulo ABC, cujo centro de gravidade, por hipótese, é G, chegámos a uma contradição, pois a recta JK é paralela e não coincidente com AG e não pode portanto passar por G. Assim, o centro de gravidade G *não pode não estar* sobre o segmento AD. Logo está situado sobre AD, como queríamos provar.

Estando sobre AD, tem também que estar sobre BE e sobre CF (porquê?), logo as três medianas encontram-se num único ponto. Este ponto é chamado, como sabemos, o baricentro do triângulo.

II.

Se o peso de um triângulo ABC estiver concentrado e distribuído igualmente pelos vértices, o centro de gravidade é também o baricentro do triângulo.

O centro de gravidade do conjunto $\{A,C\}$ é o ponto M, ponto médio do segmento AC, se tivermos em atenção o resultado de Arquimedes **A2** (figura 3). Ou seja, podemos considerar concentrada no ponto M a soma dos pesos de A e de C, ou seja, o dobro do peso de B. Por sua vez, o centro de gravidade do conjunto $\{M,B\}$ será um ponto G situado

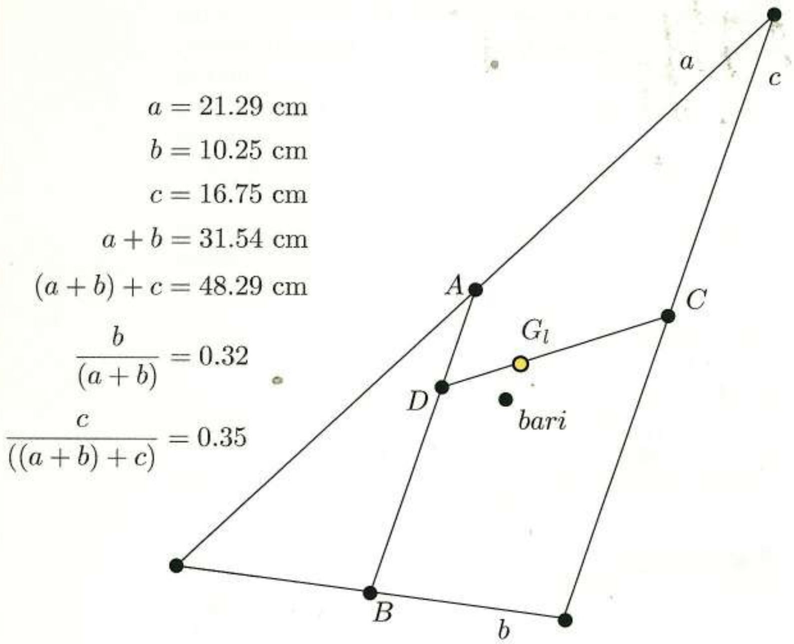


Figura 4

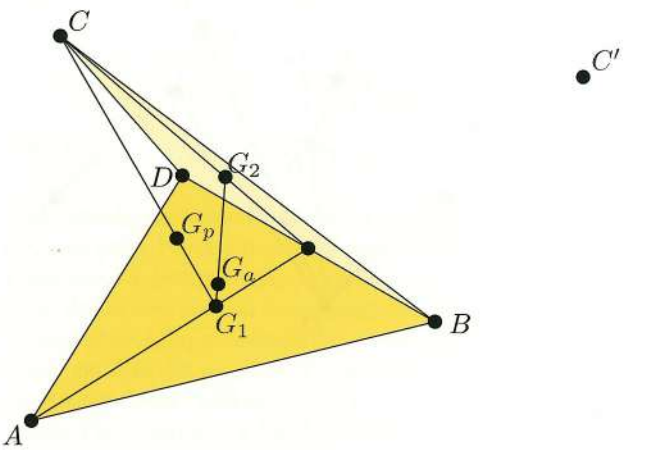


Figura 5A

no segmento MB, mas como M tem o dobro do peso de B, então G tem que seccionar o segmento MB de tal modo que GB tenha o dobro do comprimento de MG.

Vemos assim que obtemos o mesmo centro de gravidade G tanto no caso do peso do triângulo estar concentrado nos vértices (1/3 em cada vértice) como no caso do peso estar espalhado uniformemente no seu interior.

III. Vamos considerar um triângulo em que o peso existe apenas nos lados. Portanto temos apenas três segmentos a, b e c, em geral desiguais, constituídos por uma matéria homogénea (por exemplo um arame grosso) e unidos pelas suas extremidades (figura 4). Os centros de gravidade dos lados são os pontos médios A, B e C, de acordo com o resultado de Arquimedes **A3**. Mas nestes pontos os pesos que aí se concentram não são iguais, pois estamos a supor lados desiguais. Os pesos de cada lado são proporcionais aos comprimentos.

Determinamos primeiro o ponto D, centro de gravidade do conjunto $a \cup b$ (em que a representa o conjunto de pontos do lado a), utilizando o resultado A2, depois o centro de gravidade G_l (em que o índice l se refere ao triângulo em que apenas os lados têm peso), ou seja o centro de gravidade do conjunto $(a \cup b) \cup c$. G_l é calculado tendo em atenção que os pesos em D e em C são proporcionais aos comprimentos $a + b$ e c, respectivamente.

Para comparação, assinalámos a posição do baricentro ($bari$), que é o centro de gravidade quando se considera o peso apenas existente no interior do triângulo ou quando se considera o peso apenas distribuído igualmente pelos vértices do triângulo.

Vemos assim que nos objectos de forma triangular, nos casos I e II os centros de gravidade ocupam a mesma posição, o que não acontece em geral no caso III.[6]

Quadriláteros

Vamos também considerar os três casos I, II e III indicados anteriormente.

I. Consideremos os dois triângulos ABD e DBC (figura 5A) e os seus centros de gravidade G_1 e G_2. Como o material de que é feita a lâmina com a forma do quadrilátero é homogéneo, os pesos dos dois triângulos são proporcionais às áreas, e portanto o centro de gravidade do interior do quadrilátero é o ponto G_a que secciona o segmento G_1G_2 de tal modo que se tenha a igualdade das seguintes razões $\text{área}ABD/\text{área}DBC = \text{comp}G_2G_a/\text{comp}G_aG_1$.

II. Seja $ABCD$ o quadrilátero e consideremos o triângulo ABD e o seu centro de gravidade G_1 (figura 5A). Estamos a supor agora, recordemos, que o peso está concentrado e dividido igualmente pelos quatro vértices do quadrilátero.

Podemos então supor concentrados no ponto G_1 os pesos dos três pontos A, B e D. Portanto, o conjunto dos quatro vértices do quadrilátero terá um centro de gravidade G_p situado sobre o segmento G_1C, de tal modo que o ponto G_p seccione o referido segmento de modo que a razão $G_pC/G_1G_p = 3$.

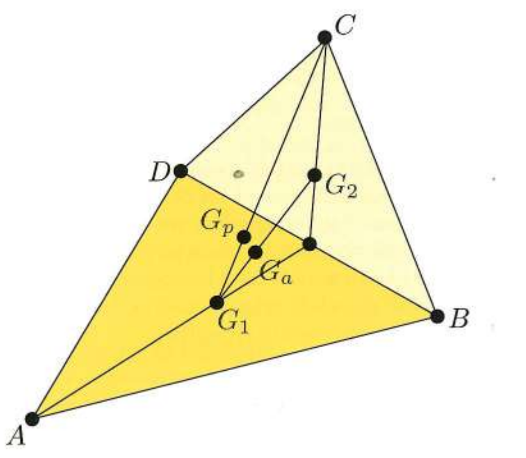


Figura 5B

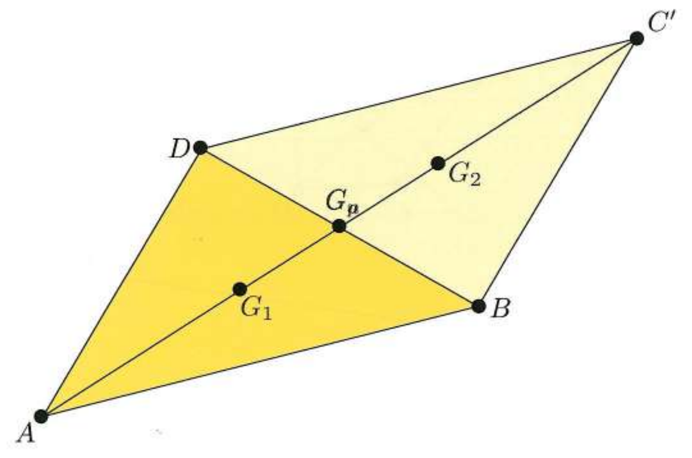


Figura 5C

Como se vê na figura 7A, os dois centros de gravidade são em geral diferentes. Seja no entanto C' um ponto tal que $ABC'D$ seja um paralelogramo. Fizemos esta construção no *Sketchpad* e fomos arrastando o ponto C para sobre o ponto C (figuras 5B e 5C). Vemos como os dois centros de gravidade se vão aproximando, até que são coincidentes no caso do paralelogramo (como de resto já devíamos intuir, dado o resultado de Arquimedes apresentado anteriormente).

III. Deixamos ao leitor o cuidado de construir o centro de gravidade neste caso, em que o peso do quadrilátero $ABCD$ reside apenas nos seus lados, supostamente feitos num material homogéneo, mas de comprimentos diferentes. A determinação do centro de gravidade é inteiramente análoga à que adoptámos no caso do triângulo. O leitor deverá encontrar um centro de gravidade, que designaremos por G_l, numa posição distinta dos anteriores G_a e G_p.

Que podemos concluir a respeito de polígonos com maior número de lados: pentágonos, hexágonos, ... ? Como todo o polígono pode ser dissectado num certo número de triângulos, os processos adoptados para o quadrilátero podem adoptar-se, *mutatis mutandis*, a um polígono de n lados qualquer. Um exercício que deixamos ao leitor.

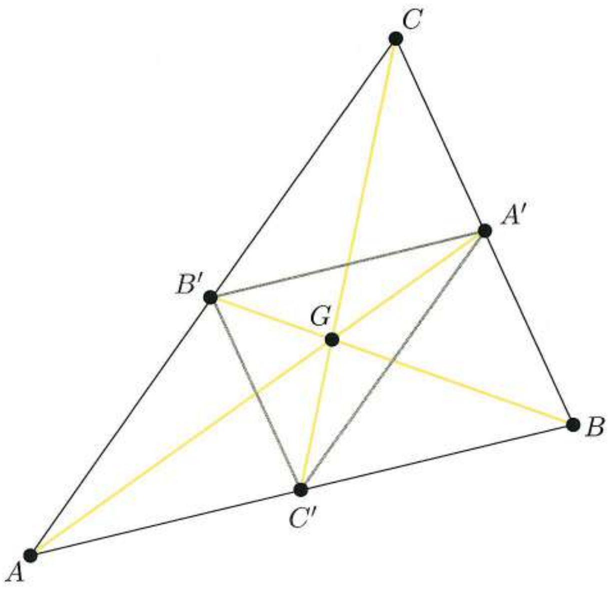


Figura 6A

Descoberta de uma regularidade interessante

Vamos reexaminar, relativamente ao triângulo e ao quadrilátero, a determinação do centro de gravidade no caso em que supomos que o peso está concentrado e distribuído igualmente pelos vértices. E chamaremos a esse centro de gravidade simplesmente G, para simplificar a escrita.

No triângulo ABC (*consideramos os vértices com pesos unitários*), determinamos os pontos médios dos lados, A', B' e C' (que formam um triângulo, o chamado triângulo medial) (figura 6A). Depois escolhemos um desses pontos, por exemplo A', ponto médio de BC, e consideramos o conjunto de dois pontos, A' (peso 2) e A. Então o centro de gravi-

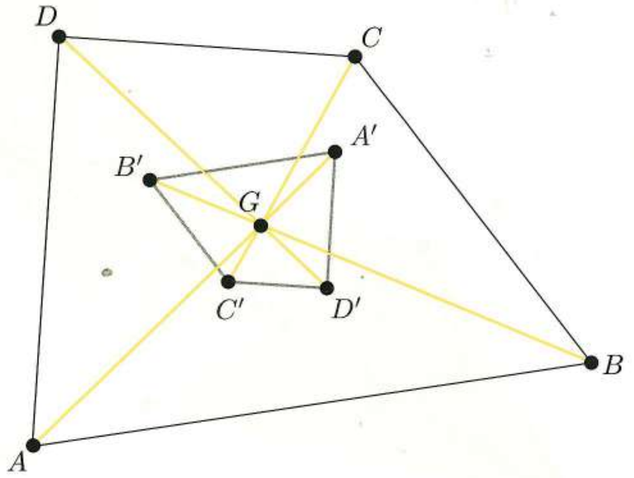


Figura 6B

dade do triângulo irá estar no segmento $A'A$, de tal forma que é centro de uma dilação de razão $-1/2$ que transforma A em A'. Se tivéssemos partido dos pontos B' e B (ou C' e C), a conclusão seria análoga. Portanto, o centro de gravidade do triângulo é centro de uma dilação de razão $-1/2$ que transforma o triângulo dado no triângulo medial. Note-se que o ponto G é determinado apenas com uma escolha (A' e A, por exemplo) mas que ao construirmos os outros dois casos chegámos a uma nova conclusão: o centro de gravidade como centro de uma dilação que transforma o triângulo dado no triângulo medial.

Se no triângulo o processo foi substituir o conjunto de *dois vértices* (por exemplo B e C) pelo seu centro de gravidade A' e depois determinar o cento de gravidade do sistema formado por A' e pelo vértice que sobrava, A, no quadrilátero podemos seguir um processo inteiramente análogo: substituir *três* vértices (A, B, D) pelo seu centro de gravidade, que designamos por C', e depois determinar o centro de gravidade do sistema formado por C' e pelo vértice que sobrava, precisamente C (figura 6B). No triângulo obtivemos *três* pontos A', B', C' formando o triângulo medial, homotético do triângulo dado (na dilação em que o centro é o centro de gravidade do triângulo e a razão é $-1/2$), no quadrilátero obtemos *quatro* pontos A', B', C', D' formando um quadrilátero homotético do quadrilátero dado (na dilação que tem como centro o centro de gravidade do quadrilátero e a razão $-1/3$). Atenção que estamos a considerar os polígonos com o peso concentrado e dividido igualmente pelos seus vértices.

Irresistivelmente, estamos a ver aqui nascer um padrão e isso diz-nos que estamos a construir qualquer coisa de interessante e importante em matemática. Um processo destes, baseado em algumas leis intuitivas da estática, mas que nos permite de modo elementar, não retorcido, natural, chegar a este tipo de resultados, cuja descoberta está claramente ao nosso alcance, deve ser um paradigma do trabalho em educação matemática. Se for bem conduzido, fará que qualquer aluno deseje ele próprio tentar o passo seguinte: e se fosse um pentágono? e um hexágono? e um...

Notas

1 Assis, obra citada, pág. 200.

2 Suporemos sempre que a matéria de que são feitos os nossos objectos (segmentos, regiões do plano e regiões do espaço) é homogénea, ou seja tem a mesma densidade em todos os pontos. Apenas nesta situação podemos aplicar os métodos da geometria elementar. Quando a matéria não é homogénea, a determinação dos centros de gravidade exige o recurso a integrais, que estão para além do ensino básico e secundário.

3 Se o leitor está chocado com a linguagem que estamos a adoptar («muito pequeno»...!) pense que o domínio em que estamos agora a trabalhar assumidamente não é o da geometria «pura» habitual, mas sim o de uma geometria-física experimental.

4 Adoptamos para definição de polígono de n ($n \geq 3$) lados aquela que o GTG recomenda que seja utilizada nos primeiros anos, e em que o polígono é formado:

- por n pontos (vértices) A_1, A_2, ... A_n;
- por n lados (segmentos), que formam uma linha poligonal fechada A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1, com a seguinte condição: cada dois lados apenas têm no máximo (isto é, quando são consecutivos) um ponto comum;
- pela região do plano limitada pela linha poligonal (que existe sempre pelo teorema de Jordan).

5 Se o leitor estranha que Arquimedes escreva «tracemos FH e EI», sem ter préviamente definido H e I, isso é simplesmente o magnífico estilo de escrita geométrica de Arquimedes e de Euclides, que usam sem hesitar as figuras para apoiar o seu texto. Em vez de escrever «tracemos a recta passando por F e paralela ao segmento AG, determinemos a sua intersecção H com BG e tracemos o segmento FH» Arquimedes escreve simplesmente «tracemos FH paralela a AG» e, tendo em atenção a figura, fica tudo dito e compreensível... Outros exemplos do mesmo estilo existem nesta demonstração.

6 Para um estudo mais completo da determinação de G_l, veja as primeiras páginas do livro de Honsberger, referido na bibliografia.

Bibliografia

Assis, André Koch Torres. *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*. Montreal: Apeiron, 2008

Honsberger, Ross. *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. Washington, The Mathematical Association of America, 1995.

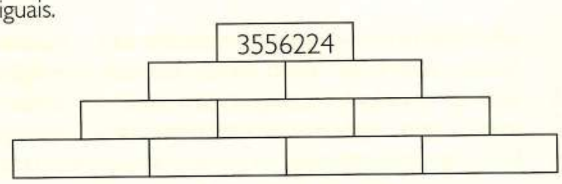
Eduardo Veloso

Pirâmide multiplicativa

A Catarina desenhou uma pirâmide de quatro andares formada por rectângulos iguais. Em cada rectângulo da linha inferior escreveu um número inteiro até 10. Depois, preencheu a pirâmide com números de acordo com a seguinte regra:

— O número de cada rectângulo é igual ao produto dos números que estão nos dois rectângulo em que ele se apoia.

No topo da pirâmide apareceu o número 3 556 224.
Que números pôs a Catarina na linha inferior?



(Respostas até 25 de Abril para zepaulo@armail.pt)

Mensagens de telemóvel

O problema proposto no número 104 de Educação e Matemática foi o seguinte:

Cinco amigos encontraram-se e passaram a tarde a enviar mensagens de telemóvel, num total de 120.

Um deles mandou 51 mensagens, a Rita enviou o dobro da Sheila, a Vera mandou o triplo do Duarte e o João cinco vezes mais que um dos amigos.

Quantas mensagens enviou cada um?

A adesão a este problema foi excepcionalmente grande. Recebemos 27 respostas: Ana Matias & Cidália Almeida (Catujal), Afonso Garcia (Torres Novas), Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Alice Bárrios (Catujal), Artur Gonçalves (Torres Novas), Beatriz Barbosa (Vila Verde), Catarina Ferreira (Lamego), Cláudia Lopes (Aveiro), Duarte Gomes (Lisboa), Edgar Martins (Queluz), Fábio Veloso (Campelos), Fernando Silva (Torres Novas), Francisco Matos Branco, Francisco Timóteo (Lisboa), Graça Braga da Cruz (Ovar), Helena Perpétua (Setúbal), José Paulo Coelho (Moura), Letícia Morais & Susana Severiano (Campelo), Luís Campos (Alcácer do Sal), Patrícia Sampaio (Guimarães), Pedro Machado (Campelo), Pedro Silva (Lisboa), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Teresa Isabel, Tiago Ramos (Campelo) e uma resolução colectiva dos alunos Samuel Naves, Sérgio Costa, João Escoval, António Lopes, Patrícia Inácio e Iolanda Moreira do *Matemática Plus* da Escola Alto do Moinho (Catujal).

Por iniciativa de alguns professores, houve muitos alunos que se entusiasmaram e que responderam. Uma das melhores resoluções é precisamente do Pedro Silva, do 7° ano da Escola Secundária Vergílio Ferreira. Pensamos que vale a pena ver como ele chegou à solução.

Sei que foram enviadas 120 mensagens no total. Também sei que algum dos 5 amigos enviou 51 mensagens. Além disso, a Rita enviou o dobro da Sheila, a Vera o triplo do Duarte e o João, o quíntuplo de algum dos outros amigos que não sei qual é ainda. Nenhum deles pode mandar, por exemplo, mensagem e meia.

Vejamos qual deles enviou 51 mensagens.

Se a Rita enviasse 51 mensagens, a Sheila enviaria 25,5 o que não é um número exacto! Logo a Rita não pode ser. Se a Sheila enviasse 51 mensagens, a Rita enviaria 102. E 102 + 51 dá 153 mensagens, o que passa o total de mensagens. A Sheila também não é. Se a Vera enviasse 51 mensagens, o Duarte enviaria 17, o que é possível, mas tenho de ver os outros amigos para ter a certeza. O Duarte enviando 51 faria com que a Vera tivesse enviado 153, ou seja, passava dos 120. O Duarte é impossível. O João não podia enviar 51 porque ele manda 5 vezes mais mensagens que um dos amigos quaisquer. Um quinto de 51 não é um número inteiro, logo não dá para ser o João porque nenhum amigo pode enviar mensagens que não sejam completas. Portanto, foi a Vera que enviou 51 mensagens e, então, o Duarte enviou 17.

As mensagens que a Vera e o Duarte enviaram foram 51 + 17, ou seja 68. Das 120, sobram 52 mensagens para distribuir pelos outros 3 amigos. A Rita enviou 2 vezes o número de mensagens da Sheila e o João enviou, ou 5 vezes o número de mensagens da Sheila, ou 5 vezes o número de mensagens da Rita.

Se se pensar que o João vale «5 Sheilas» e a Rita vale «2 Sheilas», então temos «8 Sheilas». Dividimos 52 por 8, para saber quantas mensagens manda «1 Sheila», e não ficamos com um número inteiro. Não dá.

Então podemos ver que, se o João vale «5 Ritas» e a Sheila vale «meia Rita», temos «6 Ritas e meia». Se dividirmos 52 por 6,5 ficamos a saber que a Rita mandou 8 mensagens e a Sheila metade, 4 mensagens. O João, como vale o quíntuplo, mandou 40 mensagens.

Conclusão: a Vera enviou 51, o Duarte enviou 17, a Rita enviou 8, a Sheila, 4, e, por fim, o João enviou 40 mensagens. Somando tudo dá 120.

A Matemática dos pequenos aos grandes

«A Matemática é um bicho-de-sete-cabeças», esta frase muito citada por todos os estudantes que odeiam Matemática, mas será que é realmente um bicho-de-sete-cabeças?

Esta má relação entre os alunos e a Matemática é universal, toda a sociedade portuguesa vive com este preconceito, sendo pouco provável num grupo de 100 pessoas achar 5 pessoas que gostem de Matemática.

Todos sabemos que a Matemática é uma ciência rigorosa, precisa e feita pelo raciocínio lógico.

A palavra raciocínio é a base de tudo e é aqui que tudo começa.

Ao longo de toda a vida escolar os alunos deparam-se com inúmeros conceitos matemáticos, com muitos problemas, com muitos pesadelos na noite da véspera do famoso teste de matemática, levando alguns a chegarem a odiar o professor sem ele ter culpa.

Mas vejamos onde começa o problema.

Pela experiência com uma aluna do 4.° ano que quando foi proposto o seguinte problema «A dona Ana tem 6 sobrinhos, como era Páscoa queria dar bombons aos seus sobrinhos. Quantos bombons teria ela de comprar de modo que cada sobrinho recebesse 13 bombons».

A aluna respondeu «Seis mais ou menos ou vezes ou dividir por 13».

Podemos ver que não há o mínimo de raciocínio para perceber qual é a operação a utilizar.

O problema parte daqui, esta criança não tem as competências básicas de Matemática, podendo acontecer que daqui a alguns anos vai ter grandes problemas com a Matemática porque não desenvolveu o devido raciocínio na devida fase escolar e à medida que os anos passam as coisas tornam-se complicadas porque precisam de coisas dos outros anos na qual não foram devidamente desenvolvidas.

Outra experiência foi com uma aluna do 9°ano que odiava Matemática pela simples razão de quando lia os exercícios não percebia como resolver as coisas, mas quando via a resolução dizia «afinal era fácil» é óbvio que esta aluna foi mais uma onde o raciocínio não foi desenvolvido, nem treinado.

Ela tinha o sonho de ser fisioterapeuta, mas no 10.° ano optou pelas letras para fugir à Matemática.

Até a Matemática é causa de destruição dos sonhos de bastantes pessoas porque não têm capacidades matemáticas para resolver os exercícios do secundário.

Todos os anos imensos alunos voltam a repetir o 12.° ano porque deixaram Matemática para trás.

Para muitos alunos a Matemática torna-se um pesadelo e às vezes motivo de stress. Mas será que não há remédio para este problema?

Pela experiências com ex-colegas do tempo do meu secundário e com alguns alunos, pode-se dizer que é preciso implementar um plano para a Matemática nas escolas primárias e depois estendê-lo às escolas do 2.°, 3.° ciclos e ensino secundário.

Na escola primária seria necessário numa primeira fase separar a Matemática das outras disciplinas pois muitos professores também não gostam de Matemática e começam a facilitar e a dedicar-se menos tempo a disciplina.

Sendo necessário mais tempo para a disciplina, com exemplos mais práticos e didácticos para os alunos começarem a perceber as coisas e não simplesmente dizer como as coisas são feitas. No fundo seria preciso haver mais contacto com a Matemática para treinar o seu raciocínio.

Ao nível do 2.° e 3.° ciclo seria necessária mais carga horária para esta disciplina pois são neste anos que se aprendem as grandes bases para aplicação no secundário.

Aqui seria óptimo haver contacto entre a Matemática e a vida no dia-a-dia, para os alunos perceberem a sua importância e utilização.

No secundário onde é preciso saber as coisas dos anos anteriores e é aqui onde o «famoso» raciocínio é importante, seria bom abrir centros de explicações nas escolas com professores de matemática que pudessem dedicar algum tempo a pequenos grupos de alunos, pois muitos alunos não têm possibilidades de pagar explicações, disponibilizar exercícios resolvidos com alguns detalhes para eles perceberem como é que as coisas foram feitas e, por fim, mostrar-lhes a utilidade daquilo que eles aprendem.

São algumas medidas que se fossem implementadas nas escolas talvez os resultados fossem melhores, os alunos começassem a ver melhor a Matemática e não tinham de abdicar de alguns sonhos.

É preciso mudar a mentalidade das pessoas e dos alunos e quanto mais cedo melhor, pois como diz o famoso provérbio «é em pequenino que se torce o pepino».

Ricardo Ferreira

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.

[Con]fusão das notações

Historicamente, os conceitos matemáticos não surgem de forma espontânea sendo, por vezes, o seu significado várias vezes alterado e redefinido. Regra geral, são fruto de vários contributos pois a criação de símbolos, de terminologia e de notações pressupõe o consenso entre os seus utilizadores. Após a criação passam a ser propriedade de todos e a sua utilização subentende a compreensão do seu significado, sendo transmitidos e ensinados às gerações vindouras.

Vem isto a propósito das notações em geometria, que o Grupo de Trabalho de Geometria (GTG) da APM vem tentando esclarecer ao longo dos últimos tempos. Já no número 42 da *Educação e Matemática* (1997) o GTG revelou preocupação com a diversidade de notações para o mesmo conceito. Agora no número 103 da revista surge um novo artigo — *Notações: basta de confusões!* — que, para meu espanto, sugere a alteração de algumas dessas notações. Não podemos esquecer que essas notações demoraram o seu tempo a serem consolidadas, tanto pelos autores dos manuais escolares como pelos próprios professores que vão apelando à sua apreensão por parte dos alunos.

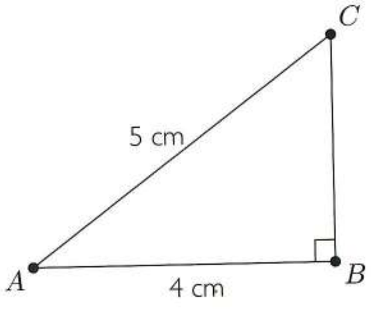
Na minha modesta opinião, em Educação Matemática não podemos andar constantemente atrás ou à procura de novas «modas» como tem acontecido com as tendências do ensino desta disciplina: veio a *Matemática Moderna* a que se seguiu a tentativa *Back to Basics*, depois apareceu o *Problem Solving* que progressivamente foi substituído pela moda da *Contextualização*. Hoje parece que estamos sobre o domínio da tecnologia (calculadoras e computadores), que são instrumentos maravilhosos mas são incapazes de substituir o cérebro. Parece-me que as notações apontadas no artigo «*Notações: basta de confusões!*» seguem a moda da tecnologia.

Todos concordamos que qualquer notação deve ser o mais simples possível, sugestiva, sem ambiguidades e de fácil e imediata interpretação. Concordo também com o artigo referido quanto à simplificação quando as referências aos objectos geométricos estão inseridas num texto, evitando-se o uso de abreviaturas e de símbolos.

Quanto à utilização de uma notação paralela mais específica quando nos referimos aos objectos geométricos em «fórmulas», sou de opinião de que *quanto mais curta melhor é a fórmula*. No artigo citado, para representar o comprimento do segmento BC é apontada a utilização de «$comp(BC)$» em vez do já vulgarmente aceite «$\overline{BC}$». Para determinar o lado desconhecido do triângulo rectângulo da figura 1 teríamos de escrever «$[comp(BC)]^2 + 4^2 = 5^2$» em vez de «$\overline{BC}^2 + 4^2 = 5^2$», e continuar a simplificação usando «$comp(BC)$» em vez de «$\overline{BC}$» (figura 1).

Relativamente à figura 2, não é mais simples (e de mais fácil e rápida interpretação) escrever «$\overline{DF} = \overline{EF}$» em vez de «$comp(DF) = comp(EF)$»?

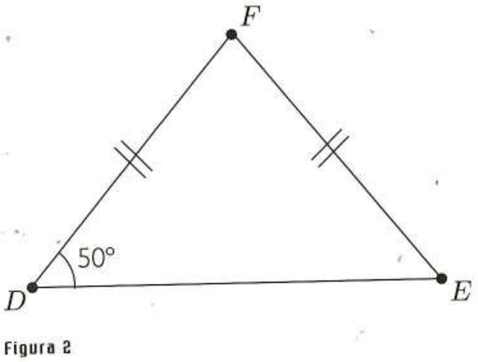
E já agora, os traços a identificar os lados congruentes não facilitam a interpretação da imagem?



$$\overline{BC}^2 + 4^2 = 5^2 \quad \text{ou} \quad [comp(BC)]^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\text{Área } \Delta = \frac{4 \times \overline{BC}}{2} = 2 \times \overline{BC} \quad \text{ou} \quad \text{Área } \Delta = 2 \times comp(BC)$$

Figura 1



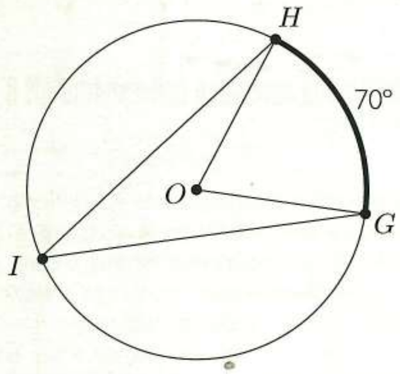
$$\overline{DF} = \overline{EF} \quad \text{ou} \quad comp(DF) = comp(EF)$$

$$ampl(\angle EFD) + ampl(\angle DEF) + 50° = 180°$$

ou

$$E\hat{F}D + D\hat{E}F + 50° = 180°$$

Figura 2



$$\widehat{GH} = 70° \quad \text{ou} \quad ampl(\widehat{GH}) = 70°$$

$$G\hat{I}H = \frac{G\hat{O}H}{2} \quad \text{ou} \quad ampl(\angle GIH) = \frac{ampl(\angle GOH)}{2}$$

Figura 3

Se pretendermos calcular a amplitude do *ângulo* EFD será mais simples escrever

«$ampl(\angle EFD) + ampl(\angle DEF) + 50° = 180°$»

ou

«$E\hat{F}D + D\hat{E}F + 50° = 180°$»,

ou simplesmente «$\hat{F} + \hat{E} + 50° = 180°$»?

Porque não manter o «traço», o «arco» e o «chapéu» por cima dos objectos quando nos referimos ao comprimento do segmento, à amplitude do arco e à amplitude do ângulo, na versão «fórmulas»? Há muito tempo que estas notações são utilizadas, sempre foram intuitivas e simplificam a escrita. Em relação à figura 3 quais são as notações mais simples?

Para representar o comprimento (ou norma) de um vector (ou segmento orientado), concordo com a simplificação de $||\overrightarrow{AB}||$ para $|\overrightarrow{AB}|$ pois o símbolo de *módulo* representa a distância entre dois pontos e é um conceito que se mantém à medida que se desenvolve o sentido do número (até aos números complexos), ampliando-se os campos de aplicação, inclusive à Física.

Para além das notações, que podem ser simplificadas (desde que não suscitem dúvidas) à medida que se progride na escolaridade, é importante não esquecer as definições. As definições, que nos primeiros anos podem parecer muito gerais, também vão sendo refinadas à medida que se progride no conhecimento. Os artigos do GTG — *Sobre as definições (I)* e *(II)* — publicados nos números 90 e 93 da *Educação e Matemática* pretendem lançar a discussão sobre as definições em Geometria. Lendo estes artigos, ficamos com a impressão de que as definições em Matemática nunca são absolutas ou, de outra forma, podem ser aquilo que nós quisermos que sejam. Então a definição de triângulo não é única? E o que é um polígono? Aceitando que a figura 4 representa um quadrilátero, como definir o seu interior? E a sua área? Apenas mais dois exemplos para discussão: Um triângulo equilátero também é isósceles? Quantos triângulos há na figura 5?

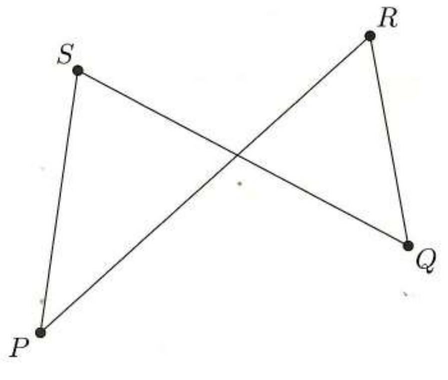


Figura 4

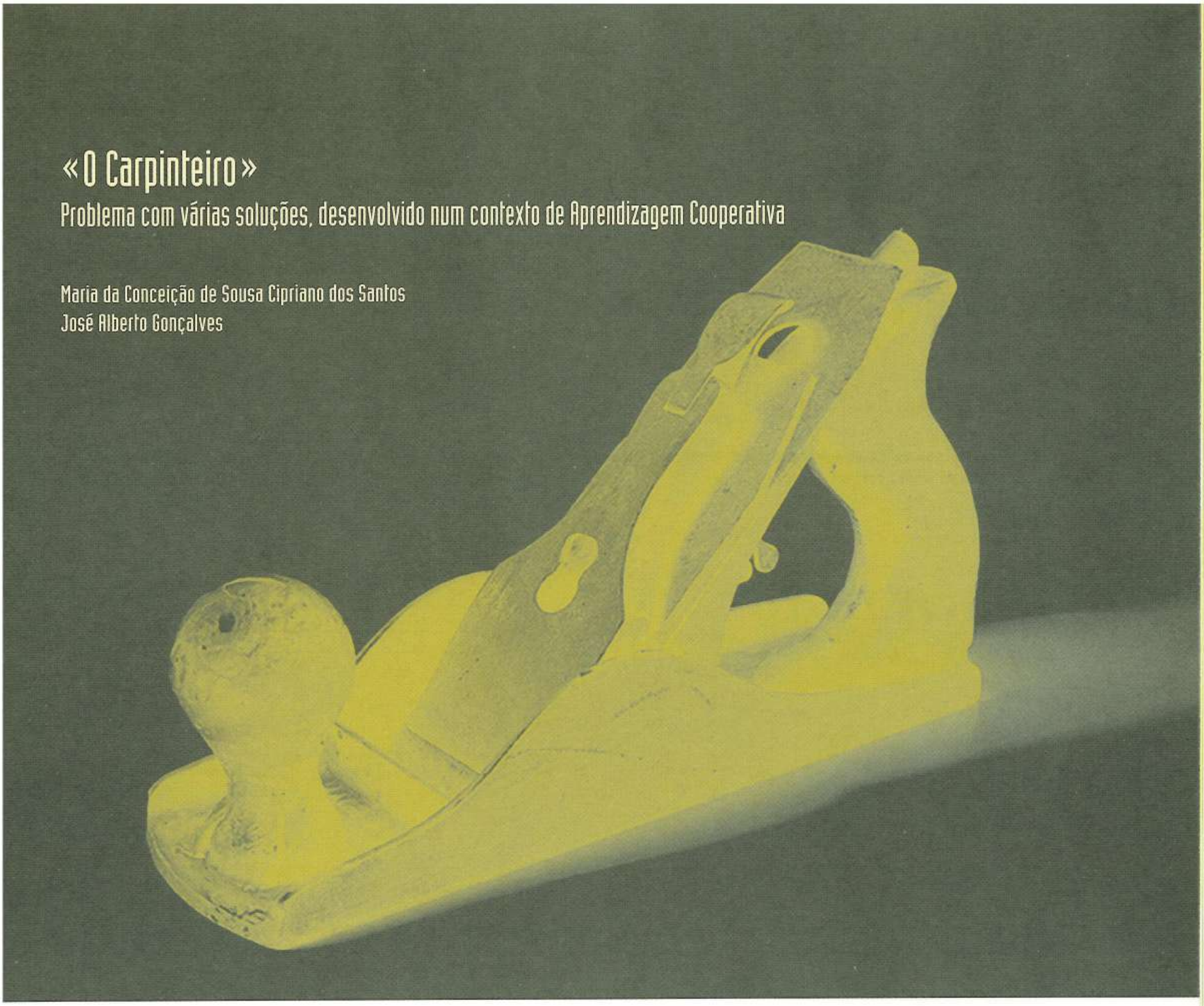
Figura 5

José Avelino Carmo
EB 2,3/S de Arcos de Valdevez

«O Carpinteiro»

Problema com várias soluções, desenvolvido num contexto de Aprendizagem Cooperativa

Maria da Conceição de Sousa Cipriano dos Santos
José Alberto Gonçalves



No presente artigo, é nosso intuito dar a conhecer uma compilação de vários episódios cujo objectivo principal era investigar o modo como os alunos resolviam um problema não rotineiro, com várias soluções, e as potencialidades pedagógicas da aprendizagem em equipa cooperativa. O trabalho de campo foi desenvolvido durante o ano de 2006 (junto de várias turmas do 1.º ciclo) e em 2008 (junto de duas turmas do 5.º e 6.º anos, respectivamente).

Embora tenhamos aplicado o problema a alunos do 1.º e 2.º ciclos e neste trabalho descrevamos e analisemos as estratégias dos alunos de ambos os ciclos, o enfoque na aprendizagem cooperativa será dado aos alunos do 6.º ano.

Antes de tudo, teceremos breves considerações sobre a importância da aprendizagem em equipas cooperativas e sobre a resolução de problemas.

Resolução de Problemas

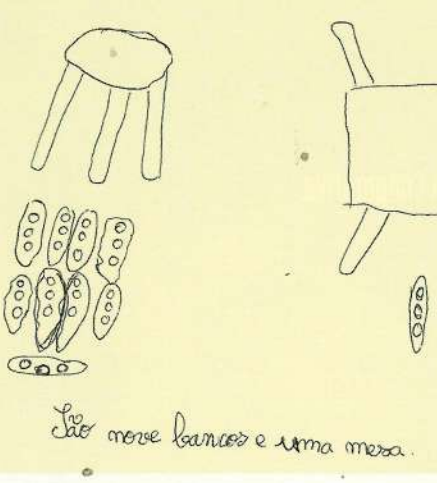
A resolução de problemas é uma capacidade transversal que deve estar sempre presente nas aulas de Matemática, mas mais importante ainda é a forma como a sua abordagem é feita na aula. O clima criado pode influenciar positiva ou negativamente a disposição dos alunos face à resolução de problemas, à auto-confiança, ao interesse, à perseverança, às crenças e à sua flexibilidade de pensamento.

Quando os professores assumem a resolução de problemas na sua prática pedagógica, contextualizam a aprendizagem dos alunos e, concomitantemente, permitem aquisições fundamentais às aprendizagens matemáticas.

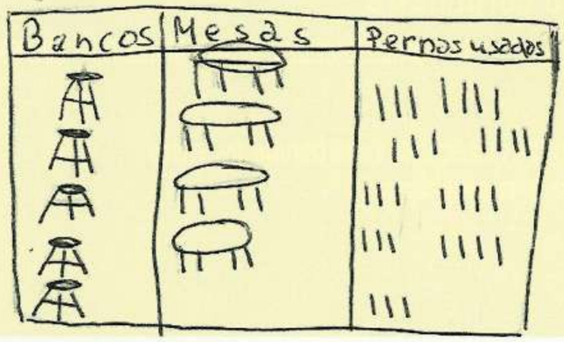
Quando a resolução de problemas se alia ao trabalho cooperativo, gera-se um processo afectivo e social de interacções onde a partilha de ideias e todos os valores associados à cooperação dão lugar a aprendizagens únicas e especiais.

No trabalho de grupo, amplamente defendido pela NCTM (1991), destaca-se o papel da aprendizagem cooperativa no desenvolvimento da comunicação, da sociabilidade e da capacidade de resolução de problemas.

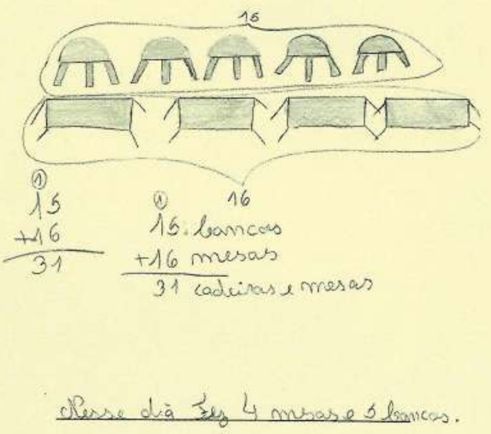
Para Jean Lave e Etienne Wenger (1991:29), a dimensão social não é uma condição periférica da aprendizagem, mas sim uma condição intrínseca a essa mesma aprendiza-



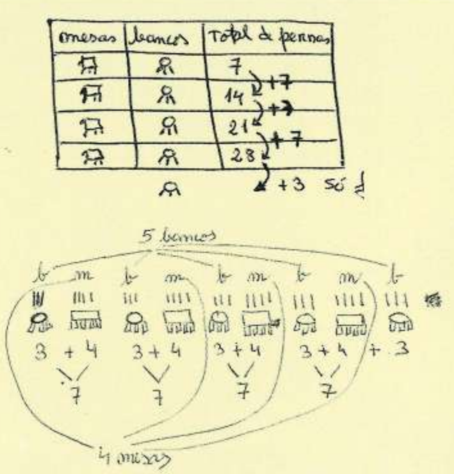
Ex.1.—Desenham um banco e fazem 9 grupos de três pernas. Desenham uma mesa e fazem 1 grupo de 4 pernas.*



Ex.2.—Constroem uma tabela onde colocam uma coluna para os bancos, uma para as mesas e uma para o total de pernas usadas em cada conjunto.*



Ex.5.—Desenham 5 bancos e 4 mesas, seguindo-se a adição do total de pernas dos bancos com o total de pernas das mesas.*



Ex.6.—Constroem uma tabela e um esquema onde fazem a contagem de 7 em 7 (pernas de uma mesa + pernas de um banco) e no final apenas aparece um banco porque sobram 3 pernas.*

gem, pelo que, para estes autores, «o significado da aprendizagem é configurado através de um processo de tornar-se um participante (*full*) na prática social» (cit. por Fernandes, 1998:35). De acordo com esta perspectiva de participação, a aprendizagem é «concebida como um processo de tornar-se membro de uma comunidade. No caso particular da Matemática, tornar-se membro de uma *comunidade matematizada*» (Fernandes, 1998:31) é o pré-requisito mais importante para aprender. Para além de favorecer competências acerca de conteúdos matemáticos, a aprendizagem cooperativa também nos ensina muito acerca de nós próprios, acerca dos outros e das interacções sociais.Os alunos sentem a sua própria evolução e a sua responsabilidade na evolução dos colegas, aliando isso ao prazer de participar/descobrir estratégias e à criação das ideias matemáticas diversificadas, como evidenciam os seguintes depoimentos de alunos do 6.° ano, em mini-entrevistas efectuadas:

«... Eu gosto de trabalhar em grupo, assim a gente aprende mais coisas... diferentes maneiras de pensar da nossa....»

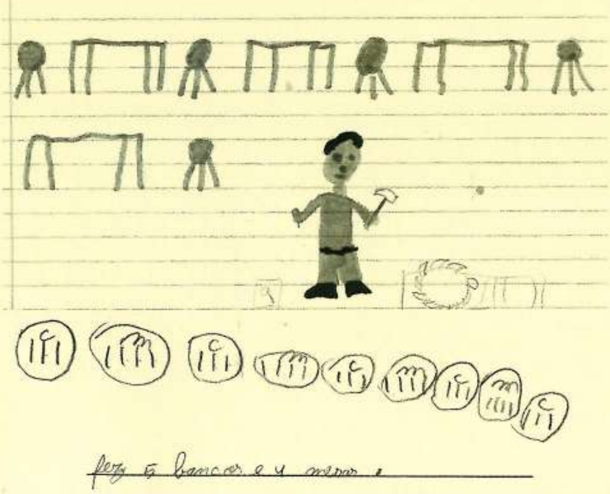
«em grupo a gente ajuda-se e é mais fácil fazer as coisas... temos ajuda e ajudamos... eu decubro uma coisa e eles ajudam-me... e assim fazemos mais coisas.»

«Eu prefiro estar em grupo... Atão não se está sozinho! é mais divertido e aprende-se mais...».

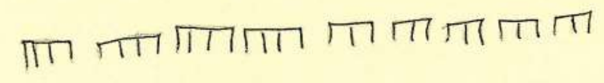
«Em equipa coopero com os colegas. Uns têm raciocínios diferentes dos outros... e o trabalho fica mais completo...mais rico.»

O Problema

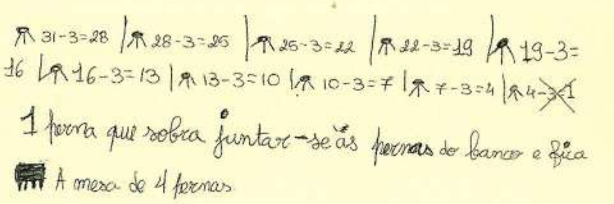
«Um carpinteiro recebeu uma encomenda para fazer mesas de 4 pernas e bancos de 3 pernas. Na sua carpintaria havia 31 pernas para realizar esse trabalho.



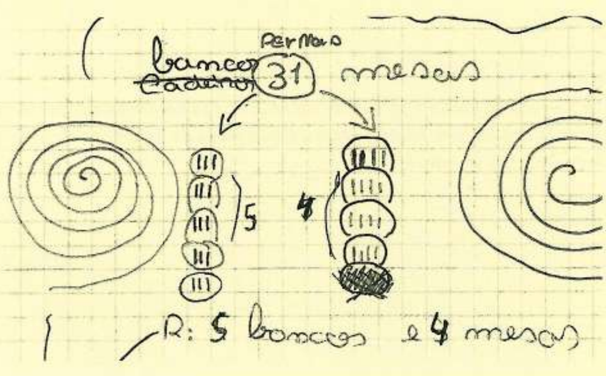
Ex. 3.—Desenham 1 banco e 1 mesa até esgotar o total de pernas.*



Ex.4.—Desenham 4 mesas e depois 5 bancos.**



Ex.7.—Partem do total de pernas 31 e vão subtraindo 3 (nº de pernas de um banco), continuando a subtrair 3 a cada diferença até não ser possível. Assim como não pode sobrar pernas, a última subtracção terá que ser por 4. Associam o desenho para ilustrar o objecto a que se referem.*



Ex. 8.—Este grupo dividiu as 31 pernas em duas partes e desenhou-as.**

Utilizando TODAS as pernas, quantas mesas e cadeiras conseguiram fazer?»

Constituição das equipas

Os alunos foram divididos em grupos heterogéneos em que todos os elementos da equipa trabalharam para um fim comum. A cada aluno foi atribuído um papel (que é distinto do papel dos outros elementos do grupo, mas que se completaram e a liderança foi partilhada). Foi criado um clima de interdependência positiva (de forma a que os estudantes sintam que ninguém terá sucesso a não ser que todos o tenham). Os alunos foram conduzidos a partilhar com os colegas os seus raciocínios (explicação simultânea).

As diferentes Resoluções do Problema

O problema apresentado pretendeu contribuir para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas centrando-se na abordagem em quatro fases de George Polya (1973), contemplando-se algumas heurísticas que pretenderam ajudar os alunos na compreensão do problema, na delineação de um plano, na sua execução e na fase de verificação. No entanto, neste artigo, é dado ênfase ao trabalho estratégico, tendo sido registados processos que recorreram ao uso de desenhos, algoritmos convencionais, esquemas, tabelas ou através da oralidade.

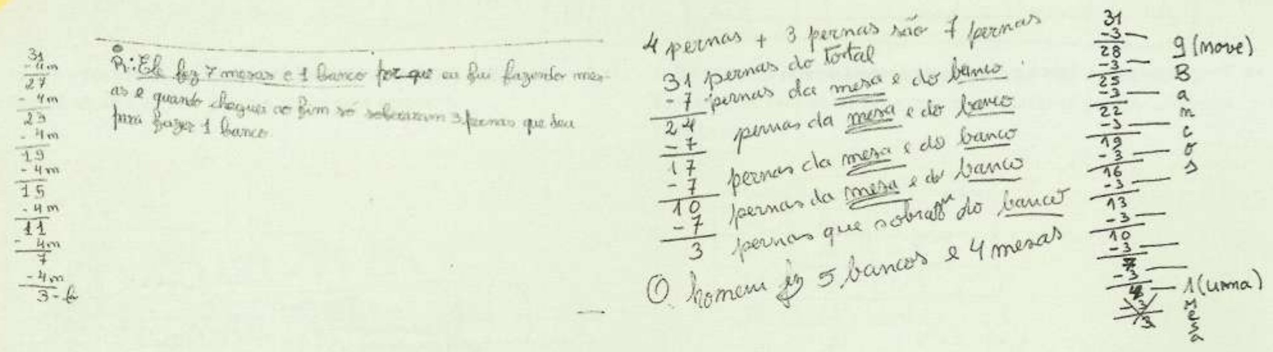
Vejamos, então, algumas estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema apresentado:

Desenhando/desenhando e operando

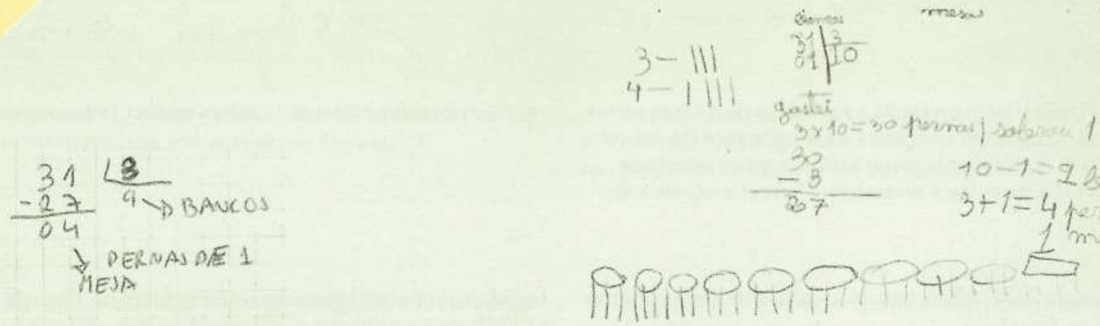
Os alunos recorreram ao desenho para : interpretar o problema; registar/representar as estratégias de resolução; e comunicar ideias (fornecendo pistas sobre as suas ideias matemáticas). Algumas crianças iniciaram os seus registos com desenhos e completaram-nos usando números. Algumas vezes os desenhos surgiram para conferir respostas.

Usando o Algoritmo

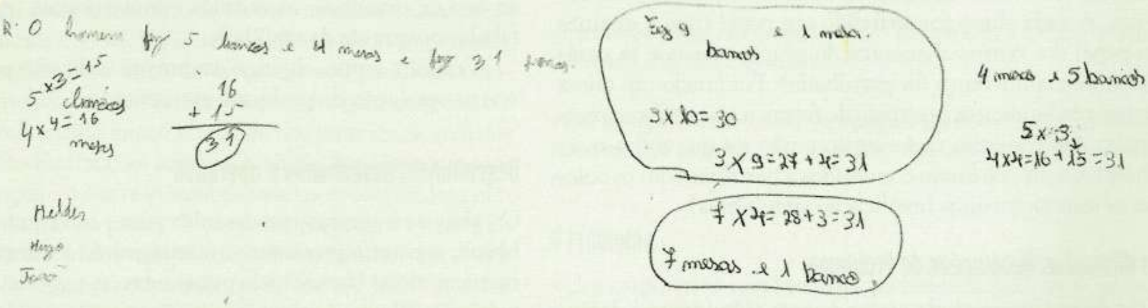
Houve crianças que utilizaram uma linguagem matemática mais formal usando algoritmos, sendo o desenho apenas um meio de ilustrar o problema ou de validar as suas soluções.



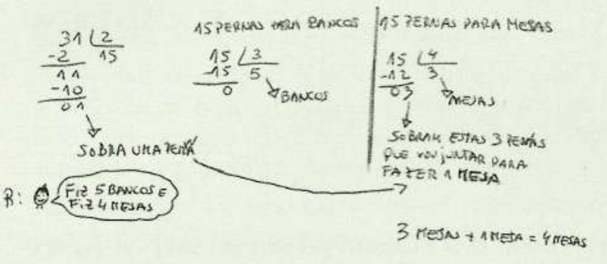
Ex.9.—Partiram de 31 [total de pernas] e recorreram à subtracção sucessiva de 4 [número de pernas da mesa] ou de 3 [número de pernas do banco] ou de um conjunto de 7 [pernas da mesa+pernas de banco].*



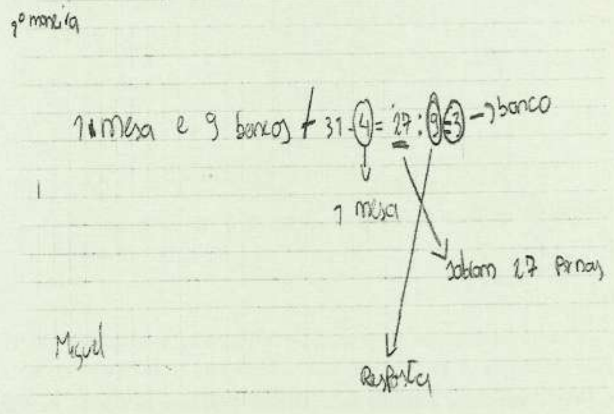
Ex.12.—A partir do total de pernas [31] fazem uma divisão por 3 [número de pernas de um banco], dando 10 bancos. Como sobra 1 perna [resto da divisão de 31 por 3] subtraem 1 banco aos 10 bancos, ficando com 9 bancos [27 pernas], depois adicionam as 3 pernas do banco à perna que tinha sobrado inicialmente. A estratégia é ilustrada com desenhos.**



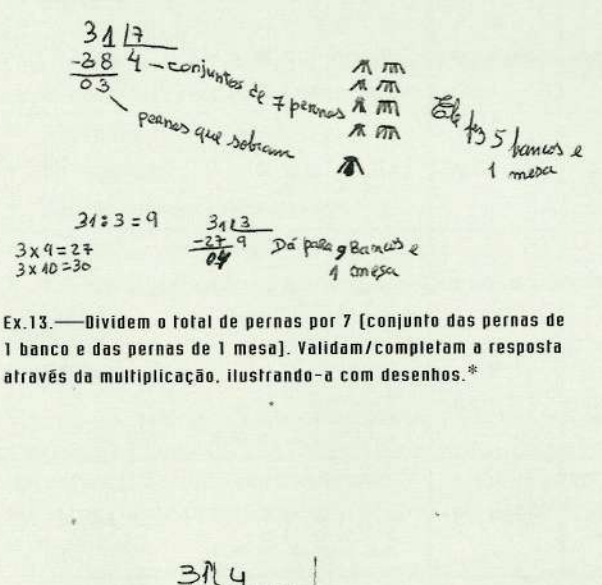
Ex.14.—Recorrem à multiplicação do número de bancos e de mesas pelo número de pernas de cada um, adicionando o total de pernas. Recorrem à tentativa e erro, ao cálculo mental e à estimativa.*



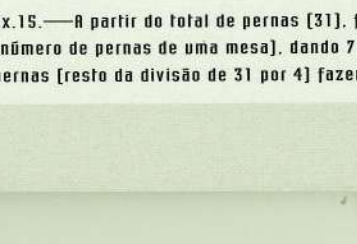
Ex.10.—A partir do total de pernas (31) formam dois grupos, ficando cada um com 15 pernas, sobrando 1 perna (resto da divisão de 31 por 2). Dividem um grupo de 15 pernas por 3 (número de pernas de um banco), dando para 5 bancos. Dividem o outro grupo de 15 pernas por 4 (número de pernas de uma mesa) dando para 3 mesas, mas sobrando 3 pernas (resto da divisão de 15 por 4). Juntaram esta perna com a outra que tinha sobrado no início fazendo uma nova mesa. Aqui destaca-se a importância do resto numa divisão.*



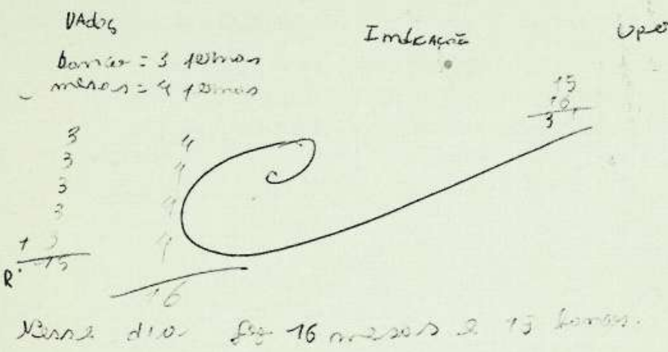
Ex.11.—Retiram 4 às 31 pernas para formarem 1 mesa. Depois dividem as 27 pernas, que restaram, por 9 e assim validam a resposta inicial.**

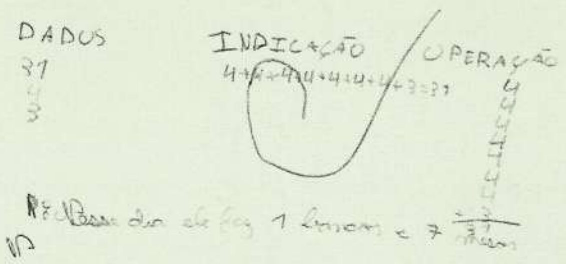


Ex.13.—Dividem o total de pernas por 7 (conjunto das pernas de 1 banco e das pernas de 1 mesa). Validam/completam a resposta através da multiplicação, ilustrando-a com desenhos.*



Ex.15.—A partir do total de pernas (31), fazem uma divisão por 4 (número de pernas de uma mesa), dando 7 mesas. Como sobram 3 pernas (resto da divisão de 31 por 4) fazem um banco.*





$7+7=7+7=21+7=28+3=31$

3+4 / 3+4 / 3+4 / 3+4

$3+3=6+3=9+3=12+3=15+3=18+3=21+3=24+3=27+4=31$

$3\times9=27$ $4\times1=4$

SOLUÇÃO 9 BANCOS E 1 MESA

Ex.16.—Recorrem à adição sucessiva de 3 [pernas do banco], de 4 [pernas da mesa]* ou de 7 [conjunto de pernas de 1 mesa + pernas de 1 banco]**. Aqui verifica-se a mesma estratégia para três soluções diferentes.

bancos	mesas	soma de pernas	
1 1 × 3 = 3 31 − 3 = 28	7 28 : 4 = 7	31 7 × 4 = 28 1 × 3 = 3 28 + 3 = 31	dá
2 2 × 3 = 6 31 − 6 = 25	6 25 : 4 = 6	30 6 × 4 = 24 2 × 3 = 6 24 + 6 = 30	não dá
3 3 × 3 = 9 31 − 9 = 22	5 22 : 4 = 5	29 5 × 4 = 20 3 × 3 = 9 20 + 9 = 29	não dá
4 4 × 3 = 12 31 − 12 = 19	4 19 : 4 = 4	4 × 4 = 16 4 × 3 = 12 16 + 12 = 28	não dá
5 5 × 3 = 15 31 − 15 = 16	4 16 : 4 = 4	4 × 4 = 16 5 × 3 = 15 16 + 15 = 31	dá
6 6 × 3 = 18 31 − 18 = 13	3 13 : 4 = 3	30 3 × 4 = 12 6 × 3 = 18 12 + 18 = 30	não dá

bancos	mesas	Soma de pernas	
7 7 × 3 = 21 31 − 21 = 10	2 10 : 4 = 2	29 2 × 4 = 8 7 × 3 = 21 21 + 8 = 29	não dá
8 8 × 3 = 24 31 − 24 = 7	1 7 : 4 = 1	28 1 × 4 = 4 8 × 3 = 24 24 + 4 = 28	não dá
9 9 × 3 = 27 31 − 27 = 4	1 4 : 4 = 1	31 1 × 4 = 4 9 × 3 = 27 27 + 4 = 31	dá

Ex.17.—Aqui, foram-se testando várias possibilidades encontrando as três soluções do problema.**

Construindo uma tabela com todas as soluções

Uma minoria de alunos utilizou uma tabela para organizar toda a informação e, por fim, proceder à sua interpretação, chegando a todas as soluções do problema.

Notas sobre as estratégias utilizadas pelos alunos

O problema foi encarado como um desafio e houve o reconhecimento, por parte dos alunos, de que a utilização de diferentes estratégias pode conduzir ao mesmo resultado e que um problema pode ter mais do que uma solução:

- A maioria dos alunos do 1.° ciclo utilizou o desenho como recurso para chegar a uma solução;
- O uso do algoritmo da divisão, no 1.° ciclo, foi utilizado pelos alunos que gostam de realizar operações;
- A solução intermédia (5 bancos e 4 mesas) foi a que a maioria das crianças encontrou em primeiro lugar, pensamos que isto está relacionado com a procura de um equilíbrio entre o número de bancos e de mesas;
- As crianças do 1.° ciclo só procuraram outra solução quando foram alertadas para essa possibilidade;
- Os alunos do 2.° ciclo reconheceram que este problema poderia ser resolvido através dos múltiplos de 3, 4 ou 7.
- Os alunos reconheceram que, neste caso, o resto de uma divisão era muito importante para a solução do problema.
- A maioria das crianças ficou muito entusiasmada por encontrar mais do que uma solução para o mesmo problema.

Com os alunos do 2.° ciclo, durante a análise das estratégias, foram estabelecidas algumas conexões, tais como:

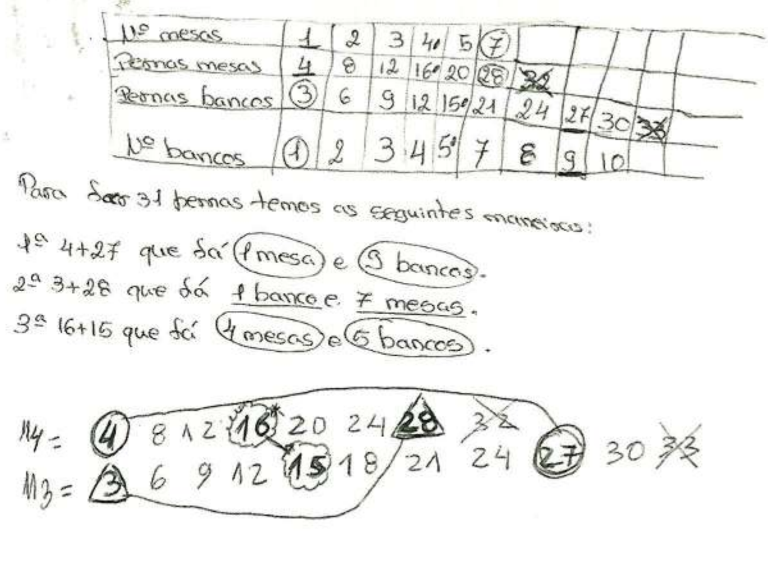
- Múltiplos de 3, de 4 e de 7;
- Divisores;
- Adição sucessiva/multiplicação;
- Subtracção sucessiva/divisão;
- Divisão (exploração da importância do resto de uma divisão).

Considerações finais

Este tipo de problema não convencional, tal como nos dizem Smole e Diniz (2001), rompe com a crença de que todos os problemas têm uma única resposta e de que há sempre uma única maneira para resolver um problema (geralmente com contas).

Trabalhar este tipo de problemas permite que o aluno perceba que resolver problemas é um processo investigativo no qual ele participa como ser pensante e produtor do seu próprio pensamento.

Este problema, associado ao trabalho em equipa cooperativa, conduziu os alunos a produzirem matemática e a vibrarem com suas criações e descobertas. Houve uma relação que deu prazer, motivadora e questionadora, que envolveu a criatividade e a liberdade para utilizar as mais diversas estratégias, libertando-os das imposições formais cuja presença os pode inibir/limitar aquando da resolução de problemas.



Ex.18.—Constroem uma tabela/esquema onde registam os múltiplos de 4 [número de pernas de uma mesa]* e os múltiplos de 3 [número de pernas de um banco]**. Esta estratégia possibilita a descoberta das três soluções do problema e revela uma abordagem clara aos conhecimentos sobre os múltiplos de um número.

A exploração das várias estratégias realizadas pelos alunos ao resolver o problema, é a prova de que este é um contexto rico de mobilização e desenvolvimento do pensamento matemático.

Em síntese, o estudo por nós desenvolvido, evidencia indícios de que a aprendizagem cooperativa na aula de Matemática representa um contexto rico, motivador e desafiador de aprendizagem tanto para o aluno quanto para o professor.

Notas

* Elaborado por alunos do 1.° ciclo.

** Elaborado por alunos do 2.° ciclo.

Referências Bibliográficas

Fernandes, E. (1998). *A aprendizagem da Matemática escolar num contexto de trabalho cooperativo*. Tese de mestrado. Lisboa: APM

Lave, J. & Wegenr, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate peripherial participation*. Cambridge University Press.

Santos, M.C. (2005). *A Aprendizagem Cooperativa em Matemática como Alternativa Pedagógica: O Método «Teams Games Tournaments»*. Tese de mestrado. Faro: Universidade do Algarve.

Smole, K & Diniz, M. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas*. Porto Alegre: Artmed.

Maria da Conceição de Sousa Cipriano dos Santos
Escola EB2,3 do Montenegro

José Alberto Gonçalves
Universidade do Algarve

ProfMat2010, Aveiro

Pela primeira vez, o ProfMat vai realizar-se em Aveiro. Será nos dias 1, 2 e 3 de Setembro, seguido do SIEM e dos Cursos, que terão lugar nos dias 4 e 5. A comissão organizadora está a elaborar o programa que, à semelhança de anos anteriores, contará com sessões plenárias, painéis e conferências com discussão entre outros.

Para este ano, vão assumir especial importância (e referidos a Portugal) os temas sobre o futuro da educação (sempre), a história da matemática e do seu ensino, a animação matemática e a matemática fora das aulas, a experimentação do novo programa do ensino básico e a sua avaliação, as variantes de matemática do ensino secundário e a formação de professores, etc.

Este encontro caracteriza-se pela participação intensa de cada um e de todos os grupos de professores de todos os níveis, desde o pré-escolar ao ensino superior. Assim, convidamos todos os educadores e professores de matemática a colaborar na execução deste programa, disponibilizando-se a dinamizar sessões práticas, comunicações em simpósios, apresentação de posters, sessões especiais, exposições, etc.

Está também a ser preparado um programa paralelo para acompanhantes, que terão desta forma oportunidade de conhecer melhor a beleza da região e seus costumes.

Para os participantes, as surpresas também serão muitas dentro do programa social e cultural!

Em breve será apresentado o programa, no site da APM, assim como outras informações respeitantes a inscrição/alojamento. Esteja atento!

Esperamos poder proporcionar-vos uma estadia, muito «doce», com muito sol e água.

Aveiro aguarda-vos com muito entusiasmo!

XXI SIEM, Setembro de 2010 — Universidade de Aveiro

O XXI SIEM – *Seminário de Investigação em Educação Matemática* – vai decorrer, nos dias 4 e 5 de Setembro de 2010, na Universidade de Aveiro. No seguimento do que tem acontecido em anos anteriores, o XXI SIEM pretende constituir-se como um espaço de divulgação e discussão de temáticas actuais relativas à investigação em Educação Matemática.

O Seminário terá três conferências plenárias, uma delas a cargo de um convidado estrangeiro, um painel temático, comunicações e posters. No momento em que a Educação em Matemática ganha em Portugal um dinamismo considerável — patente, por exemplo, na criação de um novo Programa de Matemática do Ensino Básico em fase de generalização, na implementação de um Programa de Formação Contínua em Matemática de Professores dos 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico em progresso, na construção de novos materiais didácticos e no desenvolvimento de projectos de investigação — convidam-se professores e investigadores a apresentarem os seus trabalhos já realizados ou em curso no âmbito da Educação em Matemática.

As inscrições, bem como as propostas de participação (comunicação oral e comunicação em poster), decorrem até 30 de Abril de 2010, no sítio do encontro (`http://siemxxi.apm.pt`). O texto integral da comunicação e o resumo do conteúdo do poster devem ser enviados para `siemxxi@apm.pt`, até à mesma data.

XX Seminário de Investigação em Educação Matemática

Com o objectivo que o caracteriza à 20 anos, o de constituir um espaço de discussão e divulgação de temáticas de investigação em Educação Matemática, decorreu a 1 e 2 de Setembro de 2009, na Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, o XX SIEM. Promovido pelo Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) da APM, envolveu a participação de investigadores nacionais e internacionais e professores dos diversos níveis de ensino. À semelhança dos anos anteriores, este seminário integrou três conferências plenárias, o espaço GTI, um painel e 5 simpósios temáticos onde os participantes tiveram oportunidade de apresentar e/ou discutir trabalhos de investigação em curso, bem como, resultados e conclusões de investigações, sugerindo caminhos a seguir. Este ano, recuperou-se a presença dos posters neste encontro, com a criação de um espaço para a sua apresentação.

Na primeira conferência plenária, intitulada *Mathematics Teachers, Students Teachers and Ability to Notice*, Nad'a Stehlíková da Charles University in Prague, Faculty of Education, comunicou resultados preliminares da sua investigação em curso, sobre a forma como futuros professores e professores de Matemática interpretam os acontecimentos que ocorrem em aulas que observam. Na segunda conferência plenária, Isabel do Vale da Escola Superior de Viana do Castelo, sob o título *Das Tarefas com Padrões Visuais à Generalização*, evidenciou a importância da visualização exemplificando, com alguns episódios de sala de aula, como a resolução de tarefas desafiantes que envolvem padrões em contextos visuais/figurativos, por alunos do 1.º ciclo do ensino básico, permite a generalização e contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Por último, Helena Martinho do Centro de Investigação da Universidade do Minho, sob o título A *Comunicação na Aula de Matemática: o papel do professor*, apresentou o papel do professor relativamente à comunicação na sala de aula de Matemática e o modo como esse papel e as práticas subjacentes podem ser reformulados pelos professores através de um projecto de trabalho colaborativo. Fundamentou-se num estudo que efectuou com três professoras de Matemática do 2.º e 3.º ciclos do ensino básico em torno da comunicação matemática na sala de aula.

O espaço GTI comportou uma entrevista ao Director da revista *Quadrante*, Henrique Guimarães, feita por Ana Boavida, também ela uma antiga directora da revista. As questões colocadas levaram a uma explanação sobre a origem desta revista de investigação, o seu percurso durante 17 anos de existência, o seu conteúdo, dificuldades com que se tem deparado, o seu público-alvo e ainda o seu futuro. Henriques Guimarães perspectiva um futuro promissor para a *Quadrante*, no entanto, alerta para a necessidade de um envolvimento e colaboração de toda a comunidade de Educadores Matemáticos, enfatizando a importância do papel desempenhado pela direcção, investigadores e Instituições de Formação.

Nos dois dias de encontro foram apresentadas 32 comunicações que integraram cinco simpósios temáticos: (1) O *Professor de Matemática: formação inicial e desenvolvimento profissional*, com dez comunicações; (2) *Ensino da Matemática: história e sociedade*, com quatro comunicações; (3) *Resolução de Problemas, Investigações e Aprendizagem da Matemática*, com onze comunicações; (4) *Avaliação e Aprendizagem*, com cinco comunicações; e (5) *Recursos Educativos no Ensino e Aprendizagem de Matemática*, com duas comunicações.

No simpósio 1, coordenado por Luís Menezes e Rosa Antónia, discutiram-se questões relativas à formação e desenvolvimento profissional de professores de Matemática, numa tentativa de clarificação do conceito de desenvolvimento profissional e da sua relação com o de formação, de identificação de formas de o promover e de identificação de desafios e oportunidades que se lhe colocam actualmente em Portugal. No simpósio 2, coordenado por Darlinda Moreira e António Vara Pires, discutiram-se questões relacionadas com a sociedade e história da Matemática consideradas relevantes, para uma melhor compreensão dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. No âmbito da sociedade, foi discutido como tarefas matemáticas contextualizadas na realidade e na educação para a cidadania podem influenciar uma visão positiva da Matemática. No âmbito da história da Matemática, o enfoque foi para a Matemática Moderna, numa tentativa de se identificar os seus efeitos na cultura escolar. De salientar ainda, uma discussão á volta do percurso profissional de Sebastião e Silva, com o objectivo de se identificarem especificidades de uma concepção pedagógica, suas potencialidades, desígnios e limites. O simpósio 3, coordenado por Ana Boavida e António Domingos, abordou a resolução de problemas e as investigações matemáticas a partir de múltiplas perspectivas presentes em diversos trabalhos de investigação, que convergem para uma clarificação dos processos de aprendizagem da Matemática. Assim, foram discutidas estratégias e dificuldades evidenciadas pelos alunos na resolução de problemas e desenvolvimento do sentido do número; a comunicação matemática, representações e linguagem; e tarefas de investigação e raciocínio matemático. No simpósio 4, coordenado por Paulo Dias, debateram-se questões à volta da avaliação formativa, da avaliação ao serviço das aprendizagens, para orientar e melhorar a aprendizagem, para informar e orientar os professores e os alunos, o seu efeito regulador nas aprendizagens e a interacção na sala de aula, o feedback, o diálogo e o envolvimento activo do aluno. Ficou evidente que a avaliação pode ser uma ferramenta ao serviço da aprendizagem, nomeadamente na regulação e auto-regulação das aprendizagens. No simpósio 5, coordenado por Floriano Viseu, foram debatidas questões ligadas à utilização de materiais didácticos nas aulas de Matemática do 1.º Ciclo.

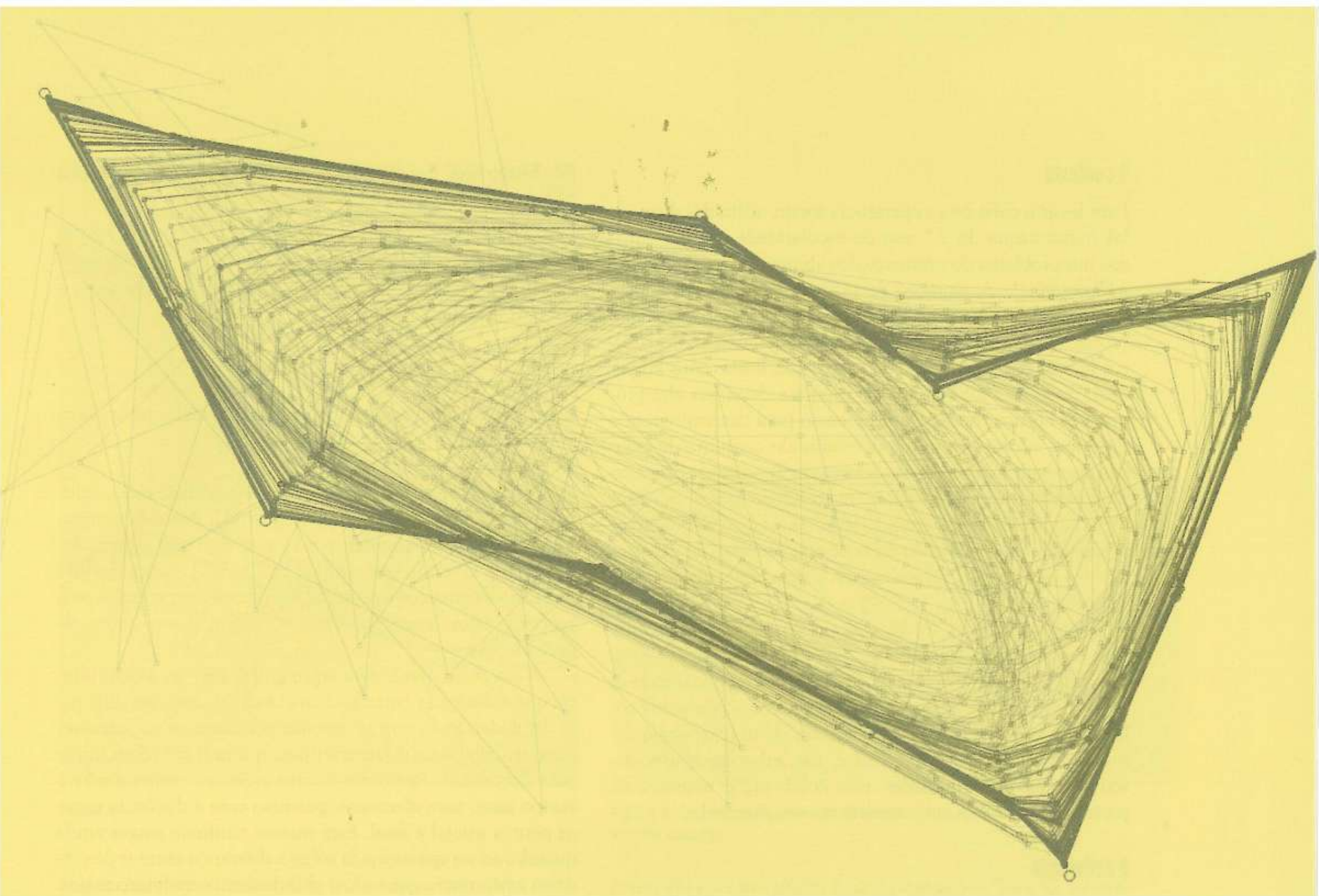
No espaço dedicado à apresentação de posters fomos confrontados com uma diversidade de estudos sobre temas do ensino básico e do ensino secundário, da prática pedagógica do professor de Matemática, da educação de adultos e da aplicação da Matemática a situações do dia-a-dia.

Por último, o painel coordenado por Rosa Ferreira, contou com a presença de Lurdes Serrazina, Cristina Loureiro e Carmo Pereira para debater a *Formação contínua de professores de Matemática: Conquistas e desafios*. Deste debate saiu a ideia de que este programa de formação tem sido um manancial para a investigação e investigadores, já que a investigação entrou na sala de aula, tendo mesmo alguns professores ganho a dimensão de investigadores. Foi também discutida a dificuldade que se continua a sentir na articulação entre os professores dos diferentes ciclos, principalmente, entre o 1.º e 2.º ciclos e ainda, entre este programa de formação e o Plano de Acção para a Matemática. Embora haja a convicção de que este programa de formação já gerou mudança, existe a certeza de que ao nível das concepções e práticas, essa mudança é lenta, sendo ainda necessário muita persistência e trabalho.

Mais uma vez, o GTI proporcionou um espaço de partilha de estudos e experiências e a oportunidade de conhecer as prioridades da agenda de investigação deste domínio científico. Esta oportunidade não se limita à presença no encontro, mas alarga-se à consulta das actas resultantes do encontro.

Como balanço do encontro, podemos afirmar que a qualidade dos trabalhos apresentados foi positiva. Uma das razões, entre outras, que apontamos para esta realidade foi a dedicação demonstrada pelos dinamizadores dos simpósios, que aceitaram a tarefa de gerir a revisão das comunicações propostas, assim como dos posters. Este parece ser o caminho a seguir de futuro procurando, não só assegurar a qualidade das intervenções nos simpósios, mas também aprofundar a reflexão em torno dos diferentes temas de investigação desenvolvida em Portugal e lá fora. Bem hajam e até ao XXI SIEM em Aveiro, nos dias 4 e 5 de Setembro de 2010!

Hélia Pinto
Instituto Politécnico de Leiria, ESECS
Cláudia Canha Nunes
Escola EB 2/3 Fernando Pessoa, Lisboa



O problema do caixeiro-viajante: uma abordagem no 3.º ciclo

Rui Feiteira
Carlos Miguel Ribeiro

No programa de Matemática para o ensino básico, em todos os ciclos, podemos encontrar referências à necessidade de utilizar problemas do contexto e realidade próxima do dia-a-dia dos alunos, bem como ao facto de os alunos deverem modelar matematicamente estas situações. No novo do programa de matemática (Ponte *et al.*, 2007), encontramos também, como aliás não poderia deixar de ser, referências a esta necessidade.

> «Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações. Isto é, devem ser capazes de: (...) usar representações para modelar, interpretar e reflectir sobre situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais.» (p. 5)

Esta modelação matemática de situações diárias poderá ser efectuada utilizando a teoria de grafos, porém, nos programas de Matemática, não é realizada referência alguma à possibilidade da sua utilização, exceptuando-se o programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) (DES, 2001).

Imbuídos num espírito de aventura e de vontade de proporcionar aos alunos vivências ricas e diversificadas, resolvemos unir esforços e desenvolver um conjunto de tarefas que possibilitasse aos alunos novas experiências e situações relacionando a proporcionalidade directa (tema do actual programa do 7.º ano) com a utilização de diversas representações matemáticas, nomeadamente os grafos. Aulas que nos permitem encorajar os alunos a criar, explorar e explicar distintas representações que lhes são efectivamente úteis e possuem para si significado, transformam-se em aulas em que a atribuição, discussão e negociação de significados representa um papel fundamental no processo de aprendizagem dos alunos, permitindo que estes não se limitem a considerar como suas as representações do professor (Doerr & English, 2006).

Neste texto apresentamos um breve relato das actividades desenvolvidas pelos alunos aquando da resolução da tarefa em que relacionam a proporcionalidade directa com a teoria de grafos.

O contexto

Para levar a cabo esta experiência foram utilizadas duas aulas numa turma do 7.º ano de escolaridade onde se utilizou um problema do contexto dos alunos (relacionado com o *Zoomarine*). A situação proposta relacionava-se com a proporcionalidade directa, mais propriamente com escalas (conteúdo que a turma estava a abordar naquele momento), e a leitura e interpretação de mapas (do Barlavento Algarvio), onde lhes foi facultada a hipótese de serem eles próprios os construtores de um processo para determinarem a distância mínima entre um determinado conjunto de cidades, por onde passam os autocarros do *Zoomarine*. Este tipo de problemas é denominado, em teoria de grafos, por Problema do caixeiro-viajante. É de salientar que, em momento algum, previamente ou durante este processo de construção, foi introduzido, formalmente, algum conceito de teoria de grafos.

Estas actividades foram realizadas por vinte e um alunos, de quatro nacionalidades diferentes com idades compreendidas entre os doze e os catorze anos, encontrando-se os alunos distribuídos por grupos. A tarefa foi preparada colaborativamente entre os dois autores deste texto (que denominamos aqui por P1 e P2) e, nas aulas em que se desenvolveram as actividades, esta colaboração manteve-se, participando ambos activamente no seu desenrolar.

A actividade

Para o desenvolvimento da actividade foi distribuído parte de um mapa do Algarve, à escala, e um conjunto sequenciado de questões a que os alunos teriam de responder com o objectivo final de determinar um percurso mínimo para os autocarros do *Zoomarine* de modo a poluírem o mínimo (consumirem a mínima quantidade de combustível ou efectuarem o número mínimo de *km*). O mapa tinha uma escala de 1:400000 (figura 1).

Na primeira actividade, os alunos, utilizando a escala, tinham de determinar as distâncias, em linha recta, entre as cidades de Portimão, Monchique e Silves, que correspondiam às cidades por onde o autocarro do *Zoomarine* teria de deslocar-se de modo a recolher os visitantes. Sem grande dificuldade, os alunos modelaram a situação, efectuaram as medições e transformaram as medidas obtidas em distâncias reais (em linha recta, utilizando a escala fornecida).

Ao efectuarem as medições e conversões, a distância real em linha recta, entre Portimão e Monchique, obtida foi de 2200000*cm*, porém um dos grupos, ao efectuar a conversão para *km*, indicou que esta distância era de 2,2*km*. Confrontado com esta resposta, o professor inquiriu-os sobre a razoabilidade da mesma, efectuando um paralelismo com uma realidade ainda mais próxima:

P1: Então qual a distância entre Portimão e Monchique?

Diogo: 2,2km.

P1: Porque dizes isso?

Diogo (indica o cálculo): Porque isto [2200000cm] são 2,2km.

P1: Então qual é a distância aqui de Portimão até à Rocha [praia da Rocha]?

Luís: Eu de skate demoro aí uma meia hora logo deve ser um km e meio...

P1: Então e acham que daqui até Monchique a distância é pouco maior?

Pedro: Não, é muito mais!

Luís: É aí umas dez vezes mais...

Diogo (indica a conversão): Então isto está mal... não podem ser 2,2km...

Ao efectuar um paralelismo com uma realidade que os alunos sentem como sua tornou-se possível, por esta comparação, levá-los a entender, por si, que algo não estava correcto na conversão que tinham realizado, permitindo-lhes deste modo uma construção de significados através dos seus próprios erros, transformando-os, assim, numa fonte de aprendizagem.

A um outro nível, num outro grupo uma das alunas referiu que a distância entre as duas cidades poderia ser diferente dependendo do sentido em que era efectuado o percurso, uma vez que vindo do interior para o litoral (de Monchique para Portimão) o percurso é feito a descer, confundindo o tempo gasto para efectuar o percurso com a distância entre os pontos inicial e final. Esta mesma confusão surgiu ainda quando, ao ser questionada sobre a diferença entre ir de carro ou a pé, referiu que indo a pé a distância era muito maior. Mais uma vez as dúvidas foram esclarecidas, mas desta feita por uma das colegas de grupo, utilizando uma situação vivida por ambas e que se prendia com o percurso que faziam para a escola — a pé ou de carro.

Depois de os alunos terem calculado todas as distâncias, e com o objectivo de os contextualizar ao problema do percurso mínimo a realizar entre três cidades (percurso mais ecológico), foi-lhes pedido que indicassem os trajectos diferentes que o autocarro poderia fazer entre as três cidades. Os alunos recorreram ao mapa para efectuarem a modelação da situação — sobrepuseram uma folha branca ao mapa, desenharam os pontos representando as cidades e uniram-nos pelos segmentos de recta que determinam as distâncias, em linha recta, entre cada par de cidades (Figura 2).

Ao efectuarem a sobreposição para modelarem a situação, os alunos evidenciam já uma compreensão intuitiva do facto de que para simplificar a situação poderiam utilizar um modelo representativo da mesma, simplificando-a.

Esta actividade não gerou dificuldade uma vez que todos os grupos indicaram os dois possíveis trajectos, para o autocarro, partindo de Portimão, dizendo inclusivamente que era apenas um, pois variava somente o sentido.

De forma a tornar a situação ainda mais real, foram introduzidas novas informações e questões, originando uma segunda tarefa. Como, na realidade, os autocarros do *Zoomarine* partem e chegam ao parque aquático que se localiza perto da Guia, os alunos foram questionados sobre que alterações teriam de fazer aos percursos indicados anteriormen-

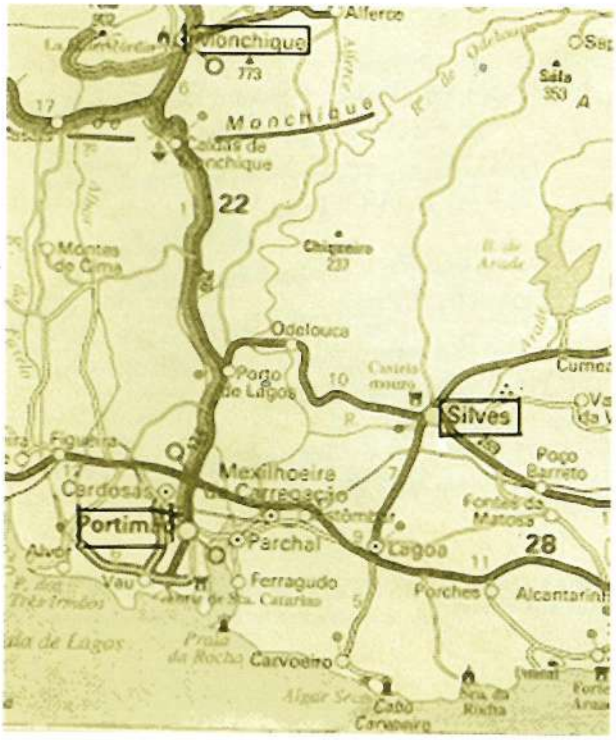


Figura 1

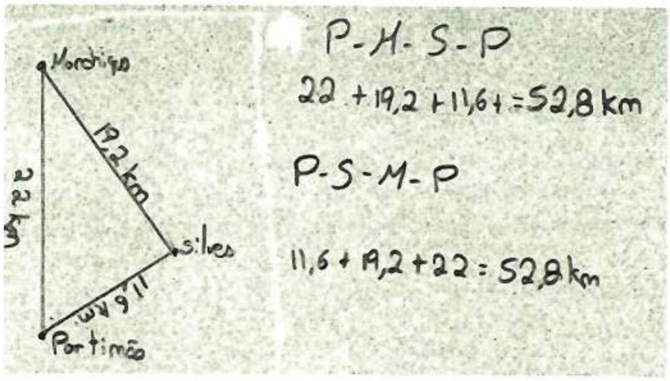


Figura 2. Trajecto[s] possível[is] entre as três cidades

te para os adequarem à realidade, ou seja, o autocarro partir e chegar à Guia.

Esta nova tarefa (levar os alunos a adaptar um enunciado à realidade efectiva e que é do seu contexto) estava directamente relacionada com os nossos objectivos de introdução do estudo dos grafos neste ano de escolaridade e também com o desejo de percebermos até que ponto estes alunos estariam aptos a modelar uma situação do seu contexto e a construir os processos (algoritmos) que lhes permitissem determinar o percurso mais curto entre um determinado conjunto de cidades (que no caso modelaram por pontos). Uma vez que tinham sido os próprios alunos os dinamizadores das discussões ocorridas, não sendo portanto possível que tomassem para si as representações dos professores, quando lhes foi solicitado que indicassem os percursos possíveis para o autocarro, de forma a garantirem o percurso mínimo, modelaram a situação sem dificuldades.

Para determinar o percurso mínimo os grupos seguiram duas estratégias distintas: (a) determinar todos os percursos que o autocarro poderia fazer para depois escolher aquele que melhor serviria os seus interesses e (b) encontrar uma estratégia *«rápida»* que lhes indicasse o melhor percurso.

A primeira hipótese implicava o registo de todos os percursos possíveis entre estas quatro cidades (uma vez que o autocarro iniciava e terminava a viagem na mesma cidade, passando por todas as outras uma só vez — circuito Hamiltoneano — e não considerando um modelo circular, teremos de registar cinco posições distintas, onde a primeira e a última se repetem), ou seja, uma listagem por exaustão, que como são poucas cidades é ainda exequível. Esta foi a estratégia seguida pela maioria dos grupos.

Um dos grupos, porém, seguiu uma estratégia bastante distinta que era, para os elementos do grupo, a melhor, pois desse modo não tinham de efectuar tantos cálculos. O aparecimento desta estratégia foi despoletado pelo tipo de diálogo entre os alunos e o professor, que ao devolver a questão as levou a equacionar novas hipóteses.

Rita: São muitos [percursos], professor... Para descobrir o melhor temos que fazê-los todos [percursos]?

P2: O que acham...?

Mariana: já sei, já sei... vá-se embora professor, já o chamamos.

(...)

Rita [indica a figura]: Professor, já está. Já descobrimos!

P2: Explica lá como é que pensaram.

Mariana: Pensei nos mais curtos...

P2: Nos mais curtos... Porquê esses?

Mariana: Oh, professor... não comece... evitei os mais longos. Assim vou sempre pelos mais curtos... e ando menos!

Estas distintas estratégias foram apresentadas à turma pelos elementos de cada grupo, o que possibilitou a todos «conhecer e compreender os diferentes tipos de representações, ser capazes de as utilizar em diferentes situações e de seleccionar a representação mais adequada à situação.» (Ponte *et al.*, 2007, p. 5)

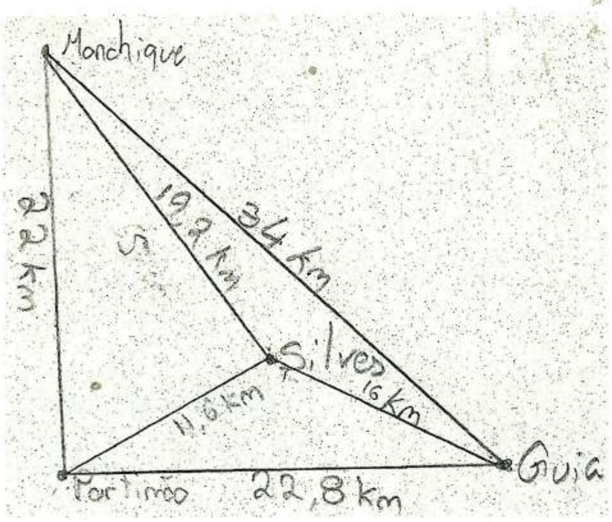


Figura 3. Distâncias entre as quatro cidades

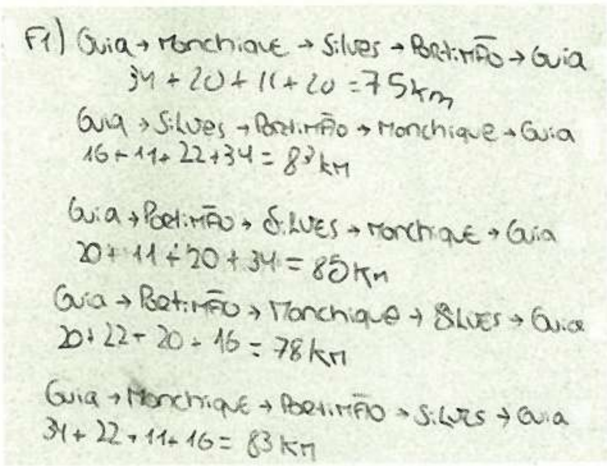


Figura 4. Cálculo do comprimento de todos os circuitos possíveis entre as 4 cidades

As duas estratégias descobertas pelos grupos correspondem a dois dos algoritmos existentes para determinar a distância mínima entre um conjunto de cidade (solucionar o problema do caixeiro viajante). O primeiro fornece a solução óptima, apesar de muito trabalhoso, pois é um método exaustivo, enquanto que no segundo — denominado algoritmo do vizinho mais próximo —, procurarmos sempre a cidade mais próxima do local em que nos encontramos, mas nem sempre obtemos a solução óptima. Este último poderá não ser a melhor opção para determinar o caminho mais curto entre diversas cidades quando temos poucas cidades, mas torna-se muito vantajoso quando o número de cidades aumenta pois fornece-nos rapidamente uma boa estimativa para essa solução.

Durante a apresentação e discussão dos dois processos foi abordado o paralelismo entre ambos e discutidas vantagens e desvantagens da utilização de cada: no caso de necessitarmos efectivamente da solução óptima teriam de utilizar o primeiro método, enquanto que, caso pretendessem apenas um valor aproximado (sem a garantia de que fosse o óptimo), poderíamos utilizar o segundo método, poupando assim imenso tempo e esforço.

Uma breve viagem pelo problema do caixeiro-viajante

Na modelação da situação proposta o que os alunos utilizaram, intuitivamente, denominam-se por grafos. Informalmente um grafo pode ser definido por um conjunto de pontos (vértices) e um conjunto de relações (representadas por ligações) entre esses pontos (arestas).

O problema proposto aos alunos enquadra-se, tal como foi já referido, na procura da solução mínima, de um circuito, de modo a começar e terminar um determinado trajecto num mesmo local (ponto). Se abordamos esta situação sob a perspectiva da teoria de grafos (formal), e por pretendermos, para além de levar os alunos a elaborarem o seu próprio entendimento sobre os diversos conteúdos, levá-los também a expressarem-se com recurso a uma linguagem matematicamente correcta, seríamos levados a referir que encontrar um caminho que começa e acaba no mesmo vértice (cidade) percorrendo todos os vértices uma só vez, excepto, obviamente, o primeiro, que é simultaneamente o último, corresponde a encontrar o que se denomina, na teoria de grafos, de circuito Hamiltoneano.

Durante o desenrolar da actividade os alunos construíram os seus processos para determinar tais circuitos, conseguindo obter inclusivamente dois dos três algoritmos possíveis para solucionar este problema. Encontraram o algoritmo da força bruta (listagem de todos os circuitos possíveis); o algoritmo do vizinho mais próximo (procura da cidade mais próxima do ponto onde nos encontramos), não conseguindo encontrar o terceiro, o algoritmo de ordenação de arestas (Estes alunos do 7.° ano encontraram apenas os algoritmos mais intuitivos, o que aliás temos vindo a constatar que acontece também com os alunos do 11.° ano de MACS).

Na figura 2, os alunos apresentaram a listagem de todas as hipóteses possíveis, o que poderia ser apresentado utilizando o que se denomina de árvore (Figura 6).

Como conhecemos todas as distâncias entre as cidades, este processo fornece-nos todas as soluções porém, se o número de cidades aumentar este processo, apesar de simples, torna-se demasiado moroso. Ao analisarmos, por exemplo, o que se passa num conjunto de seis cidades, todas elas li-

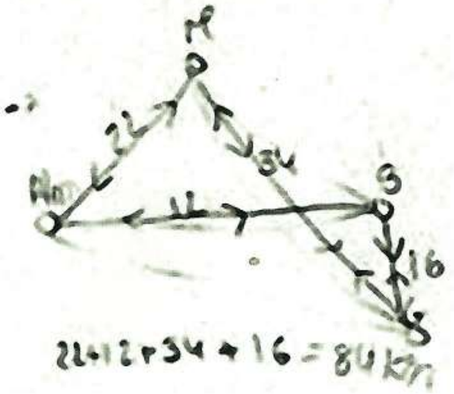


Figura 5. Cálculo do comprimento de um circuito mais curto escolhendo as arestas com valores mais pequenos

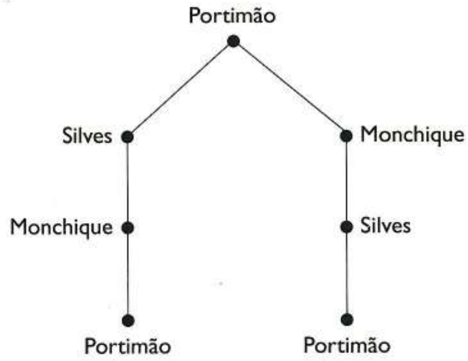


Figura 6. Representação em árvore

gadas entre si, a determinação da solução óptima torna-se bastante morosa pois necessitamos de analisar um total de 60 circuitos distintos. Se em vez das seis cidades tivermos já um total de quinze, o número de circuitos a analisar é de $(15 - 1)!$ que corresponde a, aproximadamente, 6×10^{11} (o número total de circuito entre n cidades estando todas ligadas entre si é de $(n-1)!$). De modo a evitar o trabalho árduo de determinar todos os circuitos possíveis, o que se faz na prática é aplicar um algoritmo de natureza heurística que nos forneça uma boa aproximação.

Alguns comentários

Foi nosso objectivo ilustrar uma possível abordagem ao estudo dos grafos — concretamente ao problema do caixeiro-viajante — logo no início do 3.° ciclo, bem como algumas das mais valias obtidas pelos alunos com este tipo de actividade. Desde logo os alunos sentiram necessidade de simplificar a situação apresentada o que conduziu intuitivamente à modelação matemática, estimulando e desenvolvendo a sua criatividade levando-os, ao longo do percurso, a discutir e argumentar os seus pontos de vista, verificando-se desse modo uma verdadeira negociação de significados, onde todos desempenham um papel importante nas aprendizagens do grupo, sendo portanto também responsáveis por elas.

Este tipo de actividades, em que ao efectuar uma modelação da situação (utilizando um grafo) esta se torna necessariamente mais simples, coloca em evidência, a utilização e presença da Matemática em todas as actividades quotidianas. Recorrendo à teoria de grafos podemos modelar muitas dessas situações (redes de transportes, comunicações, resolução de conflitos, ...), contribuindo assim para evidenciar a importância da Matemática na sociedade, desmistificando também, face aos alunos, a sua complexidade, demonstrando a sua aplicabilidade, de que tantas vezes duvidam.

Uma das notas que nos fica desta experiência, e que nos dá ânimo para irmos preparando tarefas que permitam aos alunos tomarem contacto com conteúdos e perspectivas distintas daquelas que obteriam se fossem confrontados apenas com tarefas ditas «normais» foi verbalizada pelo Luís:

«... parecia complicado mas é fácil. E porque é que não aprendemos isto este ano?»

Referências

Departamento do Ensino Secundário. (2001), *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*, Lisboa: Ministério da Educação.

Doerr, H. M. & English, L. D. (2006). Middle grade teacher's learning through students engagement with modeling tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 5–32.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação — DGIDC.

Rui Feiteira
Agrupamento Vertical de Escolas Prof. José Buisel, Portimão

Carlos Miguel Ribeiro
Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve

Mudanças Prometidas . . .

10 • Público • Domingo 21 Fevereiro 2010

Portugal

Educação Programas no ensino básico datam de 1991 e última reorganização é de 2001

Mudanças prometidas para o 3.º ciclo vão ser um "mero ajuste"

Ministra anunciou "um novo currículo" para ser aplicado já no próximo ano lectivo. Especialistas pedem mudança a sério

Bárbara Wong

A ministra da Educação, Isabel Alçada, anunciou um "novo currículo" para o 3.º ciclo do ensino básico, a entrar em vigor já no próximo ano lectivo. Imediatamente se começou a ouvir e ler a palavra "reforma", expressão nunca desmentida pela tutela. Contudo, o que a equipa de João Formosinho vai fazer é um "mero ajuste", revela o professor e investigador da Universidade do Minho. Mas os especialistas pedem uma reforma a sério: afinal, os actuais programas datam de 1991 e a última reorganização curricular é de 2001.

"'Reforma' é uma expressão muito forte, vai ser um mero ajuste", diz João For[...]

uma vez que está a ser estudada a reforma e o estabelecimento de metas de aprendizagem (ver texto nestas páginas), é preferível esperar.

Esta justificação não é válida para Matemática porque os programas já começaram a ser experimentados, em 2008/2009, justifica a tutela. Mas um estudo recente sobre a experimentação dos programas revela que os professores tiveram dificuldade em aplicá-los no tempo lectivo previsto e muitos aproveitaram as aulas de Estudo Acompanhado para o fazer, revela António Borralho, investigador da Universidade de Évora, membro da equipa que fez a avaliação encomendada pelo ministério. "Se o Governo tiver em atenção a carga horária de Matemática ou cor[...]

ma dos programas de todas as disciplinas e a criação de novos planos curriculares", defende José Augusto Pacheco, director do Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, para quem é "urgente uma nova reforma, pensada de forma integrada e não por passos".

Avaliar antes de alterar

Para José Augusto Pacheco, o actual modelo curricular devia ser avaliado antes de se introduzir alterações. Ou seja, é preciso avaliar as áreas não-curriculares (Estudo Acompanhado, Área de Projecto e Educação Cívica), propõe. Essas "inutilidades curriculares" deviam ser eliminadas, defende Ramiro Marques: "Reduzia-se assim a carga horária [...]

In Público, 21 de Fevereiro de 2010

Deste artigo do Público de 21 de Fevereiro de 2010 destacamos que as Mudanças prometidas para o 3.º ciclo não vão ser uma reforma curricular. João Formosinho esclarece que «não há o desejo de introduzir grandes alterações» no currículo mas apenas ajustes. A ministra da Educação confirma, considerando a necessidade de «racionalizar o tempo curricular para que a carga de tempo e disciplinas não seja muito pesada para os alunos». Paralelamente ao «ajuste», o artigo refere que o novo programa de Matemática para o ensino básico será generalizado já no próximo ano lectivo, uma vez que já está a ser experimentado desde 2008/2009, enquanto o de Português ficará suspenso. A justificação apontada é de que estão em preparação as metas de aprendizagem.

Sobre o novo programa de Matemática, podemos ainda ler no artigo que um estudo recente revela dificuldades na sua aplicação no tempo lectivo previsto. Segundo António Borralho, investigador da Universidade de Évora, «se o Governo tiver em atenção a carga horária de Matemática ou corta no programa ou vai ter que criar condições para o cumprir».

José Augusto Pacheco, director do Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, defende que não chega este «ajuste», sendo «urgente uma nova reforma, pensada de forma integrada e não por passos».

Natércio Afonso, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, coordenador da equipa que está a definir as metas de aprendizagem - pensadas desde o pré-escolar ao final do 3.º ciclo e aplicadas já em 30 a 50 escolas no próximo ano lectivo, esclarece que «a ideia é que o documento — metas de aprendizagem — não seja normativo mas antes útil».

As metas de aprendizagem foram uma das primeiras medidas visíveis da actual equipa Ministerial. No site do Ministério da Educação pode ler-se, desde Novembro de 2009, que esta medida se insere «no estabelecimento de um quadro de Níveis de Referência para o Currículo Nacional, (...) tendo em conta os padrões internacionais, a experiência portuguesa e os resultados da investigação sobre factores que determinam a eficiência dos sistemas educativos». No mesmo texto promete-se: «a par desta intervenção na área do currículo e visando proporcionar condições que permitam concentrar a actividade docente na prática pedagógica, o ME emitirá orientações destinadas a simplificar e a desburocratizar procedimentos administrativos».

Este artigo do Público e a leitura da página Web referida suscita-nos algumas questões:

- Como se articulam as metas com o reajustamento do programa e a experimentação desenvolvida nas escolas? E com a organização do programa por ciclos?
- Que articulação se prevê entre programa, metas de aprendizagem e avaliações externas?
- Estudos realizados revelam que o tempo dedicado à Matemática é, pelo menos no 2.º e 3.º ciclo, insuficiente. Que implicações terão para o ensino mais uma generalização com programa e tempo lectivo desajustados? Será aceitável reservar para a disciplina e para os professores de Matemática o papel dos que «andam sempre a ocupar/reivindicar os tempos que não têm, nomeadamente considerando como seus o estudo acompanhado, os apoios e, às vezes até a área de projecto?
- Com que tempo serão anunciadas as medidas tomadas na sequência de pontos críticos identificados durante a experimentação? E, que tempo terão escolas e professores em geral para se prepararem para esta generalização?
- Que medidas serão tomadas para que o TEMPO que mobilize os professores a trabalhar em equipa, a inovar, a pensar que o seu papel individual é relevante para o trabalho colectivo, volte a estar presente na escola?

Até onde irão as mudanças prometidas? Serão apenas «pequenos ajustes»?

Adelina Precatado

Alice Carvalho

Modelagem matemática na escola e na formação do professor

Uma abordagem abrangente

Samuel Jurkiewicz
Clicia Valladares Peixoto Friedman

Introdução

As formas de transmissão de conhecimento que se praticam hoje foram construídas historicamente. Este é um fato que vale a pena ser lembrado numa época em que tantas críticas de variados matizes (técnicos, conceituais, ideológicos) são feitas ao conteúdo ensinado, à forma de transmissão e mesmo à idéia de «transmissão» em oposição a «construção» de conhecimento. O caso da Matemática é, neste aspecto, exemplar.

A pedagogia e a didática da Matemática procuraram até hoje acompanhar a forma sequencial e cumulativa com que os currículos de Matemática se construíram; sequencial pois os conteúdos prescritos seguem basicamente a ordem em que apareceram historicamente, e cumulativa pois foram acrescentados na medida em que passaram a fazer parte do cabedal da Matemática utilizada na ciência e na sociedade.

Tanto os currículos assim construídos como a pedagogia e a didática que os acompanham têm mostrado sinais evidentes de fadiga. Note-se que não se trata de obsolescência; as formas de ensinar, construídas com esforço ao longo da história da Matemática, continuam a ter papel insubstituível (mas não exclusivo). A exposição, o exercício de «papel-e-lápis» não tem por que desaparecer e possivelmente continuarão a acompanha as práticas profissionais e sociais do professor.

Da mesma forma, o uso de materiais de manipulação, incorporados de forma sistemática na segunda metade do século XX, não mais deixará de fazer parte do arsenal didático e pedagógico do professor.

Em vistas dos desafios que se apresentam ao professor de Matemática, algumas propostas tomaram forma e, em particular, uma tem chamado a atenção: a possibilidade do uso da modelagem matemática (uma prática já usual na ciência e na vida profissional) como recurso didático e pedagógico.

Enaltecer as qualidades desta proposta não é difícil; ela tem apelos multidisciplinares, construtivos e faz do aprendizado da Matemática uma ação simultaneamente coletiva e individual, exigindo e promovendo uma postura madura e responsável tanto do professor quanto dos alunos.

Entretanto, quem já procurou utilizar modelagem matemática em sala de aula enfrentou problemas de diversos níveis: qual seria exatamente esta utilização? Será que essa forma de trabalho é adequada para os alunos de determinada idade? Quais as vantagens e desvantagens para o aluno? E para o professor? Qualquer um pode fazê-lo? Se a modelagem matemática é uma proposta realmente promissora como instrumento didático-pedagógico, é mister que se examinem com cuidado as características que lhe são inerentes.

No que se segue são examinados alguns aspectos do uso da modelagem matemática em sala de aula, o que ela pode representar para o aluno, para o professor e para a instituição onde se desenrola o processo de aprendizagem e educação, a escola.

Modelos e realidades matemáticas

A elaboração de modelos matemáticos e a sua utilização podem ser pensadas, entre outros aspectos, como um recurso para explicar situações e fenômenos ou resolver problemas que ocorrem em diferentes realidades nas diversas atividades que o homem exerce ou que tenham alguma influência sobre sua vida e o mundo que o cerca. A pluralização do termo «realidades» tem sua razão de ser e adquire um caráter próprio quando se trata de ensinar ou aprender Matemática. Em geral, não existe somente uma realidade envolvendo o estudo matemático de uma situação, um fenômeno ou um problema.

Um estudo matemático pode englobar desde aplicações diretas de Matemática como a elaboração de um gráfico, a conversão de dados para uma matriz, a utilização de modelos consagrados pelo uso, podendo chegar inclusive a graus de sofisticação de desenvolver teorias ou de adaptar, expandir ou criar modelos matemáticos. Para se estudar matematicamente uma situação é preciso levar em consideração influências de diversas realidades, além daquela que envolve a situação diretamente. Por exemplo, são clássicas as aplicações matemáticas que utilizam modelos para explicar o crescimento de populações, de tumores ou então para mostrar a disseminação de um boato, de uma epidemia ou mesmo para calcular juros sobre um capital, (des)valorização de um bem ao longo do tempo, etc. As diferentes realidades de cada um dos casos influenciam na escolha das equações que sintetizam os modelos matemáticos envolvidos.

Os casos citados geralmente lidam com situações que, sob o ponto de vista matemático, são classicamente modeladas por funções que descrevem crescimento ou decrescimento exponencial. De uma maneira simplificada, pode-se dizer que as partes da realidade matemática que as envolvem são semelhantes.

Em cada situação existem realidades contextuais, as quais podem interferir na formulação de objetivos do estudo do problema, na consideração de fatores importantes e mesmo na adequação do modelo ao posterior uso que se faça dele. Observa-se, por outro lado, a presença direta ou indireta de partes da Matemática na interpretação e formulação do problema, sendo que a necessidade de lidar com elas é diferente para quem utiliza Matemática como ferramenta para desenvolver uma atividade e para quem a Matemática é essência de sua profissão, incluindo nesse caso, de um modo muito especial, o professor.

É interessante pensar até que ponto, na mente de quem aprende ou ensina, essas partes da Matemática expressas de uma forma mais abstrata terminam por se sobrepor ao contexto que envolve de fato o problema, visto que é comum haver pouca familiaridade com ele, somando-se a isto, a falta de adequação das respostas matemáticas à realidade que cerca o problema.

Um aluno de Ciências Biológicas, por exemplo, sabe que modelos matemáticos que descrevem crescimento de colônias de bactérias devem ser adaptados a fim de excluir tempos negativos. No entanto, nas aulas de Matemática, é comum que o aluno abstraia esta restrição e admita todo o conjunto dos números reais como domínio da função que descreve o fenômeno biológico. A Matemática se sobrepõe ao contexto da aplicação, pois a realidade que a envolve, além de abstrata, é exata (axiomática) e também mais abrangente do que diversas realidades de outras ciências no sentido de que uma mesma estrutura matemática pode servir para equacionar diferentes fenômenos.

Modelagem e sala de aula

Não se pode dizer que existe um confronto entre a Matemática e a realidade que envolve o problema na utilização de modelos matemáticos em ambientes de ensino e aprendizagem. Mas, conforme já comentado, o contexto da aula de Matemática favorece a que alunos e professores vivam dentro de uma parcela do mundo matemático e que encarem a situação estudada sob esse prisma. O esquecimento da força desta «realidade matemática» diminui ou dificulta a valorização que a abordagem por modelagem tem ou possa ter na formação qualitativa de professores e consequentemente no processo de aquisição de conhecimentos por parte dos alunos.

A aula de Matemática é constituinte de um ambiente matemático. O professor introduz seus alunos nesse mundo matemático e usa exemplos para que os estudantes compreendam melhor um determinado conteúdo e possam se transladar da realidade matemática para as outras realidades. Bem ou mal, esse objetivo costuma ser atendido no ensino atual. O mesmo não se pode afirmar a respeito de os alunos terem condições de se transportarem de outras realidades para a Matemática, a menos que sejam situações parecidas com aquelas exemplificadas pelo professor, ou seja, o caminho não é de «ida e volta».

Os dois objetivos mencionados no parágrafo anterior, em uma visão menos detalhista, podem ser englobados em um só. No entanto, usar exemplos para que os alunos sejam capazes de se transportar da realidade matemática para outras realidades dificilmente os habilitará a se transladar de realidades diversas para dentro da Matemática. O cumprimento dos dois objetivos apontados requer diferentes posturas do professor, muito embora ambos os propósitos ofereçam dificuldades específicas para sua realização. Geralmente não é fácil associar estruturas matemáticas com a realidade circundante, e vice-versa.

Há exemplos dados em sala de aula que não têm conexão alguma com qualquer situação verdadeira e é natural que exista resistência a eles por parte dos alunos, pois não se conectam a nenhum contexto. Retirando esses casos, restam os exemplos que conservam características importantes de uma situação retratada e são estes que vêm facilitando o cumprimento do objetivo de transladar o aluno de um ambiente matemático para outras realidades.

Os dois objetivos assinalados anteriormente têm em comum o fato de se relacionarem a aspectos da abstração matemática que evidenciam o poder de generalização da Matemática. Essa é uma característica importante dessa ciência, e pode e deve ser explorada pelo professor. Se não houvesse esse tipo de abstração, seria pouco útil usar diferentes exemplos em diversas áreas para mostrar o emprego de um mesmo conceito ou estrutura matemática.

Das observações acima se destacam duas características da relação entre Matemática e modelos, importantes para o uso de modelagem em sala de aula:

- Um mesmo conceito matemático pode representar diversas situações-modelo;
- Um modelo matemático aplicado a um problema é uma forma de entender melhor os conceitos matemáticos envolvidos no seu processo de equacionamento.

Os modelos de sala de aula, nos diferentes níveis de ensino, guardam características distintas dos modelos efetivamente aplicados na vida profissional. Algumas dessas diferenças serão ressaltadas a seguir.

Modelos educacionais e modelos aplicativos em sala de aula

O mundo circundante, com seus problemas e fenômenos, é uma das fontes de criação do desenvolvimento da Matemática. Para se tratar matematicamente uma situação há necessidade, em algumas fases do estudo, de se transladar desse mundo para uma realidade Matemática. Também existe o caso contrário; o desenvolvimento de alguma teoria matemática pode servir como base para explicar fenômenos que só são percebidos e/ou estudados tempos depois de a teoria ser concebida. A Ciência se encarrega de descobrir aplicações para o que é admitido primeiramente apenas dentro da Matemática.

Sintomaticamente, nenhum desses processos (da Matemática à aplicação e vice-versa) costuma ocorrer dentro da escola[1]. Isso explica a impressão de que há dissociação entre a Matemática que se aprende e a que se utiliza. A associação existe, talvez não para toda a Matemática que se aprende na escola, mas existe; ela apenas não acontece na sala de aula. Assim fica evidente que o atendimento aos dois objetivos do ensino de Matemática anteriormente citados são importantes e precisam ser vivenciados pelo professor antes de serem repassados para os alunos. É essencial adequar as relações entre modelos e conceitos a fim de atender as peculiaridades do ambiente matemático da sala de aula.

A utilização de modelos matemáticos em ambientes de ensino e aprendizagem já é feita há bastante tempo. Os modelos são usados não só nas aulas de Matemática, mas também nas de Ciências Físicas e Biológicas, o que contribui para que sirvam como exemplos de aplicações matemáticas em outras áreas e colaborem para o cumprimento do objetivo de transladar o aluno da realidade matemática para outras realidades. O desafio atual, ou melhor, o que se deseja é dar um impulso ao uso de modelos matemáticos na escola a fim de facilitar o cumprimento do propósito de transportar o estudante de situações do mundo circundante para parte da Matemática.

Bassanezi (2002) classifica os modelos conforme o tipo de Matemática utilizada. Em sua classificação os modelos podem ser Educacionais ou Aplicativos. Os modelos Educacionais se baseiam em um número pequeno ou simples de suposições e têm quase sempre soluções analíticas. Segundo o autor «geralmente estes modelos não representam a realidade com o grau de fidelidade adequada para se fazer previsões. Entretanto, a virtude de tais modelos está na aquisição de experiência e no fornecimento de idéias para a formulação de modelos mais adequados à realidade estudada» (página 20, § 4).

Geralmente os modelos matemáticos apresentados pelo professor são educacionais, não são aplicativos. Esse é um aspecto que tem que ficar claro para quem trabalha com modelos na escola. Em ambientes de ensino e aprendizagem não há um comprometimento estreito com a realidade complexa do problema. Se houvesse esse tipo de comprometimento, a Matemática exigida, na maioria dos casos, seria mais sofisticada e necessitaria de um grau de conhecimentos incompatível com o nível de amadurecimento dos alunos.

O fato de um modelo apresentado em ambientes de ensino ser do tipo educacional e não aplicativo não invalida que ele seja aplicável, pois são uma simplificação de modelos aplicativos. Por exemplo, adaptações do modelo de cálculo de juros compostos podem ser usadas nos diversos níveis de ensino. Em muitos casos, a simplicidade da situação (juros ou descontos sobre poucas parcelas) permite que a compreensão e equacionamento matemático do problema sejam acessíveis a um aluno do ensino médio, conforme ressalta Valladares (2003).

A adaptação do modelo mencionada no parágrafo anterior tem sua aplicabilidade garantida e ao mesmo tempo é acessível para a compreensão do aluno porque o raciocínio que envolve a construção do modelo de juros compostos é simples. Outros fatores nem sempre observados no uso desse modelo são: sua abrangência, o que o torna adaptável a diversas situações e a difusão que tal modelo tem tido devido à importância das atividades econômicas nas sociedades contemporâneas.

Nem todas as situações que são trabalhadas na escola precisam lidar com modelos que já estejam difundidos culturalmente. A utilização de modelos matemáticos do tipo educacional na escola pode ser estendida; eles não precisam somente servir como exemplos de aplicações matemáticas, mas também servem para estudar situações do mundo circundante que sejam propostas por alunos ou pelo o professor. Tal estudo deve ser simples como convém a modelos educacionais.

O professor deve se sentir confortável ao estudar, sob um enfoque matemático, alguma situação ou problema do mundo circundante. O estudo geralmente culmina com o equacionamento do problema proposto, com a adaptação ou extensão de modelos já existentes ou então com a construção de um modelo que explique a situação de uma forma simples e com um número pequeno de suposições.

Embora não haja necessidade de o modelo educacional estar comprometido com a realidade do problema em um sentido mais amplo e complexo, isso não significa que seja incoerente, pois precisa atender a objetivos previamente traçados. Nesse caso é fundamental que os objetivos sejam factíveis e bem fundamentados para não se perder no estudo da situação. Além do mais, o professor visa também atender a propósitos pedagógicos como, por exemplo, o acompanhamento de processos de raciocínio dos alunos, a fixação de conteúdos matemáticos e etc.

Algumas características de um modelo matemático em situações de aprendizagem

O modelo educacional, embora simples, deve atender a alguns pré-requisitos para que de fato possa ser distinguido com o nome de «modelo». Quando existe um problema fora do campo matemático que seja modelado matematicamente, há estágios da modelagem em que se precisa ter contato com parte da realidade em que o problema está inserido. É fundamental não se afastar dos objetivos propostos no estudo da situação.

O modelista[2] dá uma interpretação matemática a uma situação que lhe é apresentada; existe um processo de idas e vindas para diferentes realidades que envolvem o problema, o qual, quando visto matematicamente, passa a fazer parte do mundo matemático para que, em seguida, volte a existir na realidade original que o cerca. Isso dá um caráter interdisciplinar e interprofissional ao trabalho com modelagem.

Geralmente quem solicitou o estudo da situação, ou seja, o «cliente» não necessita possuir um grau de conhecimentos matemáticos equivalente ao do modelista. No final do processo de construção ou adaptação do modelo é preciso traduzi-lo para que ele seja compreendido por quem vai utilizá-lo e verificar se atende aos objetivos traçados no estudo da situação. O importante é que o indivíduo sinta-se seguro para usar o modelo.

Na escola, a função de modelista costuma ser exercida pelo professor e por seus alunos, sendo que muitas vezes é o professor quem propõe o estudo de uma situação, e nesses casos, além de modelista, ele também é um «cliente» bastante especial, pois conhece uma parte da Matemática envolvida no estudo do problema, ou seja, não é leigo no assunto. Na verdade, o papel de «cliente» é desempenhado também pelos alunos e esses devem estar seguros para usar o modelo educacional, tendo atenção para verificar se o modelo cumpre com os objetivos propostos.

Pode parecer estranho pensar que os alunos se sintam seguros para trabalhar com um modelo educacional, que pode ser uma interpretação bastante simplificada do problema proposto e nem sempre se compromete com a obtenção de resultados confiáveis para situações verdadeiramente reais. Não é pretensão de quem trabalha com modelos educacionais que eles sejam aplicativos. O propósito é fazer um estudo da situação seguindo os objetivos previamente traçados e trabalhando conteúdos matemáticos que sejam compatíveis com o nível de amadurecimento e compreensão do aluno a fim de que o estudante adquira novos conhecimentos, ratifique parte dos que já possua e seja capaz, ao menos parcialmente, de utilizar no futuro modelos mais realistas, o que possibilita compreender a adequação da Matemática a diversas situações e realidades.

A participação ativa do estudante na utilização de um modelo é diferente de usá-lo apenas como um exemplo. Da mesma forma, a participação do professor é qualitativamente diferente quando «dá» um exemplo ou cobra a investigação de um modelo. Essa diferença tem implicações importantes no trabalho do professor.

Vantagens e desvantagens do uso de modelos educacionais: uma situação de conflito

Diversos autores apontam para as vantagens e dificuldades de utilizar modelos com maior participação do aluno, destacando-se os trabalhos de Blum (1991), Eyre (1991), James (1981), Usiskin (1991). É importante constatar que a maioria das vantagens se dirige aos alunos, enquanto que uma grande parte das desvantagens recai direta ou indiretamente sobre o professor. Essa simples constatação mostra conflitos na utilização de modelos na escola, pois dificilmente os alunos tirarão proveito (de fato) desse tipo de abordagem se as vantagens não recaírem primeiramente sobre os professores.

As dificuldades e limitações apresentadas pelos autores são verdadeiras. Ninguém pode negar que o professor dispõe de pouco tempo devido à extensão do currículo de Matemática e que a natureza interdisciplinar do trabalho com modelos exige outros conhecimentos, além dos matemáticos. Também é verdade que a modelagem e uso de modelos é uma abordagem mais dinâmica, em que há menos controle sobre o que ocorre dentro da sala de aula. Além dessas, existem muitas outras, inclusive as que estão relacionadas com aspectos sócio-econômicos ligados à profissão de professor dentro da realidade brasileira, que são omitidas neste texto. Cabe então perguntar que benefícios o professor tem ao trabalhar com modelagem e usar modelos de uma maneira mais ativa?

Alguns dos benefícios estão vinculados com as dificuldades apontadas no parágrafo anterior, sendo que a melhoria na qualidade do ensino é um dos mais importantes. Essa melhoria está diretamente relacionada à capacidade que o professor pode adquirir para tratar matematicamente problemas de outras áreas ou do dia-a-dia, o que possibilita um aumento no nível de seus conhecimentos gerais e a valorização do conteúdo matemático ministrado. Além do mais, o professor, juntamente com seus alunos, pode encaminhar estudos de diversas situações (simples) que são propostas e buscar soluções para problemas, o que possivelmente contribuirá, no futuro, não só para sua melhor qualificação, mas também para a de seus alunos.

A extensão do currículo de Matemática desencoraja o professor a trabalhar com modelagem e modelos matemáticos, mas por outro lado, pode servir como um estímulo para utilizar modelagem e modelos matemáticos como uma forma mais criativa e eficiente para abordar alguns tópicos de Matemática (teorias dos Grafos, dos Jogos, da Decisão, e etc.) que não estão incluídos no currículo, mas que vem sendo exigidos no mundo atual, não mais somente pelos ambientes científicos como também pela crescente influência da Informática, pelo tratamento cada vez mais técnico das atividades de produção, comércio e distribuição, transporte ou por exigência de aspectos sociais e econômicos relevantes para o desenvolvimento dos países (*vide* Jurkiewicz (2002)).

O estudo de situações fora do campo da Matemática pode ajudar o professor a ter uma mudança de atitude a respeito do que ele conhece e desconhece. O papel do professor é o de orientar seus alunos, de estudar com eles. Nem sempre o estudo efetuado conduz aos melhores resultados. Essa postura simula o que geralmente ocorre nas equipes que trabalham com modelagem. A compreensão desse aspecto é também um fator que minimiza a dificuldade que a atividade de modelagem e utilização de modelos cria para o professor a respeito da falta de controle sobre o que pode acontecer na sala de aula.

Uma observação importante se impõe: atitudes pedagógicas não são atos individuais. Pelo que está exposto nos últimos parágrafos, só faz sentido o uso de modelos (como de resto qualquer atitude avançada de ensino) dentro de um contexto estrutural de apoio, isto é, apoio material e ideológico da instituição onde o professor atua, aí compreendidos os recursos tanto para a consecução quanto para a capacitação. Embora o entusiasmo e iniciativa do professor sejam pré-requisitos, cabe à instituição e ao conjunto de profissionais que nela atuam a viabilização de um uso coerente de modelos como forma frequente e consequente de atuação, integrada ao arsenal pedagógico já em uso pelos professores, e não como uma experiência esporádica e isolada.

Aspectos interdisciplinares da modelagem

O profissional que modela um problema normalmente restringe seu estudo a algumas áreas da Matemática nas quais tenha mais experiência e conhecimento. Esse aspecto geralmente é desconhecido pela maioria das pessoas, inclusive pelo professor do ensino fundamental e médio, que não é um especialista em algum campo específico da Matemática, sendo esse fato mais uma justificativa para que ele trabalhe com modelos educacionais, mais adequados à formação geral do professor.

O estudo de situações que ocorrem no mundo fora da sala de aula está vinculado à idéia de interdisciplinaridade, que na escola fundamental e de ensino médio geralmente está associada a um trabalho conjunto com outras disciplinas. Mas há um aspecto da interdisciplinaridade que não envolve somente disciplinas de diferentes ramos do conhecimento, mas engloba também disciplinas de uma mesma grande área ou de áreas afins, ou seja, envolve uma mesma ciência, com é o caso da Matemática. Resta perguntar como a interdisciplinaridade dentro da Matemática pode ajudar o professor no seu trabalho com modelagem e modelos.

A idéia de explorar a interdisciplinaridade também dentro da Matemática na escola de ensino fundamental e médio pode ajudar o professor no sentido de tornar mais fácil o acesso ao conhecimento matemático pertinente a áreas específicas. Esse acesso abrange dois níveis: a informação e a assessoria.

No primeiro caso, o professor é informado sobre alguns dos diferentes campos da Matemática, os problemas (clássicos) associados a eles e os modelos construídos. É verdade que muitos dos problemas utilizam conteúdos matemáticos sofisticados e que estão além do nível de compreensão dos alunos, mas nada impede, em algumas situações, com as devidas simplificações, de serem adaptáveis ao grau de entendimento e conhecimento dos alunos, lembrando mais uma vez que os modelos envolvidos são educacionais. Se não for possível, por exemplo, trabalhar com equações diferenciais, por que não tentar equações a diferenças finitas?

É importante o professor saber, que ao propor um problema juntamente com seus alunos, ele poderá contar com a orientação de colegas especialistas que o assessorem na abordagem matemática do problema e o auxiliem nas possíveis adaptações que o problema deverá sofrer para que, de fato, possa ser trabalhado na escola. Cabe ao professor, a escolha do problema, o encaminhamento dos objetivos pedagógicos e a adequação do conteúdo à realidade dos alunos. A interdisciplinaridade dentro da Matemática que abranja a modelagem e utilização de modelos no ensino, torna-se dessa forma um projeto de parceira relevante para as escolas, as universidades, empresas e centros de pesquisa e de projeções ainda impensáveis para a sociedade.

Conclusões

De acordo com o que foi exposto, o trabalho com modelagem matemática na escola deve ser encarado como uma ação conjunta das diversas instâncias que agem sobre as instituições de ensino.

Pode-se incluir instâncias da administração pública da Educação, pois certamente o primeiro olhar deve ser dirigido à formação dos professores, e essa formação depende, em última análise, de políticas públicas de característica geral. A participação das instâncias produtoras de conhecimento, com especial ênfase nas universidades e institutos acadêmicos é fundamental e um terceiro. Um terceiro pé de apoio engloba instâncias tecnológicas, aí compreendidas as empresas e as agências públicas controladoras de serviços.

Não é demais insistir nas questões de formação e apoio institucional aos professores; sem esta formação é pouco provável haver benefício para os alunos. A sala de aula é um ambiente matemático bastante rico e poderoso, onde o professor pode adquirir desenvoltura e familiaridade. A fim de que ele se sinta seguro para trabalhar com modelagem é necessário que ele saiba como e porque está usando esta abordagem; não deve estar sozinho e nem desprestigiado ao desenvolver uma linha de ação que não é destituída nem de riscos e nem de dificuldades. Enfim, em contrapartida à disponibilidade de seu ambiente (a sala de aula), o professor precisa ter acesso à informação, à formação e apoio. É uma forma responsável de assegurar uma efetiva contribuição à sua qualificação e ao amadurecimento de seus alunos.

Havendo as condições prescritas, a abordagem por modelagem e uso de modelos matemáticos na escola com o objetivo de transladar situações, fenômenos e problemas de diferentes realidades para um ambiente matemático e vice-versa, extrapola os limites do ensino estritamente matemático. Ao professor e seus alunos é dada oportunidade de se qualificarem, de terem uma visão mais crítica do currículo de Matemática. Eles podem assim vivenciar a interdisciplinaridade de uma forma abrangente que inclua outras disciplinas e facilite o acesso a conhecimentos de algumas áreas especificas da Matemática e muitos de seus problemas aplicáveis.

Nota

1 É costume associar o termo escola ao ensino fundamental e médio. Neste texto tal termo se estende ao ensino superior.

2 Entende-se o termo modelista como o individuo ou um grupo de pessoas que adapta, estende ou cria modelos matemáticos a fim de estudar situações dentro ou fora da Matemática.

Bibliografia

Bassanezi, R. C., (2002). Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia. Editora Contexto: São Paulo.

Blum, W., (1991). Applications and Modelling in Mathmatics Teaching a review of arguments and instructional aspects. In: *Teaching of Mathematical Modelling and Applications*, pp. 10–29. Editora Ellis Horwood.

Eyre, R., (1991). Thinking up Problems. In: *Teaching of Mathematical Modelling and Applications*, pp. 288–297. Editora Ellis Horwood.

Friedmann, C. V. P., (2003). Matemática Discreta, Algoritmos, Modelos. Tendências do Ensino de Matemática no Início do Século XXI (PhD Thesis, COPPE — Universidade Federal do Rio de Janeiro).

James, D. J. G., Mc Donald, J. J. (1981). An Introduction to Modelling. In: *Case Studies In Mathematical Modelling*, pp. 1–16. Editora Stanley Thornes.

Jurkiewicz, S., (2002). Matemática Discreta em Sala de Aula — Anais do I° HTEM, pp. 155–161. Rio de Janeiro, 2002.

Usiskin, Z., (1991). Building Mathematics Curricula with Applications and Modelling. In: *Teaching of Mathematical Modelling and Applications*, pp. 288–297. Editora Ellis Horwood.

Valladares, R. J. C., (2003). Matemática Cultural: um método de ensino e aprendizagem. In: Educação Matemática em Revista n° 13, pp. 13–27. SBEM.

Samuel Jurkiewicz
Universidade Federal do Rio de Janeiro

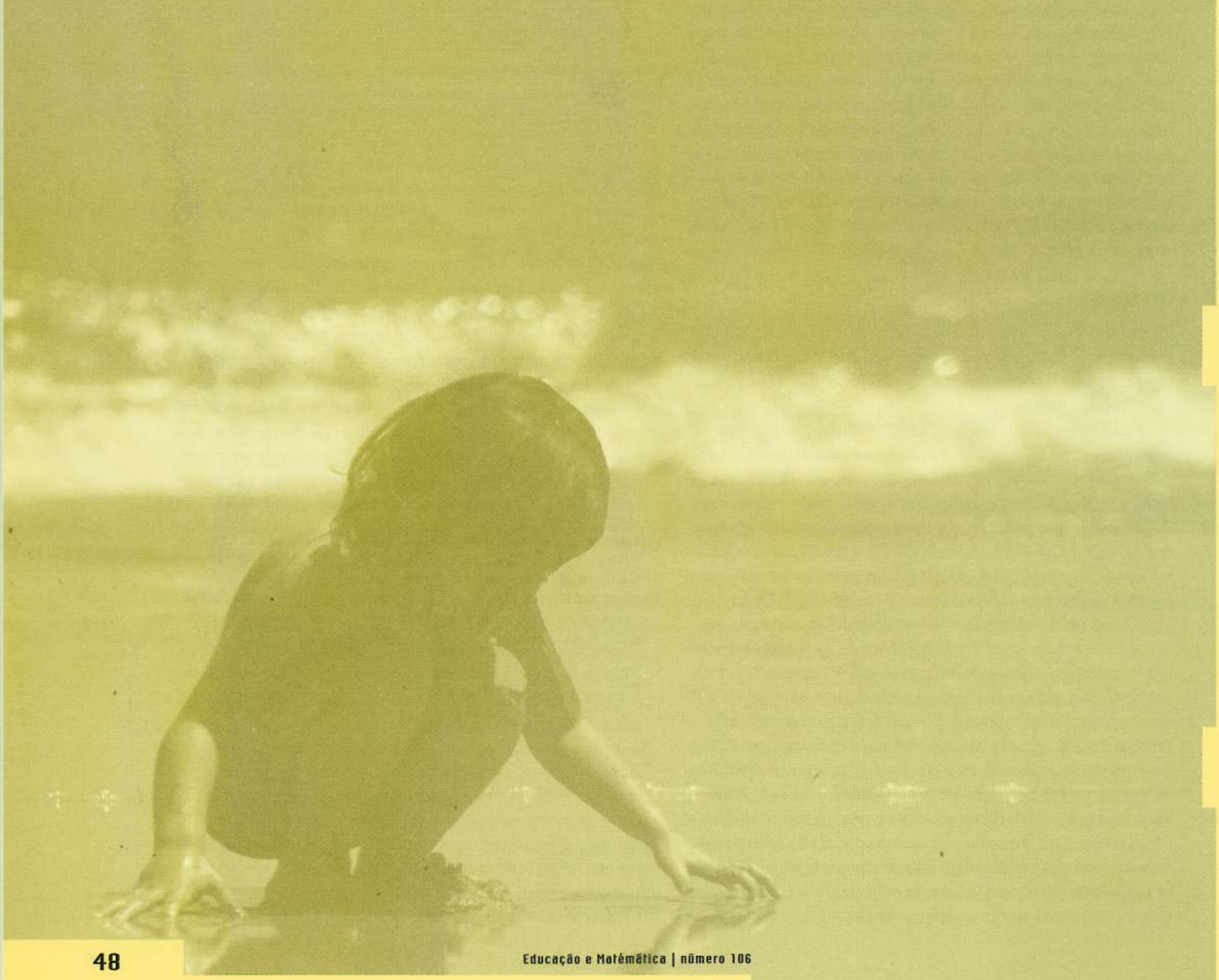
Clicia Valladares Peixoto Friedman
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

João tem 6 anos e prepara-se para iniciar o 1.º ano.
Na praia quer ir comprar gelados para ele e para dois amigos e diz à mãe:
Dá-me 5 € que eu ainda te trago de troco 50 cêntimos pois os gelados que queremos custam cada um 1,5 €.

No Verão seguinte o João tinha completado o 1.º ano de escolaridade com sucesso.
Vai à tabacaria com a mãe e pede-lhe que lhe compre 2 cadernetas de cromos. O preço de cada uma era 2,5 €.
A mãe pergunta-lhe: Então que dinheiro precisas?
João responde: Mãe não me obrigues a fazer a conta, não tenho aqui papel.

Pense nisto!

Lurdes Serrazina
ESE de Lisboa



APM — 2010

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2010

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `http://www.apm.pt`

Assinaturas das revistas para 2010

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções