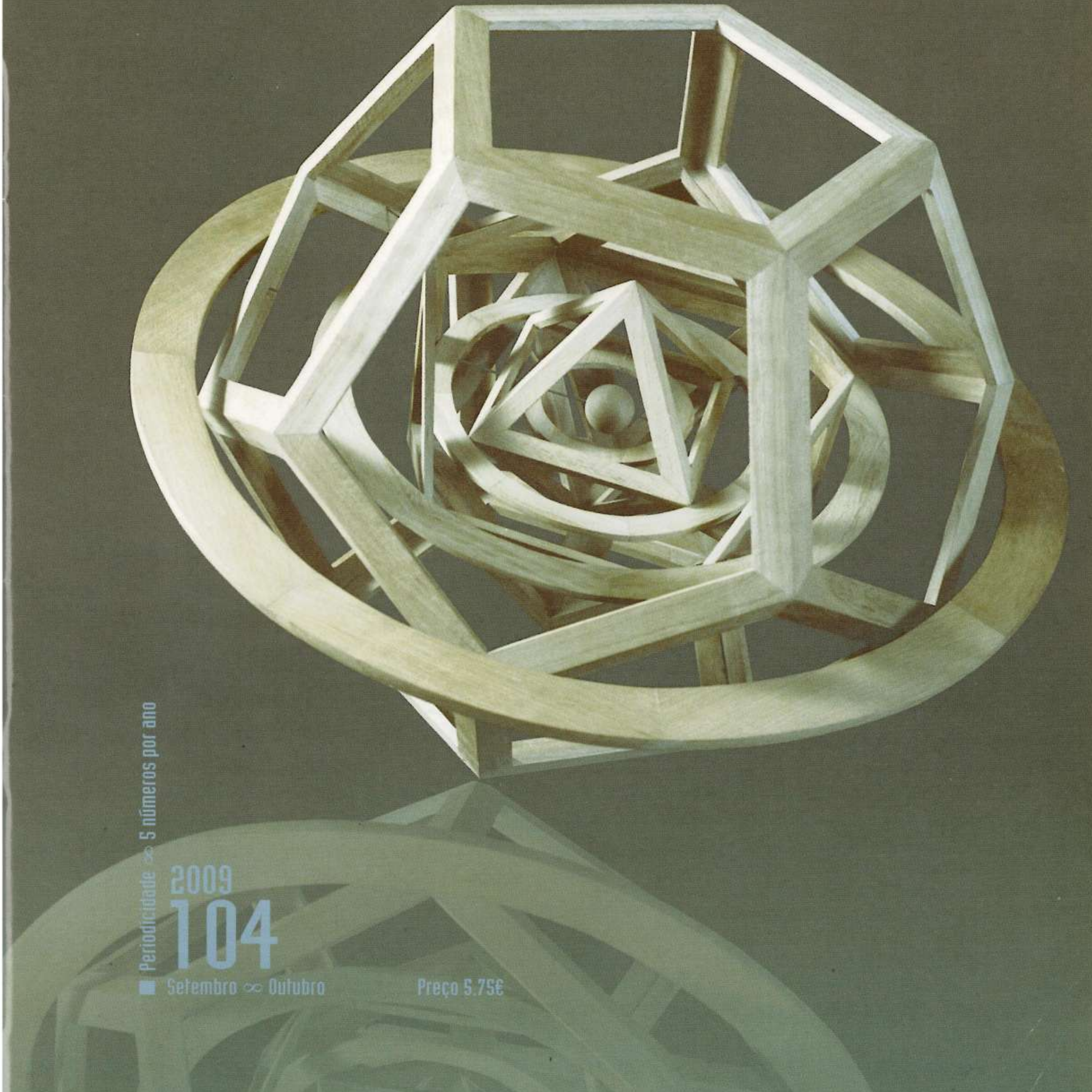
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2009

104

Setembro ∞ Outubro

Preço 5.75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Setembro 2009
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2530–250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222

Porte Pago

Sobre a capa

Em 1596 Kepler publicou o seu *Mysterium Cosmographicum* no qual propôs um modelo do sistema solar onde os planetas se moviam nos equadores de esferas, esferas essas que eram separadas pelos cinco sólidos platónicos. A capa deste número descreve uma concretização do *núcleo central* desse modelo.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Alexandre Costa, Ana Patrícia Silva, António Ribeiro, Bárbara Alexandra Borges Ribeiro, Carlos Rosmaninho, Eduardo Veloso, Fernanda Graça, Henrique Manuel Guimarães, João Almiro, Margarida Oliveira, Mariana Sacchetti, Suzana Nápoles e Teresa Santos.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Editorial

Tecnologia para os alunos ou Ensino com Tecnologia?

Adelina Precatado

A verdade é que são cada vez mais e mais variados os recursos tecnológicos disponíveis para o ensino da Matemática. Uma leitura em retrospectiva da EeM mostra o que acabo de dizer, não só através de artigos e relatos de experiências mas das notícias incluídas na secção permanente *Tecnologias na educação matemática*, publicada desde 1997, cuja criação o Eduardo Veloso anuncia, sob o título *O Regresso das tecnologias?* e com a esperança de «estar a assistir a um movimento de retorno no que diz respeito à utilização das tecnologias em educação matemática».

Ao longo deste tempo muitos professores de Matemática têm investido na sua formação, refiro-me em especial à formação na utilização de *Software* de Geometria Dinâmica e no uso de calculadoras gráficas.

Do ponto de vista das políticas governamentais, recordo o salto em frente que foi o Projecto Minerva na introdução da Tecnologia no ensino e nomeadamente no ensino da Matemática e recordo outros programas que se seguiram desde o Nónio séc. XXI até ao CRIE em 2005. A verdade é que, apesar de todos os programas ou por causa do que não foram todos os programas, é difícil ainda hoje, mesmo para os professores que se considerem mais preparados e motivados, utilizarem de forma natural, o computador na sala de aula, seja porque na realidade ainda não existem em número suficiente, seja porque trabalhar com 28 alunos e computadores é quase impossível, seja porque o tempo não chega, seja porque ...

Um sábado destes, encontrei, no jardim perto da minha casa, um grupo de crianças, talvez de 7–9 anos, à volta de 2 Magalhães. Há uns meses atrás, provavelmente encontrava-as a correr ou a andar de baloiço. Quando comentei este episódio com uma colega ela disse-me: pois, eu fui assistir a uma aula, e qual não é o meu espanto, quando, na hora do intervalo, os alunos tiraram os Magalhães das mochilas e foram a correr para o pátio sentar-se a «jogar» no computador. Pergunto-me, como é possível imaginar-se que uma das medidas emblemáticas do PTE é distribuir tecnologia aos alunos, esquecendo, para não dizer ignorando, os professores?! Será necessário saber muito de Educação para perceber que, para uma medida destas ter repercussões positivas, os professores teriam que ser os primeiros a receber os computadores, a serem preparados e motivados para os utilizarem com significado e, então sim, os computadores podiam ser distribuídos aos alunos?!

A novidade de hoje, 9 de Julho 2009, no portal do Ministério da Educação é o Sistema de Formação e de Certificação em Competências TIC. Estabelecem-se um conjunto de regras para certificar os professores com «selo» de nível 1, 2 ou 3, em competências TIC, num sistema que à partida parece complicado, burocrático e mais importante, sem impacto positivo no ensino... é o eixo de formação do PTE, que formação?

A APM teve sempre entre as suas preocupações a integração da tecnologia no ensino da Matemática. O Documento «Renovação do Currículo de Matemática» conhecido entre nós como o documento de Mil Fontes (1988) dedica o último capítulo ao *currículo de matemática e as novas tecnologias*. Daí para cá foram muitos os espaços onde este tema foi discutido, desde ProfMats a reuniões do Conselho Nacional e foram vários os pareceres com recomendações sobre o uso de tecnologia.

Recentemente, foi dinamizada pela Direcção da APM, uma reunião para reflectir sobre a oportunidade de voltar a lançar um debate alargado sobre este assunto e, mais uma vez, estiveram em cima da mesa as preocupações de sempre, ajustadas ao momento e à tecnologia do presente. As potencialidades das tecnologias só poderão ser um contributo positivo para melhorar o ensino e aprendizagem em geral e da Matemática em particular, se a sua utilização na escola, for acompanhada de opções claras sobre os objectivos da sua integração na educação. No que respeita ao ensino da Matemática é indispensável ter em conta não só os objectivos da educação matemática mas também as didácticas a adoptar nos diversos temas: números, geometria, análise, estatística.

Sempre defendi o uso da tecnologia no ensino da Matemática, portanto só posso dizer: Tecnologia SIM! Mas, não basta um PTE, teórico, com eixos tecnologia, conteúdos e formação, desligados uns dos outros, que se vão concretizando através de concursos públicos, decretos e muitas portarias. Não basta um PTE que se diz «pretender colocar Portugal entre os 5 países Europeus mais avançados na modernização tecnológica do ensino em 2010». Mas, o que significa esta modernização? Como se traduz no processo de ensino e aprendizagem? Que melhorias trás para a educação?

Que capacidades teremos, nós professores e em especial os professores de Matemática, para influenciar ou ajudar a reverter, de forma positiva, o desajustado PTE?

A Direcção da APM fez bem em dinamizar este debate que urge! Precisamos continuá-lo, tornar claro o sentido e o papel que a tecnologia assume na escola. Precisamos anunciar propostas claras de quando e como usar tecnologia no ensino da Matemática. Na minha perspectiva, devemos, também estabelecer quais as condições necessárias para o trabalho na aula de Matemática quando usamos tecnologia.

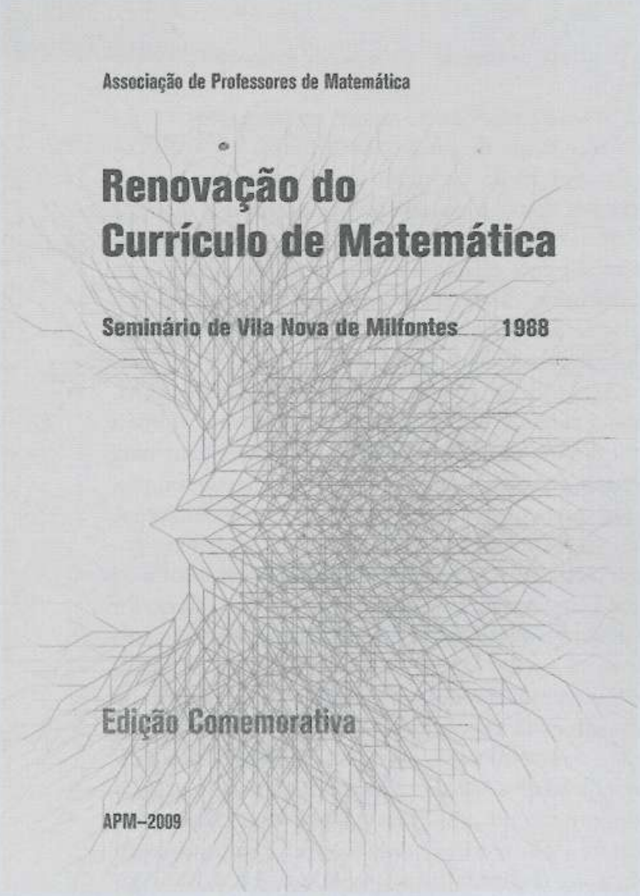
Continuemos este debate, também nas páginas da EeM!

Adelina Precatado, Escola Secundária de Camões

Renovação do Currículo de Matemática

Seminário de Vila Nova de Milfontes, 1988

Edição APM, 2009 | PVP: 7,50€ Sócio: 5,00€



Reler o passado com os olhos no futuro

«Aqueles que não conseguem lembrar-se do passado estão condenados a repeti-lo.»

George Santayana

Duas décadas após a realização do Seminário de Milfontes — *Renovação do Currículo de Matemática* — e a publicação das conclusões então apuradas, assistimos agora à sua reedição comemorativa.

A lei de Bases do Sistema Educativo acabara de ser aprovada (Julho de 1986) e o debate em torno dos Currículos e dos Programas encontrava-se na ordem do dia. A Associação de Professores de Matemática, recém-criada (Setembro de 1986), foi pioneira na promoção desta reflexão e na mobilização de vontades para operar a mudança que se impunha.

Tal como afirma Lurdes Figueiral no prefácio desta nova edição do «Livrinho Amarelo»,

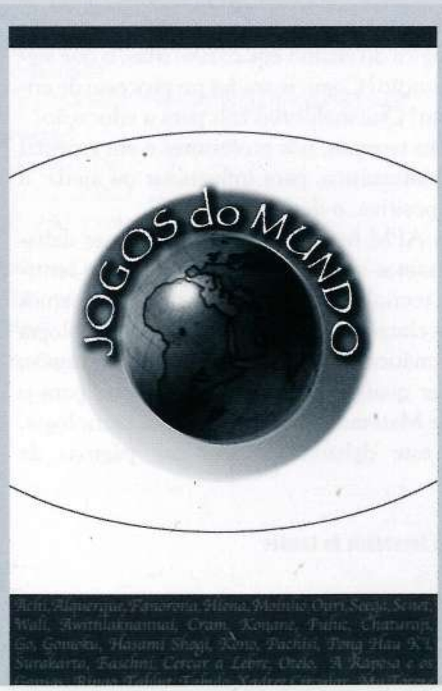
«Foi há 20 anos e era Abril!

Era o tempo, há 20 anos, de começar a entrançar os fios de tantas iniciativas avulsas, ideias e teorias, experiências e vontades, como as que surgiram na década inaugurada em Abril de 74.

Volvidos 20 anos, retorno ao Seminário de Milfontes, como a esses lugares aonde incessantemente se torna porque são o nosso futuro.

(...)

Restaura em mim a confiança e a esperança na Escola. E leva-me a ultrapassar a desistência diante as ameaças que a cercam.»

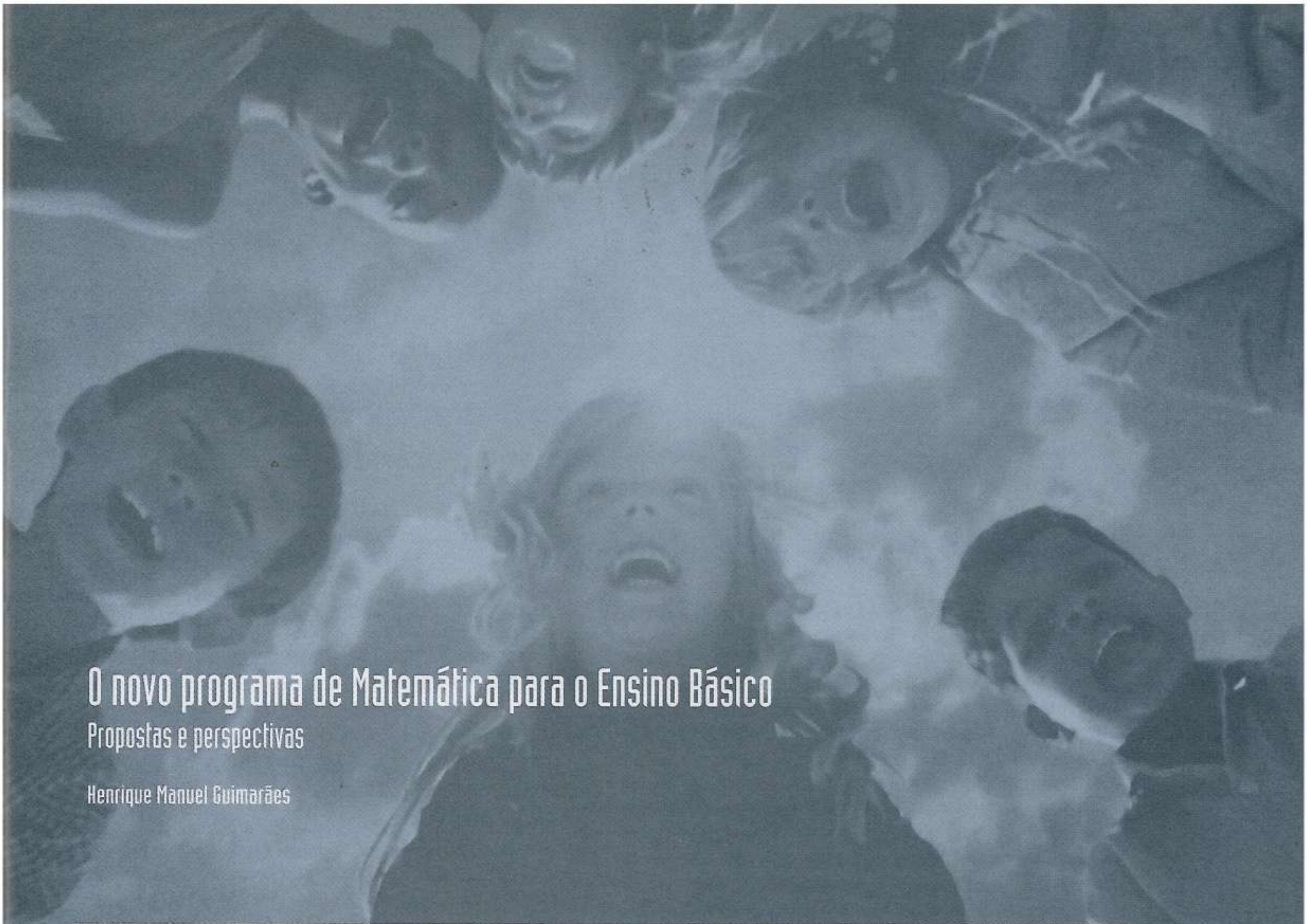


Jogos do Mundo

2ª *Edição*, APM, 2009 | PVP: 11,25€ Sócio: 7,50€

Esta brochura apresenta os 30 jogos que constituem a exposição *Jogos do Mundo*, agrupados de acordo com o que se supõe ser o seu continente de origem. Cada jogo é apresentado através do tabuleiro, das regras e de um conjunto de notas. Quando foi possível incluiu-se um breve resumo da sua história.

A brochura contém ainda referências bibliográficas e referências a sites que são relevantes na abordagem deste tema. *Jogos do Mundo* deu origem a uma exposição com o mesmo nome, constituída na sua maior parte por jogos de estratégia e de tabuleiro, e pelas respectivas regras.



O novo programa de Matemática para o Ensino Básico

Propostas e perspectivas

Henrique Manuel Guimarães

Em 1986, o ensino básico em Portugal foi alargado de seis para nove anos de escolaridade obrigatória e com este alargamento, teve lugar, nos anos que se seguiram, uma reforma educativa e curricular, no quadro da qual se elaboraram novos programas de Matemática. Estes programas ficaram concluídos logo no início da década de 90 e começaram de imediato a ser aplicados, sendo os que ainda estão em vigor.

Passados portanto quase vinte anos, tornou-se sensível a necessidade de proceder a nova reformulação dos programas que procurasse integrar a experiência e os desenvolvimentos do conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática entretanto adquiridos, que clarificasse a organização e conteúdo programático nos três ciclos de escolaridade, e que, sobretudo, melhorasse a sua articulação. Este último aspecto era reconhecidamente deficiente, quer entre os três ciclos, quer com um novo documento programático publicado em 2001 — *Currículo Nacional do Ensino Básico* — que tinha introduzido alterações significativas em relação aos programas em vigor, muito em especial nas finalidades e objectivos de ensino, mas também na forma como os temas matemáticos a ensinar são apresentados.

Por iniciativa do Ministério da Educação foi constituída uma equipa[1] com o encargo da reformulação pretendida. A equipa funcionou essencialmente durante o ano de 2007 e reuniu, pela primeira vez em Portugal, professores de Matemática em exercício dos três ciclos de escolaridade a que o programa se dirigia, matemáticos, e investigadores em educação matemática. O trabalho da equipa foi conduzido numa perspectiva de envolvimento de todos os elementos na análise, discussão e apreciação do material que ia sendo elaborado, bem como no processo de decisão relativo a todas as opções, qualquer que fosse o nível de escolaridade que estivesse em questão. O trabalho ficou concluído no final de 2007, e o novo programa foi homologado pelo Ministério da Educação em Dezembro desse ano.

A estrutura e componentes do novo programa

O programa de Matemática que a ser reformulado tinha sido, nos anos 90, um progresso significativo, procurando integrar as orientações curriculares que então se consideravam importantes, embora com problemas de consistência e de articulação, e nem sempre com a mesma profundidade. Com esta consideração e aceitando a necessidade de realizar a reformulação pretendida no curto prazo disponível para tal, a equipa assumiu que não iria elaborar um novo programa de raiz. Todavia, a reformulação realizada produziu alterações muito significativas no novo programa em relação aos anteriores, quer de estrutura, quer ao nível do seu conteúdo, seja na forma e linguagem com que as propostas programáticas são apresentadas, seja na sua substância.

(Indicações globais)		(Indicações por ciclo)	1.º ciclo (1.º– 4.º ano	2.º ciclo (5.º– 6.º ano)	3.º ciclo (7.º– 9.º ano)
	Finalidades		(Por tema e capacidade transversal)		
	Objectivos gerais		Articulação		
	Temas matemáticos e capacidades transversais		Propósito principal de ensino		
	Orientações metodológicas		Objectivos gerais de aprendizagem		
	Gestão curricular		Indicações metodológicas gerais		
	Avaliação		Tópicos, objectivos específicos e notas metodológicas		

Tabela 1. Estrutura e componentes do programa

A primeira decisão que a equipa tomou foi elaborar o programa num documento único — o que acontecia também pela primeira vez em Portugal — contendo, quer as orientações globais comuns aos três ciclos a que o programa se dirigia, quer a parte específica relativa a cada um dos ciclos, todas elas, por sua vez, com a mesma estrutura. Na parte comum são apresentadas as finalidades e objectivos gerais de ensino para os nove anos de escolaridade, e apresenta-se o conteúdo matemático nas suas grandes linhas, com a principal ênfase que o ensino deve ter em cada um dos grandes temas matemáticos, e ainda as principais orientações metodológicas gerais e para a gestão curricular e avaliação da aprendizagem, a serem consideradas em todo o ensino básico. Na parte específica, constam as orientações relativas de cada um dos ciclos, com a indicação da ênfase principal do ensino e dos objectivos gerais de aprendizagem e indicações de carácter metodológico em cada tema, bem como dos tópicos e objectivos específicos associados (ver tabela 1).

O novo programa está organizado por ciclos e não por anos de escolaridade — como aliás já acontecia nos programas que ainda vigoram — e valoriza «quatro eixos fundamentais» para o desenvolvimento do ensino da Matemática ao longo do ensino básico: «o trabalho com os números e operações, o pensamento algébrico, o pensamento geométrico e o trabalho com dados» (p. 1)[2]. A figura 1 apresenta a distribuição dos temas matemáticos e das capacidades transversais nos três ciclos, pretendendo dar uma ideia do espaço e profundidade relativos em cada um dos ciclos.

Os temas que estruturam o conteúdo matemático são *Números e operações*, *Geometria*, *Álgebra*, e *Análise e organização de dados*, sendo que, no 1.º ciclo, a Geometria vem associada ao tema da Medida e a Álgebra não aparece como tema individualizado, embora seja proposta uma iniciação ao pensamento algébrico. A par dos temas matemáticos trabalhados nos três ciclos de escolaridade, são propostas três capacidades transversais à aprendizagem: *Resolução de Problemas*, *Raciocínio matemático* e *Comunicação matemática*. Estas capacidades são pela primeira vez apresentadas no programa de Matemática com lugar próprio, para serem trabalhadas nos três ciclos como elementos integrantes e integradores do ensino dos vários temas.

As finalidades e os objectivos gerais de ensino

«A Matemática não é uma ciência sobre o mundo, natural ou social, no sentido em que o são algumas das outras ciências, mas sim uma ciência que lida com objectos e relações abstractas. É, para além disso, uma linguagem que nos permite elaborar uma compreensão e representação desse mundo, e um instrumento que proporciona formas de agir sobre ele para resolver problemas que se nos deparam e de prever e controlar os resultados da acção que realizarmos.» (p. 2)

Com o texto que transcrevo atrás em epígrafe, o novo programa abre a apresentação das finalidades e objectivos gerais comuns aos três ciclos de escolaridade a que se dirige, explicitando, nessa apresentação, os principais pressupostos sobre a Matemática e a actividade matemática como domínio científico que enquadram as grandes metas de ensino propostas.

No quadro de uma escolaridade básica obrigatória, considera-se que o ensino da Matemática deve proporcionar a todos os alunos uma formação que promova o desenvolvimento pessoal e auto-realização, apoie a aprendizagem em outras disciplinas escolares, e favoreça a sua integração e desempenho profissional e social. Considera-se assim que a escola deve proporcionar uma formação «que permita aos alunos compreender e utilizar a Matemática» em contextos diversificados, «que promova uma visão adequada da Matemática e da actividade matemática, bem como o reconhecimento do seu contributo para o desenvolvimento científico e tecnológico e da sua importância cultural e social em geral, e, ainda, uma formação que também promova nos alunos uma relação positiva com a disciplina e a confiança nas suas capacidades pessoais para trabalhar com ela» (p. 3). O

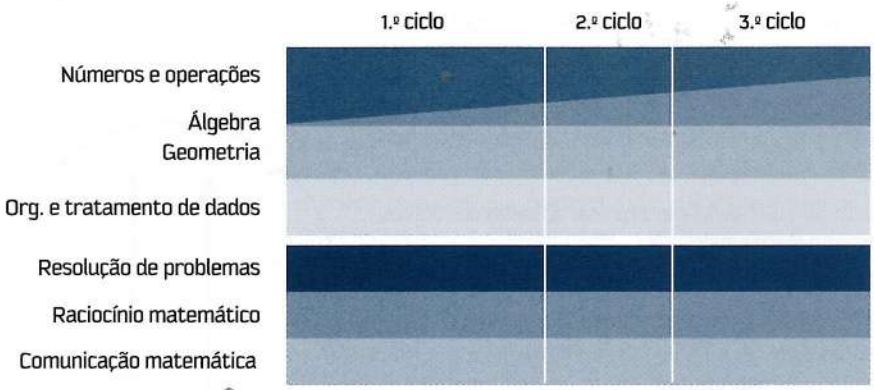


Figura 1

novo programa propõe assim duas finalidades que, como é dito, devem orientar o ensino Matemática ao longo dos três ciclos:

a) Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.
b) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.

À formulação das finalidades e objectivos gerais presidiu o reconhecimento da importância da explicitação de *um vínculo claro com a Matemática*, e a ideia de que o ensino deve promover uma *aprendizagem com compreensão* da Matemática, bem como a capacidade de a *utilizar* em contextos diversos e de a *apreciar* enquanto ciência.

A primeira finalidade é desdobrada numa especificação onde se chama a atenção, para o desenvolvimento da compreensão e capacidade de utilização de «conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos», da capacidade de «resolver e formular problemas» e de «comunicar em Matemática», e ainda, da capacidade de «abstracção e generalização» e de «argumentação matemática». Com a segunda finalidade, pretende-se salientar que o ensino da Matemática deve promover nos alunos a sua «autoconfiança», o seu «à-vontade e segurança» e «interesse» em Matemática, bem como a capacidade de compreender a «Matemática como elemento da cultura humana», de «reconhecer e valorizar o [seu] papel» e de «apreciar os aspectos estéticos» desta ciência (p. 3).

Associado a estas finalidades, o novo programa propõe um conjunto de objectivos gerais para o ensino que, como é dito, procuram clarificar o significado e alcance das finalidades, e explicitar mais especificadamente o que se espera da aprendizagem dos alunos. No seu conjunto, os objectivos formulados valorizam as vertentes da aprendizagem relacionadas com a «representação, comunicação e raciocínio em Matemática, a resolução de problemas e as conexões matemáticas, e a compreensão e disposição para usar e apreciar a Matemática em contextos diversos» (p. 4). Na sua formulação, contemplam diferentes aspectos da aprendizagem, a aquisição e desenvolvimento nos alunos do «conhecimento de *factos e procedimentos básicos*» e a «*compreensão* da Matemática», o desenvolvimento da capacidade de «lidar com ideias matemáticas em diversas *representações*», de «*comunicar* as suas ideias e interpretar as ideias dos outros», de «*raciocinar matematicamente*» e de «*resolver problemas*», e, ainda, de «*estabelecer conexões* entre diferentes conceitos e relações» e de» *fazer* Matemática de modo autónomo» (pp. 5–6, ver figura 2).

Os objectivos gerais integram a dimensão dos *conhecimentos*, das *capacidades* e das *atitudes*, considerando, como já acontecia com as finalidades, que o ensino da Matemática deve ter sempre em vista o desenvolvimento nos alunos da capacidade de *compreensão* e *utilização* da Matemática, e de *apreciação* desta ciência. Assume-se no programa que não há uma hierarquia de ordem nestes objectivos e que eles estão profundamente interligados. «Se o conhecimento de factos básicos é uma condição para a compreensão da Matemática», diz-se como exemplo no programa, «também é verdade que a compreensão da Matemática contribui para um mais sólido conhecimento dos factos básicos», favorecendo também a comunicação, o raciocínio e a resolução de problemas (pp. 6–7).

Ênfase no ensino e orientações metodológicas gerais

No novo programa, como referi, propõe-se que o ensino da Matemática na escolaridade básica se desenvolva em torno de quatro temas matemáticos e três capacidades transversais. Muito brevemente, é possível dizer, em primeiro lugar, que com reformulação realizada se pretendeu valorizar e dar mais visibilidade à *Álgebra* que é introduzida como tema

Objectivos gerais do novo programa

1. Os alunos devem *conhecer os factos e procedimentos básicos* da Matemática
2. Os alunos devem desenvolver uma *compreensão* da Matemática
3. Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas *representações*

Compreensão

4. Os alunos devem ser capazes de *comunicar* as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático

Utilização

5. Os alunos devem ser capazes de *raciocinar matematicamente* usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos

Apreciação

6. Os alunos devem ser capazes de *resolver problemas*
7. Os alunos devem ser capazes de *estabelecer conexões* entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas
8. Os alunos devem ser capazes de *fazer* Matemática de modo autónomo
9. Os alunos devem ser capazes de *apreciar* a Matemática

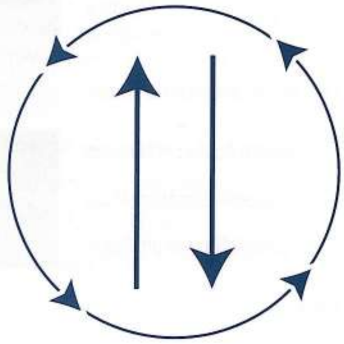


Figura 2

programático nos 2.º e 3.º ciclos, embora no 1.º ciclo já se proponha uma iniciação ao pensamento algébrico. Em segundo lugar, pretendeu-se reforçar o trabalho com informação de natureza estatística nos três ciclos, no âmbito do tema *Organização e tratamento de dados*. Por fim, procurou-se uma melhor articulação e coerência no trabalho com os *Números e operações* e a *Geometria* ao longo dos três ciclos.

Para o trabalho no âmbito do estudo dos *Números e operações*, num universo numérico progressivamente alargado ao longo da escolaridade — dos números naturais e racionais, cujo estudo se inicia nos primeiros anos, aos números inteiros e aos números reais, estes apenas abordados nos anos terminais — o novo programa propõe «três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o *sentido de número* e desenvolver a fluência no cálculo» (p. 7). Como consta no programa, assume-se o sentido de número numa acepção que envolve a capacidade para decompor números e de usar como referência números particulares, o reconhecimento da grandeza relativa e absoluta de números e a compreensão dos vários significados dos números, e ainda a capacidade de estimação e utilização das relações das operações com números na resolução de problemas. No trabalho com os números, valoriza-se igualmente o desenvolvimento do cálculo mental e escrito e da capacidade de usar as aprendizagens neste âmbito na resolução de problemas, comunicação e raciocínio matemáticos.

No trabalho em *Geometria*, o programa dá ênfase particular à visualização e à compreensão de propriedades de figuras geométricas, entendidas como elementos essenciais para o desenvolvimento do *sentido espacial*. Este trabalho incide sobre figuras geométricas no espaço e no plano, cuja diversidade e complexidade, naturalmente, vai aumentando ao longo da escolaridade. O mesmo acontece com as transformações geométricas cujo estudo começa logo nos primeiros anos, sendo progressivamente alargado e aprofundado nos anos mais avançados. O trabalho em Geometria é ainda considerado com particular importância para o desenvolvimento da argumentação e raciocínio matemáticos, incluindo, nos anos terminais, a noção de demonstração.

A *Álgebra*, como tema individualizado, é introduzida apenas no 2.º ciclo. Todavia, como referi, no 1.º ciclo propõe-se já uma primeira abordagem deste tema, por exemplo, no quadro estudo de sequências numéricas e padrões geométricos. Nos anos subsequentes, este trabalho é aprofundado com ênfase sobretudo no desenvolvimento do *pensamento algébrico*, entendido como envolvendo quer as capacidades de abstracção, representação simbólica e generalização, quer de exploração e modelação de situações de contextos variados, com recurso à linguagem e procedimentos próprios da Álgebra.

Por fim, a *Organização e tratamento de dados* tem destaque no programa e consta nos três ciclos, assumindo como ênfase principal o desenvolvimento nos alunos da compreensão de informação de carácter estatístico. O trabalho neste tema tem sobretudo em vista o desenvolvimento das capacidades de analisar, interpretar, e utilizar este tipo de informação, alargando e aprofundando progressivamente o património conceptual e de procedimentos relativos às formas de representação e análise de dados de natureza diversificada.

Ainda sobre os temas matemáticos, o programa propõe que ao longo do ensino básico, e em cada um dos ciclos de escolaridade, esses temas sejam trabalhados «de modo interligado, retomando-se os conceitos fundamentais de forma progressivamente mais aprofundada» (p. 10). A resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática são propostos a par dos temas como *capacidades* *transversais* à aprendizagem, mas a recomendação da sua utilização no ensino, está também entre as principais orientações metodológicas. Para além disso, o programa assume ainda como abordagens metodológicas importantes o recurso a diferentes *representações* e *conexões* matemáticas. «O trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes», diz-se no programa, «deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação», e considera-se importante «a exploração de conexões entre ideias matemáticas, e entre ideias matemáticas e ideias referentes a outros campos do conhecimento ou a situações próximas do dia-a-dia do aluno», de forma a que estes compreendam a relação entre os conhecimentos matemáticos e sejam «capazes de usar a linguagem numérica e algébrica na resolução de problemas geométricos, nos mais diversos contextos» (p. 9).

O programa chama ainda a atenção para a necessidade e importância do desenvolvimento do cálculo mental em todos os ciclos de escolaridade, da utilização de materiais manipuláveis — «principalmente no 1°. ciclo» — bem como de instrumentos de medida e de desenho, e da calculadora e do computador. Esta tecnologia é recomendada «na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objectos geométricos», recomendando-se que o seu uso seja evitado «para realização de cálculos imediatos ou em substituição de cálculo mental» (p. 9).

A concluir

De um modo geral, quer durante o período da sua discussão pública, quer no período que decorreu após a homologação do programa, os inúmeros pareceres recebidos de professores individualmente, mas também de grupos de professores e de instituições interessadas no ensino da Matemática, revelaram uma atitude positiva face ao programa e abertura e receptividade face à generalidade das suas propostas e recomendações. Esta atitude, foi — e tem sido — no entanto acompanhada de manifestações de alguma preocupação, principalmente devida ao pouco tempo curricular da disciplina de Matemática (no 2.° e 3.° ciclos), que já se manifestava em relação aos programas que ainda vigoram.

A equipa dos autores do programa entregou, com a reformulação que realizou, um conjunto de indicações que entendeu conveniente para a sua boa implementação. Entre elas, para além da recomendação do aumento da carga lectiva da disciplina nos ciclos referidos, incluiu diversas iniciativas para apoiar essa implementação: a elaboração de materiais de apoio ao professor, o desenvolvimento de um processo de formação de professores e a criação de um processo de acompanhamento da implementação.

Dos materiais de apoio ao professor, estão em fase de elaboração brochuras com indicações de carácter científico e didáctico sobre os temas matemáticos e capacidades transversais, bem como brochuras com conjuntos de tarefas sobre alguns tópicos, passíveis de imediata utilização em aula. Está prevista também a instalação de um sítio na internet para divulgação de informação e materiais didácticos. A formação de professores está igualmente já em curso e enquadra-se num processo de formação que vem de anos anteriores. Começou por envolver apenas professores do 1.° ciclo, mas foi alargado a outros ciclos e tem como principal característica procurar centrar a formação na escola.

Este ano lectivo teve início em várias escolas dos três ciclos de escolaridade, uma experiência com professores seleccionados que aceitaram pôr o novo programa em prática e que estão a utilizar alguns dos materiais já elaborados. No próximo ano lectivo, iniciar-se-á a implementação faseada do programa, nos 1.°, 3.°, 5.° e 7.° anos de escolaridade[3].

Vejo, no novo programa de Matemática, mais um progresso, integrando propostas e orientações que desde já há vários anos têm merecido o apoio em sectores importantes da comunidade educativa envolvida com esta disciplina. Estas propostas e orientações, como disse, eram já de alguma forma contempladas nos documentos programáticos existentes, mas o novo programa actualiza-as e melhora a sua clareza e precisão — ao nível da linguagem e dos conceitos de que se socorre, mas também ao nível da sua organização — numa apresentação mais articulada e consistente.

Em muitos aspectos, e para concluir, o programa agora proposto é certamente mais exigente e coloca vários desafios, dos quais, em meu entender, o principal será porventura a necessidade de uma melhor organização das escolas e, mais ainda, da parte dos professores de Matemática, na preparação e concretização do seu trabalho lectivo. Sabemos que é importante que o professor disponha *de* mais tempo de aulas e *para* as aulas — e esta necessidade não é de agora, já se fazia sentir antes, particularmente no 2.° e 3.° ciclos. Como sabemos, o que também não é de agora, que é necessário mais e melhor formação e, eu diria, formação *com* o novo programa, mais do que *para* o programa, num quadro de um apoio à sua implementação e numa perspectiva de reforço do acompanhamento em sala de aula do trabalho do professor.

Notas

1 Integraram a equipa João Ponte (Univ. de Lisboa), Lurdes Serrazina (Esc. Sup. de Educação de Lisboa), coordenadores, Henrique Guimarães (Univ. de Lisboa), Ana Breda (Univ. de Aveiro), Eugénia Martins (Univ. de Lisboa), Fátima Guimarães (Esc. Básica de Telheiras, Lisboa), Hélia Sousa (Esc. Básica da Portela, Loures), Luís Menezes (Esc. Sup. de Educação de Viseu) e Paulo Oliveira (Esc. Sec. José Saramago, Mafra).

2 As citações que utilizo no texto são extraídas de Ponte, J. P., Serrazina. L., Guimarães, H. M., Breda, Martins, E., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes L., e Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC. Pode aceder-se a este documento em:

http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Paginas/Reajustamento_matematica.aspx

3 O Ministério da Educação abriu a possibilidade de esta implementação só ocorrer nas escolas que o pretenderem.

Henrique Manuel Guimarães
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Investigação matemática sobre um problema geométrico

Ao longo deste ano lectivo leccionei uma turma de 10º ano de Matemática A onde uma aluna se destacou pela excelência. Este facto levou-me a procurar problemas, desafios e propostas de trabalhos, que lhe ia colocando individualmente com o intuito, não só de não a perder como para contribuir para o seu desenvolvimento e não frustrar as suas expectativas, o que para mim foi também desafiante.

Uma das propostas que lhe fiz foi uma pequena investigação geométrica que fui acompanhando e orientando.

Por me parecer um bom problema, por me surpreender a forma como a Bárbara facilmente o resolveu e as conclusões a que chegou, resolvi partilhá-lo com os leitores da Educação e Matemática.

Porque penso que também é importante mostrar que os nossos alunos excelentes não são descorados nas nossas práticas lectivas, deixo esta ideia, para discutirem, ou talvez também para responderem às questões que a própria Bárbara considerou ficarem em aberto.

O problema era o seguinte: Construir um triângulo isósceles do qual se conhece o raio (R) da circunferência circunscrita e se sabe que a soma da base com a altura é uma constante (k). Descobrir que relação deve existir entre R e k para que o problema tenha solução?

A Bárbara desenvolveu o seguinte trabalho:

Comecei por tentar resolver este problema (1ª questão) pela via geométrica. Por passos:

1. Traçar a circunferência de raio dado (R);
2. Construir o triângulo de altura $2R$ e base $k - 2R$;
3. Construir o triângulo de altura R e base $k - R$;
4. Traçar as rectas que unem as duas bases (figura 1).

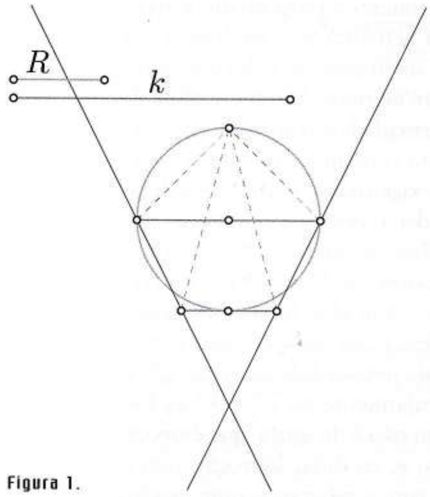


Figura 1.

De acordo com a minha intuição, estas duas rectas determinam as soluções do problema. Esta intuição pode ser comprovada na resolução analítica. Verifica-se que, no máximo, o problema poderá ter duas soluções (se cada recta for secante, e portanto, intersectar a circunferência em dois pontos). Se as rectas forem tangentes à circunferência, o problema tem apenas uma solução. Não tem soluções, quando a recta é exterior à circunferência.

Neste exemplo, os valores dados têm duas soluções (figura 2).

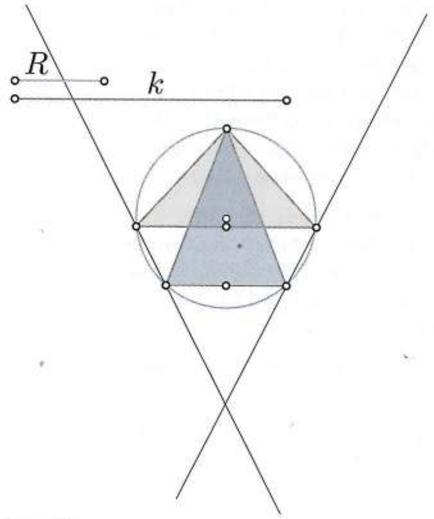


Figura 2.

Para responder à questão «Que relação deve existir entre R e k para que o problema tenha solução?», tenho, agora, que fazer um tratamento analítico do problema. Assim, em primeiro lugar, vou colocar a minha resolução geométrica sobre um sistema de eixos coordenados, Oxy, sendo que o centro da circunferência tem de coordenadas (0,0) (figura 3).

Equação da circunferência: $x^2 + y^2 = R^2$.

Determinação da Equação da recta[1]: $AB = k$; $BC = k - 2R$; $CD = BC/2$ (resultado do processo de construção)

Logo, o declive é 2 e a ordenada na origem é $k - R(k - 2R + R)$. Portanto $y = 2x + (-k + R)$.

Daqui segue-se também que a solução do problema tem de ser dada por estas rectas, pois com declive igual a 2, se tem $k - h = 2 \times b/2 = b$, sendo h e b, respectivamente, a altura e base do triângulo solução.

Para encontrar as soluções do problema, é necessário verificar quando é que a recta e a circunferência se intersectam:

$$x^2 + [2x + (-k + R)]^2 = R^2$$

$$(\ldots)$$

$$x = \frac{-2(-k + R) \pm \sqrt{4(-k + R)^2 - 5(k^2 - 2kR)}}{5}$$

O número de soluções depende do binómio discriminante (Δ):

$$\Delta = 4(-k + R)^2 - 5(k^2 - 2kR)$$

$$(\ldots)$$

$$\Delta = -k^2 + 2kR + 4R^2$$

Se $\Delta < 0$, a recta é exterior à circunferência.

Se $\Delta = 0$, a recta é tangente à circunferência.

Se $\Delta > 0$, a recta é secante à circunferência.

Resolução em ordem a k:

$$-k^2 + 2kR + 4R^2 = 0$$

$$(\ldots)$$

$$k = R(1 - \sqrt{5}) \vee k = R(1 + \sqrt{5})$$

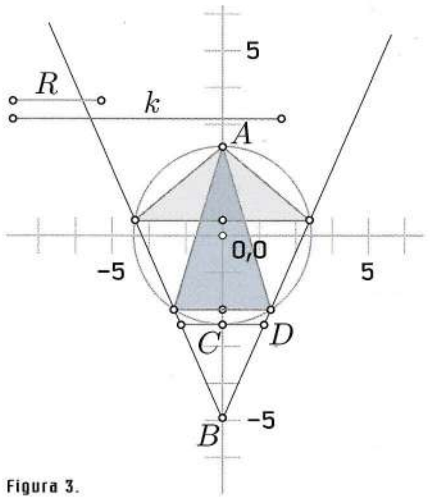


Figura 3.

Pode-se ver, à partida, que uma das soluções (a primeira) não interessa para o problema em questão pois é negativa, e comprimentos nunca podem ser negativos. Portanto, interessa apenas estudar a variação de R e k a partir de $k = 0$. Logo, o único zero de Δ que nos interessa é $k = \Phi 2R$ (isto pois $k = 2R(1 + \sqrt{5})/2$ que é equivalente a $k = \Phi 2R$).

Verifica-se, então, que os valores de k compreendidos entre 0 e $\Phi 2R$ têm duas soluções na equação; no entanto, estas soluções podem ser negativas, positivas ou nulas. Para responder a esta pergunta, vou recorrer à resolução geométrica do problema. Para começar, não é difícil ver que se o comprimento de k coincidir com o diâmetro ($2R$), um dos triângulos vai ter base nula (figura 4).

Esta situação pode ser comprovada algebricamente:

Seja $k = 2R$

$$x = \frac{-2(-2R + R) \pm \sqrt{4(-2R + R)^2 - 5[(2R)^2 - 2(2R)R]}}{5}$$

$$(\ldots)$$

$$x = 0 \vee x = \frac{4R}{5}$$

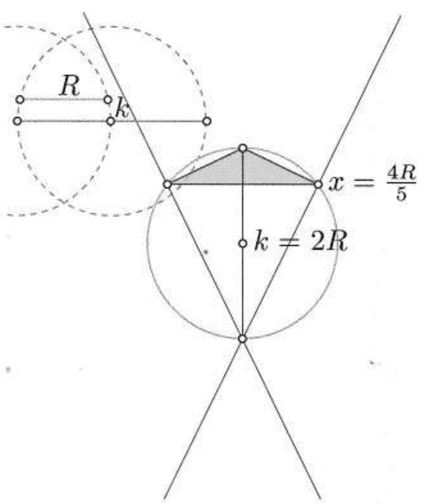


Figura 4.

Seguindo o mesmo raciocínio, entende-se que se k for menor que $2R$, existe, no máximo uma solução (positiva, ou seja, válida para a resolução do problema): se k, que é uma constante que representa a soma da base com a altura do triângulo isósceles desejado, é menor do que somente a própria altura (ou seja, k nem chega para «completar» o comprimento necessário para a altura de uma das soluções, nem, muito menos, deixa nada de «sobra» para formar a base), uma das soluções é sempre impossível desde $k = 0$ até $k = 2R$. Porém uma das soluções existe sempre (excepto quando k toma valores menores que 0).

Quando $k = \Phi 2R$, o problema só tem uma solução, tratando-se obviamente do caso de tangencia da recta com a circunferência. Entre $k = 2R$ e $k = \Phi 2R$, existem duas soluções para a equação que, por serem ambas positivas, se traduzem em duas soluções para o problema. Quando $k > \Phi 2R$, a recta passa a ser exterior à circunferência e, por isso, deixamos de ter qualquer solução para o problema.

(...)

Restam algumas questões que ficam em aberto: a razão do aparecimento do número de ouro, Φ, como uma constante importante para a resolução analítica do problema e se o seu aparecimento (que também se constata em certas relações nos pentágonos) estará relacionado com as próprias formas geométricas de que estamos a lidar (triângulos, que quando unidos, podem formar pentágonos)?

Nota

1 Note-se que basta determinar a equação de uma das rectas, pois a outra é simétrica, tornando-se redundante para a investigação.

Bárbara Alexandra Borges Ribeiro
Mariana Sacchetti
Escola Secundária José Estêvão

Fiquei surpreendido pelo relativo bom desempenho dos alunos

A experiência que partilho aconteceu enquanto leccionei a disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais de 11° ano, abordava pela primeira vez a temática dos Grafos.

Tratava-se de uma turma do Curso de Ciências Sociais e Humanas, tradicionalmente constituídas por alunos que querem «fugir» à Matemática. Fiquei surpreendido pelo relativo bom desempenho dos alunos, nesta primeira parte do ano lectivo, aquando da realização quer dos vários trabalhos, quer do teste sumativo feito sobre esta unidade temática. Penso que este sucesso se deve ao facto dos conteúdos matemáticos serem explorados a partir de situações que eles vivenciam no dia-a-dia, tornando, assim, as aprendizagens mais significativas.

Os bons desempenhos deram-me um incentivo extra, decidi propor a estes alunos uma pequena actividade de investigação sobre um tema que não faz parte do programa. Também, era um desafio por mostrar que os Grafos não se utilizam apenas na tradicional representação de mapas de vias de comunicação.

Esta actividade de investigação sobre Grafos Planares consistiu no estudo da relação existente entre os Grafos Planares e os Sólidos Platónicos. O desenvolvimento desta investigação teve como base um guião organizado em duas partes distintas. Desta forma, na primeira parte, os alunos investigaram uma breve abordagem aos dois conceitos (grafos planares e sólidos platónicos). Numa segunda parte, os alunos envolveram-se em duas tarefas: construir os sólidos pedidos, com o *ZomeSystem*; e investigar, usando a sombra projectada do sólido, o grafo planar associado a cada sólido platónico.

É de referir que os alunos apreciaram esta abordagem do conceito de planaridade, tornando-se assim evidente a mais valia desta estratégia em oposição a uma tradicional exploração feita no quadro, projectando um acetato ou, eventualmente, apresentando vários grafos planares numa ficha de trabalho. Julgo que para este facto, muito contribuiu a presença de dois «condimentos» essenciais: o facto de ser uma actividade de grupo; e a existência de motivação elevada, originada por uma exploração com um diferente material didáctico (recentemente adquirido através do PAM).

Em virtude da agradável experiência que se vivenciou nesta aula, deixo aqui alguns comentários de alunos: «Sobre a aula passada, acho que trabalhámos bem e que foi um bom método de compreensão da matéria através de materiais manipuláveis.»; «Na minha opinião, a aula passada foi muito dinâmica e criativa, devia de haver mais aulas assim.»; «Gostei da aula passada, pois com a utilização de materiais manipuláveis conseguimos expressar melhor os nossos raciocínios, e ao ser uma aula prática o interesse é maior pela matéria. Devíamos fazer mais vezes aulas práticas!».

Carlos Rosmaninho
Agrupamento de Escolas de Arraiolos

Johannes Kepler e a solução do problema dos movimentos planetários

Alexandre Costa

Desde o aparecimento do Homem que este se interessou pela observação do céu. Cedo foi compreendido que, sobre um fundo de estrelas fixas relativamente umas às outras, havia sete *errantes* que possuiam movimentos relativamente a esse fundo. Esses sete *errantes* — o Sol, a Lua, Mercúrio, Vénus, Marte, Júpiter e Saturno — que se moviam individualmente entre as fixas com um movimento que aparentemente parecia aleatório, como que determinado por uma vontade própria, foram na antiguidade teificados em diversas civilizações politeístas Mesopotâmicas, em especial na Suméria e Babilónica, sendo-lhes atribuído um dia de adoração. A estes astros foi dado, na Antiga Grécia, o nome de planetas (do grego «errantes»), uma designação que hoje está completamente desadequada no caso do Sol.

O calendário de ciclos lunares da Babilónia com meses de cerca de 28 dias (Hoskins, 1997, p. 27, Falkes, 1999, p. 122) foi provavelmente o primeiro a dividir os meses em quatro períodos correspondentes às quatro fases da Lua[1]. Esta divisão em períodos de sete dias deu origem às semanas tal como as conhecemos hoje. De facto, como se pode ver da Tabela 1 o nome dos dias da semana advém do nome do objecto celeste adorado em cada dia na Babilónia[2].

Tabela 1. Os dias da semana na Babilónia, na cultura romana e em algumas línguas ocidentais actuais (a negrito). Adaptado de Falkes, 1999.

Babilónia	Latim	Inglês	Francês	Espanhol
Dia do Sol (Shamash)	Solis dies	**Sunday**	Dimanche	Domingo
Dia da Lua (Sin)	Lunae dies	**Monday**	**Lundi**	**Lunes**
Dia de Marte (Nergal)	Martes dies	Tuesday	**Mardi**	**Martes**
Dia de Mercúrio (Nabû)	Mercuri dies	Wednesday	**Mercredi**	**Miercoles**
Dia de Júpiter (Marduk)	Jovis dies	Thursday	**Jeudi**	**Jueves**
Dia de Vénus (Ishtar)	Veneris dies	Friday	**Vendredi**	**Viernes**
Dia de Saturno (Ninurta)	Saturni dies	**Saturday**	Samedi	Sabado

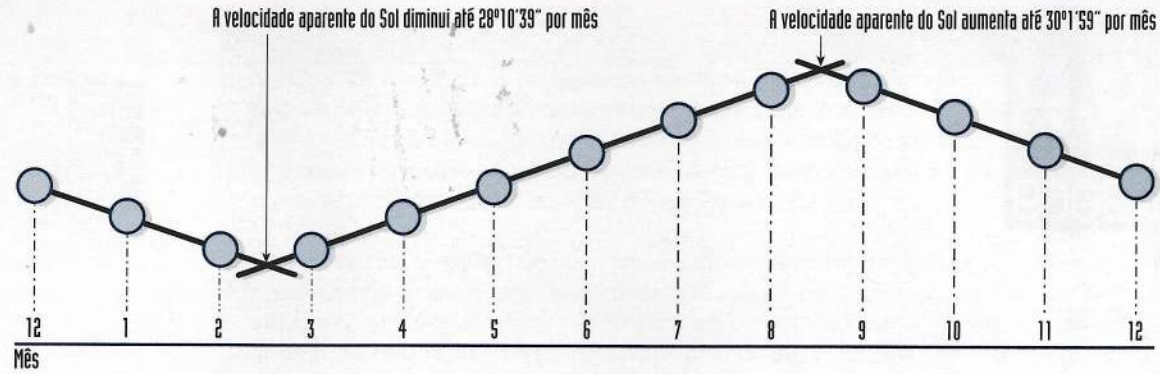


Figura 1. Uma representação adaptada dos dados apresentados numa lâmina datada de 133/132 a.C. sobre a segunda aproximação babilónica da velocidade aparente do Sol relativamente às estrelas de fundo. Adaptado de Hoskin, 1997, p. 28 e North, 1994, p. 45.

Esta fusão da mística com a observação objectiva foi o que fez com que na antiguidade a maior parte dos astrónomos fossem também astrólogos, um situação que apenas se viria a alterar com o nascimento da ciência. Ainda assim, o misticismo do número sete prevalece em inúmeras concepções humanas das quais são exemplos, as sete notas musicais, as sete cores do arco-íris e, ao nível religiososo, os sete pecados mortais.

Na vertente que tentou fazer prevalecer uma visão objectiva, desde a antiguidade até ao século XVII, a astronomia teve sempre dois objectivos relacionados um com o outro. Por um lado, mostrar que os movimentos dos planetas não eram aleatórios, mas sim regulares e previsíveis e, por outro, ser capaz de prever esses mesmos movimentos com grande acuidade.

O primeiro dos dois objectivos foi definido pelos gregos, tendo o esforço de obtenção das primeiras medições rigorosas sido desenvolvido pela distinta civilização da Babilónia. A verificação do carácter cíclico das posições das estrelas foi verificada pela primeira vez na Mesopotâmia, tendo a duração do ciclo, a que chamamos ano, sido estabelecida em 360 dias, uma hipótese de explicação possível para o sistema sexagesimal usado pelos sumérios e babilónios proposta por Formaleoni em 1789 e repetida por Cantor cerca de 1880 (Ifrah, 2000, p. 91). Curiosamente, o erro inicial de 5¼ dias na duração do ano, permitiu o desenvolvimento de uma trigonometria baseada em quadrantes de 90° que as civilizações orientais (nomeadamente a chinesa, que partiu da determinação mais rigorosa de 365¼ dias (North, 1994, p. 137) nunca chegaram a desenvolver.

As primeiras observações da Grécia Antiga são melhor conhecidas pelo conjunto de lendas e mitos que até nós chegaram do que pela existência de documentos escritos. De facto, os gregos observaram a maior parte dos movimentos aparentes do céu e documentaram-nos de forma por vezes não muito científica, porém, sem sombra de dúvida, rigorosa quanto às observações por eles efectuadas.

Os modelos explicativos do movimento dos planetas pretendiam explicar o facto de estes se moverem relativamente ao fundo celeste mais rapidamente numas alturas e mais lentamente noutras. Esta alteração de velocidades era observável até no movimento zodiacal do Sol (figura 1) que era conhecido desde a civilização babilónica (North, 1994, p. 45)

Outro problema que tinha que ser resolvido era a explicação da retrogradação. Os planetas apresentam incompreensíveis movimentos, que recebem a designação de retrogradações, parecendo voltar para trás relativamente ao fundo estelar para depois retomar o seu sentido inicial do movimento relativamente à abóboda celeste (figura 2.).

À excepção de uma proposta pouco eloquente de Aristarco, que propunha um modelo heliocêntrico (Hoskins, 1997, p. 37), as primeiras propostas de explicação dos movimentos dos corpos celestes foram geocêntricas, em grande parte devido às ideias de Aristóteles que prevaleceram na Antiguidade.

Havia para Aristóteles uma diferença fundamental entre as regiões terrestre e celeste, entre a imprecisão e variabilidade encontrada na região terrestre e a perfeição geométrica encontrada nos corpos celestes, contituídos por pontos ou círculos de luz.

De acordo com Aristóteles, corpos que eram frios e secos eram na sua maioria constituídos por Terra, os que eram frios e húmidos eram na sua maioria constituidos por água, aqueles que eram quentes e húmidos formados por ar e os que eram quentes e secos formados por fogo. A Terra era na sua maioria formada por terra com uma camada mais exterior de água (os mares), sobre as quais haviam uma fina camada de ar (a atmosfera). Sobre a atmosfera havia uma camada de fogo que acabava imediatamente antes da Lua. Dentro desta região — que constituía o mundo terrestre ou sublunar — existia vida, morte e mutabilidade. Qualquer corpo tinha um lugar natural — altura natural ou distância ao centro da Terra — que estava associado à proporção em que os quatro elementos entravam na sua composição. Se não fosse impedido, qualquer corpo seguiria em linha recta, definida a partir do centro da Terra, para o seu lugar natural.

Nos céus não havia qualquer vida ou morte, aparecimento ou desaparecimento. Pelo contrário, os corpos celestes, que eram esferas perfeitas e cristalinas mantinham o seu movimento de translação eternamente, num perfeito movimento circular uniforme (o problema dos cometas foi rapi-

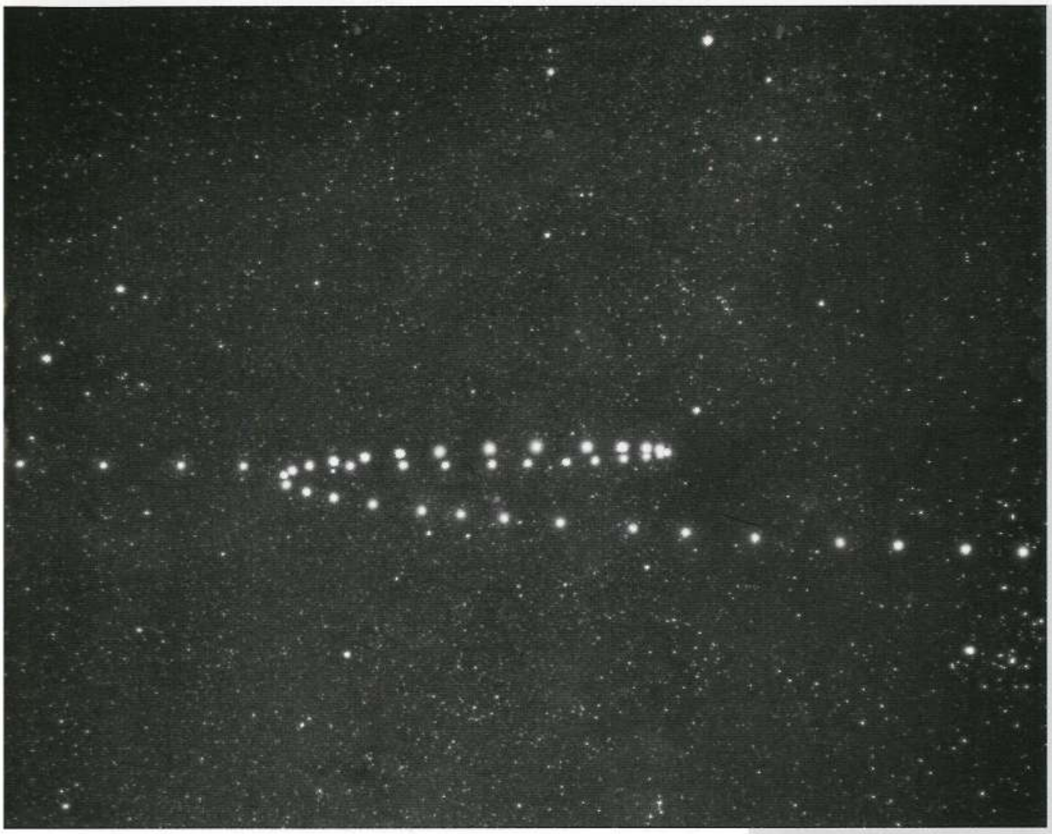


Figura 2. Movimento retrógrado do planeta Marte.

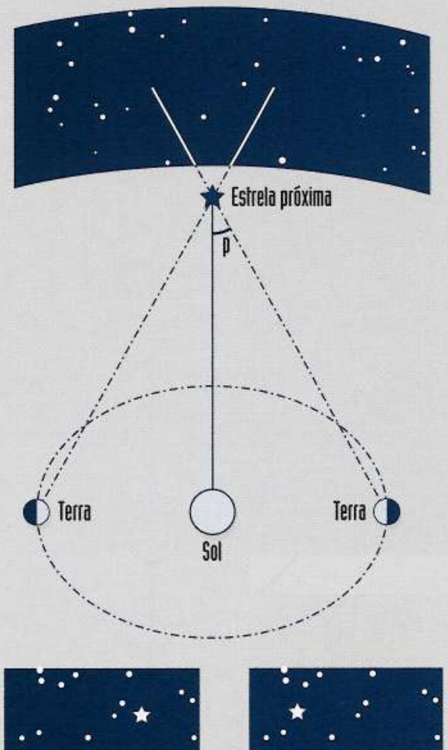


Figura 3. A paralaxe. O ângulo p permite-nos obter a distância à estrela em parsec através da expressão d=1/p, porque para ângulos da ordem de grandeza do segundo de arco [arcsec], p = tan p.

damente resolvido, pois estes corpos, como iam e vinham, tinham, por isso, natureza terrestre).

E desta lógica nasceram as premissas que garantiam a legitimidade do geocentrismo:

1) A Terra, por estar dentro da esfera sublunar não podia mover-se em torno do Sol.
2) Se a Terra girasse sobre si própria, todos os objectos que não estivessem solidamente ancorados à sua superfície seriam lançados no espaço.
3) Se a Terra se deslocasse, descrevendo uma trajectória em torno do Sol, as «fixas» não manteriam as suas posições em relação umas às outras.

Se o primeiro argumento é redundante, já o segundo é aceitável à luz do senso comum e do desconhecimento da existência da força gravitacional e o terceiro é de uma pertinência extrema, pois revela a ideia de que haveria estrelas mais próximas que seriam vistas em locais diferentes relativamente às estrelas mais longínquas quando a Terra se encontrasse em posições diametralmente opostas relativamente ao Sol. Este fenómeno, conhecido por paralaxe (figura 3), apenas foi verificado no século XIX por Bessel, devido às distâncias às estrelas mais próximas serem muito superiores às que se consideravam na antiguidade e, consequentemente, os deslocamentos angulares relativamente às estrelas de fundo serem todos inferiores a 1 arcsec.

Ptolomeu escreveu um livro de valor inestimável para os historiadores da Ciência, o *Almagest*, que é considerado por muitos como a maior compilação de conhecimentos da antiguidade. Nele, Ptolomeu sugere um sistema dos mundos geocêntrico, baseado em conceitos de geometria dados por Apolónio de Perga e Hiparco (Cohen, 1988, p. 49) que elevou a um nível de funcionamento quase perfeito, tendo em consideração as medidas que são possíveis ser obtidas no espaço de uma vida. O sistema geocêntrico resultante é muitas vezes chamado sistema ptolemaico. Não acreditava na rotação da Terra e não tinha qualquer ideia sobre a natureza das estrelas, mas o seu sistema encaixava nos factos observados e pode dizer-se que dadas as circunstâncias seria impossível fazer melhor. Era um sistema extremamente complexo

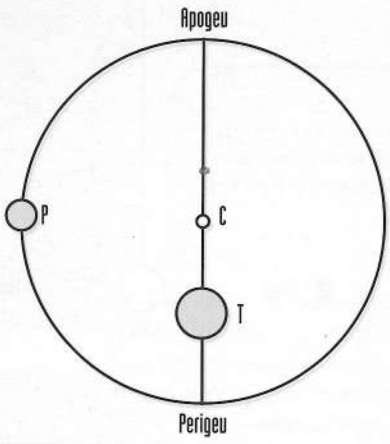


Figura 4. No modelo ptolemaico a Terra encontrar-se-ia num ponto excêntrico ao centro de curvatura da órbita.

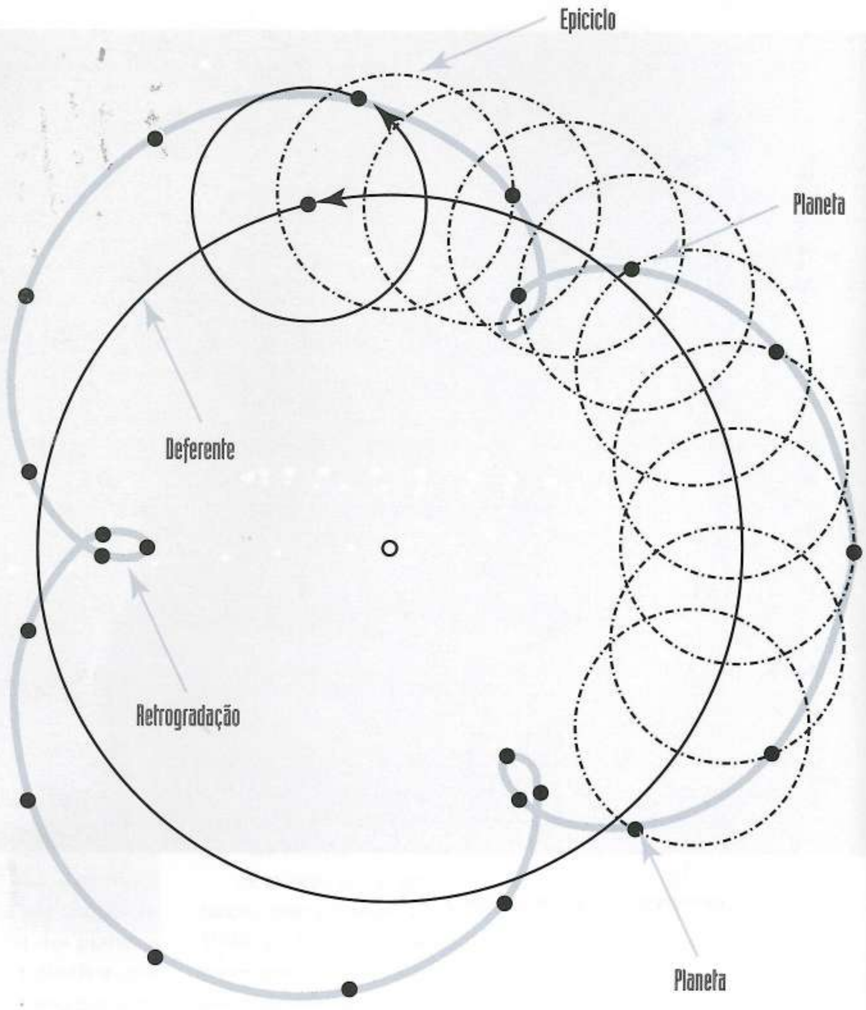


Figura 5. Deferente e epiciclos no modelo ptolemaico (adaptado de Cohen, 1988, p. 51)

conjugando movimentos circulares uniformes em combinações variadas.

Para tentar explicar a diferença de velocidades relativamente às estrelas de fundo, Hiparco havia retirado a Terra do centro da esfera celeste, passando esta a ocupar uma posição excêntrica (figura 4). Desse modo, mesmo que um planeta descreva um movimento circular uniforme em torno do centro de curvatura, visto da Terra, esse movimento em relação às estrelas de fundo parecerá ocorrer a velocidades diferentes quando o corpo estiver no perigeu (ponto mais próximo da Terra) e no apogeu (ponto mais afastado da Terra) (Cohen, 1988, pp. 50–51).

O sistema excêntrico explicava também as conhecidas variações de brilho dos planetas nos diversos pontos da órbita. Assumia-se que o ponto *P* se movia uniformemente no círculo de referência ou deferente. No entanto, as velocidades obtidas ainda não reflectiam bem as velocidades dos planetas e muito menos as retrogradações.

O ponto *P* era apenas um ponto imaginário no deferente, em torno do qual se definia o epiciclo (figura 5). O epiciclo era uma circunferência centrada no ponto *P* e sobre a qual o planeta descrevia a sua trajectória, num movimento circular uniforme. Para tornar o movimento do planeta idêntico à observação das retrogradações era apenas necessário adaptar os tamanhos do deferente e dos epiciclos até se obter a curva ajustada às observações.

No modelo, a Terra não necessita estar no centro do deferente mas pode ocupar uma posição excêntrica. Quando a velocidade não conseguia ser ajustada apenas com estes artifícios, existia ainda um ponto, chamado o equanto, que era excêntrico e oposto à Terra relativamente ao centro, e que poderia ser a origem de um movimento com velocidade angular uniforme em que o planeta varria ângulos iguais a intervalos de tempo iguais (figura 6).

É evidente que Ptolomeu não se preocupou com a questão de saber se havia epiciclos, deferentes ou equantos «reais» nos céus. Na verdade, preocupou-se apenas em construir um modelo que permitisse prever os acontecimentos reais, sem se preocupar com as causas.

A atitude de elaborar um modelo que contivesse equações ajustadas às obserações e que permitissem fazer previsões, mesmo que o modelo parecesse ser demasiado complicado matematicamente, não é totalmente diferente daquilo que muitas vezes ocorre ainda nos nossos dias.

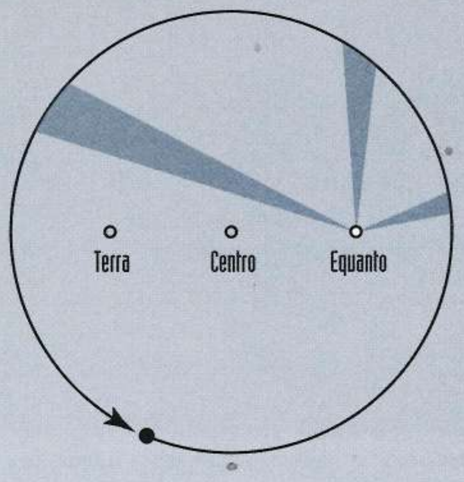


Figura 6. A partir do equanto o planeta varre ângulos iguais a intervalos de tempo iguais.

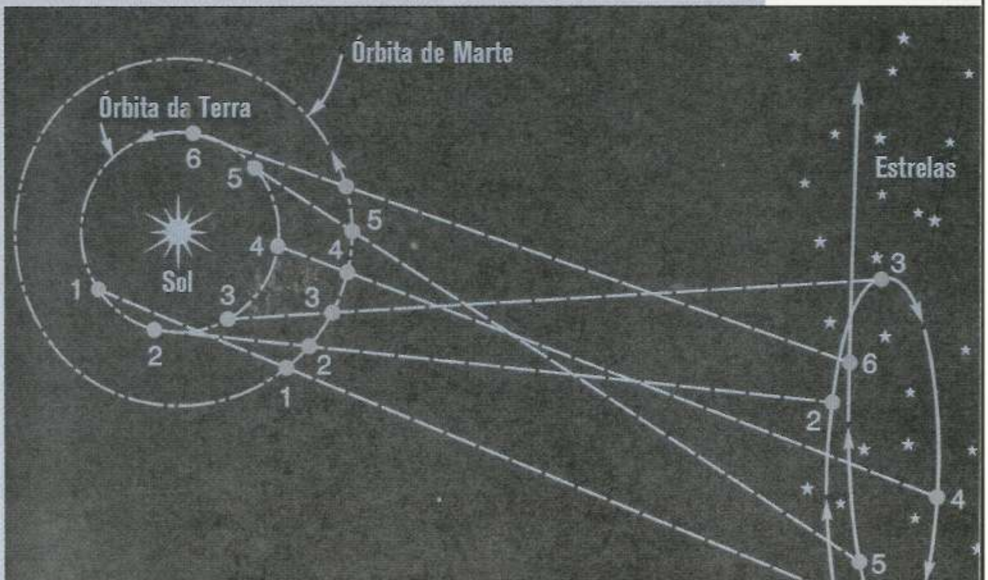


Figura 7. A retrogradação explicada com o modelo heliocêntrico para um planeta exterior (Marte).

Para Copérnico, o sistema tinha uma complexidade inaceitável, que poderia ser resolvida colocando o Sol no centro do sistema (figura 7). Esta sua tese está descrita no livro *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (Copernicus, 2002) relativo ao movimento orbital dos principais corpos celestes conhecidos no seu tempo. A tese poderia estar praticamente completa em 1533, mas Copérnico não a publicou por saber que a Igreja o acusaria de heresia, pois tirar a Terra do centro do universo ia contra a doutrina oficial. Finalmente, em 1543, já às portas da morte, concordou com a sua impressão, não se sabendo se chegou a ver a versão impressa. Muitas das ideias de Copérnico estavam erradas e a sua teoria final era quase tão complicada como a de Ptolomeu, mas tinha dado o passo essencial para que os seus sucessores pudessem construir sobre o seu trabalho. É neste contexto que se vai desenvolver o trabalho de Kepler.

Johannes Kepler, nascido em Wurttemberg em 1571, foi o último assistente de Tycho Brahe. Na realidade, o sucesso de Kepler está intrinsecamente ligado à sua relação com Tycho.

Este sempre considerou que, para se poder tirar conclusões correctas dos fenómenos naturais, era necessário dispor de medidas com o máximo de precisão possível. Tendo em vista esse objectivo, e com o apoio do rei Frederico da Dinamarca, que era consequência de ser ele próprio membro da nobreza, construiu instrumentos de proporções gigantescas, de modo a minorar os erros de precisão, como é o caso do grande quadrante mural do observatório de Uraniborg, na ilha de Hven (figura 8).

Além das dimensões, Tycho preocupou-se em colocar os seus instrumentos sobre fundações sólidas, de modo a que mantivessem a sua estabilidade.

Entre 1576 e 1598, Tycho produziu as maiores e mais rigorosas tabelas que alguma vez haviam sido realizadas. No entanto, não conseguiu verificar qualquer paralaxe estelar ou qualquer outro movimento anual que indicasse que a Terra se deslocasse ao redor do Sol.

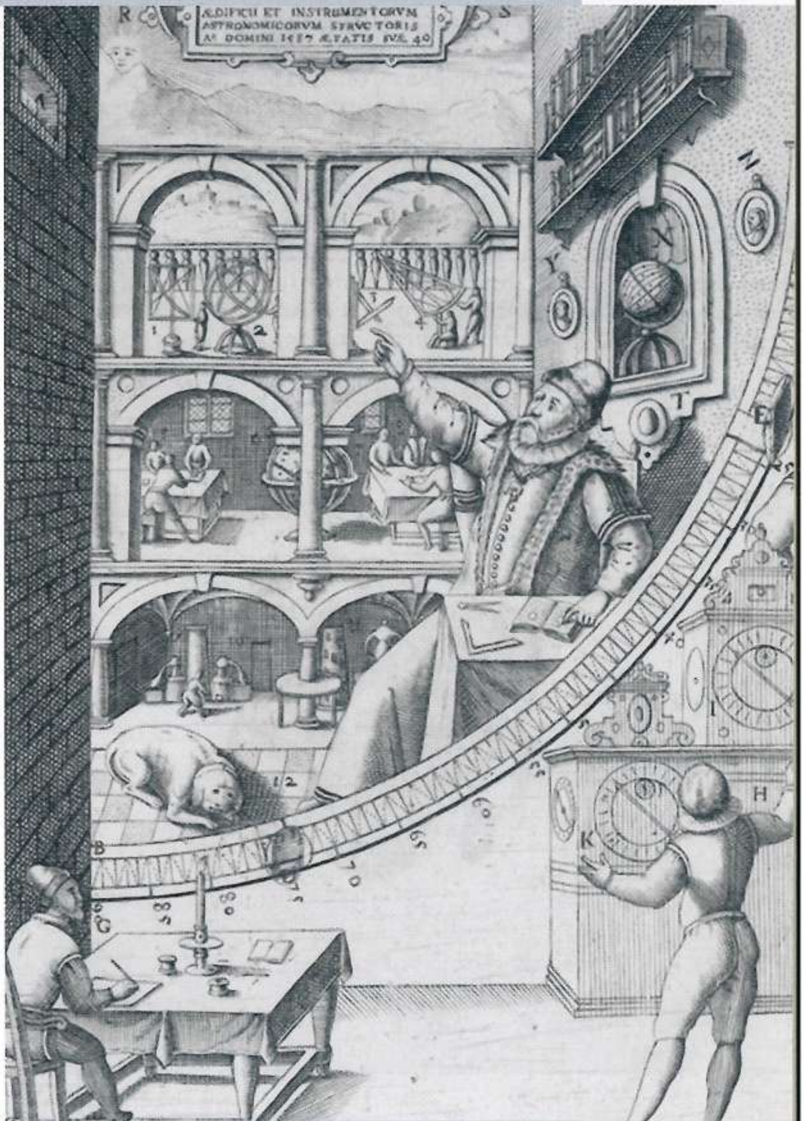


Figura 8. Grande Quadrante Mural

No entanto, Tycho viu claramente as vantagens de ter um sistema centrado no Sol e por isso, em 1586, propôs o seu modelo Ticónico híbrido em que o Sol gira em torno da Terra ao longo de um ano, enquanto os restantes planetas (excepto a Lua) orbitam à volta do Sol (Figura 9).

Este modelo preservava a elegância do modelo geocêntrico grego, retendo a física de Aristóteles e explicando porque é que os objectos caíam de volta para a Terra, mas ganhando as vantagens da simplicidade de explicação das retrogradações do modelo heliocêntrico.

Kepler preferia uma visão mais simples de um sistema girando em torno do Sol que um sistema híbrido. Mas os dados que herdou de Tycho Brahe foram fundamentais para que pudesse desenvolver o seu modelo de órbitas planetárias e estabelecer as leis físicas que hoje conhecemos como leis de Kepler.

Johannes Kepler (Figura 10) não possuía qualquer das vantagens sociais de Tycho Brahe, mas queria penetrar na mente de Deus, o Geómetra.

Ao olhar para as órbitas planetárias, à luz dos deferentes epiciclos e equantos da teoria geocêntrica, Kepler verificou que nada existia no centro da órbita que fosse a génese do movimento, uma ideia que era pouco aceitável. Tornou-se, por esta razão, um heliocentrista convicto.

Kepler era matemático, e acreditava que os movimentos dos planetas tinham causas físicas e, no entanto, custou-lhe a colocar de lado preconceitos antigos como, por exemplo, o movimento dos planetas ser feito em órbitas circulares só porque essa era a forma mais perfeita e harmoniosa de todas as formas.

Tentou construir um sistema baseado em sólidos geométricos que encaixassem as «esferas planetárias» a uma distância que permitisse uma escala exacta das distâncias planetárias ao Sol. Acreditou que uma geometria perfeita teria que conter os poliedros regulares conhecidos desde o tempo dos gregos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro (figura 11).

Figura 9. O Universo Ticónico apresentado no livro De Mundi de 1588.

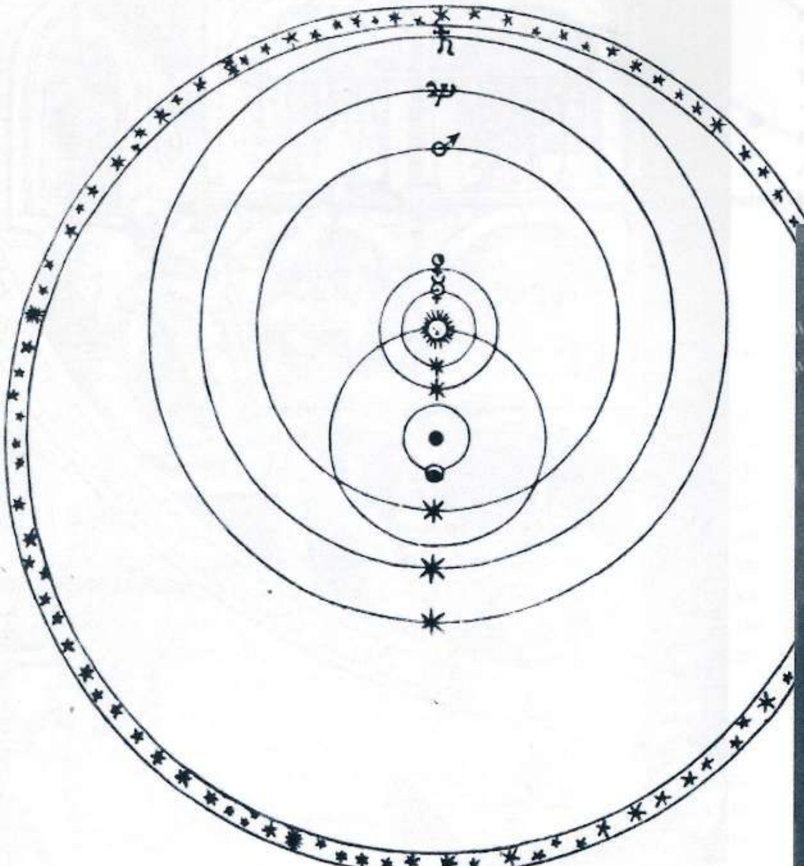
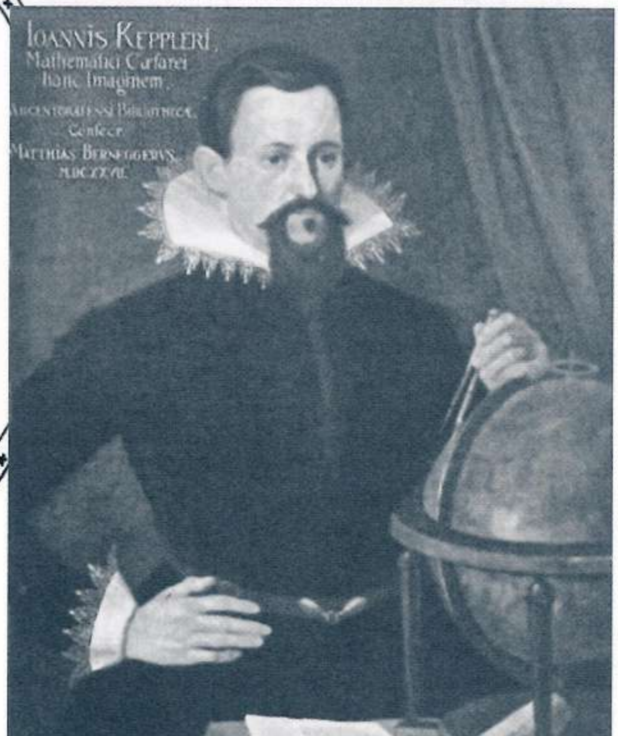


Figura 10. Johannes Kepler [1571—1630]. Quadro de Matthias Berneggerus datado de 1627.



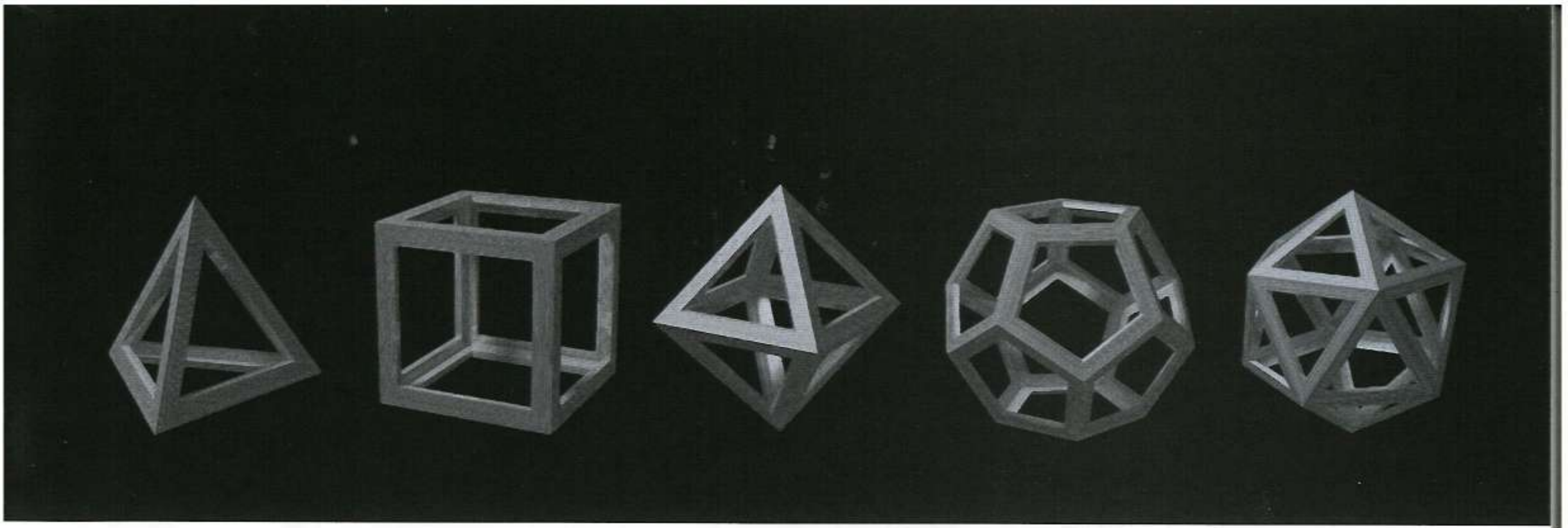


Figura 11. Os cinco sólidos platónicos.

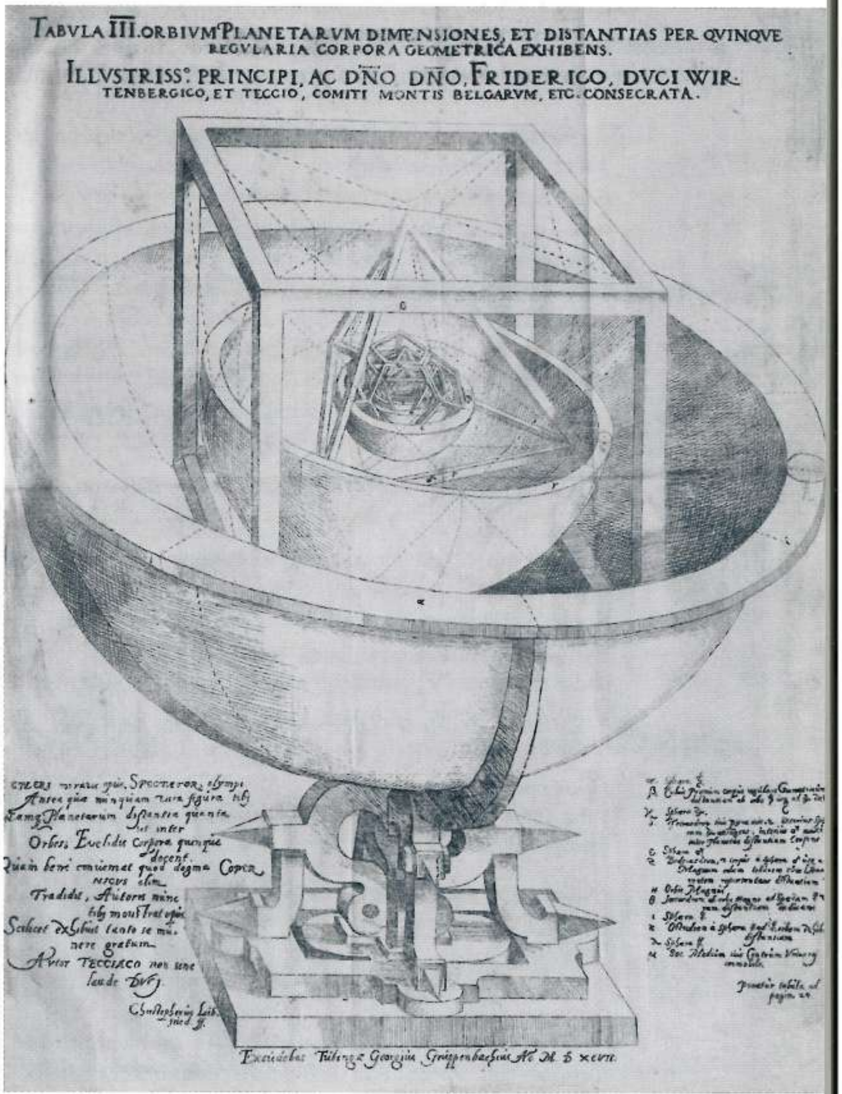
Usava o cubo para separar a esfera de Saturno da de Júpiter, o tetraedro para separar a esfera de Júpiter da de Marte, o dodecaedro entre a esfera de Marte e a da Terra, o icosaedro entre a esfera da Terra e a de Vénus e o octaedro entre a esfera de Vénus e a da Mercúrio. Apresentou este modelo no livro *Mysterium Cosmographicum*, em 1596 (figura 12).

Kepler foi contratado no ano de 1600, pouco depois de ter publicado o livro *Mysterium*, que chamou a atenção de Tycho Brahe. Teve como primeiro trabalho a determinação da órbita de Marte, com um rigor suficiente para explicar o movimento de retrogradação deste planeta. Com a morte de Tycho, em 1601, Kepler herda todos os registos de observação feitos ao longo de 20 anos, noite após noite pelo observador mais sistemático até à data. Trata-se de um conjunto de informações de posições de estrelas, do Sol, da Lua e dos planetas com uma precisão estimada em 1 minuto de arco, nunca antes atingida.

Kepler começou por estudar as medidas da posição do planeta Marte, tentando ajustá-las a um modelo com rotação em torno do Sol, encontrando-se este num ponto excêntrico da órbita, para explicar as diferenças de velocidades aparente do planeta ao longo do ano. Verificou então que obtinha desvios entre os dados observacionais e o seu primeiro modelo da ordem de 8 minutos de arco (North, 1994, pp. 320–321). Este desvio não era uma diferença muito grande para a época, e seria por muitos considerado um erro observacional normal; no entanto, Kepler tinha a noção da precisão das medidas efectuadas por Tycho.

Por esta altura, Kepler resolveu tentar compreender primeiro a forma da órbita da Terra, deixando a questão de Marte em aberto. Da análise das medidas de que dispunha verificou que a órbita da Terra se assemelhava a um círculo, com o Sol ligeiramente descentrado. Não dispondo de uma teoria que explicasse o movimento dos planetas, restava tentar tudo de novo com geometria diferente para as ór-

Figura 12. O sistema dos mundos utilizando os poliedros regulares para definir as distâncias entre as esferas cristalinas. In Mysterium Cosmographicum, 1596.



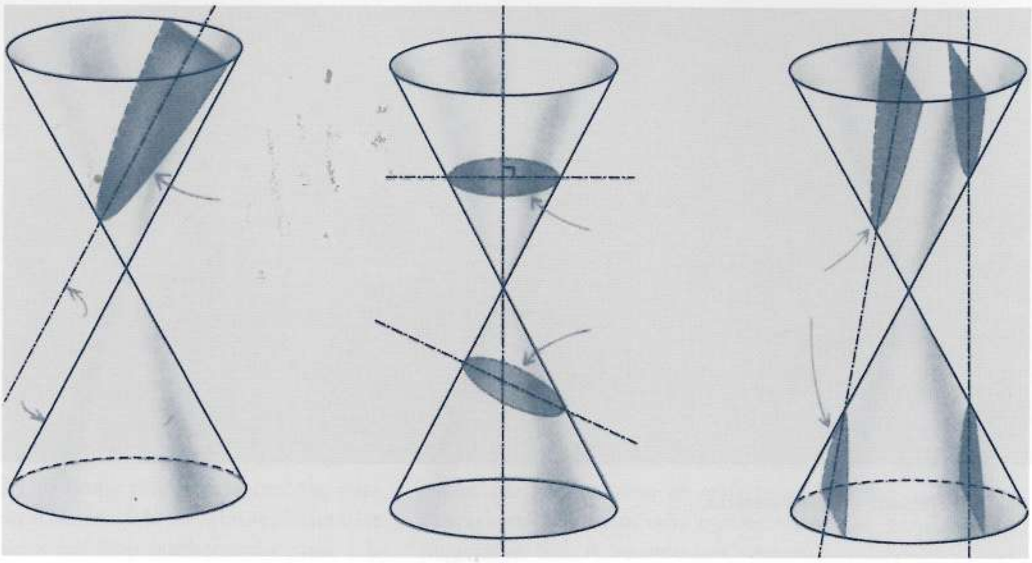


Figura 13. Cónicas. São as geometrias obtidas nas superfícies dos cortes que se podem fazer num cone. Adaptado de Pasachoff, 1995, p. 33.

bitas! Inicialmente começou por colocar a hipótese de um novo equanto, para de imediato a rejeitar pois não haveria causa para esse tipo de movimento. Opta então por tentar uma nova geometria, usando as cónicas (figura 13).

Retomou a análise dos registos de Marte, e concluiu que a forma que mais se adaptava à órbita dos planetas era a de uma elipse. Fez o mesmo tipo de estudo para os planetas Vénus, Terra, Júpiter e Saturno, tendo concluído sempre que a forma que melhor se adaptava era a elipse. Concluiu também que, em todos os casos, o Sol ocupava um dos focos da elipse. Sintetizou então as suas conclusões sob a forma de lei. As duas primeiras leis foram publicadas em Astronomia Nova, em 1609 (Hoskins, 1997, pp.118–119).

O enunciado da lei das órbitas ou primeira lei de Kepler diz que:

«Todos os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, ficando este num dos focos da elipse» (Sá, 2005, p. 7).

Era também sabido que os movimentos planetários relativamente ao fundo celeste não eram uniformes. Para a Terra, Kepler verificou que, quanto mais próximo do Sol a Terra se encontrava, mais rapidamente se movia. A análise dos dados que possuía permitiu-lhe inferir a lei das áreas (ver figura 14), também conhecida por segunda lei de Kepler que diz que:

«O segmento de recta que liga o Sol a cada um dos planetas, varre (para cada planeta) áreas iguais em intervalos de tempo iguais» (Sá, 2005, p.8).

Kepler passou anos a tentar encontrar algo que relacionasse a órbita com a velocidade a que o planeta se deslocava, mantendo a convicção de que algo deveria relacionar todos os movimentos planetários e que estes não seriam acidentais. Dito de outro modo, pensava Kepler que se Marte ou outro planeta qualquer descrevia a sua órbita elíptica em torno do Sol, a uma certa distância e com uma certa velocidade, demorando um certo tempo e não outro, é porque algo estaria por detrás de tudo isto e os relacionaria.

A busca de uma terceira lei que relacionasse os movimentos dos diferentes planetas foi conseguida por entre alguns infortúnios da sua vida pessoal, nomeadamente a acusação de feitiçaria sofrida pela sua mãe (Hoskin, 1997, p. 120). A terceira lei de Kepler ou lei harmónica, que estabelece essa relação, tem o seguinte enunciado:

«O quadrado do período sideral, T, associado a cada órbita planetária é proporcional ao cubo da distância média, a, entre o Sol e o planeta considerado.» (Sá, 2005, p.8)

A terceira lei de Kepler pode ser expressa sob a forma:

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$

em que k é uma constante igual para todos os planetas do Sistema Solar[3]. Em 1619, Kepler publica estas conclusões no livro a *Harmonia dos Mundos* (Kepler, 2002), que não receberia grande aclamação entre os copernicanos.

No livro *Epítome* (*do sistema copernicano*), publicado em 1621, Kepler introduz uma equação que é fundamental na resolução das órbitas planetárias (North, 1994, p. 324). Relaciona dois ângulos conhecidos como *anomalia excêntrica* (E) e *anomalia média* (M)[4], representadas na figura 15, com a anomalia verdadeira (φ).

A anomalia excêntrica é o ângulo entre a linha do semi-eixo maior e a linha da projecção perpendicular do corpo num círculo com o raio igual ao semi-eixo maior da elipse.

A anomalia média é uma conversão para um ângulo, do tempo desde que o astro passou pelo periastro numa órbita. Na realidade, indica-nos a posição angular que o corpo ocuparia se se movimentasse em movimento circular uniforme com período T. Por outras palavras, seja T o período orbital e t o tempo desde a passagem pelo periastro (o ponto P em que o planeta passa mais próximo do Sol), a anomalia média M é definida por

$$M = \frac{2\pi}{T} \times t$$

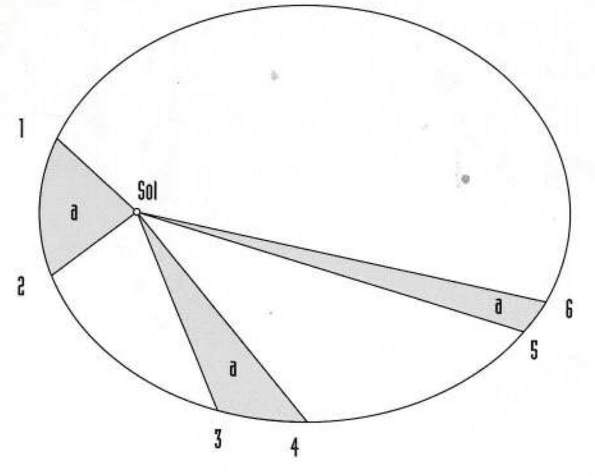


Figura 14. 2ª Lei de Kepler. Cada uma das áreas a é varrida no mesmo intervalo de tempo, o que faz com que a velocidade do planeta no periélio (ponto mais próximo do Sol) seja maior que a velocidade no afélio (ponto mais afastado do Sol). Adaptado de North, 1994, p. 321.

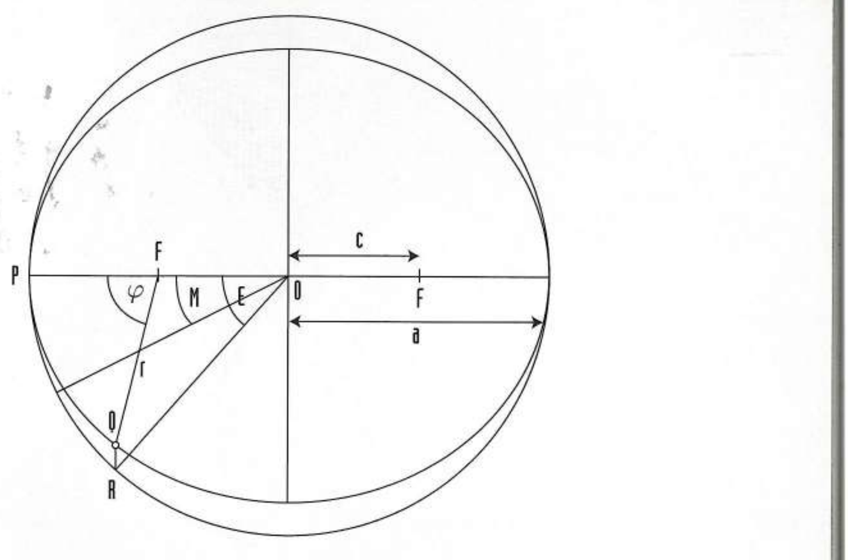


Figura 15. Anomalia excêntrica (E) e anomalia média (M) e anomalia verdadeira (φ).

Kepler estabeleceu a relação entre as duas anomalias como sendo

$$M = E - e \sin E$$

em que o termo e é a excentricidade da órbita.

As leis de Kepler têm resistido ao passar do tempo. A 7 de Novembro de 1631, um ano após a morte de Kepler, o astrónomo francês Pierre Gassendi tornou-se o primeiro observador da História a observar um trânsito de Mercúrio sobre a superfície do Sol em cumprimento de uma previsão de Kepler (Hoskin, 1997, p. 120). A 3ª Lei de Kepler foi mais tarde generalizada, por Isaac Newton a partir da Lei da Gravitação Universal, de uma forma que permite aplicá-la a quaisquer corpos em movimento orbital em torno um do outro, sejam eles satélites, exoplanetas, estrelas duplas ou até mesmo galáxias.

Notas

1 Na realidade o ciclo lunar era de 29,53 dias, a que correspondiam 4 semanas e mais 1 ou 2 dias, mas daí a deixar cair os dois dias foi apenas um pequeno passo.

2 Em português, os dias da semana devem os seus nomes à liturgia católica, por iniciativa de Martinho de Dume, que denominava os dias da semana da Páscoa como dias santos em que não se deveria trabalhar, sendo dias de «feria», que degenerou posteriormente em feira. Apenas o sábado (do latim *Sabbatum*, originado directamente do *sabbath* judeu) e o domingo (que o imperador Flavius Constantino (280–337 d.C.) mudou de *Prima Feria* para *Dies Dominica*, como dia dedicado ao culto do Senhor) não seguem esta ordem.

3 Se utilizarmos o período em anos e a distância em unidades astronómicas o valor da constante para o sistema solar é 1 (um).

4 Um *applet* Java que permite visualizar as anomalias das órbitas planetárias pode ser visto em `http://geoastro.de/kepler/index.html`.

Bibliografia

Brahe. T. (1588). *De mundi aetherei recentioribus phaenomenis*.

Cohen, I. B. (1988). *O Nascimento de uma nova Física*. Gradiva: Lisboa.

Copernicus, N. (2002). On the Revolutions of Heavenly Spheres (tradução do original de 1543 de Revolutionibus Orbium Coelestium). In Hawking, S. (2002), *On the Shoulders of Giants*. Running Press: Philadelphia, pp. 7–388.

Falk, Michael (1999). «Astronomical names for the days of the week». *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, 93(06): 122–133. Também disponível na internet em

`http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?1999JRASC..93..122F&data_type=PDF_HIGH&whole_paper=YES&type=PRINTER&filetype=.pdf.`

Hoskin, M. (1997). *The Cambridge illustrated History of astronomy*. Cambridge University Press: Cambridge.

Ifrah, G. (2000). *The universal History of numbers: from prehistory to the invention of the computer*. John Willey & Sons: New York.

Kepler, J. (1596). *Mysterium Cosmographicum*.

Kepler, J. (2002). Harmony of the World Book V (tradução do original de 1619 de Harmonices mundi libri V). In Hawking, S. (2002), *On the Shoulders of Giants*. Running Press: Philadelphia, pp. 635–723.

North, J. (1994). *The Fontana History of Astronomy and Cosmology*. Harper Collins Manufacturing: Glasgow.

Pasachoff, J. M. (1995). *Astronomy-From Earth to the Universe*, 4th Edition. Saunders College Publishing: Massachussetts.

Sá, N. (2005). *Astronomia Geral*. Escolar Editora: Lisboa.

Fontes internet

Newall, P. *et al.* (2009). *The Galilean Library*,

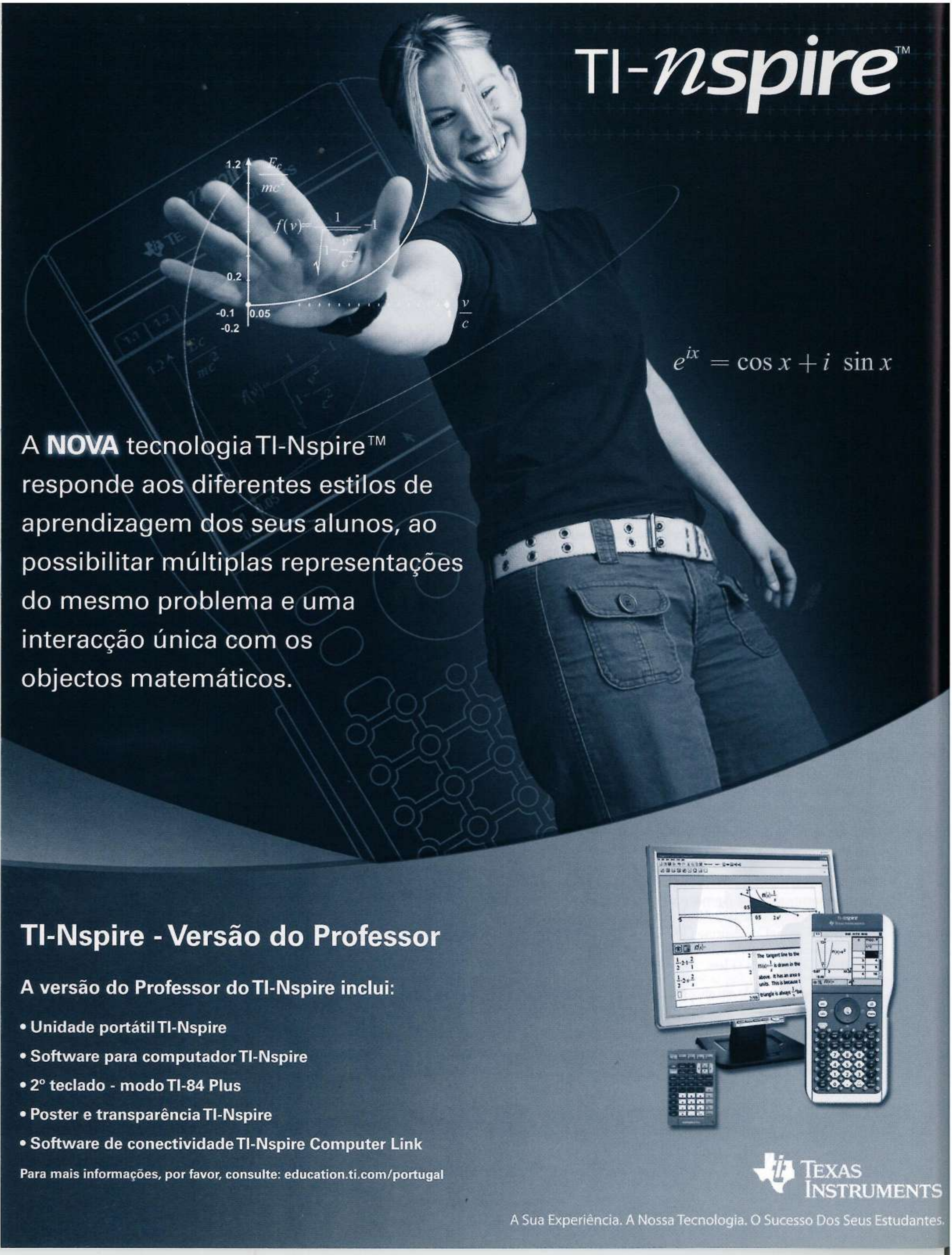
`http://www.galilean-library.org/`

Giesen, S. (2006). *GeoAstro Applet Collection*,

`http://geoastro.de/GeoAstro/GeoAstro.htm`

Wikipedia — Retrogradation, `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Retrogradation1.svg`

Alexandre Costa
Escola Secundária de Loulé, EAAE


TI-nspire™
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$
A NOVA tecnologia TI-Nspire™ responde aos diferentes estilos de aprendizagem dos seus alunos, ao possibilitar múltiplas representações do mesmo problema e uma interacção única com os objectos matemáticos.
TI-Nspire - Versão do Professor
A versão do Professor do TI-Nspire inclui:
• Unidade portátil TI-Nspire
• Software para computador TI-Nspire
• 2º teclado - modo TI-84 Plus
• Poster e transparência TI-Nspire
• Software de conectividade TI-Nspire Computer Link
Para mais informações, por favor, consulte: education.ti.com/portugal
Texas Instruments
A Sua Experiência. A Nossa Tecnologia. O Sucesso Dos Seus Estudantes.

O professor de Matemática

Este texto pretende ser um *Pense nisto* sobre o professor de Matemática, o que não é uma ideia original na EM, só que o anterior foi publicado em 1994, por Henrique Guimarães, com base num texto por ele escrito em 1985, onde, com alguma ironia questiona a existência do professor (de acordo com a sua própria perspectiva) porque «o que existe é quem dê aulas».

E hoje?

Continua a existir um discurso com alguma força de que os professores são profissionais que «dão aulas», que se pode enquadrar na visão do professor como um *«técnico»*, alguém que transmite conhecimentos, um *«tradutor»*, alguém que traduz (para os alunos), procurando simplificar, o conhecimento científico já produzido e qual *«treinador»* procura que os seus alunos através da repetição de exercícios tipo adquiram certas destrezas. Estas técnicas de «treino» nem no futebol já têm o mesmo valor, caso contrário onde estava o espaço individual, num jogo colectivo, para os jogadores criativos, imaginativos como os comentadores os designam?

Nestas perspectivas, o conteúdo do conhecimento profissional do professor de Matemática era o seu conhecimento de Matemática. Este continua a ser uma dimensão essencial do seu conhecimento profissional, mas à qual se tem de juntar o conhecimento didáctico, o conhecimento curricular e o conhecimento de como os alunos aprendem e interagem com os diversos contextos (complexos) em que o professor, hoje, desempenha a sua profissão, nomeadamente sociais, da escola e da sala de aula. É por isso que o professor de Matemática passa também a ser um resolutor de problemas ao considerar-se a prática lectiva como uma actividade de resolução de problemas. Assim, na actividade do professor, torna-se essencial, a capacidade de tomar decisões acertadas, de resolver problemas práticos e, qual *«Indiana Jones»*, a capacidade de improvisação perante situações novas e com os recursos disponíveis. Mas esta capacidade de improvisação também se ganha com a prática e a reflexão sobre essa prática, por isso, o professor de Matemática é um Indiana Jones que tem de usar outros recursos que não o «chicote» mas antes a sua capacidade de questionar e reflectir para que o seu conhecimento profissional se desenvolva.

Pense nisto: Do tradutor ao Indiana Jones o que queremos ou devemos ser?

M. Isabel Rocha ESECS, Instituto Politécnico de Leiria

Mensagens de telemóvel

Cinco amigos encontraram-se e passaram a tarde a enviar mensagens de telemóvel, num total de 120.

Um deles mandou 51 mensagens, a Rita enviou o dobro da Sheila, a Vera mandou o triplo do Duarte e o João cinco vezes mais que um dos amigos.

Quantas mensagens enviou cada um?

(Respostas até 31 de Dezembro para zepaulo@armail.pt)

A moeda falsa

O problema proposto no número 102 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Temos 12 moedas de ouro, aparentemente iguais, só que uma é falsa e pesa menos que as outras. Desconhecemos o peso das moedas. À nossa disposição está uma balança, daquelas que nos indicam o peso do que colocarmos no seu prato. Que método devemos seguir para garantir que descobrimos sempre a moeda falsa em quatro pesagens?

Problema adicional: Se tivermos direito a seis pesagens, qual é o maior conjunto de moedas em que conseguimos sempre encontrar a moeda falsa?

Recebemos 12 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Catarina Ferreira (Pontinha), Edgar Martins (Queluz), Francisco Falé (Lisboa), Francisco Timóteo (Lisboa), Graça Braga da Cruz (Ovar), João Sequeira (Alcácer do Sal), Luís Campos (Alcácer do Sal), Luís Sequeira (Alcácer do Sal), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Ricardo Poças (Viseu) e Rita Cruz (Prado).

O método por todos utilizado foi praticamente o mesmo.

Demos a palavra à Catarina.

Começamos por dividir as 12 moedas em 3 grupos, cada um com 4 moedas.

1ª Pesagem: colocar um grupo na balança e registar o peso.

2ª Pesagem: colocar outro grupo e registar o peso.

Se os pesos foram iguais significa que a moeda falsa está no grupo de 4 moedas que não foi pesado. Se os pesos forem diferentes, a moeda falsa está na que tiver menor peso.

Notar que sabendo o peso de 4 moedas verdadeiras conseguimos determinar o peso de cada moeda verdadeira.

Sabemos o grupo de 4 moedas que contém a moeda falsa. Escolhemos duas dessas moedas:

3ª Pesagem: colocar as 2 moedas e registar o peso.

Como já sabemos o peso de cada moeda verdadeira, sabemos se a moeda falsa está nestas 2 moedas ou nas 2 moedas que ficaram de fora.

Ficamos assim com o grupo de 2 moedas onde está a falsa.

4ª Pesagem: colocar uma destas moedas e registar o peso.

Se o peso for o de moeda verdadeira, a falsa é a que está de fora. Se o peso não for da verdadeira, é esta a falsa.

Problema Adicional

O método anterior pode ser generalizado para qualquer número de pesagens.

Começa-se por dividir as moedas em três grupos (se o número de moedas não for divisível por 3, o terceiro grupo fica com menos).

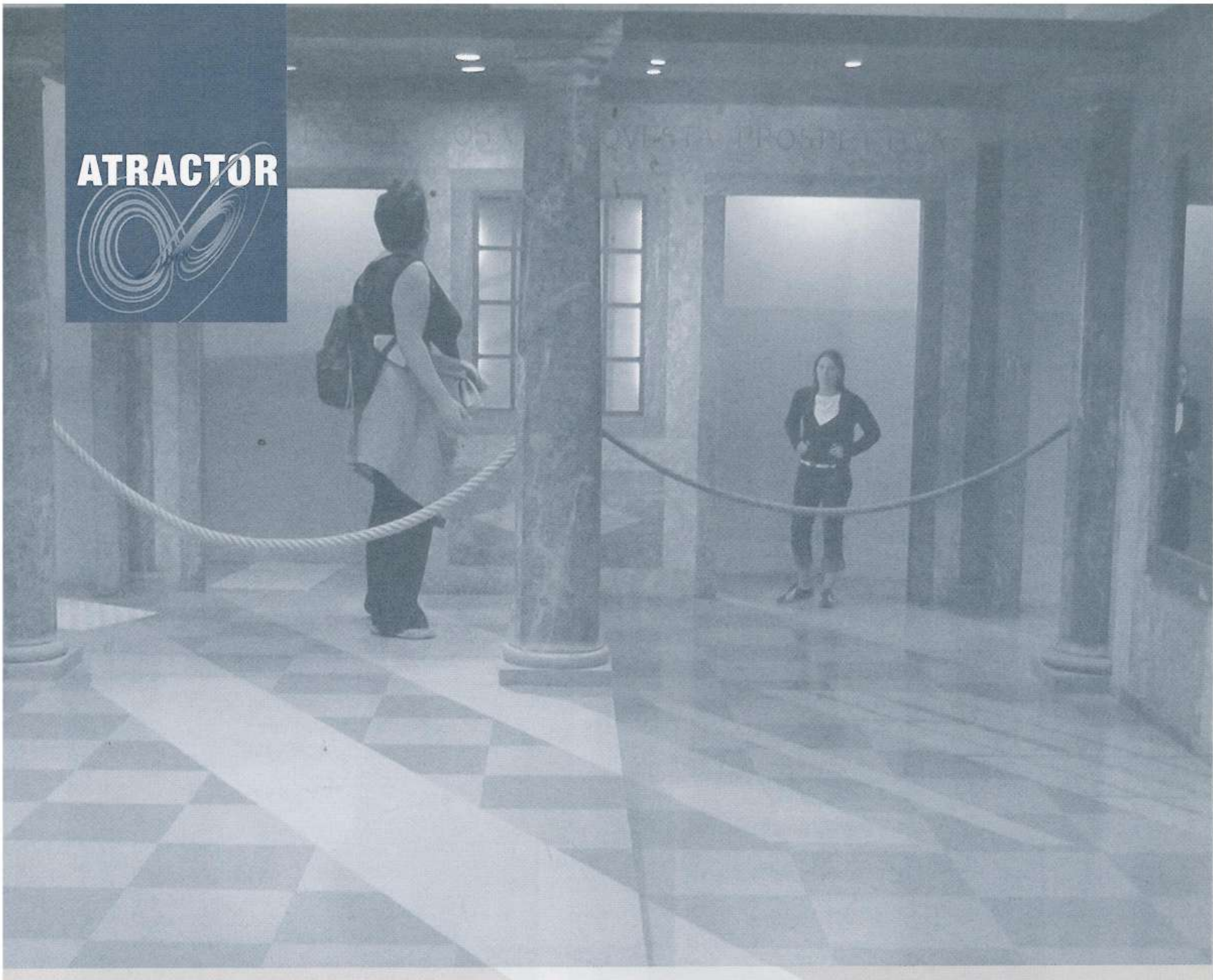
Na *1ª* e *2ª* pesagens colocam-se o primeiro e o segundo grupo de moedas. Se os pesos forem os mesmo nos dois casos, a falsa está no 3º grupo. Caso contrário, está no grupo mais leve. Identifica-se assim o grupo onde está a falsa, além de se ficar a saber o peso de cada moeda normal.

Nas pesagens seguintes, o que se tem a fazer é dividir o grupo onde está a falsa em dois subgrupos e pesar um deles. Como se conhece o peso das moedas boas, identifica-se o subgrupo que tem a falsa.

Assim, o número máximo de moedas M a partir do qual se consegue identificar a falsa em N pesagens é dado por:

$$M = 3 \times 2^{N-2}$$

No caso de 6 pesagens, podemos ter no máximo 48 moedas. Dividimo-las em conjuntos de 16, identificamos o grupo onde está a falsa com as duas primeiras pesagens e, a partir daí, vamos dividindo ao meio o grupo que tiver a falsa.



O Quarto de Ames

Eduardo Veloso

A Exposição *Matemática Viva* (MV) resultou de um convite dirigido pelo Programa Ciência Viva do Ministério da Ciência e da Tecnologia, à Associação Atractor — Matemática Interactiva, em Março de 2000, visando de alguma forma assinalar o Ano Mundial da Matemática. A Exposição foi inaugurada em 24 de Novembro de 2000 e, prevista inicialmente para uma duração de 6 meses, continua aberta, sem haver ainda uma indicação sobre qual será a sua data de encerramento.[1]

A exposição MV tem cerca de quatro dezenas de módulos, divulgando variados aspectos da matemática. Existem pequenos cartazes com informação junto de cada módulo e além disso é possível encontrar informações adicionais em diversos computadores ao longo da exposição. É uma exposição que *dá muito para pensar* para além das experiências sugeridas. Se é professor e tomar a (boa) decisão de propor a alunos seus uma visita de trabalho à exposição MV, não deixe de fazer uma ou mais visitas prévias.[2]

Três dos módulos são dedicados à perspectiva: *Quarto de Ames*, *Perspectiva acelerada e perspectiva retardada* e *Janela de Leonardo* (Velo de Alberti e Perspectógrafo de Dürer).

Este artigo será dedicado ao primeiro destes módulos.

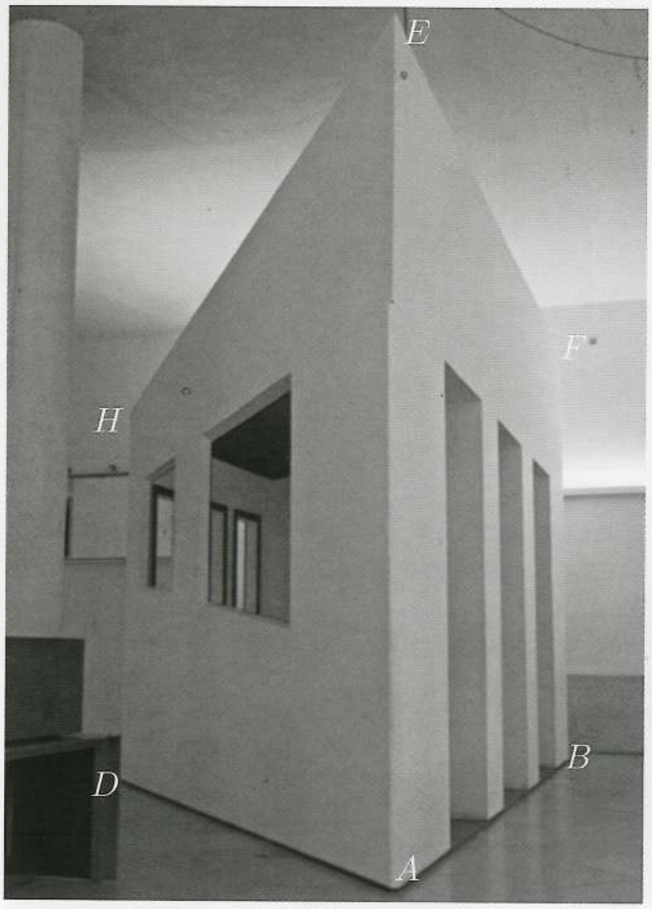


Figura 1A.

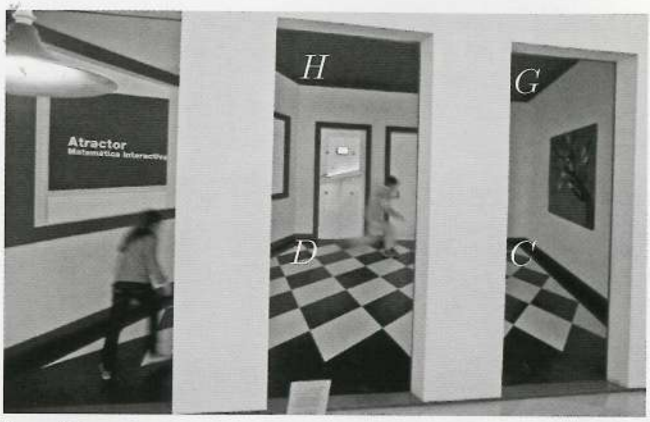


Figura 1B.

Figura 1C.

Quarto de Ames: introdução

O quarto de Ames é uma construção com formas estranhas, de que apresentamos algumas fotografias (figura 1). Na figura 1A temos uma vista exterior, e depois nas figuras 1B e 1C apercebemo-nos melhor da forma interior. Essencialmente, trata-se de um poliedro formado por seis faces (quadriláteros). Para simplificar, colocámos letras nos 8 vértices do poliedro (A, B, C, D, E, F, G, H) e acrescentámos a letra O no local onde se encontra um orifício através do qual se pode espreitar do exterior para o interior deste quarto. Tente compreender a forma real deste quarto com o auxílio destas fotografias e das letras nos vértices. O soalho é um trapézio $ABCD$, em que AB e CD são segmentos paralelos. É uma rampa bastante íngreme onde os miúdos que vão à exposição gostam de escorregar e trepar (se ninguém lhes sugere outra coisa para fazer, como acontece muitas vezes, infelizmente ...). O pavimento lembra um daqueles lindos pavimento dos pintores holandeses, com quadrados alternados de madeira clara e escura, mas está deformado, esticado em direcção ao vértice A do quarto. O teto também é um trapézio e sobe de GH para FE (que são segmentos paralelos).

As quatro paredes são todas diferentes, e nenhuma é perpendicular — como «deveria ser»! — ao soalho nem ao teto. As paredes $DCGH$ e $ABFE$ são rectângulos, e as paredes $ADHE$ e $CBFG$ são trapézios.

Para completar a estranheza desta situação, as duas janelas da parede $DAEH$ abandonam a forma «normal» das janelas, não só são diferentes uma da outra como são trapézios (em vez de rectângulos), adaptando-se assim à forma da parede a que pertencem!

Numa visita de estudo ao quarto de Ames, a boa estratégia consiste em deixar os visitantes aperceber-se completamente da forma estranha deste quarto, ficando com a percepção de que está bem longe da forma normal dos quartos a que estamos habituados, os quais têm a forma de paralelipípedos rectos, ou se quiserem a forma bem comportada de uma caixa de fósforos. Nada mais longe do quarto em que nos estamos a mover.

Figura 2.

Figura 3A.

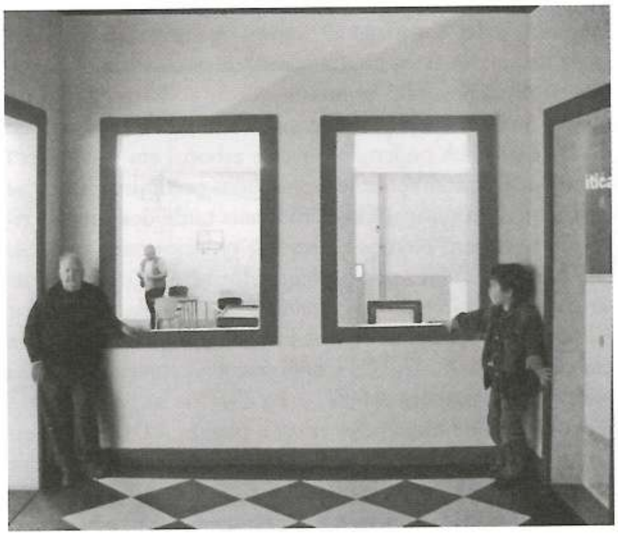


Figura 3B.

E no entanto...

A surpresa é grande quando somos levados para fora do quarto e nos sugerem que espreitemos para o interior através do tal orifício da parede *BCFG* (figura 2). As estranhezas do quarto onde acabamos de passar desapareceram... O chão e o teto são horizontais, as paredes são ortogonais ao chão e a parede em frente de nós, ou seja, a parede *DAEH* é totalmente bem comportada: é um rectângulo e não o trapézio que vimos há pouco, as suas janelas são também rectângulos e até o pavimento é formado por quadrados...!

Pedi ao João (3 anos) que fosse comigo ao interior do quarto de Ames, e ao pai dele que tirasse duas fotografias (figura 3A e 3B). Como se vê, não só o quarto se modificou como já vimos, mas agora a altura das pessoas que estão dentro do quarto, junto à parede em frente de nós quando espreitamos pelo tal orifício, muda conforme a posição em que estão! Se fizer uma visita à Exposição MV, e pedir a duas pessoas que troquem de lugar lentamente, como eu fiz com o João, verá aumentar de altura a que vai da esquerda para a direita e diminuir o que faz o percurso inverso... Que se passa?

Para o percebermos, julgamos que é preferível tentar responder separadamente às duas questões que as observações anteriores suscitam:

a) porque razão é tão diferente o que vemos quando espreitamos para dentro do quarto de Ames através do referido orifício ou quando estamos dentro do mesmo quarto, ou quando o vemos a partir de outros pontos de vista — por exemplo, através das portas da parede *ABFE* (figura 1B)?

b) porque razão as alturas das pessoas variam quando, ao espreitar, as vemos em diversas posições ao longo da parede *DAEH*?

Figura 4A.

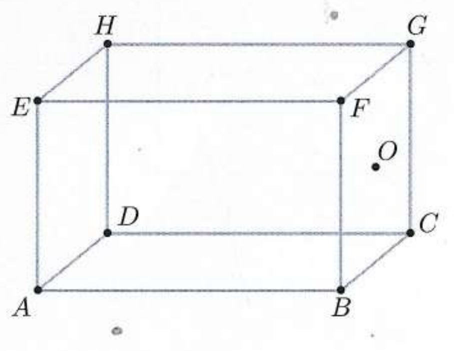
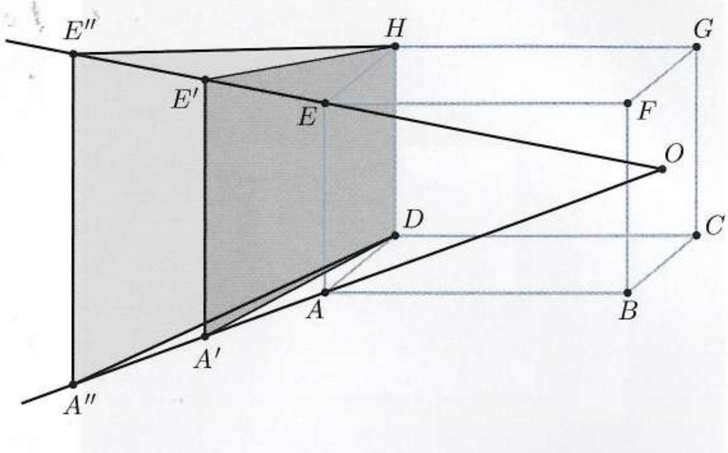


Figura 4B.



As escolhas da visão

Para responder à questão a), vamos imaginar um arquitecto a fazer os desenhos preliminares para a construção de um quarto de Ames. Um primeiro esboço pode ter sido o do quarto que um observador vê quando espreita pelo orifício O. Na figura 4A podemos ver esse esboço, em perspectiva cavaleira (naturalmente, estes esboços preliminares que se destinam a ser construídos serão mais tarde desenhados rigorosamente em plantas e alçados, próprios para a execução final). O quarto que o observador vê é assim um quarto «normal». Note-se que o campo de visão do observador é limitado — compare com as fotografias anteriores. O que ele vê é a parede $ADHE$ e uma pequena parte do teto, do soalho e das paredes $ABFE$ e $DCGH$ — as partes destes rectângulos que estão adjacentes à parede $ADHE$ (incluiremos o pavimento e as janelas mais tarde, para não tornar estas ilustrações pouco legíveis).

Imagine agora semirectas com origem em O e passando por A e E (figura 4B). E pense num ponto qualquer da semirecta OE, por exemplo E', e no ponto correspondente A' sobre a semirecta OA (sendo o segmento $E'A'$ paralelo ao segmento EA). Como os pontos E' e A', para o observador que espreita por O, são coincidentes com E e A, respectivamente, e como por essa mesma razão os segmentos HE', $E'A'$ e $A'D$ se sobrepõem respectivamente aos segmentos HE, EA e AD, a imagem que o observador vê, se substituirmos o quadrilátero $HEAD$ pelo quadrilátero $HE'A'D$, é exactamente a mesma. O mesmo acontece relativamente aos pontos E'' e A'' e ao quadrilátero $HE''A''D$. Ou seja, existe uma infinidade de quadriláteros distintos que resultam, para o observador que espreita pelo orifício O, na mesma imagem.

O que acabamos de observar leva-nos à conclusão de que, quando estamos na situação anterior (espreitando com um dos olhos através de um orifício), em que os raios visuais formam uma espécie de pirâmide com vértice no dito ponto de vista, quando duas figuras $ABCD\ldots$ e $A'B'C'D'\ldots$ são tais que A e A', (resp. B e B', C e C', D e D', ...) estão no mesmo raio visual, existe uma ambiguidade na percepção visual, pois a imagem que vemos pode corresponder a qualquer delas. A ambiguidade torna-se evidente na seguinte afirmação: se formos colocados na situação anterior, e nos mostrarem cada uma das figuras, e nos pedirem para dizermos qual estamos a ver, a nossa resposta não é unívoca, pode ser uma das duas e não o podemos decidir sem mais informação.

A nossa percepção visual está constantemente a resolver essas ambiguidades e a fazer escolhas (essas escolhas são em parte auxiliadas pelo facto da nossa visão ser feita em geral com os dois olhos, mas esse é um aspecto que não abordaremos aqui). Muitos outros factores ajudam a visão nessas escolhas: por exemplo, ninguém dentro do quarto de Ames, com a sensação permanente que vai cair dada a inclinação do soalho, poderá imaginar um chão horizontal... No entanto, quando espreitamos pelo orifício, os nossos pés estão bem assentes numa plataforma horizontal.

Como insinua Rudolf Arnheim na escolha do título do seu famoso livro *Visual Thinking*, a percepção visual não se limita a recolher dados, raciocina sobre esses dados e toma decisões (no caso anterior, a decisão pedida era uma escolha).[3]

As escolhas que a visão faz, perante uma ambiguidade, têm por base o reconhecimento de situações frequentes experimentadas pela nossa visão. Um dos factores que muitas vezes intervém na escolha é uma preferência pelas figuras tridimensionais relativamente às figuras bidimensionais, talvez devido à nossa experiência de vida num espaço 3D. Noutras vezes, e é o que nos interessa no caso do quarto de Ames, a inteligência da visão pode levar-nos a escolher, entre as várias «realidades» possíveis que podem resultar na imagem que vemos, aquela que é mais normal no tipo de situação que estamos a visualizar.

Assim, o nosso arquitecto, sabendo que o que consideramos normal num quarto qualquer é que as paredes sejam rectângulos, e que sejam perpendiculares ao chão e ao

Figura 5A.

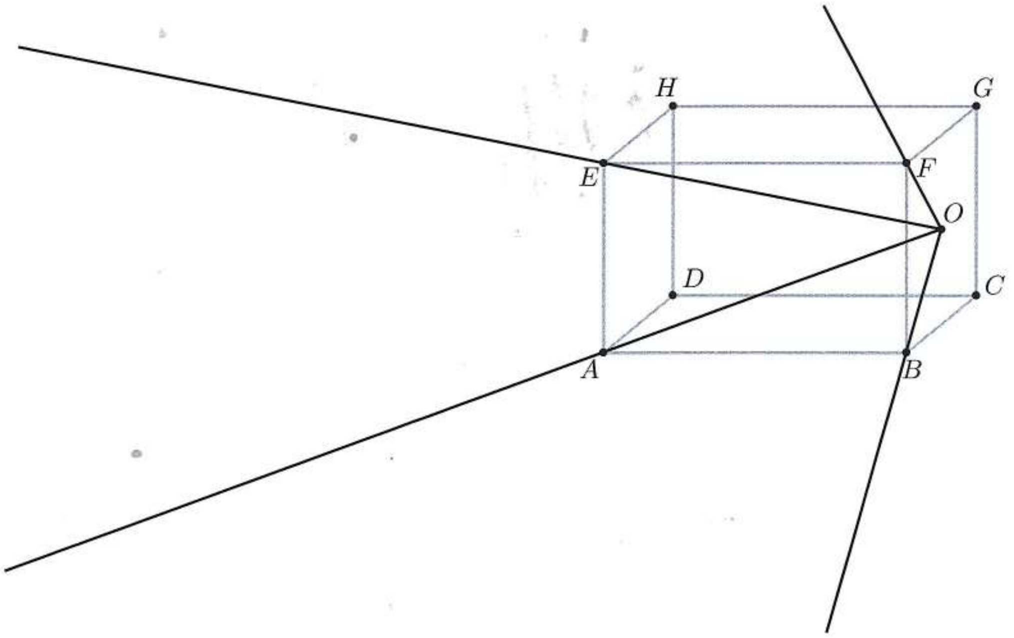
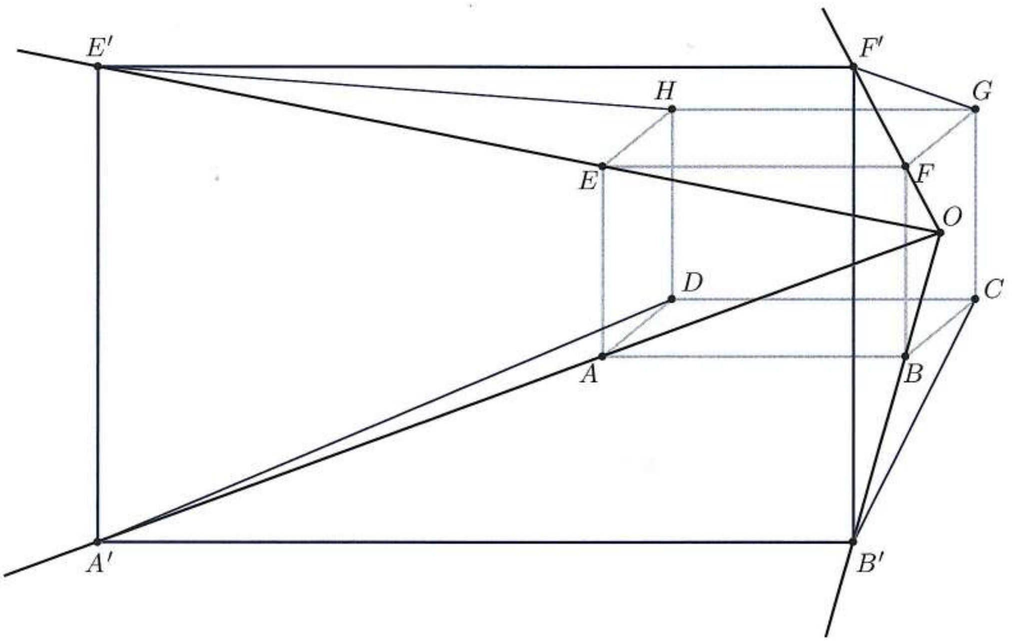


Figura 5B.



teto, tendo esboçado a forma (normal) do quarto que pretende seja a escolha da visão do observador — o paralelipípedo recto azul —, decide fazer o projecto de uma construção (essa sim, a ser realizada fisicamente) tal que, ao unir os pontos mais importantes e definidores dessa construção ao ponto de vista, e ao traçar assim os raios visuais, eles passem pelos pontos correspondentes do quarto normal que traçou no seu esboço.

Este problema é resolvido partindo do tal imaginado quarto normal e repetindo, para todos os pontos importantes, a construção que fizemos para os vértices da parede $ADHE$.

É isso que iremos indicar na sequência de figuras 5.

5A. A azul a imagem geral do quarto que o observador vai ver quando espreita pelo ponto O. Este quarto não vai ser construído, é só um ponto de partida para o traçado do quarto de Ames a construir. Estão traçadas as semirectas unindo O aos quatro vértices da face $ABFE$, a qual vai ser ampliada.

5B. Por homotetia a partir do centro O, e factor 2.5, por exemplo, constrói-se a face $A'B'F'E'$ ampliada e traçam-se os segmentos $A'D$, $B'C$, $F'G$ e $E'H$. Estão assim traçadas as paredes, chão e teto do quarto de Ames a construir fisicamente. A parede $DCGH$ é a única comum aos dois quartos. Note-se que os vértices A', B', F' e E', e os segmentos $A'B'$, $B'C$, DA', $E'F'$, $F'G$ e HE', do quarto de Ames «real», se sobrepõem às suas imagens A, B, F e E e AB, BC, DA, EF, FG, e HE, do quarto azul, quando vistos a partir do ponto O.

Figura 5C.

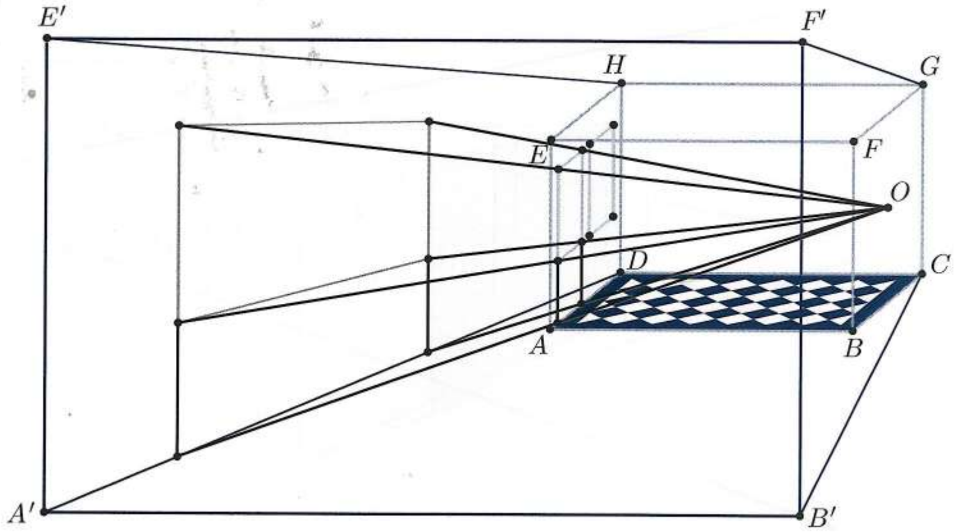
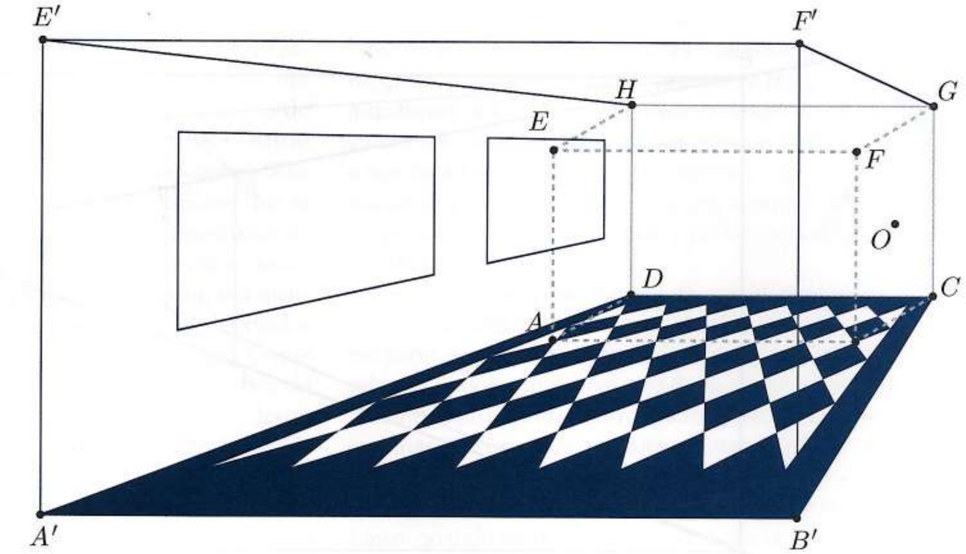


Figura 5D.



5C. É desenhado o pavimento do quarto azul e as janelas da parede $ADHE$ (para não sobrecarregar a figura não são reproduzidas nestas figuras as portas das paredes $ABFE$ e $DCGH$ nem as suas projecções no quarto «real»). Como exemplo, indica-se a construção da projecção de uma janela.

5D. Faz-se uma projecção central, a partir do ponto O, das janelas, pavimento e portas do quarto azul, obtendo-se dessa forma os elementos correspondentes no quarto «real». Note-se que depois de feita esta projecção, o quarto azul e todos os seus elementos podem ser *eliminados* do projecto de arquitectura, pois não serão construídos fisicamente.

Esperamos que desta longa descrição tenham resultado claros os seguintes elementos de resposta à questão a):

- escolhido e desenhado um quarto normal (o quarto azul) que pretendemos seja a interpretação que um observador construa na sua mente ao espreitar pelo orifício O;
- escolhido um factor de homotetia para ampliar a parede $ABFE$ e obter dessa forma, a partir do quarto azul, as formas e dimensões das paredes, chão e teto do quarto que vai ser construído fisicamente;
- efectuada uma projecção central, de centro O, e obtidas sobre as paredes e chão do quarto real as janelas, portas e pavimento transformados dos elementos correspondentes do quarto azul;
- construído fisicamente o quarto real (incluindo janelas, portas e pavimento);
- um observador, ao espreitar para dentro do quarto de Ames pelo orifício O, vê uma imagem que corresponde

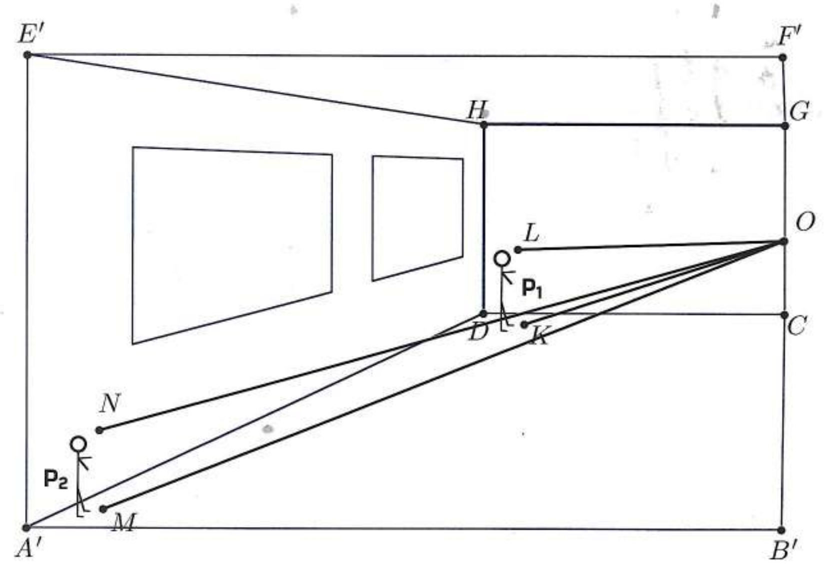


Figura 6.

ao quarto construído fisicamente, *mas que seria a mesma para qualquer outro factor de homotetia*, em particular para o factor 1, que corresponde ao quarto azul; da infinidade de interpretações que poderia fazer, a sua escolha recai no quarto azul, por ser a situação normal que resulta das suas experiência anteriores;

- essa escolha inteligente da interpretação é tão forte, que resiste mesmo a uma experiência de uma passagem anterior pelo interior do quarto real.

E as alturas das pessoas a variar...?

A resposta à questão

b) porque razão as alturas das pessoas variam quando, ao espreitar, as vemos em diversas posições ao longo da parede DAEH?

é bem mais imediata. Comecemos por notar que, seja qual for a interpretação que dermos à imagem que estamos a ver ao espreitar pelo orifício O, o quarto físico que estamos a observar é aquele representado pela fotografia 1B, e assim a distância do vértice A (não assinalado nesta fotografia, mas que corresponde ao canto inferior esquerdo da mesma) ao ponto O é *bem maior* do que a distância do vértice D ao mesmo ponto O. Na figura 6 representámos o quarto real e duas pessoas, P_1 e P_2, com a mesma altura real, uma junto ao vértice D e outra junto ao vértice A. Como as alturas, para um observador espreitando por O, são dadas pelas amplitudes dos ângulos KOL e MON (neste caso numa proporção quase de 3 para 1), P_1 parece inevitavelmente 3 vezes mais alto do que P_2, porque na interpretação que estamos a dar à imagem do quarto as distâncias das duas pessoas ao nosso ponto de vista são iguais, pois nessa interpretação a parede $A'DHE'$ está de frente para nós! Quando as pessoas trocam de lugar, as amplitudes também «se trocam», e como as pessoas, na nossa interpretação, deslocando-se junto à parede $A'DHE'$, se mantêm à mesma distância do nosso ponto de vista, então são as suas alturas que têm que mudar!

É um facto notável que a força da nossa interpretação do quarto que estamos a ver seja tal que preferimos ver as pessoas a mudar de altura desta maneira do que interpretar a imagem de outro modo, o que explicaria imediatamente esse «fenómeno».

Notas

1 Não deixe de consultar o *site* do Atractor (`www.atractor.pt`), em particular as páginas dedicadas a esta exposição (`http://www.atractor.pt/matviva/`), onde encontrará esta informação e muitas outras que o ajudarão a preparar a sua (e dos seus alunos) visita. O nome atribuído a este quatro tem origem no oftalmologista americano Adelbert Ames Jr, que construiu uma primira versão em 1946. Baseou a sua construção numa ideia original de Hermann Helmholtz, nos finais do séc. XIX.

2 Compreenderá, numa primeira visita que fizer á exposição, que não tem sentido pensar em levar alunos a visitar toda a exposição de uma vez. E que, por outro lado, será necessário desdobrar turmas grandes em dois ou mais grupos. Sendo assim, a visita ideal a programar consistirá em levar um pequeno grupo de alunos a trabalhar e fazer experiências com dois ou três módulos escolhidos com antecedência, prevendo sempre um guião distribuído aos alunos, com propostas de experiências e questões a discutir durante e após a visita.

3 Caso não tenha acesso a este livro, poderá obter alguma informação limitada sobre o seu contéudo nas páginas (125 e seguintes) da secção 3 («Percepção visual e visualização») do Cap. III do livro *Geometria: temas actuais*.

Bibliografia

Arnheim, Rudolf. *Visual Thinking*. Berkeley: University of California Press, 1969.

Veloso, Eduardo. *Geometria: temas actuais*. Lisboa: Instituto de Orientação Profissional, 1998.

Webgrafia

Site Atractor: `http://www.atractor.pt`

Páginas Exposição Matemática Viva: `http://www.atractor.pt/matviva/index.htm`

Eduardo Veloso

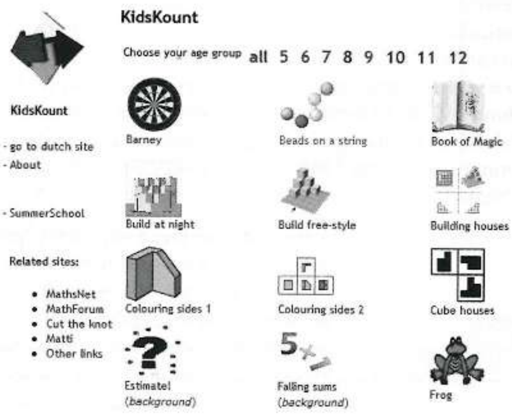
Tecnologias no ensino da Matemática

Novidades e desenvolvimentos recentes

Mais novidades no site Rekenweb do Instituto Freudenthal

Uma consulta ao *site rekenweb* do Instituto Freudenthal (`http://www.fi.uu.nl/rekenweb/en/`) revelou uma novidade no *KidsKount: o applet Beads on a string* (sobre a construção de cadeias com contas) oferece agora mais possibilidades. Na versão anterior, esta pequena aplicação tinha por objectivo escolher a posição em que deveriam ser colocadas um conjunto de 5 contas de várias cores, de modo a que a azul ficasse na posição 102. Embora uma ideia interessante, ela esgotava-se ao fim de duas ou três utilizações. Agora, diversificaram-se várias possibilidades para as variáveis envolvidas: o número de contas, o número de cores e as várias posições em que se querem ver aparecer as várias contas.

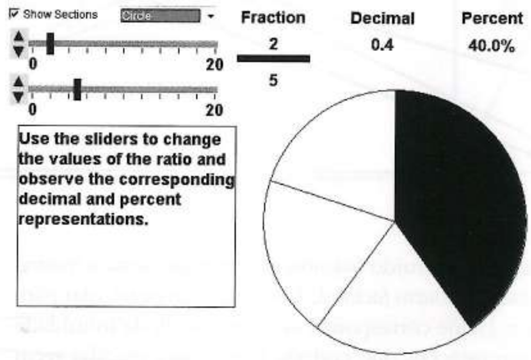
Este jogo exige algum sentido de número e mobiliza conceitos e saberes matemáticos como os múltiplos, os padrões e os restos da divisão inteira.



Pequenos programas para novos objectivos

O novo programa de Matemática do Ensino Básico sugere que «uma alteração importante em relação ao programa anterior é que as representações fraccionária e decimal dos números racionais surgem agora em paralelo. Em cada situação o aluno deve ser capaz de usar a representação mais adequada, mas deve igualmente ser capaz de passar com facilidade de uma representação para outra» (p. 7). No *site* do *Illuminations* do NCTM (`http://illuminations.nctm.org/`) encontra, seleccionando os graus 3–5, um conjunto de applets que podem contribuir para organizar o seu trabalho em sala de aula em torno desta orientação: *Fraction Model I, II* e *III*.

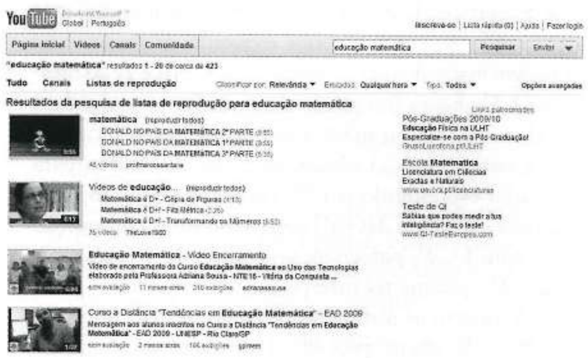
Por exemplo, o *Fraction Model II* permite escolher uma fracção, manipulando separadamente o numerador e o denominador e ver, em simultâneo, a sua representação num diagrama circular ou rectangular ou através de um conjunto discreto e as diferentes representações do número: em fracção, em decimal ou em percentagem. O *applet* permite ainda mostrar ou esconder os segmentos de recta separadores dos sectores circulares.



A expressão da Matemática no YouTube continua a crescer

Já aqui falámos do *YouTube* há quase um ano. Voltei ao *YouTube* para ver o que por lá havia de novo e constatei que se trata de um espaço em crescimento constante, no que respeita a recursos para o ensino da Matemática.

Por exemplo, ao procurar no motor de busca interno, *algebraic thinking*, obtive 112 respostas com pequenos vídeos animados que ilustram conceitos das mais variadas formas: através de um narrador que se apoia em imagens ou que escreve num quadro, através da ilustração do conceito no quotidiano, com pequenas dramatizações musicadas (vejam o *That's the rule*) ou ainda ilustrando a forma de representar em tabela numérica um padrão geométrico (vejam o *Excel for Math classes: Growth pattern problems*).



Continuei à procura e obtive 113 resultados na pesquisa de *analytic geometry*. Por exemplo, um dos primeiros que aparece, o *Introduction to ScienceWord Part 02: Analytic Geometry in 2D* remete para um vídeo que ilustra o uso de uma aplicação de *software* (o *ScienceWord*) que se pode obter de forma livre no *site* do *ScienceOffice* (`http://scienceoffice.com`). Aí a aplicação é descrita como um processador de texto profissional que combina fórmulas, gráficos e imagens com componentes de processamento de texto. Os documentos desta aplicação podem ser exportados em formato HTM e colocados num site na Internet ou em formato PDF e enviados anexos a uma mensagem ou colocados numa plataforma como o *Moodle*.

Finalmente uma pesquisa sobre *statistics linear regression* devolve 16 resultados de pequenos vídeos que ilustram, por exemplo, o uso de ferramentas como a folha de cálculo ou o programa de estatística SPSS na representação de distribuições bidimensionais e da recta de regressão linear.

Mas como todos os recursos que temos à nossa disposição, o seu uso e integração curricular exige sentido crítico. Muitos destes vídeos constituem apenas tutoriais, alguns são apenas reproduções animadas do professor escrevendo no quadro e outros têm fraca resolução para serem reproduzidos.

Mas constituem fonte de ideias, podem ser usados na introdução de uma aula ou podem ser recomendados aos alunos para verem em casa, uma vez que se trata de um espaço virtual que os adolescentes conhecem e ‹frequentam›. Por outro lado, alguns vídeos remetem-nos para *sites* com bons recursos e para *software* que pode ser livremente descarregado ou que tem versões de demonstração que funcionam durante um período mais ou menos alargado. Por exemplo, na pesquisa anterior que fiz sobre regressão linear, do lado direito da página que devolveu os resultados tem um *link* para o *site* XLSTAT (`www.xlstat.com`), uma aplicação de análise de dados compatível com a folha de cálculo Excel que tem uma versão para experimentação que pode ser descarregada e usada.

O uso da folha de cálculo na análise de dados

Recentemente foi editada pela DGIDC do Ministério da Educação a publicação *Análise de Dados — Texto de Apoio para os professores do 1° ciclo* (2007), um trabalho de Mª Eugénia Martins, Luísa Canto Loura e Mª de Fátima Mendes. Refiro-o aqui porque se trata de um bom texto de ideias, conceitos e exemplos de estatística elementar que ao longo das suas páginas vai integrando indicações sobre a forma de usar a tecnologia, neste caso a folha de cálculo, na análise de dados e nalguns temas pouco frequentes, nomeadamente na construção de diagramas de extremos e quartis e diagramas de caule e folhas. Voltaremos a este assunto numa próxima revista.

O Scratch continua em desenvolvimento

Em Fevereiro de 2008 falámos aqui do *Scratch*, através das palavras de um aluno, o André Torres e da Teresa Marques, professora na EB 2, 3 de Azeitão. Na altura, este micromundo era ainda uma novidade na educação em Portugal, mas hoje, passado um ano e meio, apresenta novos desenvolvimentos. Fruto de uma parceria entre a Portugal Telecom e o MIT (Boston, EUA) foi criado o portal SAPOScratch (`http://kids.sapo.pt/scratch/`). Segundo os seus criadores, trata-se de «um programa inovador, que permite exercitar a criatividade e o raciocínio científico, lógico e matemático, ao disponibilizar ferramentas de programação informática simplificadas, com base nas quais podem ser desenvolvidos projectos. Os projectos são desenvolvidos *offline* através de uma aplicação e o *site* permite partilhar, aprender e tirar dúvidas com a comunidade de utilizadores». Neste portal pode encontrar vários projectos desenvolvidos por alunos, desde o 1° ciclo do ensino básico.

Lembro que o *Scratch* é uma linguagem de programação (um Logo de nova geração?) que pode ser descarregada livremente a partir do *site* do MIT (`http://scratch.mit.edu/`) ou no portal português do SAPO onde já tem acesso à versão portuguesa 1.3.1.

No *site* do Centro de Competência da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (`http://nonio.fc.ul.pt/recursos/scratch/index.htm`) encontra alguns recursos como pequenos textos de apoio e um guião de exploração do *Scratch*. Também pode encontrar um Guia prático de utilização do *Scratch*, com um conjunto de lições guiadas em `http://teresamar.googlepages.com/ManualApoio2.pdf`.

Culminando uma fase de divulgação e desenvolvimento, no passado dia 16 de Maio assinalou-se em Portugal o *Scratch Day 2009*, numa iniciativa que envolveu docentes da Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação e os Centros de Competência da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e da ESE de Setúbal, para além de um grupo entusiasta de professores do ensino básico. Este evento envolveu mais de uma centena de crianças, jovens e adultos que responderam ao convite e estiveram presentes com os seus portáteis durante uma manhã a explorar e descobrir as potencialidades desta ferramenta, realizando pequenos projectos. Em `http://nonio.ese.ips.pt/scratchday09/` encontra, a par da divulgação da iniciativa, um conjunto de recursos de apoio ao uso educativo do *Scratch*. Um pouco por todo o mundo, realizaram-se eventos semelhantes, assinalando dois anos do lançamento desta linguagem de programação. O *Scratch*, como outras ferramentas digitais, continua em desenvolvimento, tendo neste momento o aliciante de disponibilizar um ambiente de trabalho em língua portuguesa, factor muitas vezes referido pelos professores, como uma limitação ao seu uso nos primeiros anos de escolaridade. Também os materiais de apoio e os espaços de diálogo e partilha que já existem, parecem prometer algum futuro para este micromundo de aprendizagem.

José Duarte

O professor de Matemática e os projectos de escola[1]

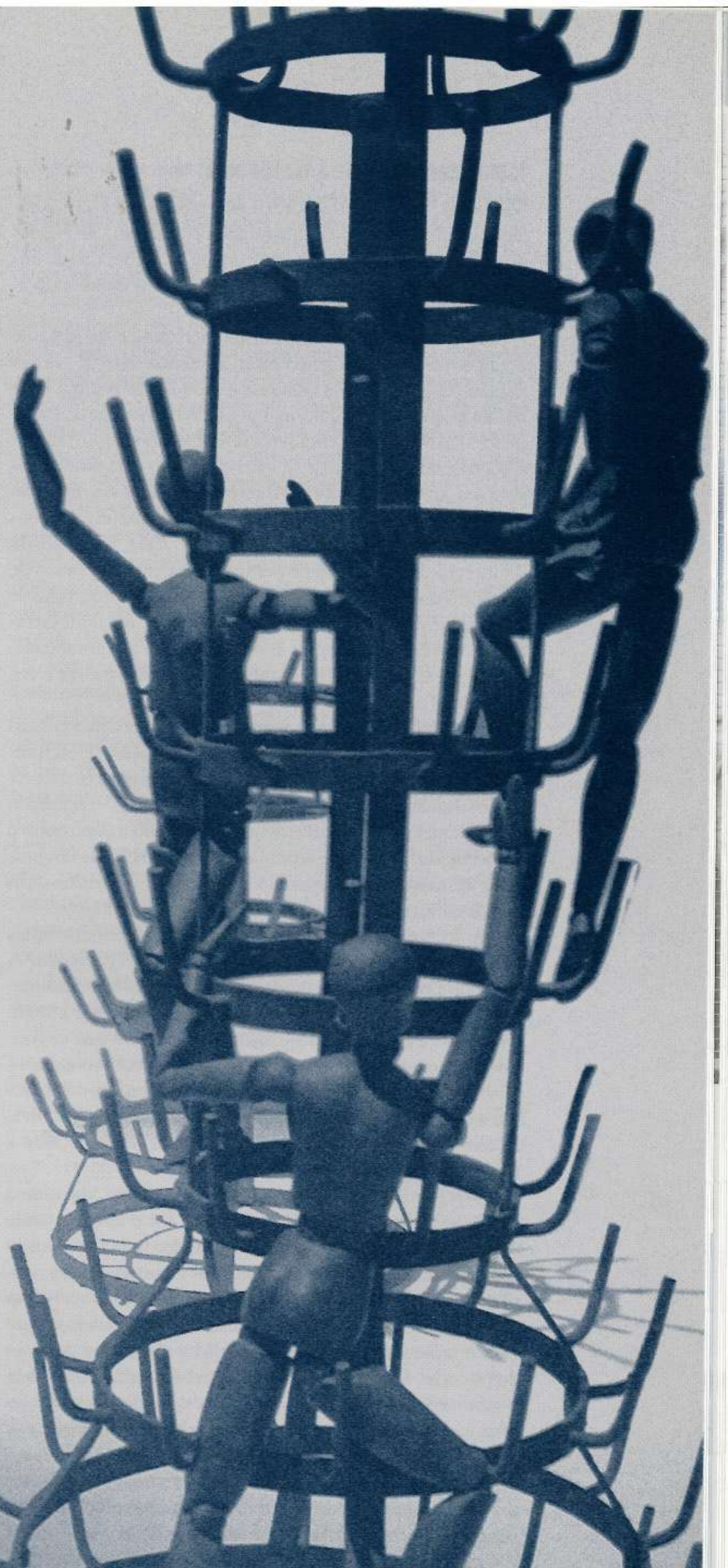
Cláudia Canha Nunes
João Almiro

Introdução

Num quadro de mudança económica, política, e organizacional acelerada, muda também a natureza e o conteúdo do currículo e o papel e as exigências de formação do professor. A mudança educacional, no entanto, requer uma intervenção simultânea e articulada ao nível do desenvolvimento profissional dos professores, dos processos de gestão curricular e do desenvolvimento da cultura e organização escolares e dos processos de liderança.

O grande desafio que se coloca presentemente às escolas e aos seus professores é o desenvolvimento da capacidade destes se organizarem e enfrentarem os problemas que vão surgindo, no quadro de uma cultura de escola eficaz, catalisadora do desenvolvimento profissional dos docentes e de um processo de ensino-aprendizagem com qualidade. Enfrentar este desafio passa necessariamente pelo desenvolvimento de projectos integrados no interior da escola e pela promoção da capacidade dos professores trabalharem colaborativamente. Para isso, é necessário perceber como incentivar projectos colectivos de escola, dando atenção, nomeadamente, aos processos de liderança. Esta problemática esteve no centro das atenções do terceiro ciclo de trabalho realizado pelo Grupo de Estudos do Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) da Associação de Professores de Matemática (APM), que teve como produto final o livro *O professor de Matemática e os projectos de escola* (APM, 2008).

Este artigo tem, justamente, como propósito contribuir para a reflexão em torno destes aspectos, apresentando como exemplo um projecto desenvolvido por um grupo de professores de Matemática de uma escola secundária com 3.º ciclo.



Os projectos de escola e a sua liderança[2]

Na escola, os projectos constituem uma estratégia fundamental na promoção da qualidade do processo de ensino aprendizagem, ao mesmo tempo que se reconhece a sua importância no desenvolvimento de dinâmicas colaborativas no seio da escola (Nunes & Ponte, 2008).

Com muita frequência, um projecto nasce da ideia de uma pessoa ou de um grupo mais ou menos restrito. Na sua realização, o projecto é igualmente conduzido por um líder ou um pequeno grupo, normalmente denominado «coordenador» ou «grupo de coordenação». Para Boutinet (1990), o coordenador do projecto é «um indivíduo cuja tarefa consiste em integrar os esforços internos e externos do organismo em projecto, para chegar ao desenvolvimento e à finalização de uma realização particular» (p. 236). Este cuidado de integração implica gerir permanentemente os pontos de encontro das pessoas envolvidas. Segundo o autor, trata-se de «tornar compatíveis actores individuais, até aqui estranhos uns aos outros, gerar interfaces é, na sua totalidade, preocupar-se por arbitrar, planificar, controlar, prever e comunicar» (p. 236).

Boutinet (1990) refere que os projectos ganham consistência e estruturação em resultado de interacções de facilitação e de confronto entre os seus intervenientes e os actores que os rodeiam. A inconsistência de um projecto é resultado daquilo que os seus intervenientes se recusam a confrontar e a questionar. A falta de articulação e integração de um projecto no contexto ou na comunidade a que se destina também fragiliza o seu desenvolvimento e a sua realização.

Tipicamente, um projecto desenvolve-se em diferentes fases, todas elas com grande importância e significado. A primeira fase, a concepção do projecto, envolve a formulação de um problema e a definição dos objectivos a atingir. Nesta fase é necessário identificar as condições que se consideram necessárias para a realização do projecto (por exemplo, mancha horária comum, espaços de trabalho, colaboração externa de um ou mais especialistas). Esta fase envolve, igualmente, o apuramento dos professores interessados e a redacção do projecto.

A segunda fase, a planificação do trabalho, envolve a definição do que se vai fazer, de quem faz o quê e quando e de como se avalia o trabalho realizado. Importa identificar em maior detalhe as necessidades materiais (por exemplo, tecnologias, salas e outros recursos) e profissionais (por exemplo, formação e bibliografia da especialidade). É também o momento de definir as tarefas a realizar no decorrer do projecto, fazer a sua distribuição pelos participantes, definir o calendário das diferentes acções e da conclusão das tarefas e construir os instrumentos de avaliação do projecto.

A terceira fase é a de intervenção ou desenvolvimento. O projecto desenvolve-se então de acordo com a agenda definida, acompanhado por uma permanente reflexão e discussão no seio da equipa com vista à regulação do processo. Ao mesmo tempo que o trabalho se desenvolve, vai-se fazendo uma análise sistemática, construindo novos materiais e adaptando os materiais já existentes, reflectindo e aprendendo com os sucessos e as dificuldades.

A quarta fase corresponde à finalização e avaliação dos produtos do projecto. Esta fase pode envolver a elaboração de um relatório escrito final, podendo ser necessária uma recolha e análise de dados sobre os resultados conseguidos pelos alunos ou no funcionamento da escola. Pode também ser a ocasião para os membros do projecto elaborarem uma reflexão escrita sobre os efeitos do projecto e a sua importância para o seu próprio desenvolvimento profissional.

Finalmente, a quinta fase é a divulgação e disseminação de resultados. Sem ela, o projecto fica fechado no espaço físico onde decorre, sem que a própria comunidade escolar tenha conhecimento da sua realização e dos seus resultados. Só a divulgação do projecto em momentos informais e em encontros e revistas profissionais e de investigação permite que estas experiências profissionais sejam apropriadas pela comunidade educativa e se tornem um factor de melhoria da qualidade da educação num contexto mais amplo.

A formulação de um projecto a realizar por um grupo colaborativo pode ter origem na visão individual de uma só pessoa, que a pouco e pouco vai encontrando ecos e ressonâncias noutros actores, conquistando parceiros e definindo objectivos. Este é um processo lento e comum no contexto de escola que, quando bem sucedido, pode culminar com a organização de um projecto colaborativo alargado, ou simplesmente, numa parceria entre duas pessoas. A forma como o iniciador, assumindo um papel de liderança, aborda os seus potenciais parceiros e negoceia o projecto determina o sucesso do trabalho futuro. A definição de um primeiro patamar de colaboração, permite muitas vezes o desenvolvimento posterior de novos projectos mais ambiciosos. O trabalho de um projecto está sempre associado a imprevistos e dificuldades. Eles são inevitáveis e a grande questão é saber como os enfrentar.

A realização de um projecto envolve uma dinâmica colaborativa no seio da respectiva equipa. Note-se, porém, que a colaboração não implica a igualdade de papéis e estatutos dentro do grupo (Boavida & Ponte, 2002). As diferenças de estilos, interesses, capacidades, ritmos de trabalho existem e são inevitáveis. Convenientemente geridas são mesmo uma riqueza do grupo. Num projecto bem conduzido os intervenientes tendem a desenvolver uma relação bastante próxima, o que facilita a partilha dos êxitos e das dificuldades sentidas, a aprendizagem com as contribuições dos outros e o reforço da sua motivação. A partilha em grupo pode resultar em reflexão crítica e empenhamento acrescido dos intervenientes no seu aperfeiçoamento contínuo. Como indicam Boavida e Ponte (2002), este tipo de trabalho pode fortalecer os participantes, conduzindo a uma maior disponibilidade para cada um fazer experiências e correr riscos, uma vez que se sentem acompanhados e apoiados pelo grupo.

No entanto, o desenvolvimento de um projecto envolve muitos aspectos críticos que prefiguram dificuldades e problemas. Boavida e Ponte (2002) referem alguns deles: a negociação do objectivo do projecto, a definição do plano de trabalho, a partilha de responsabilidades e tarefas, a capacidade de reflexão sobre a evolução do projecto, a sua reformulação em função da mudança das condições em que o trabalho se realiza e o carácter de imprevisibilidade do projecto. A incompatibilidade entre os horários dos professores, representa uma dificuldade acrescida que tem como resultado a falta de tempo para os elementos do grupo trabalharem em conjunto.

A existência destas dificuldades sugere que as equipas não se podem limitar a «olhar para a frente», numa perspectiva de preparar as acções que há ainda para fazer, mas devem ter em conta todo o percurso e o contexto envolvente, reflectindo sobre as acções já anteriormente realizadas e sobre os seus efeitos. Este cuidado permite ganhar consciência atempada das dificuldades emergentes e contribui para um maior conhecimento sobre os aspectos problemáticos do projecto.

Importa sublinhar que os projectos se desenvolvem essencialmente a partir da sua reestruturação e reflexão após momentos de crise e de confrontação. Todos os projectos bem sucedidos vivem estes momentos que reflectem o resultado da participação e da partilha de opiniões, modos de pensar e criar. Daqui resultam aprendizagens que são condição essencial para que o projecto evolua e atinja o seu objectivo. Estes momentos de redefinição são difíceis e requerem uma liderança efectiva e impulsionadora, capaz de gerir e resolver os impasses e confrontos internos no grupo.

Um projecto de escola[3]

A *Comunicação Escrita na Matemática do Ensino Secundário* (GTI, 2008) foi o tema de um projecto desenvolvido por um grupo de nove professores de Matemática da Escola Secundária de Tondela.

Este projecto surge no seguimento de outros desenvolvidos em anos anteriores, onde o objectivo central tem sido reflectir sobre algumas das dificuldades com que estes professores se têm deparado nas suas práticas lectivas. A realização de todas estas actividades, em especial as acções de formação e os projectos, parecem ter sido o elemento chave para a forma como se trabalha hoje neste grupo e para o bom ambiente que se vive, em que existe um grande à vontade para a troca de ideias, de experiências e de materiais, registando-se a entreajuda dos professores até nas próprias actividades lectivas.

O tema escolhido para este projecto, a Comunicação Matemática na sua vertente escrita, tem vindo, cada vez mais, a ser uma preocupação deste grupo, devido ao facto de se ter identificado há muito que os alunos mostram dificuldades na interpretação de textos e na produção escrita de composições matemáticas. Esta preocupação também se deve ao facto de a Comunicação Matemática ser um tema transversal do programa de Matemática do Ensino Secundário e estar a assumir um papel cada vez mais significativo no modo como o programa está a ser implementado, talvez devido à importância, cada vez maior, que passou a ter nos momentos de avaliação, nomeadamente nos exames nacionais. Também há a considerar que este tema transversal não é fácil para os professores de Matemática devido essencialmente à sua formação inicial, onde estas questões não foram abordadas.

Descrição do projecto. A fase de concepção do projecto decorreu sem problemas e as condições necessárias foram disponibilizadas pelos diferentes órgãos da escola. O projecto foi aprovado pelo Conselho Executivo e pelo Conselho Pedagógico e acreditado como acção de formação pelo Centro de Formação. Os horários dos professores tinham um espaço de 90 minutos para reunir todas as semanas. Uma professora de Português da escola disponibilizou-se para dinamizar seminários dedicados ao tema, nomeadamente sobre estratégias que contribuíssem para o desenvolvimento das capacidades de interpretação de textos e de produção escrita dos alunos, aspectos sobre os quais os professores envolvidos no projecto sentiram ter necessidades de formação.

O projecto iniciou-se com a construção de duas tarefas de diagnóstico das dificuldades dos alunos. A construção destas tarefas ocupou as primeiras sessões do projecto, tendo-se decidido que uma das tarefas deveria ser complicada em termos de interpretação dos textos, mas com respostas muito curtas. A outra seria uma situação de fácil interpretação mas em que fosse pedida aos alunos uma resposta longa (uma composição).

Estas tarefas foram aplicadas a todas as turmas do Ensino Secundário tendo sido muito díspares os resultados dos alunos. Houve turmas com resultados muito bons, mas houve outras com resultados claramente fracos. Houve turmas do 12.° ano com prestações fraquíssimas e houve turmas do 10.° ano bastante melhores. A prestação dos alunos não teve a ver com o ano de escolaridade e não foram, necessariamente, os melhores alunos a Matemática os que responderam com mais eficiência às questões que exigiam muita interpretação.

As primeiras dificuldades surgiram com a avaliação da segunda tarefa. Cada um dos professores ficou de avaliar os trabalhos dos seus alunos e de tentar identificar e enumerar as principais dificuldades que apresentaram no desenvolvimento desta tarefa. Foram avaliadas em conjunto algumas respostas para tentar aferir melhor os critérios definidos. Percebeu-se que havia bastantes divergências sobre o modo como eram atribuídas as classificações e sobre quais as respostas que eram consideradas completamente certas. No entanto, foi muito interessante a discussão, para se tomar consciência que esta avaliação era extremamente subjectiva e que, apesar do esforço que foi feito para aferir os critérios, surgiram na realidade bastantes diferenças nas cotações atribuídas.

Nesta altura, compreendeu-se que a fase de diagnóstico ia ser muito complicada de concretizar, na medida em que não ia ser fácil perceber com profundidade as dificuldades dos alunos, nem o modo como se deve trabalhar nas aulas para os ajudar a superá-las. Decidiu-se, por isso, recorrer a alguma bibliografia para tentar perceber melhor as respostas dos alunos nestas tarefas escritas.

Realizaram-se, também nesta altura, os dois seminários com a professora de Português. O principal objectivo do primeiro seminário era contribuir para a compreensão das dificuldades dos alunos na interpretação de textos matemáticos, sugerindo possíveis estratégias para os ajudar a ultrapassar essas dificuldades. A professora enfatizou alguns aspectos que considerou essenciais para desenvolver competências de processamento de informação escrita a partir de um texto informativo. Na interpretação dos textos identificou como principal dificuldade para os alunos o domínio do vocabulário tanto o específico ligado ao estudo dos conceitos em causa, como também os verbos utilizados que, muitas vezes, são um verdadeiro problema. Como estratégia para minorar as dificuldades dos alunos deu uma grande ênfase ao reconhecimento ao longo do texto do desenvolvimento do assunto, nomeadamente sugerindo sublinhados, cores diferentes, caixas e círculos, anotações e esquemas, que demonstrou com clareza nos exemplos que apresentou.

Com o segundo seminário pretendeu ajudar na avaliação das produções escritas dos alunos. Dinamizou esta sessão tendo por base algumas das resoluções produzidas pelos alunos no âmbito deste projecto e os critérios de classificação utilizados. Explicou que os conhecimentos que os professores envolvidos no projecto possuíam de Gramática Portuguesa lhes impossibilitavam de fazer correcções muito para além daquelas que já faziam, no entanto, a partir de exemplos ilustrou alguns aspectos que se podiam ter em conta na avaliação dos trabalhos dos alunos e que estavam ao alcance dos professores de Matemática.

Estes dois seminários foram muito interessantes pela novidade, pelas coisas que se aprenderam ou recordaram, e muito enriquecedores, pelas sugestões muito concretas e exequíveis na prática lectiva. Sobre estes seminários um dos professores envolvidos no projecto escreveu na sua reflexão final:

Um dos bons momentos nesta formação foi protagonizado pela nossa colega de Português. Numa das suas intervenções alertou, de uma forma simples, para pequenas «dicas» que poderiam ajudar os alunos na abordagem, compreensão e análise de textos associados a problemas matemáticos. Numa outra apresentação, não menos interessante, mostrou algumas orientações importantes a ter em conta na organização e estruturação das frases.

No fim destes seminários e inspirados na bibliografia consultada, construiu-se uma tabela de descritores para ajudar a analisar as composições dos alunos de modo a enfatizar as áreas onde se registam as principais dificuldades.

Contrariamente ao que nos tinha parecido numa primeira abordagem, a avaliação dos trabalhos dos alunos foi muito difícil. Apesar de nalguns casos os descritores ajudarem a compreender melhor as suas dificuldades, noutros tudo se tornava muito complicado. Compreendeu-se que os descritores ajudavam a esclarecer as dificuldades evidenciadas por alguns alunos, mas noutros era extremamente difícil perceber, ao ler um trabalho dum aluno, se as dificuldades que manifestava estavam na compreensão dos conceitos, se no domínio da linguagem ou do vocabulário específico. Ou seja, não se percebia a diferença entre não se saber matemática e não se saber escrever matemática. A este respeito uma das professoras escreveu na sua reflexão final:

Relativamente à avaliação deste tipo de actividades, é uma verdadeira aflição. Nas sessões em que analisámos em conjunto algumas respostas não havia consenso sobre a cotação a atribuir. Para uns colegas ficava evidente que o aluno percebia o que se pretendia e explicava mal, porque não dominava os conceitos matemáticos. Para outros, se trocava ou não aplicava correctamente os conceitos matemáticos é porque não percebia o que lhe era pedido. Não há dúvida que corrigir e cotar este tipo de trabalho não é fácil.

No entanto, o projecto continuou e construíram-se novas tarefas que privilegiavam a comunicação escrita e aplicaram-se aos alunos. Como já havia dois trabalhos dos mesmos alunos, tentou-se perceber se as dificuldades se repetiam e se realmente haveria algum padrão na resposta de cada um deles. A utilização dos descritores foi outra vez bastante difícil. Não foi fácil encontrar padrões, mas considerou-se que talvez com outro trabalho fosse mais simples perceber as dificuldades manifestadas por cada aluno. Uma nova reflexão ficou de ser feita, posteriormente, quando houvesse a terceira composição desses alunos.

Percebeu-se, nesse momento, que a construção de tarefas seria a vertente deste projecto que até ao momento estava menos trabalhada e que, por isso, seria de investir nessa área nas próximas sessões. Dividiram-se os professores em grupos de dois, conforme os anos que leccionavam, para desenvolver a produção de materiais, um grupo para cada ano: 9.°, 10.°, 11.° e 12.° anos.

A terceira tarefa que já tinha sido aplicada aos alunos foi corrigida outra vez usando a tabela de descritores construída anteriormente. Apesar de grande parte da reflexão sobre as composições escritas, usando os descritores, ter sido amplamente discutida em grande grupo nas sessões presenciais pretendeu-se agora nesta fase que cada par de professores registasse por escrito as suas reflexões sobre este trabalho, esperando que esses registos, por serem escritos, motivassem um novo esforço de reflexão e fossem um contributo para a compreensão mais profunda das dificuldades evidenciadas pelos nossos alunos.

Este projecto de formação terminou com uma sessão de balanço, onde se discutiram os aspectos mais conseguidos e os objectivos menos alcançados neste projecto. Foi uma sessão muito participada e as ideias e comentários que expressaram oralmente estão traduzidos com bastante fidelidade nos documentos que entregaram e de que fazem parte as suas reflexões individuais, onde equacionam a importância desta acção de formação para o seu desenvolvimento profissional.

Sucessos e dificuldades. Relativamente à comunicação matemática ficou claro para todos os envolvidos que não é fácil identificar com profundidade as dificuldades dos alunos. Quando se pretende analisar as suas produções é muito difícil perceber onde se situam as suas dificuldades, se na compreensão dos conceitos matemáticos no domínio da linguagem, do vocabulário ou mesmo da escrita matemática.

O esforço que foi feito nas várias discussões realizadas à volta da avaliação das resoluções dos alunos e que resultou na construção da tabela de descritores, não teve de modo nenhum os resultados positivos que se esperavam. Entre os vários factores que influenciaram este desfecho menos positivo, parece que a forma e o grau de dificuldade das tarefas foram os mais decisivos. Os conceitos matemáticos envolvidos, a situação problemática e a linguagem utilizada na construção das tarefas têm influência nas respostas produzidas pelos alunos e são difíceis de isolar, tornando complicado compreender se as dificuldades dos alunos se devem exclusivamente à organização e à essência da própria tarefa.

Ficou claro também que não é fácil planificar estratégias com impactos visíveis e rápidos no desempenho dos alunos. Pensar que se conseguem identificar dificuldades com clareza, planificar estratégias eficazes e avaliar os seus impactos num curto espaço de tempo, revela alguma ingenuidade e simplicidade na abordagem deste tema. Melhorar a comunicação matemática dos alunos é, claramente, um trabalho demorado que exige muita persistência e empenho por parte dos professores com a possibilidade de apenas se virem a sentir os seus frutos a longo prazo.

No entanto, o trabalho desenvolvido teve algum impacto positivo junto dos alunos. Estes prestaram mais atenção às composições matemáticas, tendo passado a interpretar os enunciados com mais facilidade e sendo muito mais cuidadosos nas suas respostas, especialmente no modo como as organizavam e redigiam. Para isto, contribuiu muito a valorização que os professores passaram a atribuir a estas tarefas nas aulas e à importância que lhes concederam na avaliação. Sobre os resultados dos alunos uma das professoras escreveu na sua reflexão:

> (...) Por outro lado, sabemos já que alguns dos nossos alunos foram melhorando a sua prestação: escrevem melhor, interpretam os enunciados com maior facilidade e consideram natural a produção de textos na aula de Matemática. Acredito que este trabalho dará frutos e que serão tanto melhores quanto maior for a nossa crença na importância da realização deste tipo de tarefas.

Houve também algumas estratégias que começaram a ser utilizadas nas práticas lectivas destes professores e que poderão ter tido alguma influência na melhoria das resoluções dos alunos. Por um lado, as chamadas de atenção aquando da interpretação dos enunciados, sugerindo sublinhados nos conteúdos mais importantes, esquemas ou anotações à margem, dando um contributo para a compreensão dos aspectos essenciais dos problemas. Por outro lado, o reconhecimento da necessidade de propor, com regularidade, tarefas que apelem à produção escrita de textos. A realização regular de tarefas deste tipo levou os alunos a encararem com mais naturalidade a produção de textos na aula de Matemática, podendo ter sido um factor significativo para as melhorias registadas nos seus trabalhos. Por último, a possibilidade que foi concedida aos alunos de reescreverem as suas respostas, confrontando-se com as suas resoluções anteriores e tendo a possibilidade de as refazer. Esta parece ter sido uma estratégia do agrado dos alunos, que poderá ter trazido algumas melhorias aos seus desempenhos.

No que se refere à formação, o ambiente vivido nas sessões de trabalho deste projecto parece ter sido um dos aspectos mais significativos para o modo como decorreram os trabalhos. Este ambiente que tem vindo a ser construído ano após ano é o reflexo do espírito que se vive no grupo, que tem vindo a assumir a sua formação e auto-formação através da realização destes projectos baseados na necessidade de procura e enriquecimento com novos saberes profissionais. No final de todo este trabalho ficou também o reconhecimento do interesse que as composições matemáticas têm para os nossos alunos, tanto no que se refere ao desenvolvimento das suas capacidades de escrita, mas também no que respeita à natureza da Matemática envolvida. Apesar das grandes dificuldades que se registam na avaliação deste tipo de tarefas sentidas durante o decorrer deste projecto, fica também a certeza de que vale a pena dedicar algum esforço a esta actividade, em especial se ele for partilhado com outros professores.

Considerações finais

A realização de projectos educativos de índole colaborativa promove o enriquecimento e o desenvolvimento profissional dos professores que neles participam. Mais importante ainda é poder gerar dinâmicas que ajudem a mobilizar o capital de conhecimento dos professores e a apoiá-los na acção. O desenvolvimento de projectos é uma estratégia fundamental de transformação da realidade escolar e dos próprios actores educativos. Muitos desses projectos procuram dar resposta a problemas transversais da escola e assumem, por isso, um carácter interdisciplinar, mobilizando professores de diversas disciplinas (e, por vezes, outros actores educativos). No entanto, os problemas específicos do ensino e da aprendizagem da Matemática, que são profundos e persistentes, requerem, naturalmente, a realização de projectos específicos por parte dos professores desta disciplina.

Em muitos casos o grande problema é saber que projectos são pertinentes e viáveis numa dada escola e grupo disciplinar. Nalguns casos, as diferenças de perspectivas curriculares e os hábitos de trabalho individualista são de tal ordem, que não é fácil encontrar um ponto comum que possa servir de base à acção conjunta dos professores. O problema, neste caso, é o de constituir na escola uma cultura profissional na qual os projectos tenham um papel relevante.

No entanto, em algumas escolas, esse tipo de cultura já se constituiu de forma muito assinalável. Existem projectos, que se vão desenvolvendo, em ciclos mais ou menos alargados, com uma dinâmica de trabalho regular. Surge então um novo desafio, o da sustentabilidade desta dinâmica. Como constituir novos projectos a partir dos anteriores? Como evitar o cansaço na liderança e nos membros do grupo? Como evitar a instalação de rotinas que envolvem o grupo num grande activismo mas o cegam para os problemas verdadeiramente importantes? Os novos projectos dependerão sempre da vontade e dos interesses dos membros do grupo, mas também da dinâmica de liderança, em particular no que respeita à capacidade de gerar novas energias, criar momentos de reflexão verdadeiramente questionadores e encontrar novos focos de investigação potenciadores de uma nova agenda comum. Dependerão, também, da capacidade da própria liderança para correr alguns riscos, assumindo posições que entram em confronto com as práticas e os hábitos de alguns actores educativos.

Desde há muitos anos que em Portugal se realizam nas escolas projectos inovadores no campo da educação matemática. No entanto, na sua grande maioria, esses projectos decorrem num espaço muito fechado, tendo uma reduzida interacção com a escola no seu todo. Esses projectos tendem a divulgar as suas perspectivas e resultados nos espaços profissionais exteriores à escola e têm pouco impacto no seu interior. Deste modo, pouco contribuem para a mudança da cultura da escola e alimentam a separação entre dois tipos de cultura profissional: a da escola e a de outros espaços profissionais.

O passo que é necessário dar, a nosso ver, é o de aproximar estes dois tipos de cultura profissional, promovendo a realização de projectos inovadores dentro da escola e em interacção com as suas estruturas e actores educativos. Para isso, é fundamental assumir a necessidade de lideranças fortes, que sejam capazes não só de conduzir projectos específicos inovadores, como também de criar uma nova dinâmica de funcionamento das escolas, a começar pelos grupos disciplinares. O processo de abertura dos projectos inovadores à realidade escolar, interagindo com ela, não é fácil mas é possível e, quando conseguido, é potenciador de importantes transformações da prática educativa.

Notas

1 Adaptado do texto para a conferência proferida no ProfMat 2008.

2 Esta secção foi adaptada de Nunes, C. C., & Ponte, J. P. (2008). Os projectos de escola e a sua liderança. In GTI (Ed.), *O professor de matemática e os projectos de escola* (pp. 11–37). Lisboa: APM.

3 Esta secção foi adaptada de Almiro, J. (2008). A comunicação escrita na Matemática do Ensino Secundário. In GTI (Ed.), *O professor de matemática e os projectos de escola* (pp. 257–295). Lisboa: APM.

Referências

Almiro, J. (2008). A Comunicação Escrita na Matemática do Ensino Secundário: Um projecto de um grupo de professores. In GTI (Ed.), *O professor de matemática e os projectos de escola* (pp. 257–295). Lisboa: APM.

Boutinet, J. P. (1990). *Antropologia do projecto*. Lisboa: Instituto Piaget.

Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43–55). Lisboa: APM.

GTI (Ed.). (2008). *O professor de matemática e os projectos de escola*. Lisboa: APM.

Nunes, C. C., & Ponte, J. P. (2008). Os projectos de escola e a sua liderança. In GTI (Ed.), *O professor de matemática e os projectos de escola* (pp. 11–37). Lisboa: APM.

Cláudia Canha Nunes
Escola EB 2/3 das Olaias, Lisboa
Grupo de Trabalho de Investigação da APM

João Almiro
Escola Secundária de Tondela, Tondela
Grupo de Trabalho de Investigação da APM

Materiais para a aula de Matemática

Deverá o Rui ser apurado para a final?

A tarefa que aqui apresentamos foi pensada para o 9° ano de escolaridade, com o objectivo de desenvolver a comunicação escrita. Esta tarefa foi construída por Fernanda Graça e Teresa Santos, da Escola Secundária/3 de Tondela, no âmbito do projecto A *Comunicação Escrita na Matemática do Ensino Secundário*, descrito no artigo, publicado neste número da revista, com o título *O professor de Matemática e os projectos de escola*.

Deverá o Rui ser apurado para a final?

O Rui está a participar num concurso de lançamento de balões.

No regulamento do concurso, estão as condições de apuramento para a final, que se reproduzem a seguir:

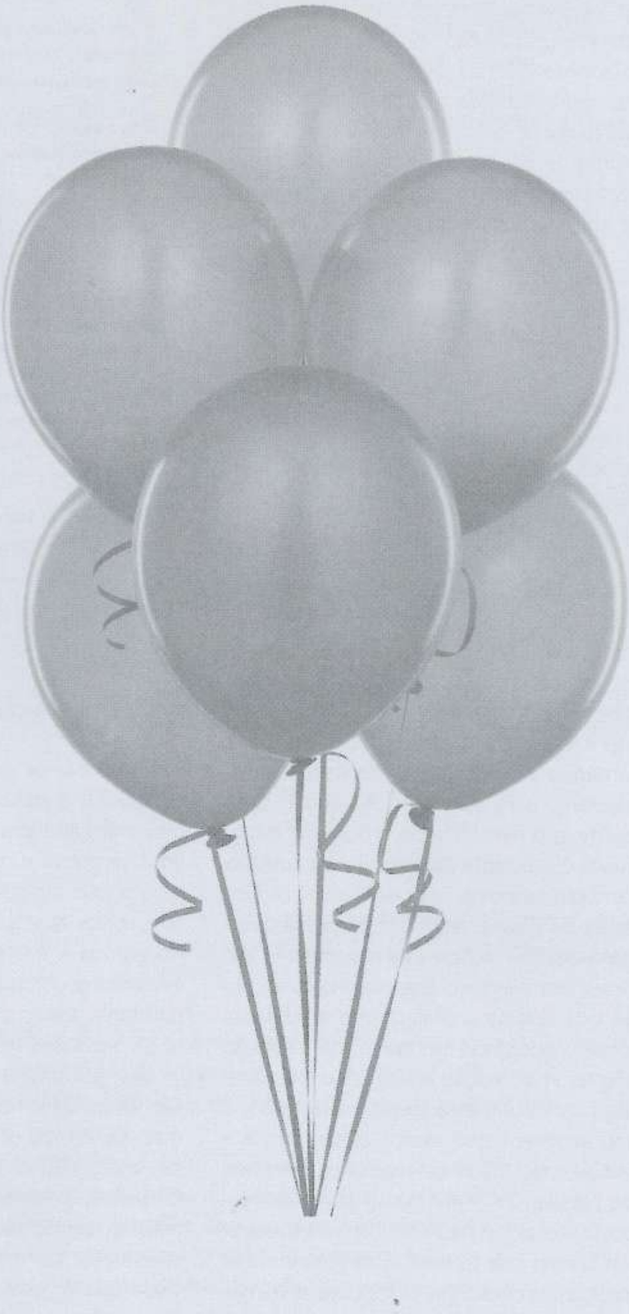
- O balão tem de permanecer no ar mais do que 4 horas;
- O balão tem de permanecer, pelo menos durante 2 horas, a uma altura superior a 110 metros;
- O balão não pode ultrapassar os 120 metros de altura.

Os balões admitidos para concurso são lançados do cimo de um prédio.
Admite que a altitude A, em metros, evolui com o tempo t, em horas, desde o instante em que é lançado, de acordo com a função:

$$A(t) = -7{,}5t^2 + 30t + 90$$

Deverá o Rui ser apurado para a final?

Utilizando as capacidades gráficas da tua calculadora, investiga se o Rui foi apurado para a final. Numa pequena composição, explicita as conclusões a que chegaste, justificando-as devidamente. Inclui na tua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos relevantes.



Avaliação externa e orientações programáticas: que relação?

Educação

Alunos já encaram exame de Matemática com naturalidade

A Associação de Professores de Matemática considera que os exames estão já a ser encarados pelos alunos como rotinas e cada vez menos como um elemento perturbador. As negativas baixaram mas os professores garantem a exigência da prova

Questionado pela agência Lusa sobre a melhoria dos resultados dos exames nacionais de Matemática do 9.º ano, o presidente da associação, Arsélio Martins, afirmou que estas provas estão a criar rotinas e a ser encaradas de forma normal.

«Os exames estão a ser cada vez menos um elemento de perturbação, penso que neste momento estamos a aproximar-nos de uma certa normalidade», afirmou.

De acordo com os resultados hoje divulgados pelo Ministério da Educação, 64 por cento dos alunos teve positiva no exame e a taxa de reprovação baixou dois pontos percentuais face ao ano passado. A percentagem de alunos classificados com negativa (nível 1 e 2) passou de 45 para 36.

Para este responsável, a prova era equilibrada e estava de acordo com os programas e informações publicadas.

«Não era menos exigente do que nos anos anteriores. Tinha algumas coisas que exigiam alguma interpretação de gráficos, tabelas e linguagem escrita», defendeu.

Para o presidente da Associação de Professores de Matemática é normal os resultados terem melhorado.

«Espero que isso signifique que há algum trabalho, que os alunos estão a habituar-se mais a prestar provas e que a actividade dos professores seja cada vez mais exigente», disse.

Lusa / SOL

As provas de aferição e os exames nacionais são parte integrante do calendário escolar e envolvem milhares de alunos do ensino básico ao secundário, as suas famílias e professores. Mas afinal, qual o objectivo desta avaliação e o que se pode aprender com ela?

Parece ser indiscutível a percepção de que a avaliação externa deve estar de acordo com as orientações curriculares em Matemática preconizadas nos diferentes documentos oficiais para cada nível e ciclo de ensino. No entanto, apesar de globalmente parecer existir sintonia, todos os anos temos verificado situações mais ou menos divergentes, não só na forma e conteúdo dos itens que são apresentados aos alunos, mas também nos critérios de classificação que são facultados pelo GAVE aos professores classificadores.

Vejamos o que aconteceu este ano com a prova de aferição de Matemática do 4.º ano. Por exemplo, no que diz respeito ao tema Números e Operações, os documentos curriculares actuais propõem o desenvolvimento do sentido do número, a valorização da compreensão das operações, valorizando o desenvolvimento do cálculo mental a par dos procedimentos de cálculo básicos. Contudo, a maioria das questões da prova utiliza números cuja ordem de grandeza é muito pequena, tornando os problemas demasiado elementares para alunos do 4.º ano. É disto exemplo o item 3, onde o domínio da tabuada é suficiente para resolver a questão. Também as instruções veiculadas nos Critérios de Classificação nos parecem questionáveis, pois indicam, na maior parte das vezes, em primeiro lugar, como exemplo de boa resposta, o algoritmo tradicional, mesmo nos casos em que a sua utilização não tem justificação ou que não é a estratégia de cálculo que revela maior fluência. Isto acontece, por exemplo, no item 8 e também no 6.2 onde os alunos precisam de calcular 39 + 47 como parte da resposta. Ao aluno pede-se-lhe para mostrar «as contas que fizeres». Esta referência às «contas» condiciona as opções em relação às estratégias de cálculo, induzindo o aluno para o algoritmo convencional. Diferente seria se se pedisse ao aluno «Explica como chegaste ao resultado», deixando-lhe mais aberto o leque de opções.

Já no exame do 9.º ano (1.ª chamada, código 23) é possível identificar itens que procuram avaliar a capacidade dos alunos em interpretar e resolver problemas. Vejamos o caso do item 4.2 em que se pede aos alunos que, partindo da observação do gráfico e supondo que o número de visitantes do Museu do Louvre se mantém constante, determinem em que ano haverá 15,5 milhões de visitantes.

As estratégias de resolução podem ser várias, desde a construção de esquemas, tabela ou através de uma expressão algébrica. No entanto, os Critérios de Classificação apresentam como possíveis resoluções dos alunos o recurso a expressões algébricas e respostas fechadas, omitindo outras resoluções possíveis que permitiriam obter mais informação sobre o raciocínio que o aluno efectuou para lá chegar.

Para além deste aspecto, toda a prova peca pela ausência de situações que permitam avaliar a capacidade de comunicação matemática do aluno, nomeadamente, através de questões de natureza mais aberta e da escrita de pequenos textos que convidem o aluno a apresentar e explicar o seu raciocínio, e a forma como chega à resposta.

Neste sentido, questionamo-nos: Até quando a avaliação externa veiculará mensagens contraditórias às orientações curriculares? De que forma interpretam esta situação os professores, alunos e encarregados de educação? Para quando uma mais completa articulação entre o desenvolvimento curricular e a avaliação externa?

Ana Paula Canavarro
Cláudia Canha Nunes

Aprender Matemática com o Excel

Aplicações Computacionais

Margarida Oliveira
Suzana Nápoles
Ana Patricia Silva

Introdução

Estudo da influência da mudança dos parâmetros de uma função no respectivo gráfico. Aplicações

Função de proporcionalidade directa

No âmbito do estudo das funções, conceito fundamental de Matemática, uma das competências que se pretende que os alunos desenvolvam ao longo de toda a escolaridade, consiste na observação e estudo de gráficos de funções dadas por expressões algébricas bem como na alteração de parâmetros e verificação dos efeitos produzidos nos gráficos.

Por exemplo quando se estuda a função de proporcionalidade directa $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$ (8° ano de escolaridade) pretende-se estudar o significado do parâmetro k.

Com auxílio de uma folha de cálculo como por exemplo o Excel é possível desenvolver um módulo computacional, em que seja possível trabalhar simultaneamente com a expressão da função $y = f(x)$, uma tabela de valores $(x, f(x))$ e o respectivo gráfico. É importante que os alunos trabalhem ao mesmo tempo com estas representações e consigam traduzir umas nas outras.

Uma das potencialidades do Excel consiste na possibilidade de incluir uma «barra de deslocamento» ou scrollbar, que fica associada ao valor de uma determinada célula. A figura 1 mostra uma parte do módulo computacional construído com o objectivo de estudar a função de proporcionalidade directa. Neste caso, a barra de deslocamento está associada ao valor da constante de proporcionalidade directa k, cujo valor se encontra na célula C2.

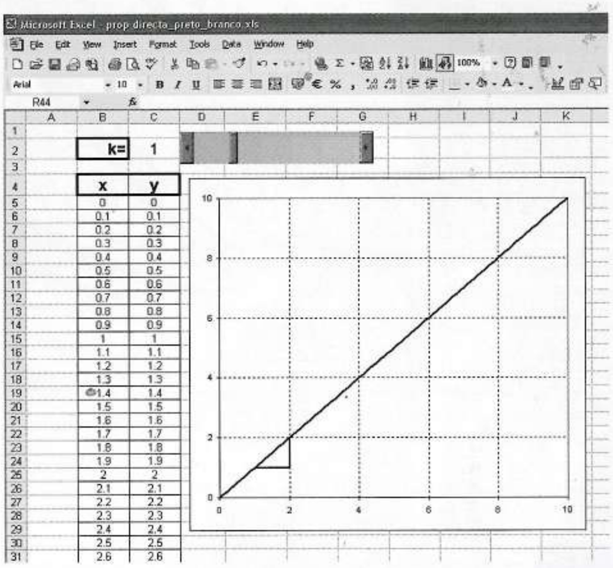


Figura 1. Aplicação desenvolvida em Excel para visualização do gráfico correspondente à função y=kx.

Este tipo de actividade, de construção do gráfico da função $y = kx$ deverá ser concretizada pelos os alunos devidamente orientados pelo professor.

Propôr aos alunos uma tarefa como a contrução de um dado módulo computacional com objectivos muito concretos, leva por um lado os alunos a utilizar as técnicas matemáticas aprendidas nas aulas, como também os obriga a a desenvolver o hábito de pensar e agir de uma forma organizada.

Para a construção deste módulo é necessário que os alunos tenham bem presente as três representações de funções: expressão algébrica, tabela e gráfico. Em seguida compreenderão que uma vez que a tabela de dados é construida a partir da expressão, e o gráfico é traçado com os valores da tabela, quando se actua sobre a barra de deslocamento (ou seja quando se altera o valor de k) a tabela e o gráfico são automaticamente actualizados (figura 1).

É necessário definir uma tabela de dados: os valores de x e os correspondentes valores de y e ainda o valor mínimo e máximo para o conjunto dos valores das abcissas e o espaçamento entre eles. A partir daqui os alunos compreenderão que para a construção do gráfico basta seleccionar a tabela de dados e recorrer ao botão de Assistente de gráficos do Excel e escolher o gráfico que melhor se adequa à situação.

Para além de alguns aspectos relacionados com a parte estética do módulo desenvolvido, e que não são de desprezar pois tornam os gráficos mais apelativos como por exemplo a sua formatação (cor de fundo, espessura do traço, cor do traço) temos ainda a definição da escala que é muito importante do ponto de vista matemático. Para definir a escala basta clicar sobre os números que constam no eixo dos xx, e com o botão direito fazer aparecer um menu que dará todas as orientações necessárias para tornar a escala não automática.

Finalmente a barra de deslocamento que se introduz a partir da barra de ferramentas do Visual Basic corresponde apenas a um código simples contendo os valores mínimo e máximo da barra, `Scrollbar1.min` e `Scrollbar2.min` respectivamente e a que valor da célula é que ela fica associada. O código para a anterior aplicação é o seguinte:

```
Private Sub ScrollBar1_scroll()

ScrollBar1.Min = 0
ScrollBar1.Max = 200
Cells(2, 3) = ScrollBar1.Value / 10

End Sub
```

A figura 2 ilustra o que acontece quando se actua sobre a barra de deslocamento.

Esta aplicação permite estudar a variação do parâmetro k na função de proporcionalidade directa $y = kx$. No entanto é possível também desenvolver uma aplicação para estudar a função $y = kx + b$, agora com duas barras de deslocamento, uma para o k e outra para o b.

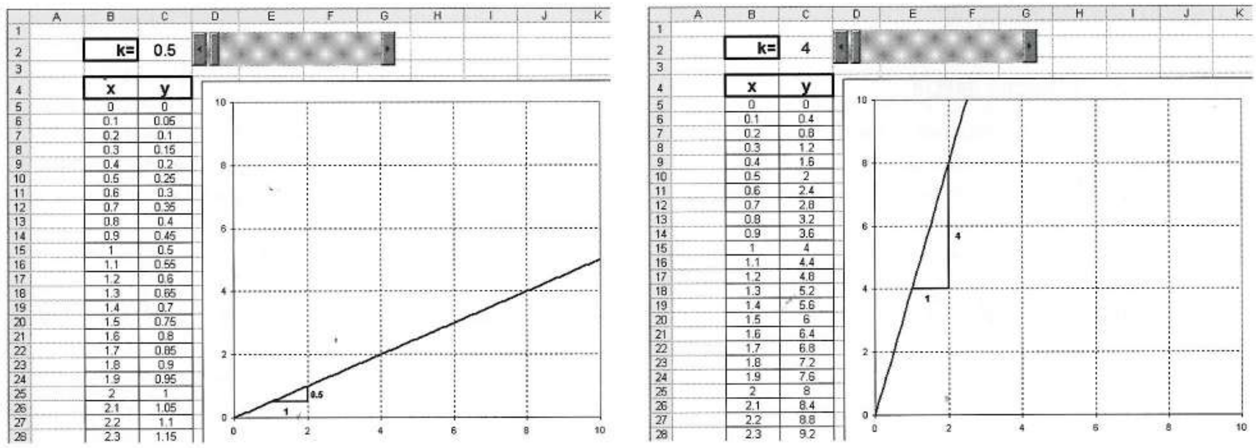


Figura 2. Resultados obtidos para k=0.5 e k=4.

Estudo da função quadrática

Tendo em conta que o conceito de função é de importância primordial no ensino da Matemática e que percorre todos os níveis desde os do ensino básico ao secundário, faremos agora uma abordagem ao estudo das funções ao nível do 10° ano, nomeadamente ao estudo da função quadrática recorrendo mais uma vez à folha de cálculo não esquecendo que todos módulos que serão apresentados deverão ser propostos aos alunos pois estão perfeitamente ao seu alcance. Os alunos terão mais uma vez oportunidade de utilizar os conhecimentos matemáticos e aplicá-los nas diferentes situações que vão surgindo.

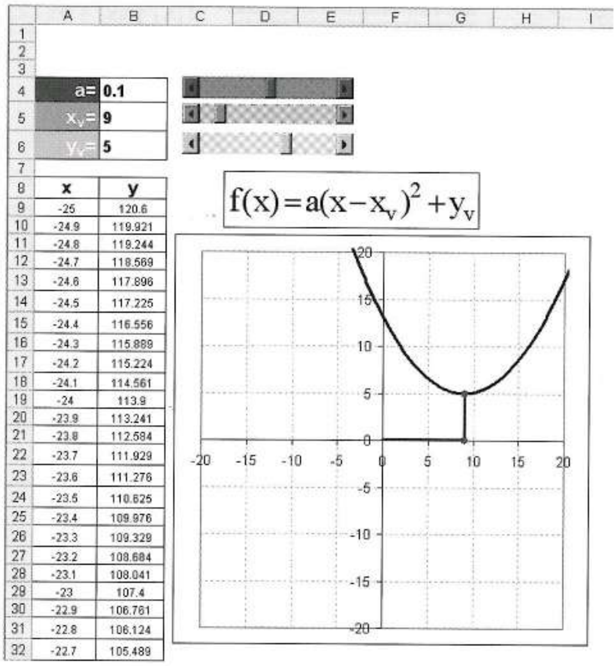
Com a possibilidade de usar barras de deslocamento, é possível fazer o estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, analisar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez, e ainda estudar as transformações simples de funções.

Na figura 3 apresenta-se uma aplicação desenvolvida para o estudo da função quadrática na forma $y = a(x - x_v)^2 + y_v$. As três barras de deslocamento correspondem ao parâmetro a e às coordenadas do vértice da parábola x_v e y_v.

Na figura 4 é possível visualizar alguns resultados obtidos quando se alteram os valores de a e das coordenadas do vértice da parábola.

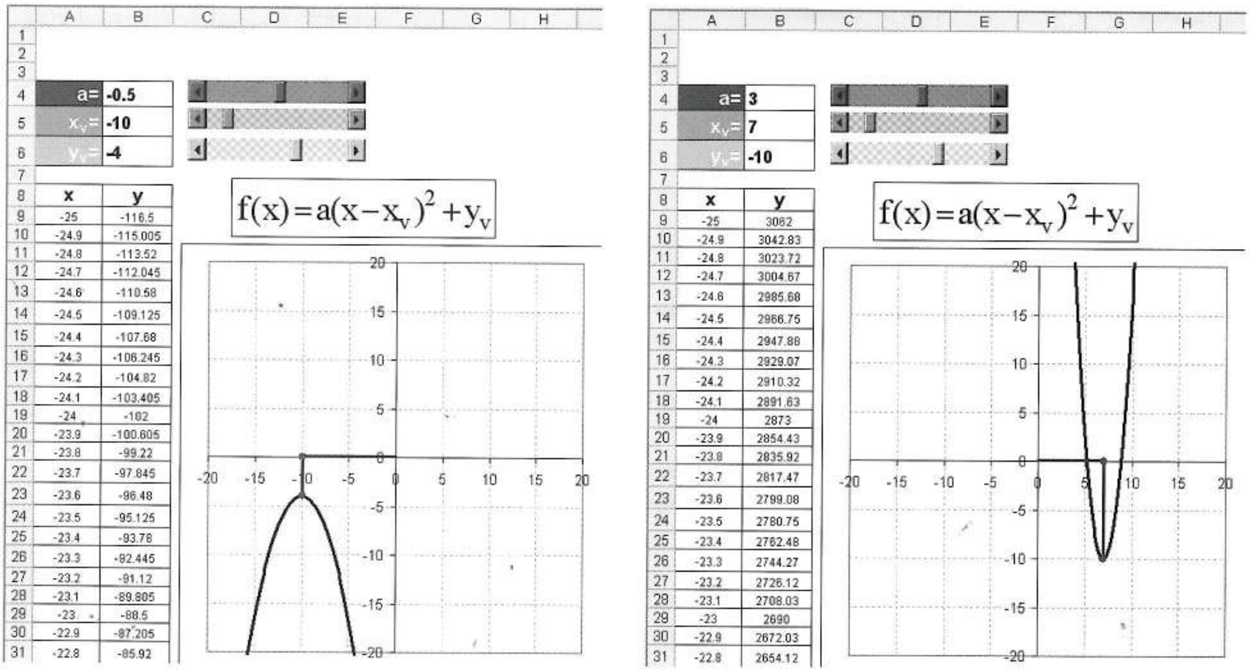
Da mesma forma é possível desenvolver uma aplicação para o estudo da função quadrática escrita na forma canónica $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Neste caso serão introduzidas três barras de deslocamento para os coeficientes a, b e c. Associado ao gráfico da função quadrática é possível compreender os significados geométricos dos coeficientes.



	A	B
4	a=	0.1
5	x_v=	9
6	y_v=	5
8	x	y
9	-25	120.6
10	-24.9	119.921
11	-24.8	119.244
12	-24.7	118.569
13	-24.6	117.896
14	-24.5	117.225
15	-24.4	116.556
16	-24.3	115.889
17	-24.2	115.224
18	-24.1	114.561
19	-24	113.9
20	-23.9	113.241
21	-23.8	112.584
22	-23.7	111.929
23	-23.6	111.276
24	-23.5	110.625
25	-23.4	109.976
26	-23.3	109.329
27	-23.2	108.684
28	-23.1	108.041
29	-23	107.4
30	-22.9	106.761
31	-22.8	106.124
32	-22.7	105.489

Figura 3. Aplicação desenvolvida em Excel para visualização do gráfico correspondente à função $y=a(x-x_v)^2+y_v$.



	A	B
4	a=	-0.5
5	x_v=	-10
6	y_v=	-4
8	x	y
9	-25	-116.5
10	-24.9	-115.005
11	-24.8	-113.52
12	-24.7	-112.045
13	-24.6	-110.58
14	-24.5	-109.125
15	-24.4	-107.68
16	-24.3	-106.245
17	-24.2	-104.82
18	-24.1	-103.405
19	-24	-102
20	-23.9	-100.605
21	-23.8	-99.22
22	-23.7	-97.845
23	-23.6	-96.48
24	-23.5	-95.125
25	-23.4	-93.78
26	-23.3	-92.445
27	-23.2	-91.12
28	-23.1	-89.805
29	-23	-88.5
30	-22.9	-87.205
31	-22.8	-85.92

	A	B
4	a=	3
5	x_v=	7
6	y_v=	-10
8	x	y
9	-25	3062
10	-24.9	3042.83
11	-24.8	3023.72
12	-24.7	3004.67
13	-24.6	2985.68
14	-24.5	2966.75
15	-24.4	2947.88
16	-24.3	2929.07
17	-24.2	2910.32
18	-24.1	2891.63
19	-24	2873
20	-23.9	2854.43
21	-23.8	2835.92
22	-23.7	2817.47
23	-23.6	2799.08
24	-23.5	2780.75
25	-23.4	2762.48
26	-23.3	2744.27
27	-23.2	2726.12
28	-23.1	2708.03
29	-23	2690
30	-22.9	2672.03
31	-22.8	2654.12

Figura 4. Resultados obtidos quando se alteram os valores de a, x_v e y_v.

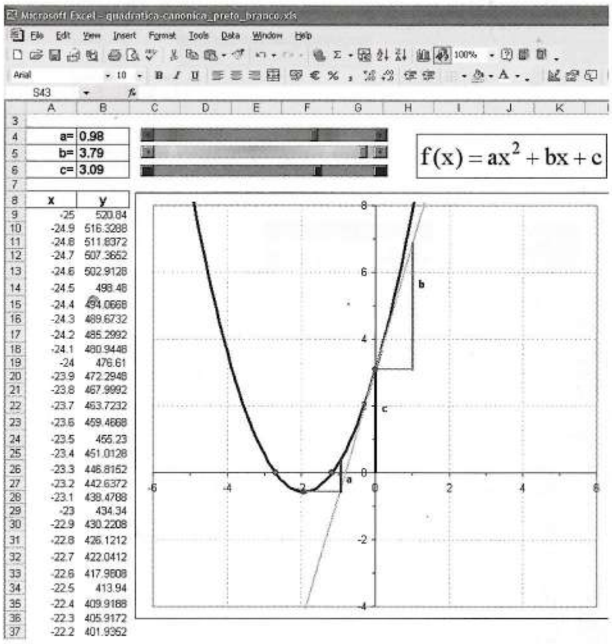


Figura 5. Aplicação desenvolvida em Excel para visualização do gráfico correspondente à função $y=ax^2+bx+c$.

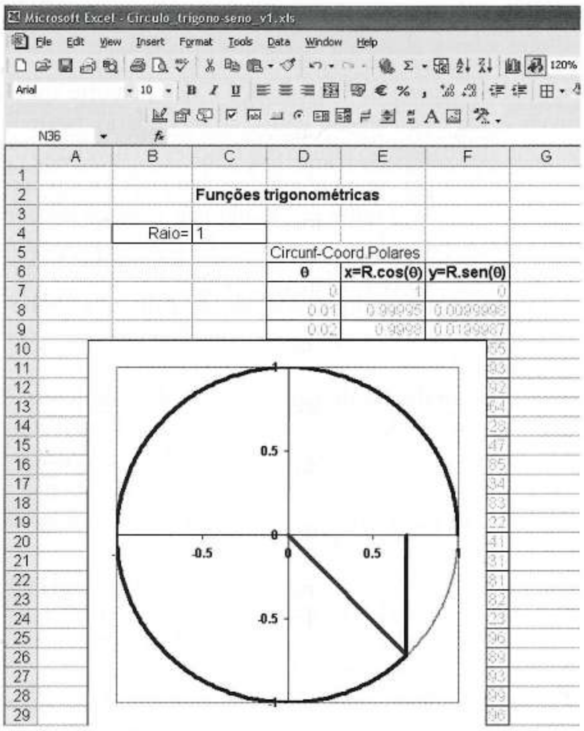


Figura 6. Círculo trigonométrico

A exploração das aplicações apresentadas na figura 4 e 5 pode conduzir a um trabalho de investigação no sentido de os alunos descobrirem propriedades destas famílias de funções e o efeito da alteração dos parâmetros:

1. Relativamente à primeira aplicação (figura 4) é possível estudar a variação de a e de x_v e y_v. Os alunos deverão reconhecer que a função quadrática do tipo $y = a(x - x_v)^2 + y_v$ se pode obter à custa da função $y = x^2$ efectuando uma translacção segundo o vector (x_v, x_y).

Relativamente à aplicação da figura 5:

2. Fazendo $c = 0$ estudar as funções do tipo $y = ax^2 + bx$.
3. Fazendo $b = 0$ estudar as funções do tipo $y = ax^2 + c$.
4. Fazendo $b = c = 0$ estudar as funções do tipo $y = ax^2$.
5. Qual a consequência no gráfico da alteração do parâmetro a? E do parâmetro c?

O parâmetro b influencia o gráfico de uma forma não tão imediata. De que forma?

6. Construir uma aplicação semelhante às duas anteriores para visualização do gráfico de uma função quadrática mas escrita na forma $y = a(x - x_0)(x - x_1)$.

Construção do círculo trigonométrico e desenho do gráfico da função y=sen(x)

As funções trigonométricas constituem parte fundamental dos programas de Matemática do 11° ano.

Propõem-se, agora, a construção na folha de cálculo do círculo trigonométrico e correspondente representação do gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$.

Neste módulo computacional os alunos terão de, primeiramente, construir uma circunferência de raio 1.

Aqui, a discussão sobre qual a equação que deverão escolher para descrever a circunferência com vista ao seu traçado, é já por si um trabalho com valor didáctico. Poderão optar pela equação cartesiana, no entanto verão que as equações paramétricas

$$\begin{cases} x &= R\cos(\theta) \\ y &= R\,\text{sen}(\theta) \end{cases}$$

respondem melhor a esta tarefa. Basta para isso definir 3 colunas, uma com os valores das amplitudes dos ângulos de 0 a 2π e outras duas com os valores de x e de y.

Em seguida, deve ser introduzido numa célula um valor para o ângulo que o raio faz com o eixo dos xx. Os alunos deverão ter presente que à medida que a amplitude do ângulo vai variando em $[0,2\pi[$, o lado extremidade desse ângulo intersecta a circunferência num único ponto cuja ordenada é o seno desse ângulo (figura 6).

Para visualizarmos a representação do gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ à medida que a amplitude do ângulo vai variando no círculo trigonométrico, é introduzido um botão de comando que ficará associado a um código. Sempre que o botão for activado, o código será executado, os valores da amplitude do ângulo vão mudando e será construído simultaneamente o gráfico da função.

O facto de ser necessário introduzir um botão de comando, está relacionado com o aspecto visual pois neste caso queremos relacionar o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$ com o circulo trigonométrico, e ver que à medida que o seno do ângulo varia (no círculo trigonométrico), o gráfico vai sendo traçado gradualmente. Para que isso aconteça basta mandar escrever em duas colunas os pontos $(x, \text{sen}(x))$ através do referido botão de comando. Esta série de dados, estando associada a um gráfico irá originar o seu aparecimento gradual. Assim basta utilizar o procedimento de ciclo iterativo For.....Next.

O seu significado simples consiste no seguinte:

Para variável de valor inicial dado e valor final
Executar isto
Recomeçar incrementando a variável um certo valor

Na figura 7 está representado o código em que para cada valor de i, desde 0 até ao valor correspondente ao Angmax (que entretanto está inserido na célula da linha 2 coluna 9) escreve em duas colunas o valor de i e o respectivo $\text{sen}(i)$.

```
Sub Button3_Click()
  Angmax = Cells(2, 9)
    For i = 0 To Angmax
      Cells(3, 9) = i
      Cells(7 + i, 11) = i * 3.1415927 / 180
      Cells(7 + i, 12) = Sin(i * 3.1415927 / 180)
    Next i
End Sub
```

Figura 7. Código associado ao botão de comando.

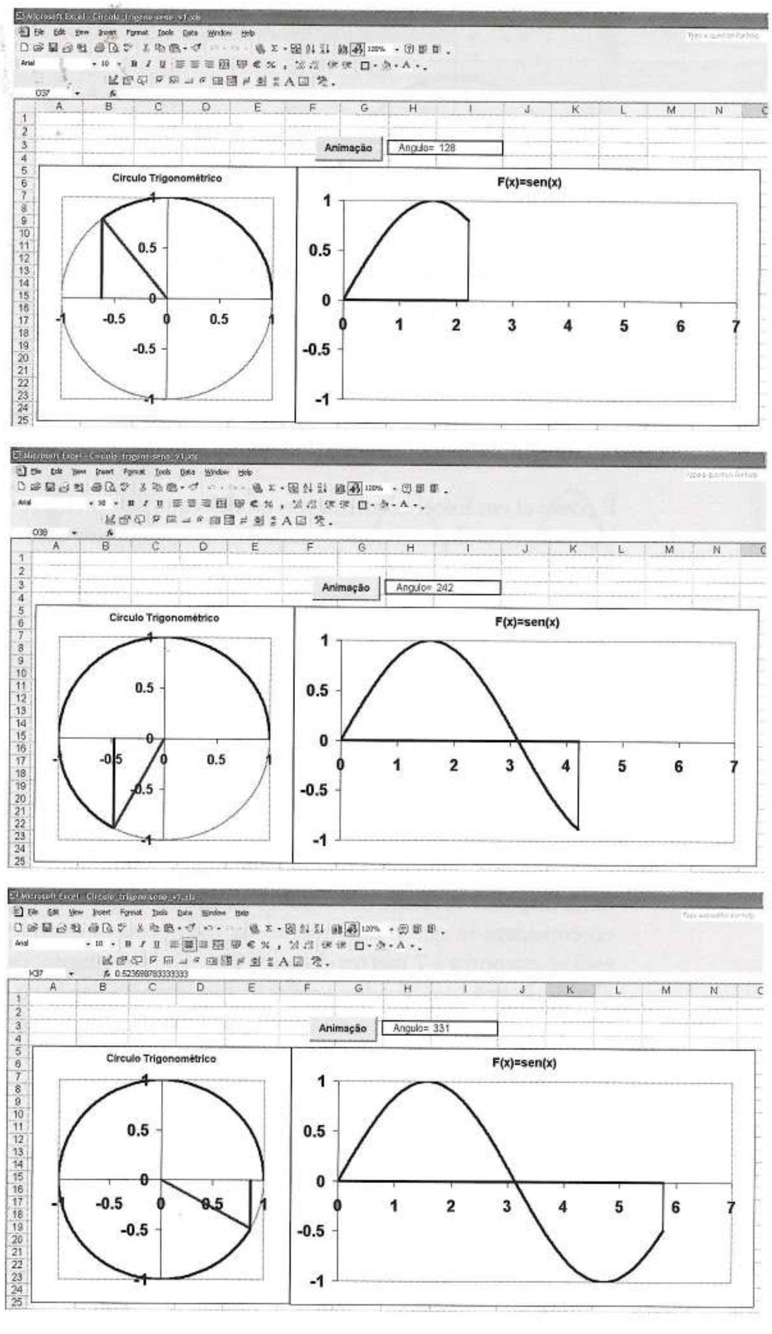


Figura 8. Variação do seno de um ângulo no circulo trigonométrico e traçado do respectivo gráfico da função f[x]=sen[x].

Na figura 8 é apresentada uma sequência daquilo que é possível visualizar após accionar o botão de comando.

Com auxílio desta aplicação pode fazer-se o estudo completo da variação e do sinal da função $\text{sen}(x)$.

Uma vez construída a aplicação da função seno pode ser proposta a construção de uma aplicação que desenhe o gráfico da função $y = \cos(x)$. Por outro lado a construção de módulos computacionais para melhorar a compreensão do estudo dos ângulos é também uma boa proposta de trabalho que poderá ser desenvolvida ao nível do 11° ano.

Para finalizar apresentaremos em seguida um módulo computacional que poderá constituir um tema para um trabalho com características de projecto.

A Roda gigante. Modelação Matemática

Dada a grande variedade de situações reais que podem ser modeladas através de funções trigonométricas, o estudo destas, pode ganhar especial interesse com a análise de situaçõpes concretas.

A abordagem matemática de uma situação real passa pela construção de um modelo matemático, uma descrição da situação, que se estende por diferentes fases:

- interpretação e simplicação do problema na elaboração do modelo real;
- «tradução matemática» ou matematização do modelo real para a construção do modelo matemático (no caso concreto o modelo será do tipo $h(t) = a\cos(bt) + c$);
- interpretação e avaliação do modelo matemático de acordo com a situação real.

Todos nós conhecemos as rodas gigantes das feiras ou dos parques de diversões.

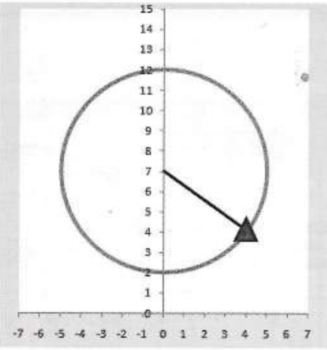


Figura 9. Raio e cadeira que se está a estudar da roda gigante construída em Excel com 5 metros de raio e a 2 metros do solo.

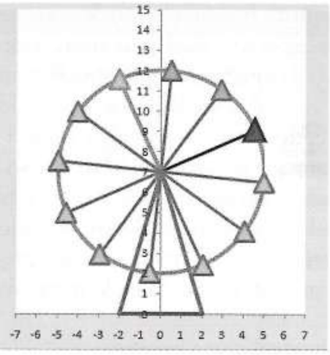


Figura 10. Roda gigante construída em Excel com 5 metros de raio e a 2 metros do solo.

É possível em Excel construir um modelo que descreva a relação entre a altura a que se encontra um passageiro numa roda gigante e o tempo.

Para isso, procede-se primeiro à construção da roda. Analogamente ao que foi explicado para a construção do círculo trigonométrico, pode-se recorrer às equações paramétricas

$$\begin{cases} x &= R\cos(\theta) \\ y &= R\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

para desenhar a circunferência. Considerando o raio da roda 5 metros e que esta se encontra a 2 metros do solo, temos para os valores de x : 5 sen α e para os valores de y : $7 + 5$ cos α, já que para se ter o ângulo descrito pela cadeira disposto de forma semelhante ao círculo trigonométrico considera-se que o movimento da roda começa quando esta se encontra a 7 metros do solo $(2 + 5)$. No entanto, os alunos deverão ser levados a reflectir que quando a roda começa a girar o passageiro está na posição da roda mais próxima do solo (na cadeira a 2 metros do solo) e será a partir daqui que se vai iniciar a contagem do tempo. Logo, o ângulo descrito pela cadeira não vai ter o lado origem paralelo ao solo (quando a cadeira está a 7 metros do solo) mas, sim perpendicular ao solo. Este facto faz com que se tenha que alterar o argumento da função co-seno para $\alpha - \pi/2$, ou seja, os valores de x deverão ser $5\ \mathrm{sen}(\alpha - \pi/2)$ e os valores de y serão $7 + 5\cos(\alpha - \pi/2)$.

De seguida para se construir um raio da circunferência e um ponto sobre esta para simular a cadeira que se está a estudar desenha-se um segmento de recta, bastando para isso indicar numa tabela as coordenadas dos seus extremos como em módulos anteriores já foi referido (figura 9).

Pode-se alterar o aspecto do ponto que está sobre a circunferência de forma a assemelhar-se a uma cadeira de uma roda gigante. Pode-se ainda melhorar o aspecto da roda gigante, considerando-se que esta tem 12 cadeiras desenharem-se as restantes cadeiras e raios. Esta construção é bastante simples e mais uma vez útil, já que envolve a utilização de conceitos de trigonometria. Para tal, deve-se ter em atenção que como a roda tem 12 cadeiras igualmente espaçadas, entre elas distam de um ângulo de $2\pi/12 = \pi/6$. Logo, a expressão para o valor da abcissa e ordenada do ponto que representa a cadeira obtém-se adicionando $\pi/6$ ao argumento da função co-seno e seno, respectivamente, na expressão das coordenadas do ponto. A construção dos restantes raios será análoga, pois para obtermos as coordenadas dos pontos que representam as cadeiras será sempre adicionado ao argumento da função co-seno e seno um múltiplo de $\pi/6$ na expressão das coordenadas do ponto anteriormente referido, conforme a posição da cadeira relativamente à considerada. Poderão também ser construídos os segmentos para representarem o suporte da roda (figura 10).

Na figura 11 apresenta-se a aplicação desenvolvida em Excel que ilustra com uma animação como se associa a posição duma cadeira numa roda gigante, à medida que esta vai girando, ao traçado da representação gráfica da função que nos dá a altura da cadeira considerada, em função do tempo. Para se visualizar a animação basta premir o botão de comando «Iniciar movimento da roda».

As três barras de deslocamento correspondem aos parâmetros raio, tempo de duração de uma volta e número de voltas que a roda vai girar. Estes parâmetros podem ser alterados vendo-se a imediata transformação no aspecto da roda, posicionamento da cadeira considerada, bem como, a alteração correspondente na representação gráfica (figura 11).

Para a construção desta aplicação em Excel é necessário, primeiro, construir-se o modelo matemático que descreve a relação entre a altura a que se encontra um passageiro e o tempo. Supõe-se que quando a cadeira inicia o seu movimento encontra-se no ponto mais próximo do solo (a posição inicial), inicia-se, assim, a contagem do tempo em 0 minutos. Admite-se, também, que a cadeira movimenta-se no sentido anti-horário.

Ao longo do seu movimento, a posição que a cadeira ocupa está perfeitamente determinada pelo ângulo α cujo lado origem é o segmento de recta vertical que une o centro da roda ao solo e o lado extremidade é o raio da roda relativo a esta cadeira.

Em primeiro lugar restringe-se o estudo do movimento da cadeira entre a sua posição inicial e a posição que ocupa quando o raio da roda relativo à cadeira descreveu um ângulo de $\pi/2$ (figura 12).

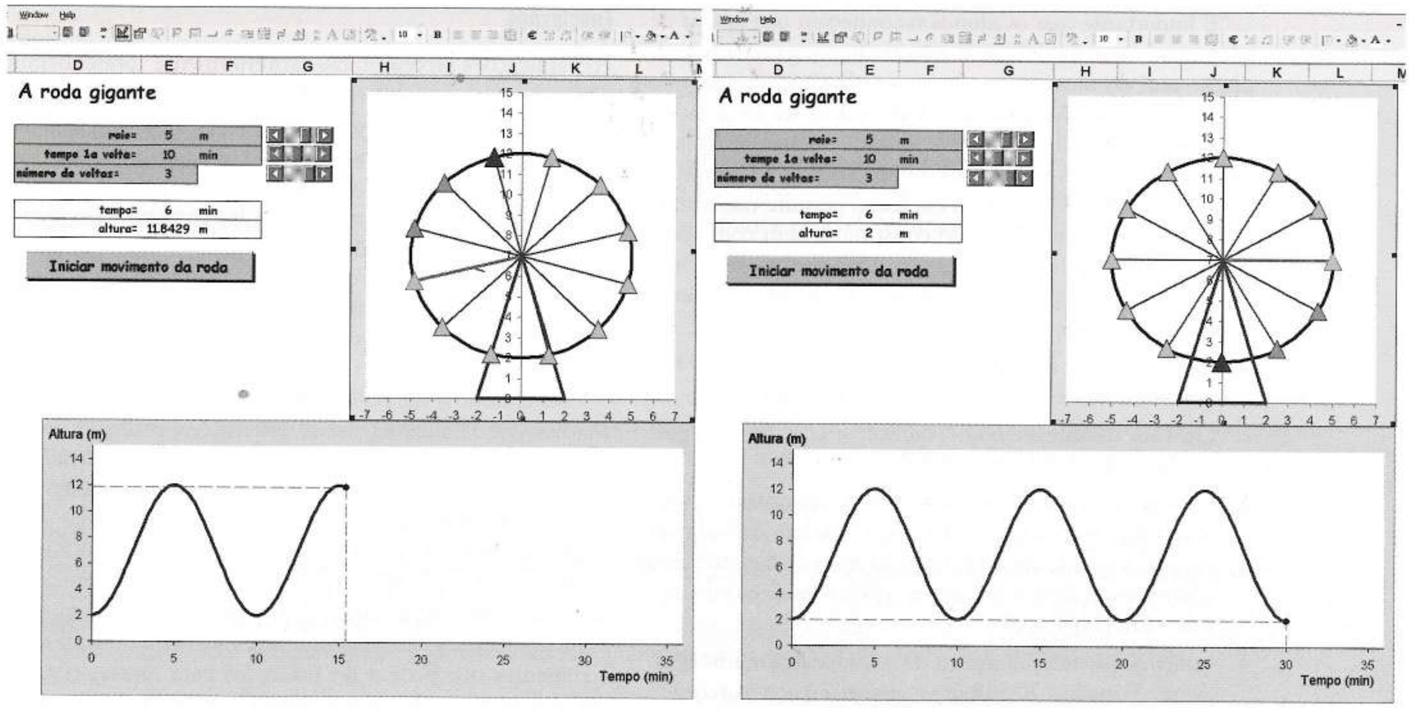


Figura 11. Aplicação da roda gigante construída em Excel.

Determina-se x em função de α.

Tem-se que $\cos\alpha = x/5$ logo $x = 5\cos\alpha$.

Sendo assim, a altura do passageiro em função do ângulo α é dada por $7 - x = 7 - 5\cos\alpha$.

Restringiu-se o problema à determinação do ângulo α em função do tempo. Observa-se que a amplitude do ângulo α corresponde à amplitude do arco percorrido pela cadeira.

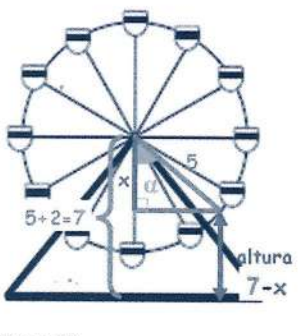


Figura 12.

De acordo com a situação, a cadeira descreve um arco de amplitude 2π radianos em 12 minutos. Uma vez que a velocidade de rotação é constante, o arco percorrido é directamente proporcional ao tempo. Logo, a amplitude do arco percorrido pela cadeira em t minutos é dado por

$$\alpha = \frac{2\pi}{12}t = \frac{\pi}{6}t \text{ radianos.}$$

Logo, a expressão que relaciona a altura da cadeira com o tempo para α, $\alpha \in]0, \pi/2[$ é:

$$7 - 5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

De forma análoga, se verifica que a expressão é válida para $\alpha \in]\pi, 2\pi[$, $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ e $\alpha = \pi/2$.

Sendo assim, a altura h, em metros, de um passageiro, t minutos após a roda gigante ter começado a girar, é dada pelo modelo:

$$7 - 5\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

Uma vez encontrado o modelo, este deve ser testado. Deve ser posta em causa a validade do modelo.

É importante que os alunos reconheçam que apesar de adoptarmos este modelo, este não traduz exactamente a situação real do movimento de uma roda gigante, podendo ser aperfeiçoado. Algumas questões podem ser levantadas, tal como, a roda não está sempre a girar, tem que parar constantemente para os passageiros saírem e entrarem outros.

A aplicação desenvolvida em Excel permite não só que os alunos visualizem o modelo construído, bem como proporciona a possibilidade de fazerem uma análise geométrica fazendo uma exploração dinâmica do modelo. Algumas questões podem ser colocadas:

1. A que altura se encontra um passageiro ao fim de 10 minutos?
2. Quais os instantes em que, durante a 1.ª volta, um passageiro está a 9,5 metros do solo?
3. Sabe-se que quando os passageiros se encontram a uma altura superior ou igual a 9,5 metros podem desfrutar da melhor vista do parque. Quanto tempo, durante uma volta completa, um passageiro poderá desfrutar da melhor vista do parque?
4. Imagina que um passageiro dá várias voltas na roda gigante. Passados 20 minutos qual o espaço percorrido pela cadeira?
5. Imagina, agora, que o passeio de um passageiro na roda gigante teve a duração de 36 minutos. Durante o seu passeio quais os instantes em que o passageiro se encontrava a uma altura de 8 metros do solo?

Para a construção desta aplicação em Excel utilizam-se, maioritariamente conceitos matemáticos, em especial ligados à trigonometria, pelo que deverão ser os alunos a modelar esta situação da vida real, não se limitando apenas (como é frequente) a responder analiticamente a questões que lhes são colocadas. Esta actividade revela-se extremamente rica para ser feita numa sala de aula, laboratório ou clube de Matemática, já que permite trabalhar conteúdos de trigonometria e fazer modelação, tão importante em Matemática.

Conclusões

As aplicações apresentadas anteriormente pretenderam mostrar apenas uma forma de utilizar a folha de cálculo para estudar conceitos matemáticos. Optou-se por mostrar a grande vantagem na utilização do Excel no estudo das funções e dos seus gráficos em vários níveis de escolaridade. Relações entre diferentes tipos de representações como as tabelas, equações e gráficos são mais facilmente compreensíveis quando tais representações são visíveis em conjunto e ligadas umas com as outras isto é quando se altera uma representação, automaticamente as outras representações vêm alteradas.

No entanto a sua riqueza estende-se por vários temas da Matemática e também permite desenvolver conexões muito interessantes entre temas como a álgebra e a geometria.

A folha de cálculo utilizada numa óptica do desenvolvimento de aplicações computacionais relacionadas com conteúdos matemáticos, permite, como vimos anteriormente, com reduzidos conhecimentos ao nível da programação, criar ambientes matemáticos estimulantes para os alunos. Concretamente o Excel possui um vasto conjunto de procedimentos que podem ser utilizados para ilustrar conceitos matemáticos, para fomentar a descoberta e o reconhecimento de padrões e para desenvolver o espírito crítico e investigativo.

A experiência em sala de aula mostra que esta metodologia de trabalho, em que se pretende que os alunos aprendam matemática ao mesmo tempo que constroem aplicações dinâmicas em Excel, é motivante e enriquecedora.

Nota: As aplicações computacionais apresentadas ao longo do artigo poderão ser visualizadas na página com o seguinte endereço: `http://sites.google.com/site/matmodel/`

Margarida Oliveira
Escola E.B.2.3 Piscinas Lisboa

Suzana Nápoles
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Ana Patrícia Silva
Colégio de São João de Brito

APM — 2009

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2009

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `http://www.apm.pt`

Assinaturas das revistas para 2009

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções