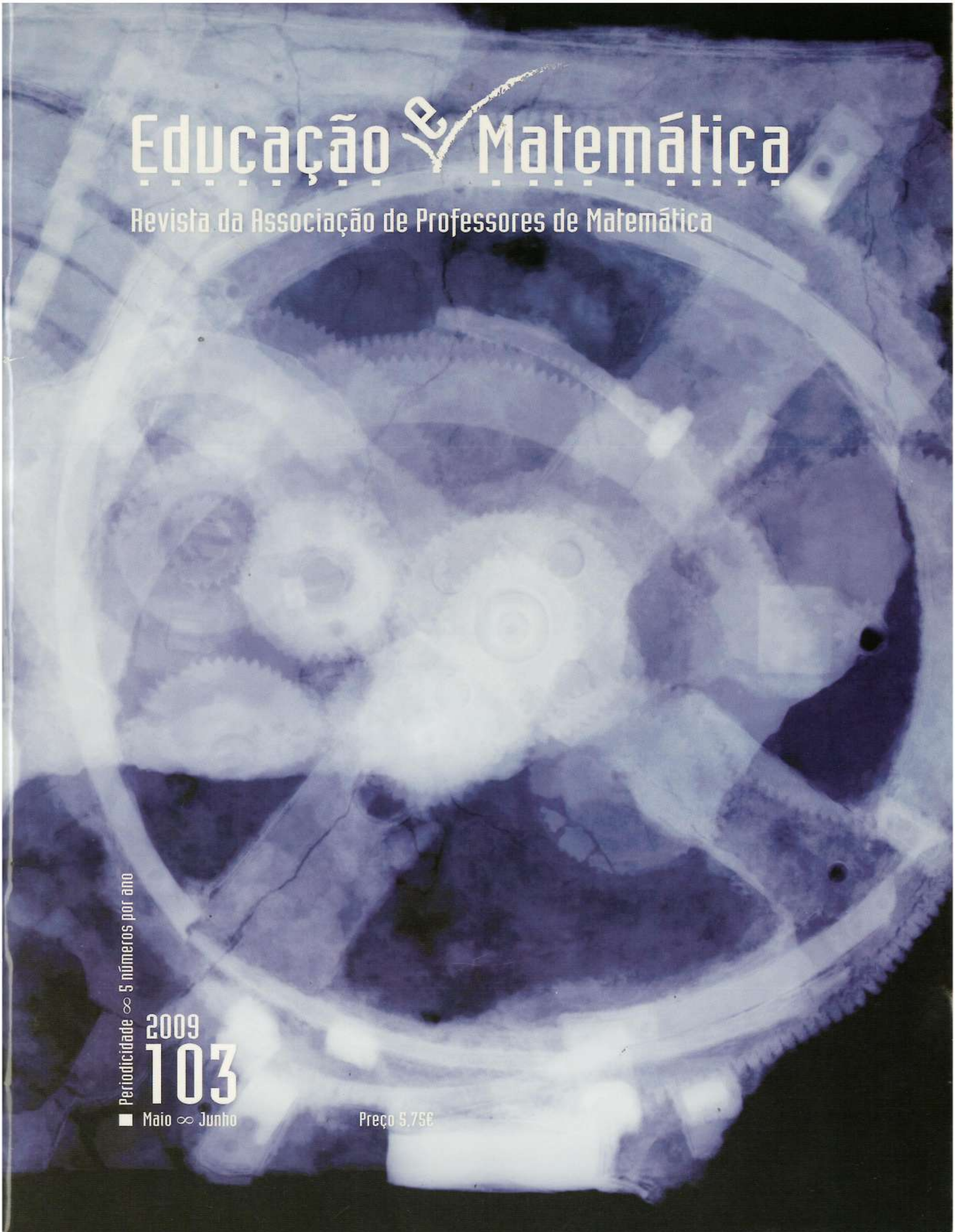
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2009

103

Maio ∞ Junho

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Junho 2009
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2530–250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222

Porte Pago

Sobre a capa

A capa deste número é alusiva ao denominado «Mecanismo de Antikythera». O nome deve-se ao facto de este importante achado arqueológico ter ocorrido (em 1902) perto da ilha grega de Antikythera, no interior dos restos de um navio romano naufragado. O mecanismo foi, tanto quanto se julga, criado cerca de 80 a.C. e tal como o sugerem modernas recriações do seu funcionamento, trata-se do mais antigo computador mecânico conhecido (a sua função seria a de descrever os ciclos associados a certos corpos celestes).

Os achados arqueológicos encontram-se no Museu Nacional de Arqueologia em Atenas e, uma reconstrução moderna pode ser encontrada no American Computer Museum em Montana.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Arsélio Martins, Elvira Santos, Evgeny Lakshtanov, Fátima Guimarães, José Avelino Carmo, José Maria Gomes, Lina Fonseca, Luísa Selas, Maria Teresa Santos, Paulo Afonso, Sónia Figueirinhas.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Editorial

9+3=12, sim, mas e o tempo? e o modo?

Fátima Guimarães

O governo fez sair uma proposta de lei que alarga de 9 para 12 anos a escolaridade obrigatória para os alunos que em 2009/2010 se matriculem no 7.° ano de escolaridade. Pretende, assim, concretizar «mais um ambicioso objectivo: uma Educação de qualidade para todos, indissociável do regime democrático, da igualdade de oportunidades, da inclusão e da coesão sociais e do desenvolvimento económico e tecnológico», considerando ser este «o momento para avançar», existirem «as condições para o fazer, quer em meios humanos, quer em meios físicos».

Em sintonia, partidos da oposição, e até sindicatos, aplaudiram a iniciativa parecendo partilhar a 'bondade' absoluta desta lei. Contudo, os números e as práticas, do passado e no presente, não deixam perfilhar o optimismo e a confiança neste alargamento e indiciam poder ser muito problemática a sua implementação. Portugal foi dos primeiros países do mundo a instituir a escolaridade obrigatória (1835). Muitos países da Europa, só em finais do sec. XIX, princípios do sec. XX o decidiram. No entanto, 40 anos depois, Portugal continuava a ser um dos países europeus com a taxa de escolarização mais baixa. A escolaridade obrigatória, fixada em 1986 em 9 anos, demorou uma década a ser transposta para a prática efectiva, ainda hoje não é cumprida na íntegra e, com um problema grave de abandono escolar, continuamos na cauda da Europa na taxa de alunos que terminam o ensino secundário (estando para se ver o que vão resolver programas como o das Novas Oportunidades ou o dos CEF). De entre os 27 membros da UE, 12 países mantém 9 anos de escolaridade obrigatória (entre eles a tão referida Finlândia) e somente 5 países possuem uma obrigatoriedade de frequência escolar até aos 18 anos. Países europeus com uma escolaridade obrigatória menos longa apresentam melhores resultados do que nós em termos de escolarização.

Em recentes palavras da Ministra da Educação, «500 mil jovens não concluíram a escolaridade obrigatória de 9 anos ou não terminaram o secundário», pelo que reconheceremos todos que esta situação questiona fortemente as oportunidades efectivas de um aluno concluir o 12.° ano em 12 anos. A tutela acredita que «em condições normais, e se o sistema educativo for eficiente, todos os alunos podem concluir o 12.° ano». Será assim? Um estudo recente[1] sobre as saídas previsíveis do Sistema de Educação e Formação para o mercado de trabalho, mostra que, em 100 alunos matriculados à entrada da escolaridade, apenas 49 atingirão o 6.° ano sem qualquer retenção, sendo que 10 alunos abandonarão o sistema de ensino e apenas 28 concluirão os 9 anos de escolaridade básica obrigatória sem qualquer retenção.

A análise dos dados obtidos em diversos países industrializados evidenciam que os alunos provindos de grupos sociais mais desfavorecidos quando sofrem retenções (e é nestes alunos que mais acontecem) apresentam as probabilidades mais baixas de continuar os estudos. Persistem pois mecanismos e processos de selecção escolar que penalizam fortemente as trajectórias individuais destes alunos revelando que há dois tempos e duas velocidades na qualificação escolar e, portanto, uma tendência de perpetuação e até intensificação das desigualdades sociais. Nestas condições, o aumento da escolaridade obrigatória contribuirá para a diminuição da exclusão social e a desigualdade social? Com um longo caminho a trilhar no processo educativo que já existe, antes de 'arrumar a casa', Portugal mais uma vez resolve tomar a dianteira, e ser este o tempo e o modo para avançar, acrescentando mais 3 anos à escolaridade obrigatória dos nossos jovens.

Esta decisão surge num momento em que o sistema educativo, as escolas, e os professores] atravessam um período difícil, e certamente demorado, de adaptação a um conjunto de medidas, que surgiram muito perto umas das outras (nomeadamente as relacionadas com o estatuto da carreira docente, avaliação dos professores, a organização e gestão das escolas), e que estão a gerar perturbações tensões e desajustamentos. Mais uma vez as escolas e os professores não foram ouvidos, mas sabem que os problemas que o alargamento da escolaridade para 12 anos levanta são muitos, complexos e muito difíceis de ultrapassar. Entre os professores de todos os graus de ensino e as respectivas tutelas há uma ferida aberta ainda longe de sarar. Como refere António Nóvoa, «não é possível trabalhar pedagogicamente no meio do ruído, no meio do barulho, no meio da crítica, no meio da insinuação». Para além dos meios técnicos, materiais e humanos é necessário ganhos significativos no sistema, com a diminuição dos ainda muito elevados insucesso e abandono escolares, a requalificação do ensino público, o desenvolvimento de práticas eficazes e generalizadas de apoio aos alunos com maiores dificuldades de integração e de aprendizagem. Nada será conseguido sem a existência de calma e tranquilidade nas escolas, de sossego e tempo indispensáveis para o cumprimento da função de ensino, essencial do professor, e das múltiplas e diversas outras funções que se lhe exige, e à Escola, porventura já excessivas e deslocadas. Também não se minimizará o impacto do alargamento da escolaridade obrigatória se não se alterarem as políticas públicas em relação aos professores para que estes possuam o tempo e as condições pessoais e profissionais para ir mais longe.

Fátima Guimarães
EB 2,3 Telheiras

[1] Carneiro, R. (Dir. e Coord.) et. al.. (2007). *A baixa qualificação em Portugal. Relatório final*. Universidade Católica. Lisboa.

Comunicação Matemática na sala de aula

Episódios do 1º ciclo do Ensino Básico[1]

Lina Fonseca

Comunicação matemática

A comunicação é considerada parte essencial da aula de matemática (NCTM, 2000) pois permite aos alunos a partilha e a clarificação de ideias, que contribuem para o desenvolvimento do seu pensamento matemático. É um meio de articularem, clarificarem, organizarem e consolidarem o pensamento. A partilha de ideias pode fazer-se de vários modos oralmente e por escrito, com gestos, desenhos, objectos, símbolos. Quanto mais e mais ricas forem as experiências de comunicação dos alunos mais cuidada e precisa será a sua linguagem matemática.

O tema da comunicação tem sido objecto de investigação no nosso país. Vários estudos têm sido efectuados (e.g. Pedrosa, 2000; Romão, 2000; Menezes, 2005; Martinho e Ponte, 2004) considerando a comunicação «a essência do ensino e da aprendizagem da matemática escolar» (Menezes, 2005) e apontando para a necessidade de desenvolver nas crianças, desde cedo competências neste domínio.

Vários tipos de comunicação podem estabelecer-se em sala de aula, tais como: exposição, questionamento e discussão (Ponte e Serrazina, 2000).

A *exposição*, muito centrada ainda no professor, pode ser utilizada tanto por este como pelos alunos, quando estes pretendam expor perante os colegas uma ideia, um trabalho, relatar uma história, etc.

Em sala de aula, o *questionamento* também continua muito centrado no professor (Pedrosa, 2000). Poucas são as questões dos alunos que vão para além dos pedidos de esclarecimento. O professor formula questões que podem ser agrupadas em três tipos: de *focalização*; de *confirmação* e de *inquirição* (Ponte e Serrazina, 2000). Com o primeiro tipo pode ajudar-se um estudante a seguir um certo raciocínio, a ultrapassar um obstáculo ou a sair de uma situação de impasse. Com o segundo tipo pretende obter-se confirmação do conhecimento do estudante. Com o terceiro tipo pretendem obter-se esclarecimentos sobre os seus conhecimentos, a quem se pode pedir, por exemplo, que comente uma intervenção de um colega, que explique um raciocínio apresentado. Com estas questões o professor também pretende contribuir para o aprofundamento da compreensão do estudante.

Fazer boas perguntas não é simples. Muitas questões colocadas em sala de aula não ajudam o estudante a desenvolver o seu raciocínio (Daines, 1986). São questões de resposta curta; questões que promovem a fala «sanduíche» do estudante (Stubbs, 1987), que intervém rapidamente, entre duas intervenções do professor; questões que na formulação já incluam a resposta e aquelas que apenas apelem à memória.

A *discussão* envolve vários intervenientes e consiste na partilha colectiva de ideias e na formulação de questões entre todos os envolvidos. Pode ser um espaço para o professor clarificar as ideias dos alunos, com a contribuição dos outros, e para introduzir linguagem matemática mais formal. Por vezes a discussão fica comprometida em sala de aula pela necessidade de «poupar» tempo. Mesmo quando o professor apresenta aos alunos tarefas abertas, que envolvem a exploração e a tomada de decisões, a discussão ficará enfraquecida quando nem todos os alunos/grupos tiveram a oportunidade de intervir, expondo os seus pontos de vista e sujeitando-se ao questionamento dos pares. Quer com a apresentação de ideias adequadas e fundamentadas, quer com a apresentação de ideias ainda incipientes e mesmo incorrectas, todos os alunos ganham com momentos de apresentação e discussão em pequeno ou grande grupo. Com a sua participação na discussão, os alunos podem melhorar, adequar, refinar e desenvolver a compreensão do seu próprio pensamento, integrando aspectos diferenciados que outros apresentaram.

Quando os alunos comunicam, por escrito ou oralmente, o resultado dos seus raciocínios têm necessidade de se tornar organizados e claros, para que as suas intervenções sejam mais facilmente compreendidas pelos colegas. Esta necessidade contribui para que melhorem a compreensão do seu próprio pensamento, tornando-se mais rigorosos, mais pormenorizados e mais coerentes nas suas intervenções, tentando ser mais convincentes. Antes de dialogarem com os outros os alunos têm necessidade de dialogar consigo próprios, convencendo-se a si próprios de que as opções que fizeram são as adequadas no momento. Depois é que comunicam com os outros, expondo pontos de vista, partilhando observações e soluções encontradas, tentando convencê-los das suas ideias. É neste processo dinâmico, aberto ao questionamento dos pares, que os alunos se podem aperceber da qualidade dos seus raciocínios. Perante questões colocadas e não respondidas podem aperceber-se que o seu pensamento não foi o mais correcto, o mais adequado e têm a oportunidade de o alterar, refinar ou aprofundar.

Falar e ouvir são duas vertentes que necessitam desenvolver-se em simultâneo para que os alunos possam aprofundar o seu raciocínio matemático.

A comunicação em sala de aula deve incluir vários aspectos, tais como: partilhar o pensamento e as ideias, ouvir os outros, colocar questões, pedir esclarecimentos, explicar e justificar (NCTM, 2000).

Uma questão incontornável no seio desta problemática: Comunica-se matemática na aula de matemática? Se fizermos um pequeno exercício de introspecção talvez concluamos que as oportunidades dadas aos alunos para comunicar na aula de matemática são em menor número do que as que acontecem, provavelmente, na aula de Língua Portuguesa ou de Estudo do Meio. Maioritariamente, na aula de matemática os alunos respondem a questões directas do professor, pedem explicações sobre assuntos não compreendidos e pouco mais.

O que é possível fazer para melhorar a comunicação dos alunos em sala de aula?

Vários autores defendem que a participação dos alunos na comunicação que se deve estabelecer em sala de aula necessita começar muito cedo, logo nos primeiros anos de escolaridade e, por isso, há quem defenda (Small, 1990) a «abolição» do lápis e do caderno das aulas de matemática nos primeiros de escolaridade. Esta abolição traria aos alunos a necessidade e a oportunidade de falar matemática.

Para o trabalho sobre factos básicos da adição a autora refere que, em vez de apenas experimentar e calcular $5 + 3 = 8$, um professor pode ter o seguinte diálogo[2] com as crianças:

«Quanto são 5 maçãs mais 3 maçãs? 8 maçãs
Quanto são 5 berlindes mais 3 berlindes? 8 berlindes
Quanto são 5 barcos mais 3 barcos? 8 barcos
Quanto são 5 coisas mais 3 coisas? 8 coisas
Quanto são 5 dezenas mais 3 dezenas? 8 dezenas
Quanto são 5 dezenas? 50
Quanto são 3 dezenas? 30
Quanto são 8 dezenas? 80
Então agora sabem que 50 + 30 são 80
Quanto são 5 centenas mais 3 centenas? 8 centenas
Não sabia que vocês podiam adicionar números tão grandes!
Quanto são 5 décimas mais 3 décimas? 8 décimas
Quanto são 5 quartos mais 3 quartos? 8 quartos
Quanto são 5 pares mais 3 pares? 8 pares
Outro modo de dizer isto é dizer $10 + 6 = 16$.
$(5 \times 2 + 3 \times 2 = (5 + 3) \times 2)$
Sabemos factos novos sobre a adição».

Este tipo de diálogo não ajuda as crianças apenas a estabelecer, particularmente, que $5 + 3 = 8$, mas também contribui para trabalhar ideias sobre o valor posicional, a propriedade distributiva e mesmo o trabalho com números decimais e fracções. Ajuda-os a desenvolver o sentido de número. A generalizar que quaisquer que sejam as coisas, ao adicionar 5 coisas de um tipo com 3 coisas do mesmo tipo obtém-se sempre 8 coisas desse tipo.

Outro aspecto que permite desenvolver a comunicação em sala de aula prende-se com o desenvolvimento do cálculo mental. Esta capacidade necessita ser trabalhada desde o início da escolaridade, podendo as crianças aprender diversas estratégias e desenvolver os seus próprios meios, a fim de evitar situações como a de crianças do 3° ano de escolaridade que necessitaram de recorrer ao papel e lápis para calcular 80 + 45.

A abolição do lápis e do papel, nestes anos iniciais, força também o professor a um esforço de organização das suas intervenções, para que se adeqúem à experiência prévia das crianças, à compreensão e não apenas ao uso rotineiro, por exemplo, dos algoritmos. No entanto, o uso do lápis e papel pode fazer-se para pedir às crianças que escrevam sobre as suas ideias matemáticas. Uma frase, um parágrafo. Muitas vezes esta solicitação ainda não é feita na sala de aula. Cabe aos professores a criação de situações que gerem a oportunidade dos alunos escreverem e/ou falarem sobre matemática.

Argumentação matemática

Aspectos importantes da comunicação em sala de aula prendem-se com a formulação de conjecturas, as explicações e as justificações que os alunos apresentam para sustentar as suas opções, os seus raciocínios. Argumentação matemática é aqui entendida como toda a conversação/o discurso que ocorre em sala de aula, que envolve objectos e ideias matemáticas (Douek e Pichat, 2004) e os aspectos anteriormente referidos. Tem por objectivos: expor o raciocínio dos alunos; explicitar as suas ideias; formular conjecturas; explicar/justificar/apresentar as razões para a existência de certas relações; convencer os outros. Pode ser utilizada linguagem natural, seguindo uma determinada estrutura para que a argumentação possa ser acompanhada e entendida, mas também recorrer a esquemas, desenhos, figuras, materiais, números, etc.

Perante uma tarefa não rotineira, que pode envolver diferentes estratégias de resolução, diferentes abordagens os alunos devem sentir necessidade de partilhar e discutir com os outros o seu modo de resolução e, também, de ver como outros resolveram a tarefa. Estas tarefas propiciam o trabalho em pares e/ou grupos de modo a suscitar a discussão.

Para expor o raciocínio, os alunos têm necessidade de explicitar as ideias que foram ocorrendo durante o trabalho, ou só parte deles se algumas das ocorridas já foram abandonadas. Com a formulação de conjecturas diferentes pontos de vista podem ser colocados em confronto. Podem ser complementares ou contraditórios. Há necessidade de os explicar/justificar. Depois importa decidir quais o(s) adequado(s) e porquê. Esta decisão, normalmente na mão do professor que decide se a resposta ou a operação escolhida estão correctas, precisa de passar para os alunos, pois em matemática não existem argumentos de autoridade, mas sim de qualidade. Pretende-se que os argumentos que os alunos vão apresentando sejam gerais, rigorosos, convincente e resistentes. Gerais no sentido de se aplicarem a todas os casos abrangidos pela situação em análise. Rigorosos no sentido de se basearem em ideias correctas, para o nível de desenvolvimento dos alunos, e de se interligarem logicamente. Convincentes no sentido de conseguirem convencer todos os que ouvem, desde os alunos até ao professor. Mason, Burton e Stacey (1982) referem que convencer passa por três níveis diferentes e cada vez mais complexos. No primeiro nível convencer-se a si próprio. Facilmente nos convencemos a nós próprios de que o que fazemos está correcto, por isso muitas vezes não detectamos as falhas dos nossos raciocínios. No segundo nível convencer um amigo. Saindo do próprio eu, já se torna mais difícil convencer outrem. É necessário organizar e clarificar melhor as ideias. Finalmente, no terceiro nível, convencer um inimigo. Será necessário ainda um maior esforço de organização e de clarificação das ideias para convencer alguém que pode colocar vários obstáculos à nossa argumentação. Mas é de facto este nível que vai trazer à argumentação a organização e exigência necessárias, para que os argumentos se tornem resistentes. Argumentos resistentes no sentido de suportarem todos as «provas de esforço» que lhes forem exigidas. Isto é, argumentos capazes de passar todas as provas de contra-argumentação.

Nota-se que, se forem detectadas fragilidades num argumento, se este não passar numa «prova de esforço», este facto pode ser útil para a sua reanálise e reformulação, tornando-o agora mais resistente. Este processo dinâmico mostrará aos alunos que as ideias matemáticas não são estáticas, mas se constroem, analisam, reconstroem, reanalisam até conseguirem convencer um número cada vez maior de pessoas.

Nota-se também que uma argumentação pode convencer um grupo de pessoas e, no entanto, conter fragilidades. Neste sentido uma argumentação sobre um assunto pode e deve ser revisitada em diferentes momentos, pois o mesmo grupo de pessoas num momento posterior, já na posse de outros conhecimentos e capacidades, pode detectar fragilidades que anteriormente não tinha conseguido.

Os objectivos da argumentação matemática devem ser trabalhados com as crianças desde cedo para que estas se sintam confortáveis com uma das ideias centrais da matemática.

Tarefas potenciadoras de comunicação e argumentação matemática

Para que os alunos comuniquem e desenvolvam a sua capacidade de argumentar matematicamente não basta abolir o papel e o lápis da sala de aula e pedir-lhes para falar. Para que isto aconteça é necessário que o professor desenvolva ambientes de aprendizagem que suscitem a participação activa dos alunos. Um modo de o conseguir é o recurso a tarefas desafiadoras.

Diferentes tarefas permitem atingir diferentes objectivos de aprendizagem. Algumas situações requerem a utilização de factos básicos e procedimentos, estimulam a utilização de diferentes estratégias de resolução, têm solução única, têm várias soluções, exigem a tomada de decisões e a criatividade.

As tarefas abertas, mais desafiadoras e que permitem variadas abordagens e soluções, adequam-se a alunos em diferentes estádios de desenvolvimento e com diferente capacidade matemática. Ter sucesso numa tarefa destas pode ir desde a apresentação de um caso particular até à formulação e explicação de conjecturas. Assim, revelam possuir maior potencial para estimular o pensamento matemático, para fomentar nos alunos o desenvolvimento da capacidade de comunicar e argumentar matematicamente.

Mas onde encontrar tarefas abertas? É uma questão que muitos professores colocam. Way (2005) defende que uma boa fonte de tarefas abertas é uma tarefa fechada! Ora os professores conhecem muitas tarefas, ditas fechadas.

Como transformar tarefas fechadas para obter tarefas abertas? Moses, Bjork e Goldenberg (1990) sugerem que se analise uma tarefa fechada relativamente aos aspectos: dados, pedido e restrições impostas. Defendem que alterando ou suprimindo alguns destes aspectos é possível organizar tarefas mais abertas para os alunos.

Vejamos como organizar algumas tarefas a partir de um problema fechado.

«A Ana vai distribuir igualmente 12 chocolates pelas suas 3 amigas. Quantos chocolates dá a cada uma?»

Seguindo as indicações de Moses, Bjork e Goldenberg (1990) vamos suprimir ou alterar os aspectos referidos.

Proposta 1: A Ana vai distribuir igualmente 12 chocolates pelas suas amigas. Quantos chocolates dá a cada uma?

Proposta 2: A Ana vai distribuir 12 chocolates pelas suas amigas. Quantos chocolates dá a cada uma?

Proposta 3: A Ana vai distribuir igualmente chocolates pelas suas 3 amigas. Quantos chocolates dá a cada uma?

Proposta 4: A Ana vai distribuir igualmente chocolates pelas suas amigas. Quantos chocolates dá a cada uma?

Estas propostas parecem mais desafiadoras do que a proposta inicial. Nós professores precisamos de aprender a «abrir» situações mais rotineiras, para mais e melhor desafiarmos os nossos alunos.

Episódios de sala de aula

A tarefa seguinte foi utilizada em sala de aula e os alunos puderam desenvolver a sua capacidade de comunicar e argumentar.

«Investiga de quantas maneiras podes arrumar ovos, numa caixa para 6 ovos»

1° episódio: A tarefa foi proposta numa turma do 2° ano de escolaridade. Foram colocadas questões de interpretação, para averiguar se todas as crianças tinham entendido o pedido (Ex: Quantos ovos pode levar a caixa? Quantos ovos queremos arrumar na caixa? O que queremos fazer?)

As crianças estavam organizadas em pares. Todos os pares tinham uma caixa de ovos e «ovos» de plasticina que tinham sido construídos anteriormente. Como um dos ob-

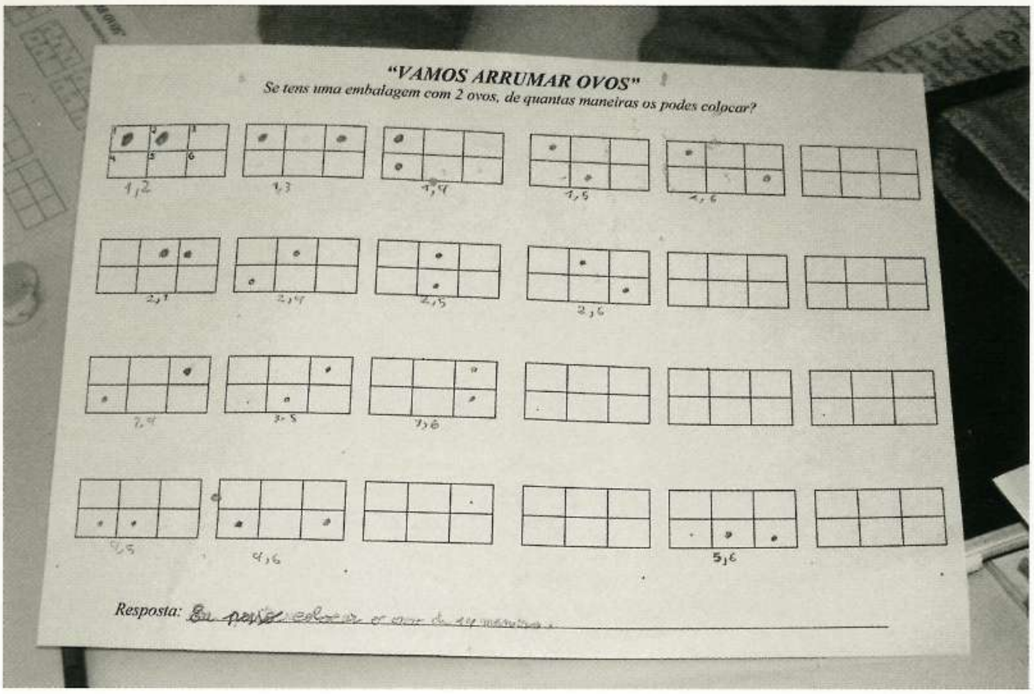


Figura 1. Resolução — 2° ano

jectivos da professora era o de ajudar as crianças a tornarem-se mais organizadas no modo de pensar e comunicar os seus raciocínios, considerou adequado numerar as cavidades da caixa. A localização dos ovos podia ser representada numericamente.

A professora começou por explorar, em grande grupo, a colocação de um ovo na caixa. As diferentes posições foram concretizadas pelos pares com recurso ao material, também com um cartaz no quadro e foi feito um registo numa folha que continha grelhas representando a caixa de ovos.

Para a colocação de dois ovos, as crianças foram deixadas livres para procederem com entendessem. Algumas foram trabalhando de modo mais organizado, mas todas recorreram sempre ao material concreto e registaram as diferentes possibilidades na folha de registo.

Ao circular entre as crianças reparei num par que já tinha concluído o trabalho de colocar dois ovos na caixa, mas pelo modo organizado como o registo tinha sido feito verifiquei que ainda não tinham sido consideradas todas as possibilidades. Questionei: «Então não encontram mais maneiras de arrumar os ovos?» a que uma das crianças respondeu: «Não cabe mais». Não percebi de imediato o que o aluno queria dizer. Como ainda havia grelhas livres na folha de registo inquiri «Não cabe mais? Mas têm aqui grelhas livres», como se pode ver na figura 1.

A criança continuou «Não, falta aqui (apontou para baixo da quarta linha de grelhas). Aqui é o um, depois o dois, três e quatro e só falta para o cinco». Enquanto falava a criança ia apontando para as linhas de caixas na folha de registo. Percebendo o que queria dizer, pedi-lhe que acrescentasse a(s) posição(ões) que considerava em falta, na quarta linha da grelha do lado direito, como acabou por fazer, sem muita vontade.

Este par, orientado pela criança que interveio, realizou um raciocínio correcto e organizado e explicou porque tinha a certeza de não haver mais posições. Seguindo as posições dos ovos na caixa, colocaram

na primeira fila o 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 1 – 5 e 1 – 6
na segunda fila o 2 – 3, 2 – 4, 2 – 5 e 2 – 6
na terceira fila o 3 – 4, 3 – 5 e 3 – 6
na quarta fila o 4 – 5 e 4 – 6.

Pela organização seguida faltava a quinta fila para colocar «só um» o 5 – 6.

Esta resolução revela compreensão da tarefa, organização de raciocínio e de escrita e capacidade de argumentar, defendendo a opção seguida. Revela também que com crianças do 2° ano de escolaridade é possível trabalhar de modo a que desenvolvam, não só a capacidade de organização, mas de comunicação e argumentação. Nota-se que este modo de escrita é adequado ao trabalho com números triangulares, como é o caso do 15.

A continuação da exploração da tarefa foi realizada em dias seguintes.

2° episódio: A mesma tarefa foi proposta numa turma de 4° ano de escolaridade. Os alunos organizados em grupo tinham apenas a folha de registo. Nenhum caso foi resolvido em grande grupo com os alunos.

A colocação de um ovo foi resolvida e justificada facilmente. Para a colocação de dois ovos vários grupos usaram a estratégia da tentativa e erro. Não se detectou a resolução organizada descrita no episódio anterior.

Um dos grupos chamou-me para me questionar se o que tinham feito estava certo. Disseram «São quinze. Está certo?». Não respondo a estas questões, mas devolvi a questão: «Vocês acham que está certo? Têm a certeza de que contabilizaram todas as possibilidades?» A questão da certeza é complexa para todos. Os alunos olharam-me, sorriram e encolheram os ombros. Era o que pretendiam de mim. Disse-lhes que precisavam de encontrar um modo de garantir

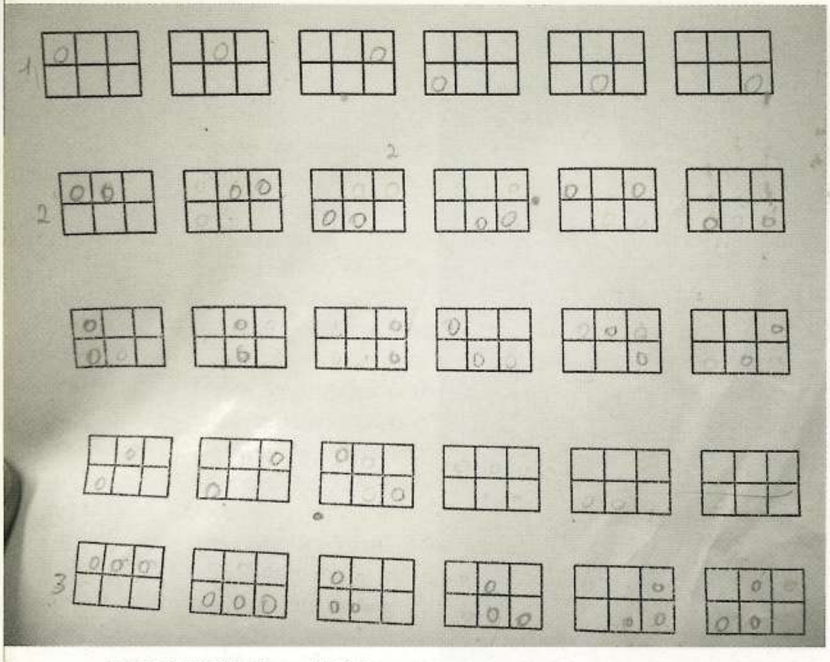


Figura 2. Resolução — 4º ano

que colocaram todas as possibilidades e da não existência de qualquer repetição. Uma aluna disse «Já sei» e começou a apagar tudo o que tinham feito. Passado algum tempo tornou a chamar-me e disse «Afinal estava certo. São quinze, mas agora tenho a certeza» e passou a explicar o modo como tinham procedido para ter a certeza (figura 2).

«Comecei pela horizontal e com os dois (ovos) juntos. Em cima e em baixo. São quatro, porque não há mais lugares. Podem estar separados e são mais dois. Na horizontal há seis. Depois fizemos na vertical e só há três. Depois pusemos inclinado e juntos e temos mais quatro e depois foi inclinado e separados. São mais duas. No total são quinze. Estava certo».

A estes alunos foi colocada a questão da certeza e, por isso, dada a possibilidade de procurarem uma estratégia própria e de construírem um argumento convincente e resistente.

Na continuação da exploração da tarefa este grupo tentou proceder de modo análogo, seguindo a disposição geométrica dos ovos.

Reflexão final

Algumas das preocupação dos professores prendem-se com o facto dos alunos perceberem os assuntos com que trabalham, explicarem aos seus pares e professores as suas ideias e comunicarem ideias matemáticas que foram entendidas.

Neste sentido, constata-se a necessidade de construir ambientes de aprendizagem onde todos os alunos, em todos os anos de escolaridade e em todos os assuntos, sejam desafiados, com questões e tarefas ricas que apelem à reflexão sobre o pensamento, onde a formulação/apreciação de conjecturas e a argumentação estejam sempre presentes e atravessem todo o currículo de matemática, de modo a que possamos, desde o início da escolaridade, contribuir para o desenvolvimento das suas capacidades de comunicar e argumentar matematicamente.

Notas

1 Conferência apresentada no âmbito do Seminário Final do Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do primeiro e do segundo ciclos do Ensino Básico do distrito do Porto, realizado a 11 de Julho de 2007.

2 O diálogo que se apresenta foi adaptado de Small (1990, p. 27).

Referências

Back, J., e Pumfrey L. (2005). *Primary proof?* `http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=2838&part=index` (consultado em 05/02/07).

Daines, D.(1986). Are teachers asking the right questions? *Education* 1, 4, pp. 368–374.

Douek, N., e Pichat, M. (2004). From oral to written texts in grade I and the long term approach to mathematical argumentation. *Thematic Group 4*, Conference European Research in Mathematics Education, CERME III.

Fonseca, L. (2004). *A formação inicial de professores de matemática: A demonstração em geometria*. Lisboa: APM.

Mason, J., Burton, L., e Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Workingham: Addison-Wesley Publishing Company.

Martinho, M.H., e Ponte, J. P. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática — Práticas e reflexão. Em Brocardo, Mendes e Boavida (Org.), *XIV Seminário de Investigação em Educação Matemática — Actas*, pp. 273–293. Setúbal: APM.

Menezes, L. (2005). Desenvolvimento Profissional de Professores do 1º ciclo no contexto de um projecto de investigação colaborativa focado na comunicação matemática: um estudo de caso. Em Brocardo, Mendes e Boavida (Org.), *XIV Seminário de Investigação em Educação Matemática — Actas*, pp. 349–364. Setúbal: APM.

Moses, B., Bjork, M. E., e Goldenberg, P. (1990). Beyond problem solving: Problem posing. *Teaching and learning mathematics in the 1990's*. NCTM Year Book. Reston: VA.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Ponte, J.P., e Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa Universidade Aberta.

Pedrosa, M.H. (2000). A comunicação na sala de aula: As perguntas como elementos estruturadores da interacção didáctica. Em Monteiro, Tavares, Almiro, Ponte, Matos, Menezes (Org.), *Interacções na sala de aula*. Viseu: SPCE.

Romão, M. (2000). O papel da comunicação na aprendizagem da matemática. Em Monteiro, Tavares, Almiro, Ponte, Matos, Menezes (Org.), *Interacções na sala de aula*. Viseu: SPCE.

Small, M. (1990). Do you speak math?. *Arithematic Teacher*, Jan. 1990, pp.26–29.

Stubbs, M. (1987). *Linguagem, escolas e aulas*. Lisboa: Horizonte.

Way, J. (2005). *Problem solving: Opening up problems*. `http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=2471&part=index&refpage=` (consultado em 05/02/07)

Lina Fonseca

ESE/IP de Viana do Castelo

Ptolomeu? No Ano Internacional da Astronomia? — Parte II

Maria José Costa

3. Ptolomeu astrónomo

3.1. Rebatendo acusações...

3.1.1.

Um leitor mais atento conclui que enquanto Hiparco usava coordenadas baseadas no equador, ou seja, recorria à ascensão recta (medida em graus, ao longo do equador, desde o ponto venal [um dos pontos de intersecção da eclíptica com o equador; o outro é o ponto outonal. Estes pontos estão diametralmente opostos e o primeiro marca o início da Primavera]) e à declinação (também em graus, mas norte sul desde o equador), Ptolomeu usava o sistema de coordenadas já utilizado pelos astrónomos babilónicos, os primeiros a introduzir as coordenadas celestes, baseado na eclíptica [linha que o Sol parece descrever no seu movimento ao longo do ano]: longitude (também desde o ponto venal e em graus, mas ao longo da eclíptica) e a latitude (em graus, norte sul desde a eclíptica). Só por isto se veria que não há apenas repetição dos textos de Hiparco mas que há trabalho pessoal.

3.1.2.

Quando Ptolomeu retoma trabalhos precedentes, de Hiparco em particular, seja para corrigir resultados, esclarecer procedimentos, por vezes fazendo demonstração, ou apenas coligir elementos por eles recolhidos, não omite o nome do autor, antes pelo contrário, fá-lo de uma forma clara. Vejamos um exemplo.

O título do capítulo X do livro IV, em linguagem actual, pode ser: A *diferença entre os resultados encontrados por Hiparco e por nós próprios para a anomalia da Lua, não provem da diferença das hipóteses mas dos seus cálculos* [recorde-se que por *anomalia verdadeira da Lua* se entende o ângulo do eixo maior da sua órbitra com o raio vector, contado desde o periélio e no sentido do movimento do planeta; a diferença desta para a anomalia média está em esta supor constante a velocidade do movimento].

Em capítulos anteriores a este, Ptolomeu repete os cálculos necessários e obtém resultados diferentes dos de Hiparco, confiando mais nos que acabou de determinar do que nos recolhidos: analisando os eclipses que Hiparco considerou e as deduções que deles fez sobre os tempos decorridos, Ptolomeu conclui que há erros e que a diferença de resultados não provém da escolha de hipóteses mas desses erros de cálculo que Hiparco terá cometido. *Depois* [d]*estas demonstrações, pode haver quem questione a razão dos eclipses empregues por Hiparco para o cálculo da anomalia não darem os mesmos resultados que encontrámos* (...) Ora, Hiparco refez os cálculos em ambas as hipóteses mas usando pares de eclipses diferentes em ambas as hipóteses, o que Ptolomeu contesta: mudando a hipótese facilitaria a comparação dos resultados manter os eclipses!

Ora se Ptolomeu reescreveu textos de astrónomos precedentes, refazendo cálculos, corrigindo resultados, esclarecendo conceitos por vezes com demonstrações, então fê-lo de um modo construtivo e esclarecedor, com olhar de revisor atento ao conteúdo e não como um mero escriba ...

3.1.3.

No próprio *Almagesto* pode-se ler: *Fomos conduzidos a conjecturar e nos assegurar, tanto pelas observações de Hiparco ao movimento da Lua, e pelas descrições que ele deu, como pelas nossas próprias observações com a ajuda de um instrumento* (...). Ora esta frase é uma declaração da sua actividade de observador!

Numa listagem com 94 entradas sobre as datas julianas das observações mencionadas no *Almagesto*, há registos de 35 observações efectuadas por Ptolomeu, a primeira das quais no ano de 127 e a última no de 141 (uma delas, realizada em 138, não indica o observador e uma outra, em 125 deixa a dúvida quanto ao observador).

Algumas destas observações terão sido feitas com instrumentos: 21 com o astrolábio, uma com a *dioptra* (em 139) e outra com o *instrumento paraláctico* (em 135).

3.1.4.

(...) *construímos um instrumento com ajuda do qual possamos observar o mais exactamente possível, de quanto é a paralaxe da Lua* (...).

Trata-se, provavelmente, do *instrumento paraláctico* já citado. E a seguir descreve-o:

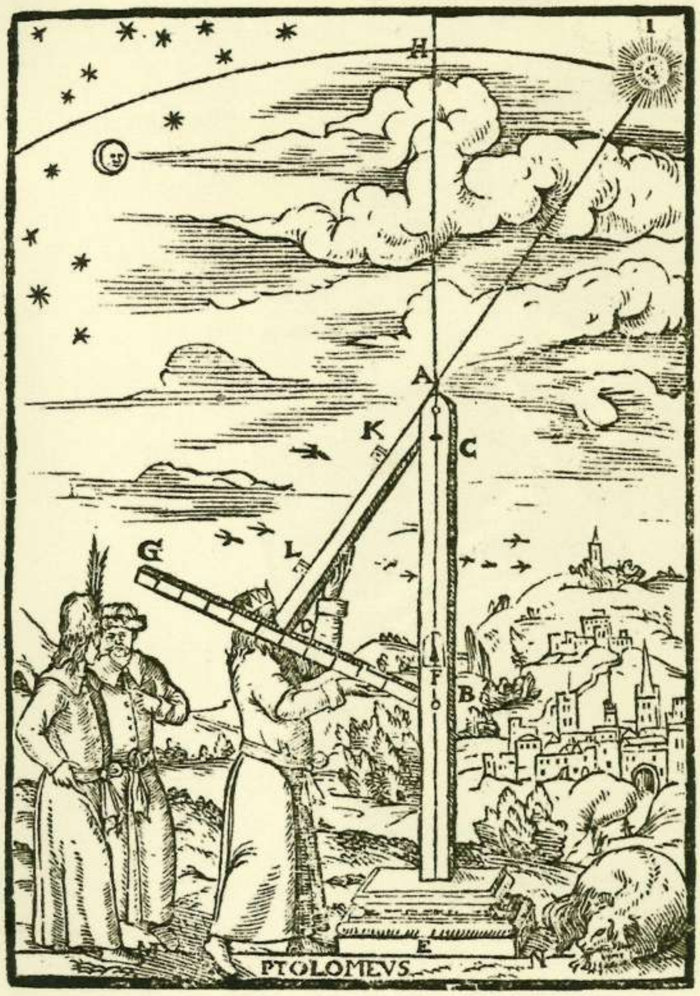
- tomar duas réguas com quatro faces [provavelmente com a forma de paralelepípedos rectângulos, as populares barras ou ripas, consoante a relação entre as dimensões da secção], cada uma com pelo menos quatro côvados de comprimento [unidade correspondente a 66 cm] e que sejam suficientemente proporcionadas na espessura para não encurvar em nenhuma das suas faces.
- traçar a mediana da face mais larga.
- fixar em cada extremidade de uma das barras, perpendicularmente a esta e sobre a mediana, pequenas pínulas prismáticas rectas e iguais, cada uma delas perfuradas no centro mas com orifícios de tamanhos diferentes.
- perfurar também cada uma das réguas segundo a mediana numa das extremidades; na que tem as pínulas, este orifício fica perto da pínula que tem o maior furo.
- colocar a régua com as pínulas sobre a outra e adaptar uma cavilha que as fixe segundo o eixo, de modo que a primeira possa rodar sobre a outra com centro na cavilha.
- fixar invariavelmente a régua sem pínulas de pé sobre uma base.
- dividir a mediana da régua fixa em 60 partes iguais, cada uma destas a ser subdividida.
- em cada uma das extremidades da vara fixa prender dois prismas de faces paralelas, centrados na mediana e de modo que cada um fique com um par de faces paralelas ao do outro.
- passar um fio com um chumbo por esses prismas, para garantir a perpendicular ao plano do horizonte [isto confere-lhe o papel de fio de prumo].
- adaptar a estas duas uma outra régua, fina, disposta de maneira que rodando por uma cavilha colocada perto da extremidade inferior da linha graduada dê a distância desta à extremidade da outra até à abertura máxima.

Entre a descrição surge uma figura que é, provavelmente, o instrumento em questão e que o astrónomo está a utilizar na figura 1.

Ptolomeu expõe como determinar a distância zenital [ângulo entre a vertical da Lua com este instrumento].

Sugere, justificando, que a observação seja feita na passagem no meridiano e perto de um solstício sobre a eclíptica:

- escolher um lugar sem sombra.
- desenhar no chão uma linha meridiana paralela ao plano horizontal.
- apontar as faces das réguas unidas pela cavilha para o meio dia, de modo que fiquem paralelas e horizontais.
- fixar perpendicularmente a régua graduada numa base segura, de modo que se possa rodar a outra régua sem que a primeira se altere.
- rodar a outra régua, a que tem as pínulas, paralelamente ao horizonte, em volta da cavilha.



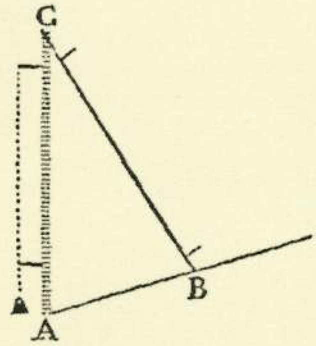


Figura 1. [Ao lado] Triqueto de Ptolomeu ou régua paraláctica [in William Cunningham: The Cosmological Glasse, conteinyng the Pleasant Principles of Cosmographie, Geographie, Hydrographie, or Navigation [1559]].
[Em cima] Esquema do Triqueto tal como surge numa edição do Almagesto.

- espreitar pelo orifício mais pequeno, procurando ver a Lua pelo maior [ou seja: o mais pequeno vai funcionar como ocular e o outro como objectiva].
- ler a distância entre os extremos das duas barras na barra fina.

Ora esta distância agora lida, é o comprimento de uma das cordas do círculo descrito com centro na cavilha e raio igual às 60 partes marcadas na régua fixa. A «sua» tábua de cordas permitirá determinar a amplitude do ângulo entre as duas réguas, que não é mais do que a declinação pretendida.

Adiante explica como o utilizou em Alexandria para observar a paralaxe da Lua, como relaciona os valores lidos e as razões que o levaram a optar pelo solstício de Inverno.

Ao que parece, também conhecido como régua paraláctica, era o instrumento astronómico de precisão mais simples usado na antiguidade e que se manteve em utilização durante a idade média: Copérnico também o usou. Também é referido como o *triqueto paraláctico*.

3.1.5.

No capítulo intitulado *grandezas dos diâmetros aparentes do Sol, da Lua e da sombra nas sízigas* [conjunção ou oposição do Sol e um planeta; lua cheia ou lua nova] e para avaliar correctamente o diâmetro da Lua, Ptolomeu diz: *Construimos um instrumento especial descrito por Hiparco (com pínulas).*

Descreve-o apenas como composto por uma régua com quatro côvados de comprimento, obviamente com duas pínulas.

É designada por *Dioptra*. Trata-se de um aparelho muito simples, como se vê na figura 2.

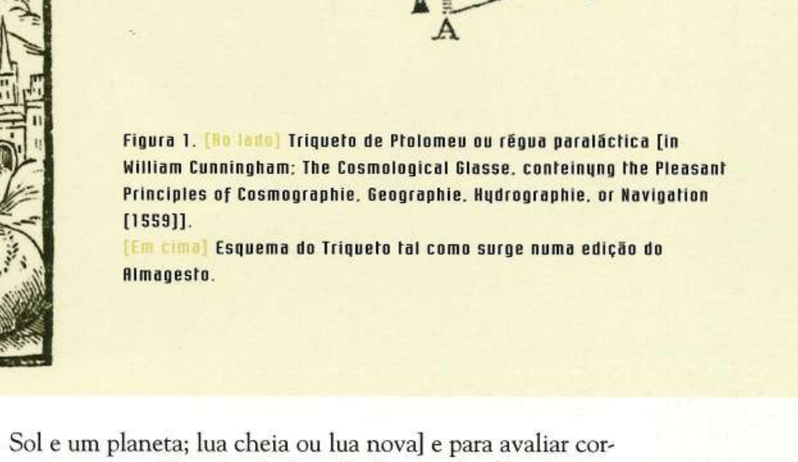
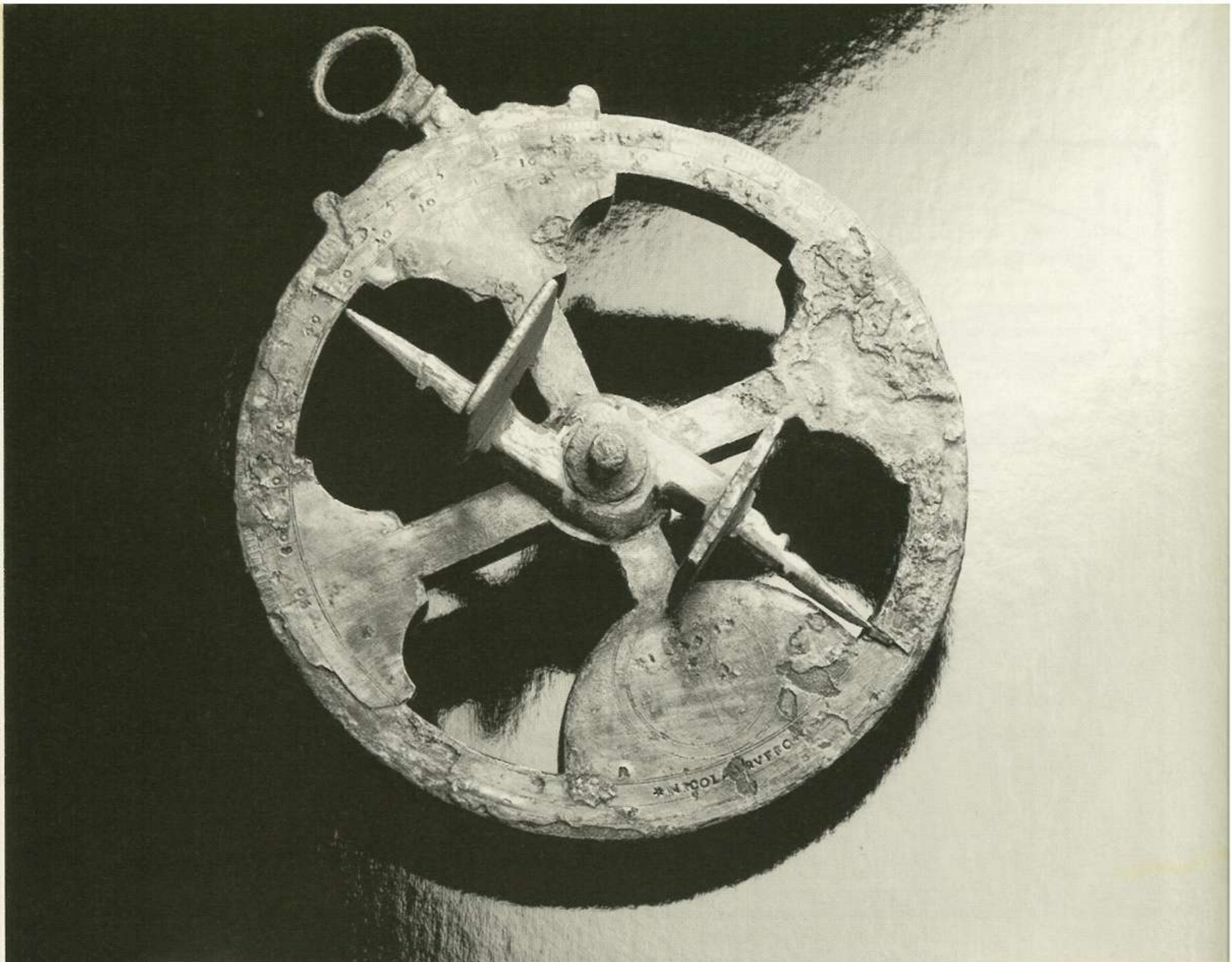


Figura 2. Dioptra: original do Almagesto e reprodução moderna em 3D



O mesmo nome é atribuido a um instrumento geodésico descrito por Heron de Alexandria talvez utilizado para construir edifícios gregos (por exemplo, o túnel de Samos). Neste sentido poderá ser o antepassado do actual teodolito.

3.1.6.
À pergunta «o que é um astrolábio?», provavelmente a maioria das respostas cairiam em um destes dois grupos:

- um disco graduado vazado com um ponteiro (referência à alidade), uma clara alusão aos astrolábios náuticos muito falados a propósito das comemorações dos 500 anos dos Descobrimentos Portugueses.
- um disco graduado e gravado de ambos os lados, com várias peças móveis, girando todas em volta do mesmo centro, umas na face, outras no dorso, uma clara alusão aos astrolábios astronómicos, como o que existe no Observatório de Coimbra, por exemplo.

Esta grande diferença tem a ver com a finalidade de cada um: enquanto o primeiro se destina a usar no alto mar, tem de oferecer a menor resistência possível ao vento, é utilizado apenas para determinar a altura do Sol ou medir a distância zenital do Sol, o que só exige a existência da roda graduada (o tal disco) e da mediclina (o ponteiro, de pontas afiadas para facilitar a leitura sobre a roda e com duas pínulas perpendicularmente à mediclina; uma delas tem ainda um orifício circular para permitir obter na outra uma imagem do Sol). Apresenta dois quadrantes opostos graduados de 0 a 90. O zero começou por ser considerado no extremo do diâmetro horizontal e a leitura conduzia directamente à altura do Sol: o ângulo da inclinação da linha de enfiamento das duas pínulas com o horizonte. Mais tarde, nos astrolábios portugueses o zero mudou para o extremo do diâmetro vertical; assim, o instrumento dá um valor complementar do anterior, que é a distância zenital do Sol, ângulo formado pela vertical do lugar, dada pelo fio de prumo, com a linha de fé do astrolábio (linha definida pela luz ao atravessar ambas as pínulas ou por uma até à outra) a principal vantagem situa-se ao nível da determinação da latitude do local da observação.

As medições eram feitas com algum rigor à custa da chamada escala diagonal (conjunto de cinco círculos concên-

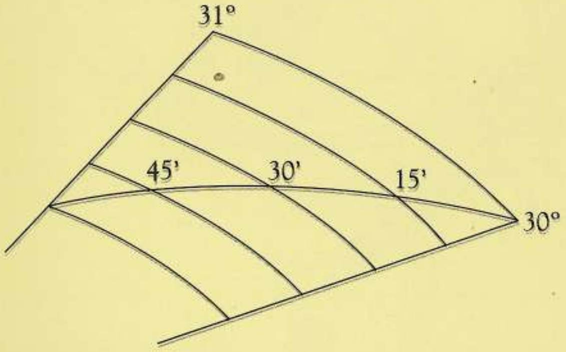


Figura 3.

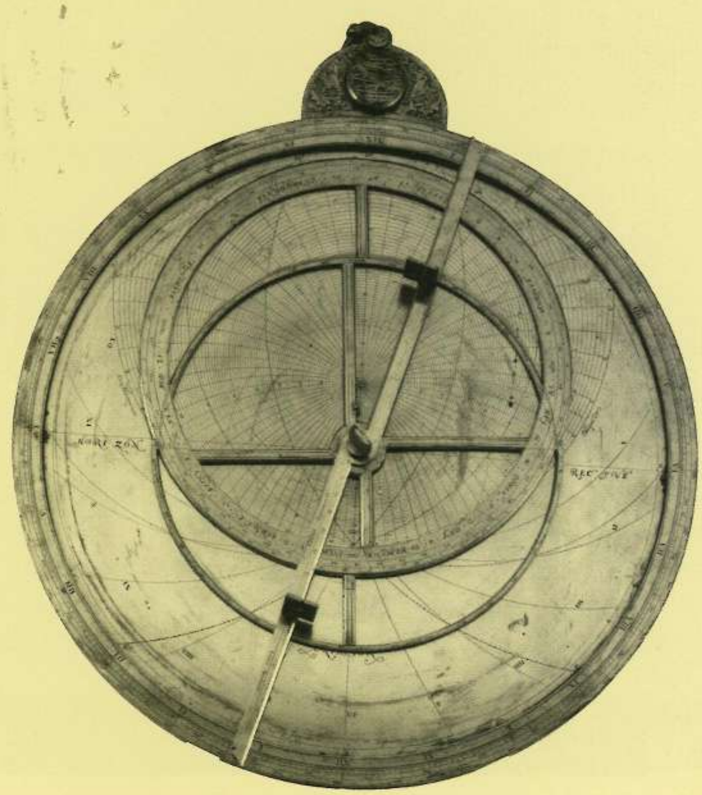


Figura 4.

tricos e equidistantes e uma curva diagonal) existente na face anterior do astrolábio e que permitia dividir o ângulo *um grau*; esta escala, garantia, portanto, uma leitura do número inteiro de graus e uma fracção de 15, 30 ou 45 minutos (figura 3).

É o astrolábio naútico, descendente do astrolábio planisférico do qual mantém a roda, dois diâmetros perpendiculares e a mediclina, aparece em data incerta mas provavelmente durante o *primeiro quartel do séc.* XVI, e da autoria de portugueses (figura 4).

O astrolábio se inventou em Portugal em tempo del-Rei Dom João o segundo por Mestre Rodrigo, e mestre José, seus médicos, e por Martim de Boémia, discípulo do grande João de Monte Régio (...); ora, uma nota no fim da frase esclarece que esta afirmação deve provir de uma interpretação errada de um passo das *Décadas* de João de Barros (Pimentel, p. 69). Haverá aqui alguma confusão: D. João II foi rei entre 1481 e o ano em que faleceu 1495, muito antes do primeiro quartel do séc. XVI; nesta época reinaria D. Manuel I (1495–1521) ou D. João III (1521–1557).

Para fazer determinações o astrolábio era seguro com uma mão, suspenso livremente numa cábrea ou dependurado ao nível da cintura do observador como se fosse uma balança de pratos; talvez por esta última posição, esta operação tenha ficado conhecida como «pesar» o Sol.

Já o segundo permite outras determinações como a hora, quer diurna quer nocturna, além da determinação da latitude, tal como com o anterior e ainda o lugar do Sol no Zodíaco por meio das coordenadas, longitude celeste e declinação, e outros astros. Para tudo isso apresenta, distribuídos por ambos os lados, instrumentos de medição de ângulos, tabelas e funções.

Também era usado para resolver problemas geométricos como determinar a altura de um edifício ou a profundidade de um poço. O processo de utilização é o mesmo!

Figura 5. Astrolábio esférico.

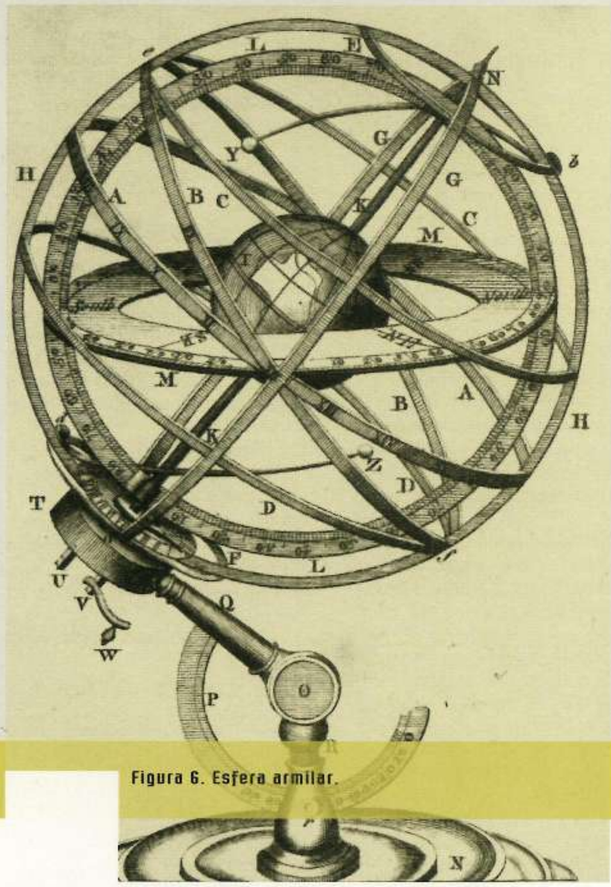


Figura 6. Esfera armilar.

Além destes objectos, que apesar de distintos pela forma e pela função têm o mesmo nome, há ainda outros bem mais distantes dos referidos. Tiveram a sua época os astrolábios esféricos (figura 5). *O globo representa a terra, e por meio de um eixo, que já não existe neste modelo, podia ser utilizado em qualquer latitude.*

E os astrolábios circulares, que mais não eram do que listas de estrelas, gravadas numa placa de forma circular como as que existiram cerca de 650 a.C. na Babilónia ....

E se a pergunta fosse «O que é uma esfera armilar?», provavelmente ouviríamos referência à nossa bandeira, mas também podíamos ouvir que é um instrumento de astronomia aplicado em navegação, como um modelo reduzido da esfera celeste, mecanismos de articulação para reproduzir os movimentos da mecânica celeste para fins didácticos, esfera vazada feita de círculos (anéis) graduados, concêntricos articulados nos pólos e outros perpendiculares representando o equador, a eclíptica os meridianos e os paralelos.

As esferas armilares eram utilizadas para diversos fins; a título de exemplo mostramos dois.

- Relógios de Sol formados de anéis: modelo do século XVI, com quatro anéis, um deles com as constelações do Zodíaco e outro dividido em 12 partes de ambos os lados.
- Modelo de sistemas solares (figura 6).

Ou seja: as esferas armilares podem contribuir para formar modelos representativos ou modelos que permitam efectuar leituras.

Nos tempos que correm, menos expectável seria que alguém respondesse à última pergunta «é um astrolábio», apesar de numa enciclopédia e num dicionário, ambos da responsabilidade da editora Lello & Irmão, aparecer desenhada uma esfera armilar na entrada correspondente a astrolábio...

Mesmo correndo o risco de parecer uma contradição, a verdade é que *também já eram conhecidas na Antiguidade as esferas armilares ou astrolábios.* (...).

Talvez as navegações marítimas sejam responsáveis por termos esquecido isto: o mais importante era o astrolábio naútico e, por isso, talvez seja este ou quando muito o astrolábio planisférico o mais presente nas nossas memórias.

3.1.7. O Astrolábio de Ptolomeu

Ptolomeu (140 d.C.) também construiu um astrolábio esférico similar a uma esfera armilar mas não terá sido o primeiro a observar com o astrolábio: Apolónio de Perga (ca. 225 a.C.) e Hiparco de Nicea (180 a.C.) também se dedicaram ao assunto, embora só o astrolábio planisférico tenha merecido a sua atenção; vestígios da cultura Suméria mostram que os astrólogos o utilizavam desde 5.000 a.C. para elaborar os horóscopos. A sua descrição consta do Capítulo I do Livro V do *Almagesto*, com a intenção de o ensinar a construir e a usar.

Dispensamo-nos de a apresentar pela extensão e complexidade, mesmo em tradução livre do registo seguido deixado e sem qualquer figura de apoio. Mas depois de uma leitura meditada, conclui-se que a figura que consta na folha de rosto de edição do Almagesto diz respeito ao astrolábio concebido (figura 7).

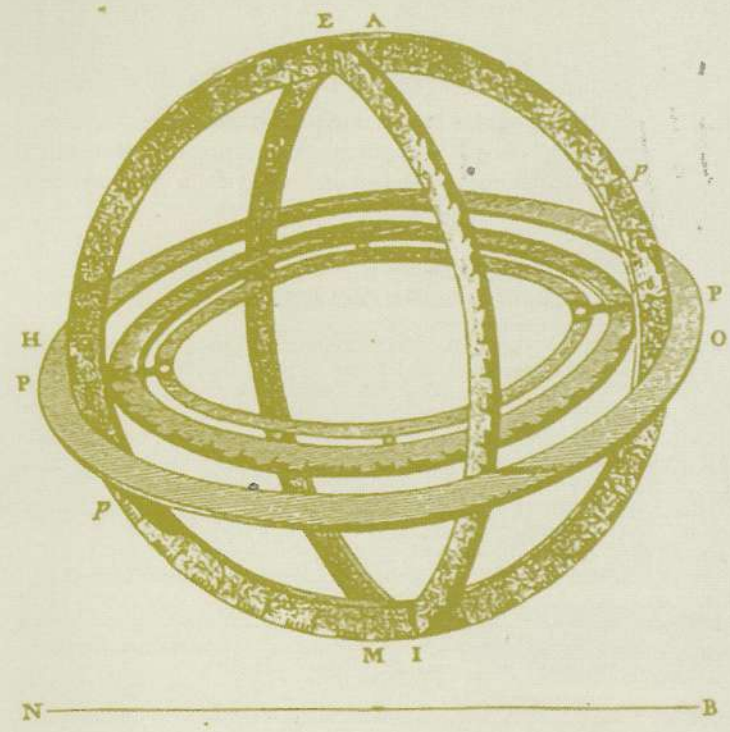


Figura 7.

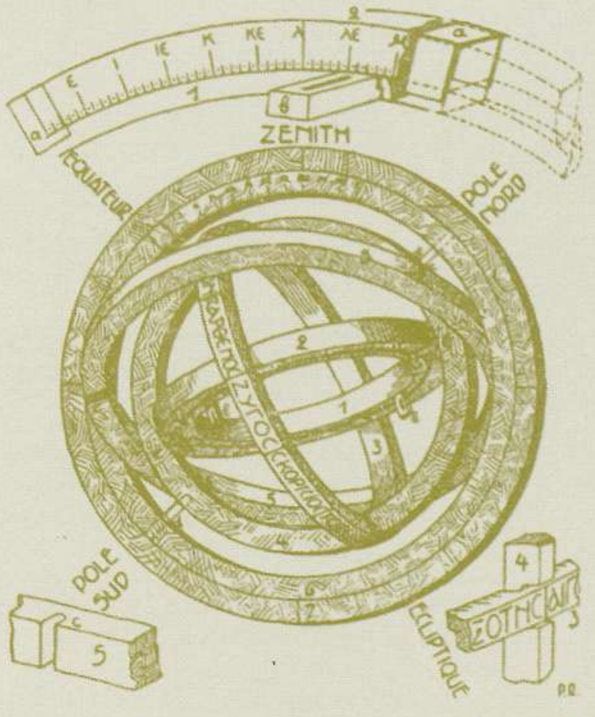


Figura 8.

Numa feliz consulta deparamo-nos com uma imagem inequívoca: trata-se de uma reconstrução deste instrumento, elaborada em 1927, presentemente na Biblioteca da Universidade de Cincinnati (figura 8).

Na reconstrução da *esfera armilar* de Ptolomeu, como por vezes é referido o astrolábio deste astrónomo,

- *dd'* e *ee* são eixos de rotação da figura.
- o anel 7 é fixo e é colocado no plano do meridiano.
- o anel 6 roda dentro do anel 7 para ajustar o instrumento à latitude geográfica.
- os anéis de 1 a 5 podem rodar como um todo em volta do eixo *dd'* simulando a rotação diurna.
- o anel 1 roda dentro do anel 2 e está equipado com visores [antes referidos como pínulas]; é usado para medir a latitude das estrelas.
- os anéis 2 e 5 podem rodar independentemente um do outro em torno do eixo ee, atravessando o anel 4, o coluro solsticial [o meridiano dos solstícios].
- o anel 4 está rigidamente ligado ao anel 3, o anel da eclíptica.
- o anel 5 é usado para medir a longitude das estrelas.

Uma outra preocupação de Ptolomeu é como medir a longitude da Lua com este instrumento.

Fá-lo em duas hipóteses.

1ª. O sol e a lua estão ambos acima do horizonte.

Colocar o instrumento ao longo do meridiano e ajustado à latitude local:

— rodar o anel 5 para o valor da longitude do Sol marcado no anel da eclíptica 3, lida por observação (e explica como) ou calculada teoricamente.

— rodar o anel 2, sem alterar a posição de qualquer um dos outros anéis, até que a Lua toque o seu limbo.

— colocar o olho perto do anel 2 até se ver a Lua perto de ambos os arcos opostos do mesmo anel.

Então, o anel 2 indica a longitude da Lua na escala do anel 3.

2.ª Depois do pôr-do-sol, seleccionar uma estrela e proceder como anteriormente, com os anéis 2 e 5, para medir a distância longitudinal entre a Lua e essa estrela.

3.1.8. Catálogo de estrelas

Tal como o índice sugere, Ptolomeu agrupou em capítulos diferentes as estrelas fixas visíveis por hemisfério; no total catalogou 1022 estrelas, dando para cada uma delas a Longitude, a Latitude, a grandeza e a designação.

Além disso, dá informações sobre as constelações, num total de 48.

Analisando os registos deixados por Hiparco, declara que não se fez qualquer alteração na posição das estrelas fixas entre elas, nem foram alteradas as configurações das constelações, frisando que se está a referir quer às estrelas e às constelações zodiacais quer às não zodiacais, apesar de admitir que os 260 anos passados possam ter provocado alguma desordem. E pensando no futuro, vai indicando mais algumas relações entre as estrelas. Constata que as estrelas se desviaram para oriente dos pontos onde estavam, à razão de cerca de 1° em cada 100 anos, o que atribui ao «movimento da esfera das estrelas fixas».

O catálogo de Ptolomeu apresenta as coordenadas de 47 constelações:

Hemisfério	fora do Zodíaco	no Zodíaco
Boreal	21	6
Austral	15	6

Este catálogo é uma das mais notáveis aquisições da astronomia antiga como um todo (...).

As designações actuais das constelações provêm maioritariamente do tempo dos gregos; há algumas que os antecedem e outras são adaptações das designações árabes. Já o Zodíaco, no seu todo, parece ter origem pelo século V, com os gregos, embora as 12 constelações tenham emergido depois de 900 a.C. e a amplitude de 30° de cada símbolo já fosse usada na Babilónia, no séc. VI a.C.. As estrelas que compunham a constelação ou o modo como a sua figura era definida variavam de autor para autor: Ptolomeu fixou as designações e as figuras das 48 constelações.

Apesar deste trabalho ter por base o catálogo de Hiparco, existem constelações que figuram como autónomas num e não no outro. E não é possível confundi-lo com uma mera cópia do de Hiparco: de facto, e se ele existiu, no total apresentaria no máximo 850 estrelas, muito menos do que Ptolomeu catalogou.

Faz uso sistemático de coordenadas, enquanto que Hiparco não usava pares de coordenadas ortogonais: por vezes dava declinações e ascenções rectas, outras vezes a longitude do ponto da eclíptica que nasce simultaneamente com a estrela ou que com ela atinge o zénite.

Foi também Ptolomeu a fixar o Carneiro, o signo que começa no equinócio vernal, como o primeiro dos símbolos do Zodíaco: por vezes era o Caranguejo que aparecia em primeiro lugar.

A partir do catálogo de Ptolomeu, que se manteve inalterado até à Renascença, ainda hoje se consegue identificar a maioria dessas estrelas. No Ocidente só foi substituído pelo de Tycho Brahe (1546–1601): apoiou-se nos registos anteriores, nomeadamente no de Ptolomeu, além das suas próprias medições; tomou como razão média da precessão 51 por ano, valor aceite do séc. IX até ao séc. XVI. Seguiu a tradição de Ptolomeu no que respeita a observações e instrumentos.

Epílogo

Poder-se-ia escrever muito mais sobre o trabalho de Ptolomeu na Astronomia: no *Almagesto* Ptolomeu escreveu sobre outros assuntos, construiu outras tabelas, fez mais verificações críticas.

O rigor que põe nas demonstrações, o grau de precisão que põe nos cálculos, a elegância da exposição, são exemplos a seguir, mesmo nos tempos actuais. Por isso, nos dias de hoje é recomendável a leitura do Almagesto e não só pela sua teoria planetária!

Depois, há que avaliar a influência desse mesmo trabalho nas épocas que se seguiram. Num artigo específico, talvez os astrónomos pudessem dar a verdadeira dimensão do trabalho por Ptolomeu...

Referências bibliográficas

Costa, M.J., *A Trigonometria Plana do Almagesto*, tese de mestrado, APM, Lisboa, 1995.

Evans, J., *The History and Pratice of Ancient Astronomy*, Oxford University Press, New York, 1998.

Eves, H., *An introduction to the History of Mathematics*, USA, 1992.

Fonseca, L.A., *D. João II*, Círculo de Leitores e Centro de Estudos dos Povos e Culturas de Expressão Portuguesa, Rio de Mouro, 2005.

Garrido, A, et alli, *A Saga dos Astrolábios*, Museu Marítimo de Ílhavo, Âncora Editora, 2006.

Katz, Victor J., *A History of Mathematics, an introduction*, HarperCollins College Publishers, 1993.

Koenraad van Cleempoel, *Astrolabes at Greenwich: A Catalogue of the Astrolabes in the National Maritime Museum*, Oxford University Press, 2005.

Neugebauer, O., *The exact Scienses in antiquity*, Dover, New York, 1969.

Pedersen, O., *A survey of Almagest*, Odense University Press, 1974,

Pimentel, M., *Arte de navegar*, Comentada e anotada por Luís de Albuquerque et alli, Junta de Investigação do Ultramar, Lisboa, 1969.

Ptolomeu, *Composition Mathematiques*, traduzido do grego por M.Halma. Reimpressão da edição publicada em 1813. Blanchard, Paris, 1988.

Ptolomeu, *Composition Mathematiques*, traduzido do grego por M.Halma. Reimpressão da edição publicada em 1816. Blanchard, Paris, 1988.

Reis, A. Estácio dos, *Medir Estrelas*, Edição do Clube do Coleccionador, CTT Correios de Portugal S.A., 1997.

Silva, L. Pereira da, *A Astronomia de «Os Lusíadas»*, Junta de Investigação do Ultramar, 1972.

Stumpff, K., *Astronomia*, Enciclopédia Meridiano//Ficher, Editora Meridiano, Lisboa, Abril, 1965.

Toomer, G.J., *Ptolomey'Amagest*, Princeton University Press, New Jersey, 1998.

Van der Waerden, B. L., *Scien Awakering* I, P. Noordhoff LTD, Groningen Holand.

Referências on-line

http://astrolabes.org/history.htm
http://www.ima.mat.br/mat/astrolabio.htm
http://brunelleschi.imss.fi.it/museum/index.html
http://www.mat.uc.pt/~helios/Mestre/Guia/G01astro.htm
http://pt.wikipedia.org/wiki/Esfera_armilar
http://es.wikipedia.org/wiki/Astrolabio
http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/malice3/astrol.htm

Maria José Costa

Notações: basta de confusões!

Sónia Figueirinhas

As notações utilizadas em geometria, sobretudo depois da Matemática Moderna, não contribuem para tornar agradável o estudo da geometria. Muito pelo contrário, como são em geral acompanhadas de uma certa tendência para o formalismo, o qual parece ser o pecado original do ensino da geometria, têm sido um obstáculo — embora não o principal, certamente — para a sua revitalização que, embora promovida pelos actuais programas, está ainda longe de concretização.

Assim começava o artigo *As notações em geometria*, escrito por Eduardo Veloso e publicado no número 42 da *Educação & Matemática* de Março/Abril de 1997. Com poucas (ou nenhumas) alterações se poderia caracterizar a actual situação no ensino português, doze anos depois, com um novo programa de Matemática para o ensino básico homologado e prestes a entrar em vigor.

A constatação anterior leva a que o Grupo de Trabalho de Geometria da APM (GTG), numa nova tentativa de promover um debate alargado e consequente, volte a este assunto nestas páginas, com o objectivo de contribuir para a discussão e apresentação de uma proposta de notações em geometria escolar que seja simples, clara e sugestiva e que, ao mesmo tempo, evite um formalismo excessivo nos textos de geometria e erros abundantes na sala de aula, pelo uso inadequado ou troca dos símbolos envolvidos. Simultaneamente, por entrar brevemente em vigor o novo programa de Matemática para o ensino básico e, nesse âmbito, estarem a preparar-se quer manuais escolares por parte das editoras, quer documentação de apoio ao professor por parte do Ministério da Educação, este momento pode ser crucial para tomar decisões e fazer recomendações, sob pena de deixar escapar uma oportunidade e um contexto que, tão depressa, não se repetirão.

Se, no ambiente do ensino superior ou no de estudiosos da matemática, como o é o dos professores, a exposição a diferentes notações pode levar a que uma pessoa se liberte mais facilmente delas e, nesse processo, entenda melhor os conceitos, o mesmo não nos parece defensável no ensino básico e até mesmo no secundário. Assim, defendemos que deve proporcionar-se que os alunos encontrem, nos manuais e no modo como os professores escrevem os seus textos e no quadro, uma razoável uniformidade nas notações, para assim irem criando hábitos de escrita em textos de matemática. Essas notações devem servir sempre de apoio e não de obstáculo, pelo seu carácter rebuscado e formal, como é agora a situação, à aprendizagem da geometria. Deste modo, uma notação, qualquer que seja a adoptada, quer-se simples e sugestiva, para não suscitar ambiguidades e ser de fácil e imediata interpretação. Além disso, as notações nunca podem ser entendidas como um objectivo da aprendizagem da geometria, devendo facilitar as verdadeiras actividades em geometria mas não substituí-las (por exemplo, se um aluno não seguir fielmente essas notações, pode ser objecto de alguma observação do professor, mas nunca deveria considerar-se que cometeu um erro sujeito a penalização).

O novo programa

No programa de Matemática que entra em vigor no ano lectivo de 2010/2011, no que respeita às notações, pode ler-se que:

- Os alunos devem ser capazes de ter presente e usar adequadamente as convenções matemáticas, incluindo a terminologia e as notações (página 4);
- Na História da Matemática devem salientar-se o contributo de diversos povos e civilizações para o desenvolvimento desta ciência, a sua relação com os grandes problemas científicos e técnicos de cada época, o seu contributo para o progresso da sociedade, e a sua própria evolução em termos de notações, representações e conceitos, proporcionando uma perspectiva dinâmica sobre a Matemática e o seu papel na sociedade (página 10);
- [Se deve] solicitar o uso de notações, vocabulário e simbologia de forma consistente (página 47).

O pequeno número de referências, mas sobretudo o facto de não existir um conjunto de orientações sobre que notações usar ou que domínio das mesmas exigir aos alunos, torna este documento insuficiente para esclarecer os professores neste aspecto, pelo que se afigura necessária e urgente a produção de um texto com uma proposta uniformizadora e, na medida do possível, consensual. É também muito importante que os documentos de apoio previstos no Plano de Implementação do Novo Programa de Matemática[1] sejam coerentes no que respeita às notações e tenham implícita a preocupação de esclarecer os professores e, consequentemente, os alunos sobre o modo de as utilizar.

Que notações?

Em níveis avançados, como nos cursos superiores ou na formação inicial e contínua de professores, é natural aligeirar notações e até mesmo cometer abusos de linguagem porque a maturidade e o grau de conhecimento permitem evitar confusões que surgiriam facilmente a alguém com pouca experiência em geometria. É comum, por exemplo, encontrar a mesma notação para um segmento e o seu comprimento em diversos livros de geometria de referência (em Birkhoff e Beatley, 1959, encontramos um destes casos). Contudo, no ensino básico, defendemos que deve haver sempre e desde o primeiro instante uma clara distinção entre um objecto e o que nele se pode medir. Se certas simplificações puderem conduzir a dificuldades futuras, então são de evitar. Isto é, num determinado texto pode ser indiferente considerar ângulos ou as suas amplitudes mas, matematicamente, trata-se de coisas distintas e, embora defendamos uma simplificação da notação, ela não é aconselhável se contribuir para confundir *ângulo* com *amplitude do ângulo*. Esta confusão poderia instalar-se facilmente porque os hábitos podem levar a associar imediatamente a um segmento o seu comprimento, e a um polígono a sua área ou o seu perímetro, sobretudo se os alunos tiveram pouco tempo envolvidos em actividades que os ajudem a conhecer as figuras, as grandezas e as medidas (das grandezas), bem como a distingui-las.

O GTG defende uma simplificação total quando as referências aos objectos geométricos estão incluídas num texto. A simplificação defendida, neste contexto, não deve ser entendida como a de proposta de designações mais curtas. Muito pelo contrário se constatará que, na maior parte dos casos, somos apologistas do contrário: substituição de abreviaturas ou símbolos e recurso a uma alternativa mais extensa. Assim, *recta* AB, *segmento* AB, *segmento orientado* AB, *semi-recta* AB, *arco* AB, *arco orientado* AB, *ângulo* ABC, *ângulo orientado* ABC, ou *amplitude do ângulo* ABC, seriam totalmente aceitáveis, por serem de interpretação imediata. Contudo, defendemos a necessidade de uma notação paralela mais específica quando os objectos geométricos (ou as medidas, ou outros) são referidos em fórmulas. Por exemplo, deve optar-se por escrever

$$\text{ampl}(\angle ABC)+\text{ampl}(\angle EFG) = 90°,$$

em vez de $\angle ABC+\angle EFG = 90°$.

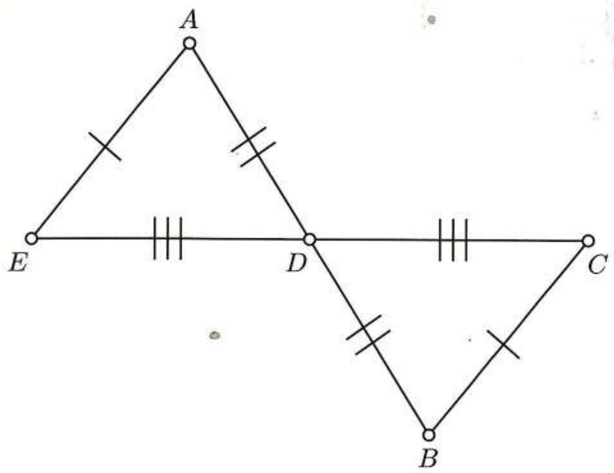


Figura 1.

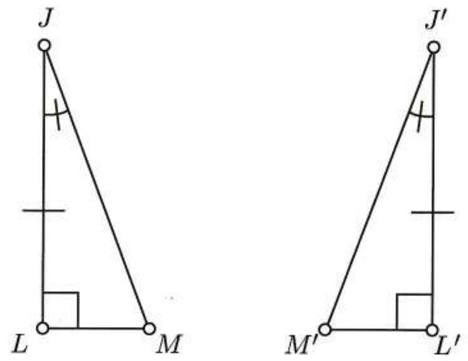


Figura 2.

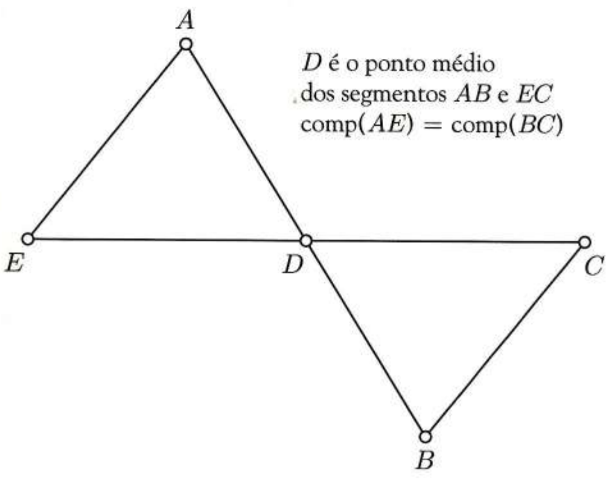


Figura 3.

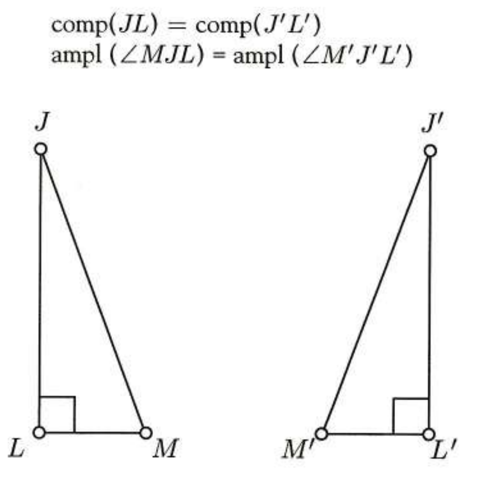


Figura 4.

Também recomendamos que, até ao fim do ensino básico, os textos de geometria tenham o mínimo de fórmulas possível. O uso de fórmulas deve ser reservado aos casos em que a compreensão é manifestamente mais fácil se forem utilizadas. Por exemplo, se AB e CD são rectas, em vez de escrever «$AB//CD$», devemos escrever «a recta AB é paralela à recta CD». Pelo contrário, pode não ser boa ideia escrever «a soma da amplitude do ângulo ABC com a amplitude do ângulo DEF é de 72°», quando é mais simples ler «ampl($\angle ABC$)+ampl($\angle DEF$)=72°». Deste modo, é nossa convicção que podemos adoptar quase sempre a versão «texto» das notações em vez da versão «fórmulas»: o texto, sempre que possível, deve conduzir à compreensão dos objectos designados pelas notações.

Situações que, a nosso ver, são de evitar: (figuras 1 e 2). Ainda que ao professor e aos alunos, em conjunto, deva ser permitido encontrar formas (mesmo que alternativas às que defendemos) para rápida e claramente assinalar numa figura os dados importantes para resolver uma situação ou problema, o uso de traços pode tornar-se moroso — basta imaginar que, numa mesma figura, se pretende assinalar muitos pares de segmentos de igual comprimento — e até confuso — aqui ilustrado pelo uso de um traço para assinalar a igualdade das medidas de ângulos, mas também da de segmentos, numa mesma figura. Uma alternativa (ainda que, no primeiro caso, não seja equivalente) poderia ser: (figuras 3 e 4).

Embora possam, nalguns casos, ajudar à simples distinção entre objectos, as notações têm uma importância maior

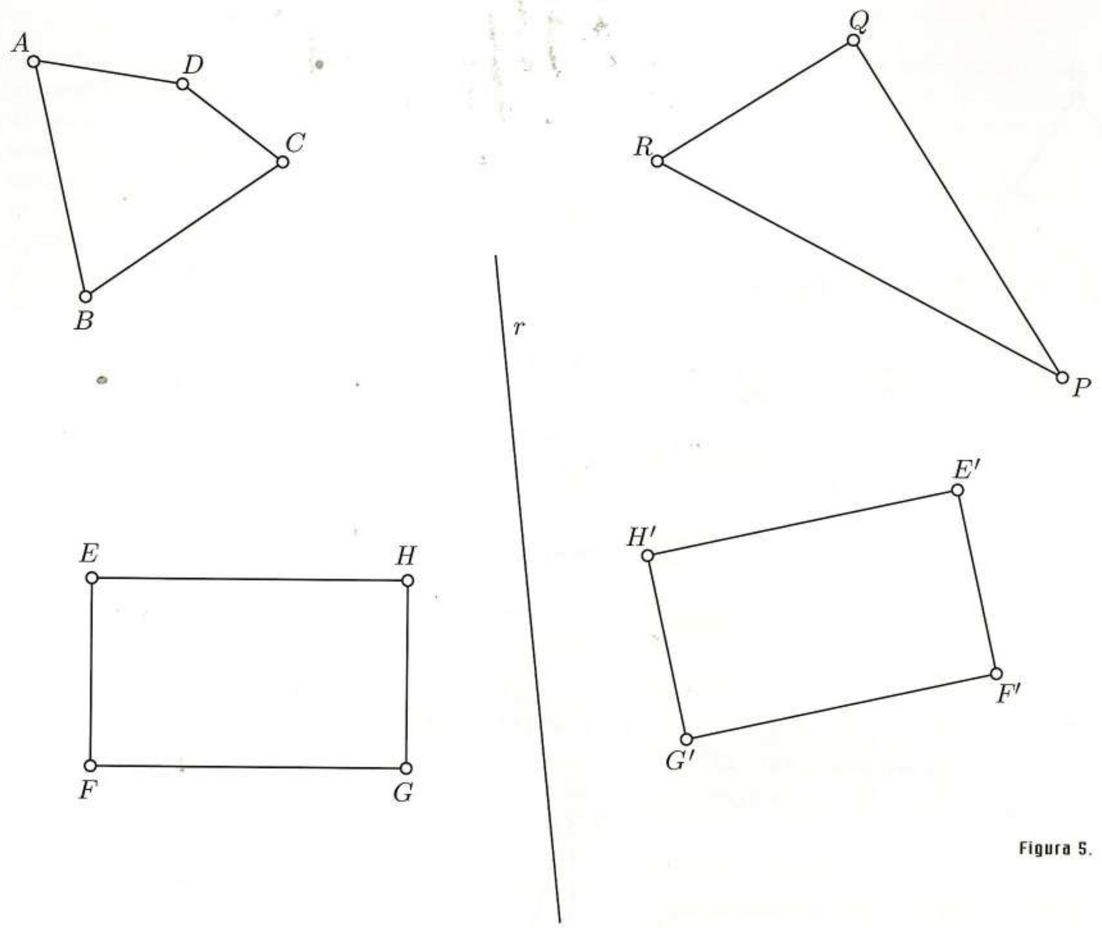


Figura 5.

quando se pensa na versão «fórmulas» de um texto matemático ainda que, no nosso entender, raramente se verifique a necessidade do uso de expressões sintéticas nas salas de aula do ensino não superior. Assim, vamos fazer aqui algumas propostas adicionais que, no nosso entender, vão ao encontro dos princípios enunciados atrás. Estas propostas devem ser entendidas como uma tendência para a uniformização e para a simplificação, embora se aceite que, em situações particulares, alunos e professores possam convencionar recorrer a outros tipos de representação, se isso ajudar à compreensão.

Os polígonos seriam designados pela lista dos seus vértices simplesmente, ainda que seja aconselhável que o nome do polígono anteceda essa designação.

Como legenda da figura 5 poderíamos escrever, por exemplo, que os lados do quadrilátero $ABCD$ têm todos comprimentos diferentes, que o triângulo PQR é rectângulo em Q, e que o rectângulo $E'F'G'H'$ é o transformado de $EFGH$ por meio da reflexão de eixo r.

Os símbolos mais usuais e de interpretação simples poderiam manter-se, como se exemplifica na figura 6, embora mantenhamos que é preferível descrever em extensão, no enunciado, os dados.

São de abandonar frases como «No triângulo $\Delta[SOL]$ os segmentos de recta $[SO]$ e $[OL]$ são perpendiculares». Sem repetição e com economia, deverá escrever-se «No triângulo SOL os segmentos de recta SO e OL são perpendiculares».

Ao contrário do que é a tradição em Portugal, em que um arquinho em cima de AB designa a amplitude do arco AB, propõe-se que se use essa designação para arco e que, consoante o caso, se indique «comp($\widehat{AB}$)» ou «ampl($\widehat{AB}$)» nas fórmulas.

Segmentos orientados e vectores continuariam a indicar-se sobrepondo uma seta à sua designação (uma letra minúscula ou duas letras maiúsculas), como é hábito. Ou seja, pode escrever-se $\overrightarrow{AB}$ ou $\vec{v}$. Pensamos que é de adiar o mais possível o uso de vectores, devendo preferir-se os segmentos orientados, por serem aquilo com que, na maior parte dos casos, se trabalha efectivamente.

Para indicar a medida de uma amplitude sugere-se o uso da expressão «ampl(objecto)». Assim, no caso de um ângulo ABC não orientado, a sua amplitude seria indicada como ampl$(\angle ABC) = 40°$. Se quisermos referir a amplitude do ângulo orientado ABC, então teremos que indicar ampl$(\angle ABC) = -40°$ ou ampl$(\angle ABC) = +40°$. Da mesma forma, a escrita ampl$(\angle ABC) = +40°$ implica que o

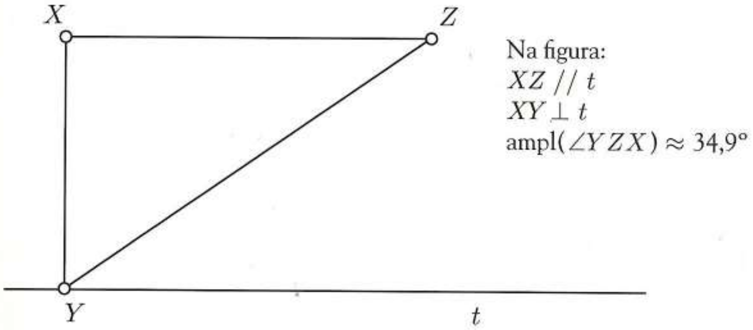


Figura 6.

ângulo ABC é orientado, sendo BA a semi-recta origem e BC a semi-recta extremidade, e que este ângulo tem sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio. De forma similar proceder-se-ia com os arcos e os arcos orientados.

De modo análogo, a expressão «comp(objecto)» indicaria o comprimento (de arcos, segmentos, segmentos orientados, ou outros). Exceptua-se nesta regra, pelo uso consagrado e unânime da notação actualmente em vigor, a indicação do comprimento (ou norma, ou módulo) de um segmento orientado ou de um vector, que se manteria $\|\overrightarrow{AB}\|$ ou $\|\vec{v}\|$. Não podemos, contudo, de deixar de interrogar-nos sobre esta opção, em vez do uso do módulo, como se faz no caso dos números (também complexos)... Porque não escrever $|\overrightarrow{AB}|$ ou $|\vec{v}|$?

Como afirmámos atrás, relançamos esta discussão por parecer-nos que seria agora um bom momento para que os textos que vão acompanhar o novo programa, a formação dos professores e a escrita dos manuais escolares pudessem reflectir alguma mudança no sentido da simplificação. É desejável uma discussão alargada sobre este assunto, e estamos dispostos a continuar a contribuir com ideias, sem pretender ter encontrado desde já as melhores soluções. Além disso, julgamos pertinente e desejável comunicar com professores de outras disciplinas que usam notações matemáticas — como a Geometria Descritiva ou a Física — em particular da geometria para, em conjunto, equacionar formas de eliminar ou minimizar algumas diferenças e contradições existentes, ainda que essa aproximação das representações possa ser difícil.

Nota

1 A introdução do novo programa começou este ano lectivo em 40 turmas piloto e a sua generalização inicia-se em 2009/2010. Para mais informações sobre o plano de implementação do novo programa de Matemática, pode consultar a página da Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (`www.dgidc.min-edu.pt`). Na página de entrada, opte pelo separador *Matemática* e, depois, escolha *Programa de Matemática do Ensino Básico.*

Referência bibliográfica

George Birkhoff e Ralph Beatley, Basic Geometry, Chelsea Publishing Company, 1959.

Sónia Figueirinhas
Grupo de Trabalho de Geometria da APM

Breve notícia sobre Atractor em sala de aula

Arsélio Martins

De Outubro a Dezembro de 2007, na leccionação da Geometria do 10° ano, utilizei materiais produzidos ou disponibilizados no *site* do Atractor. Inicialmente, para os alunos de Matemática A, experimentei realizar algumas viagens exploratórias pelo Atractor, detendo-me nas animações interessantes para o que estava a tratar na sala de aula.

Os assuntos abordados envolviam poliedros e o *site* abria muitas possibilidades aos jovens (por exemplo, `http://www.atractor.pt/webM/exemplos/poliedros.htm`). Parte dos jovens deixaram fascinar-se verdadeiramente pelas animações que exploravam muito para além do que o tempo da leccionação permitia. E outra parte nunca foi além de saltitar de uma para outra animação com poliedros sem responder a perguntas com sentido e com interesse para o que se pretendia com as aulas: secções do cubo, duais de poliedros, relações métricas, etc. Para o tempo disponível, foi preciso reduzir as explorações possíveis. Acabámos por fazer o óbvio que o próprio Atractor propunha e possibilitava: descarregar o ficheiro com uma página de poliedros (primeira linha de `http://www.atractor.pt/soft/fr-soft.htm`) e escolher só o que interessa para acompanhar os enunciados dos trabalhos que cabem no tempo das aulas, quer para acompanhar actividades das aulas, quer para trabalhos de casa que exijam correcção e classificação. A escolha pode ser feita facilmente a partir do ficheiro geral e pode ser disponibilizada nos computadores da escola, a partir da plataforma *moodle* em uso. Assim fiz com proveito. Para um início de ciclo e início de utilização da plataforma foi de grande utilidade, embora tenha sido reduzido o número de alunos que resolveram autonomamente e em linha os problemas propostos. O trabalho usando representações animadas é muito interessante sem poder substituir completamente a construção e manipulação de alguns sólidos.

As dificuldades na utilização de outros módulos noutros assuntos tornaram-se mais complicadas e foi preciso construir de raiz muitos exemplos para o estudo das funções polinomiais, por exemplo. De qualquer modo, os alunos tiveram acesso à potência das representações gráficas do Atractor e ao uso do WebMathematica (`http://www.atractor.pt/webM/fr-webMathematica.htm`) para representações gráficas usadas (`http://www.atractor.pt/webM/wm/exemplos/Graficos2D.jsp`) e confirmar resultados de operações e ver como podem ser obtidos, por exemplo, a multiplicação longa de polinómios (`http://www.atractor.pt/webM/wm/exemplos/MultiplicacaoLongaPolinomios.jsp`) que aparece prejudicada na leccionação básica.

ATRACTOR

A associação Atractor, que assume ter como um dos seus principais objectivos atrair para a Matemática, tem desenvolvido um vasto trabalho especialmente divulgado nas exposições e no site, arriscando-me a dizer que, apesar da sua existência não muito longa, nenhum professor de Matemática a desconhece. A APM esteve desde sempre ligada ao Atractor, sendo um dos associados colectivos com representação sua direcção — Manuela Simões, actualmente.

Apesar desta estreita ligação entre a APM e o Atractor, na Educação e Matemática não se tem dado conta de relatos da exploração dos recursos do Atractor e sua utilização com os jovens, dentro ou fora da sala de aula. Com esta notícia pretendo partilhar a minha experiência.

Já para os alunos do curso profissional de Técnicos de Design de Equipamento, o mais importante contributo do Atractor para a leccionação e para a actividade prática autónoma do módulo *Padrões Geométricos* em 2008 , do programa de estudos escolhido na escola, veio pela via da exposição *Simetrias/Jogos de Espelhos* visitada no *site* e, depois, no Porto (acrescentada de uma visita acompanhada ao Palácio da Bolsa). A visita demorada no *site* passou principalmente pelo estudo e trabalho sobre a matemática envolvida (`http://www.atractor.pt/simetria/matematica/index.html`), seguida da resolução de vários dos exercícios propostos. Durante algum tempo, os estudantes foram livres de manipular as construções interactivas existentes (`http://www.atractor.pt/simetria/17padroes/index.html` ou `http://www.atractor.pt/simetria/matematica/caixas/constr-padroes.htm`) para realizar exercícios sobre frisos (`http://www.atractor.pt/simetria/matematica/materiais/exercicios.htm`). Foi muito interessante ver como, depois da manipulação livre, os estudantes revelaram extremas dificuldades em responder às encomendas de determinados padrões em caixas de espelhos, depois de livremente tão experimentadas. O que é certo é que estes alunos puderam construir objectos mais ou menos decorativos (interessantes para técnicos de design de equipamento) desde frisos e padrões cerâmicos a caleidoscópios e caixas de espelhos com alguma sofisticação. Sempre que se mostrou possível, este trabalho foi realizado sobre o Atractor e a partir da plataforma da escola, tendo as produções concretização física.

A turma do curso profissional, a partir de certa altura ficou desdobrada em duas, uma delas acompanhada no mesmo sentido pela professora Diana Barroca, que colaborou e acompanhou todas as visitas e trabalhos.

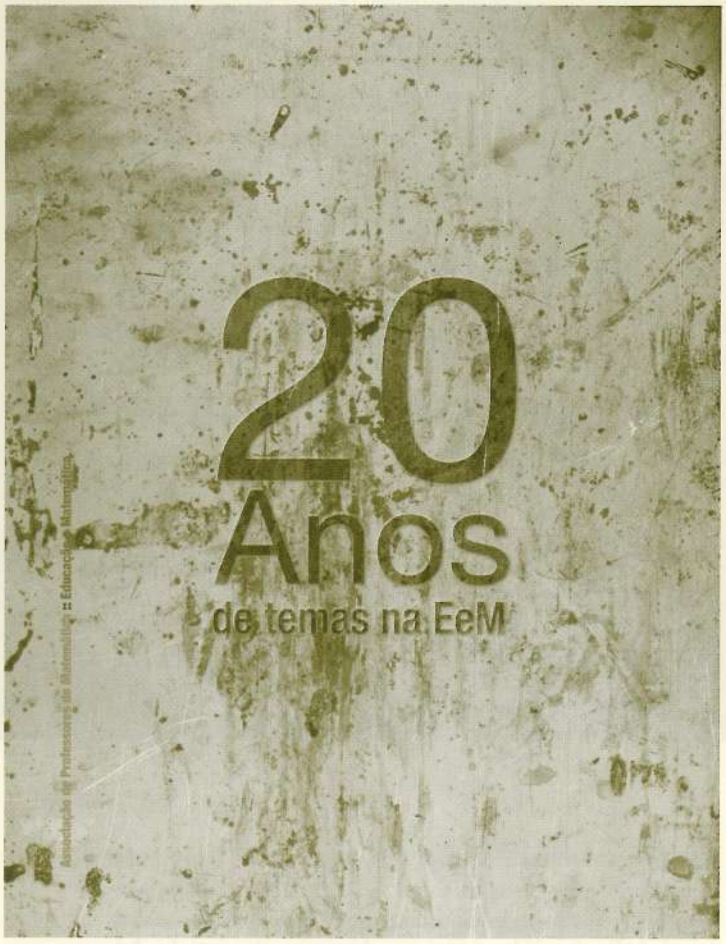
Na mesma altura, durante a leccionação do 9° ano e para atrair alguns alunos mais desinteressados, usei a adaptação de jogos feita pelo Atractor (Torus Games: `http://www.atractor.pt/soft/fr-soft.htm`) com resultados surpreendentemente positivos junto desses alunos. A generalidade dos professores e alunos do ensino básico só podem lucrar com as ideias e a utilização da *Matemática sem palavras* (`http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/index.htm`) que ilustra resultados básicos: os casos notáveis da multiplicação, as fracções, as equações do segundo grau e as desigualdades).

Arsélio Martins

Esc. Sec. José Estevão

Educação e Matemática: vinte anos de temas, vinte anos de pessoas

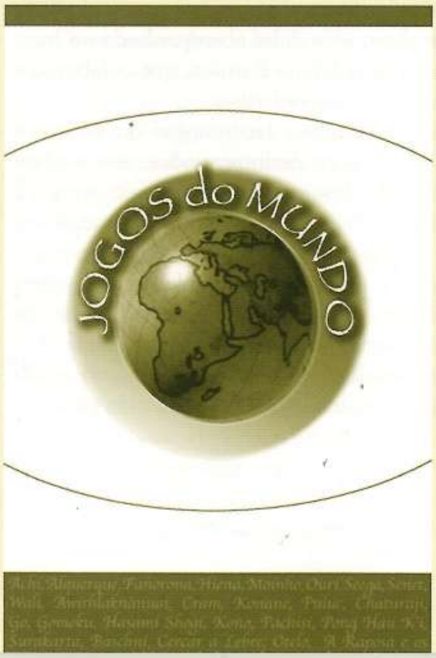
Edição APM, 2008 | PVP: 16,50€ Sócio: 11,00€



A *Educação e Matemática* celebrou vinte anos de existência em 2007. Ao longo deste tempo, foram vários os temas que mereceram atenção na revista. Estes vinte anos de revista são, por isso, vinte anos de muitos temas, mais de vinte certamente. Muitos deles estão retomados no livro que agora propomos:

1. *Aprender Matemática: Memorizar e mecanizar versus compreender e resolver problemas* (João Pedro da Ponte)
2. *Literacia Matemática: Uma procura de contributos para formar cidadãos mais críticos e interventivos* (Cristina Loureiro)
3. *A Matemática nos primeiros anos: Alguns desafios* (Lurdes Serrazina)
4. *O professor de Matemática* (Isabel Rocha)
5. *Avaliação das aprendizagens: Funções, forma, conteúdo* (Leonor Santos)
6. *Matemática: Problemas antigos, uma perspectiva moderna* (António M. Fernandes)
7. *O prazer dos problemas* (José Paulo Viana)
8. *História e Ensino da Matemática* (Maria José Costa)
9. *Geometria no ensino da Matemática: 20 anos da revista Educação e Matemática* (Nuno Candeias)
10. *As funções: Um olhar sobre 20 anos de ensino e aprendizagem* (António Domingos)
11. *Tecnologias na Escola* (Branca Silveira)
12. *Cinco pontos fundamentais para transformar a educação matemática* (João Filipe Matos)

Este livro reúne assim um conjunto de artigos originais que discutem e problematizam aspectos diversos da educação matemática no presente contexto educativo e curricular português, constituindo uma oportunidade para rever o passado recente e perspectivar os desafios do futuro próximo.



Jogos do Mundo

2^a *Edição*, APM, 2009 | PVP: 11,25€ Sócio: 7,50€

Esta brochura apresenta os 30 jogos que constituem a exposição *Jogos do Mundo*, agrupados de acordo com o que se supõe ser o seu continente de origem. Cada jogo é apresentado através do tabuleiro, das regras e de um conjunto de notas. Quando foi possível incluiu-se um breve resumo da sua história.

A brochura contém ainda referências bibliográficas e referências a sites que são relevantes na abordagem deste tema. *Jogos do Mundo* deu origem a uma exposição com o mesmo nome, constituída na sua maior parte por jogos de estratégia e de tabuleiro, e pelas respectivas regras.

Nunca te esqueças de lembrar

NUNCA TE ESQUEÇAS DE LEMBRAR
QUE OS MATEMÁTICOS EXISTEM...
NUNCA TE LEMBRES DE ESQUECER
QUE A MATEMÁTICA É HISTÓRIA,
É PASSADO, É PRESENTE,
É FUTURO, É MEMÓRIA!
NÃO É UM MITO!
NÃO É UMA ILUSÃO!
É UMA DAS CORES DA REALIDADE,
UM RAIO DE RAZÃO
QUE ILUMINA A ETERNIDADE,
A ÂNSIA DE ALCANÇAR A PERFEIÇÃO!

11.º B "Homenagem aos Matemáticos Portugueses"

Estávamos nos anos 90. Havia um espaço curricular que se pretendia transversal às disciplinas: a Área Escola.

Numa reunião com alunos e professores para desenhar o plano de trabalho nessa área e repartir tarefas, uma aluna sugeriu que se tomasse o trabalho feito na aula de Matemática como ponto de partida. Referia-se às pesquisas sobre História de Matemática a propósito do programa que se ia desenvolvendo, aliás na mesma linha do ano anterior. A proposta foi aceite e o trabalho incidiu sobre os matemáticos que deram nome às ruas da cidade do Porto e teve por título «Homenagem aos Matemáticos Portugueses».

Na apresentação do trabalho, junto à maquete da cidade com as ruas assinaladas e ao dossier do material produzido, havia um postal com um poema. Tinha sido escrito por uma das alunas que até nem tinha boas classificações na disciplina de Matemática.

Maria José Costa

Uma tarde nos matraquilhos

O Daniel, o Edgar e a Fátima passaram a tarde a jogar matraquilhos na modalidade «quem perde sai», isto é, quem perdesse um jogo saía, dando lugar no jogo seguinte àquele que tivesse ficado de fora.
O primeiro jogo foi entre o Daniel e o Edgar.
Quando pararam, o Daniel tinha ganho 11 jogos e o Edgar 20.
Quantas vezes se defrontaram entre si estes dois jogadores?

(Respostas até 30 de Setembro para zepaulo@armail.pt)

Quadrados sobrepostos

O problema proposto no número 101 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Se pegarmos em dois quadrados iguais, é possível, sobrepondo-os parcialmente, fazer uma figura onde estão três quadrados: os dois iniciais e mais outro.

Qual é o máximo de quadrados que se pode obter a partir de três quadrados iguais?

E com quatro quadrados iguais? E...?

Recebemos cinco respostas: Alberto Canelas (Queluz), Graça Braga da Cruz (Ovar), Edgar Martins (Queluz), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Tiago Dias.

Como diz o Edgar, podemos sobrepor três quadrados iguais de duas maneiras:

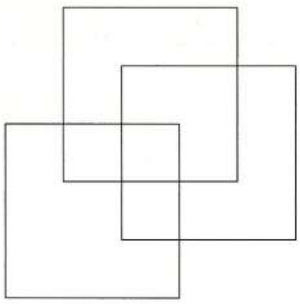


Figura 1.

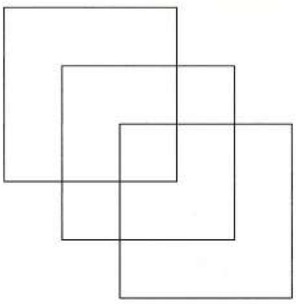


Figura 2.

Antes mesmo de contar o número de quadrados de cada uma das figuras, palpita-me que quem tem mais é a figura 2. A razão é simples. O enunciado sugere uma expressão para determinar o número de quadrados obtidos pela sobreposição de n quadrados iguais. Se isso é possível, então a sobreposição de quadrados segue um padrão. Das duas figuras, aquela que parece seguir um padrão é a figura 2.

Palpites à parte, a figura 1 é composta por 7 quadrados e a figura 2 por 8.

Mantendo o mesmo padrão, para n=4 vamos obter 16 quadrados: os 4 iniciais mais os que se mostram na figura 3.

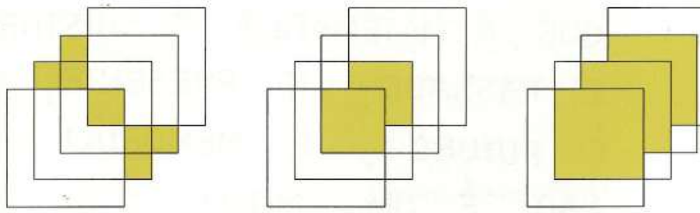


Figura 3.

Podemos classificá-los em dois tipos:

- Alinhados (que têm uma das diagonais alinhada com uma diagonal dos quadrados iniciais): $1+2+3+4=10$
- Desalinhados (aqueles mais pequenos, 3 de cada lado, que estão apenas no interior de um quadrado inicial): 6

O caso de n=5, na figura 4, parece mais interessante para contar e a partir dele podemos generalizar para um n qualquer.

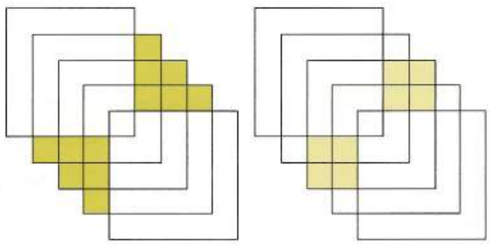


Figura 4.

- Alinhados: $1+2+3+4+5=15$
- Desalinhados: 12 pequenos (6 de cada lado) + 2 maiores (um de cada lado)
- Total: 29

A generalização não é nada fácil mas o Edgar e o Alberto conseguiram fazê-la, obtendo fórmulas que dão o total de quadrados Q em função do número n de quadrados iniciais.

- Se n par, $Q=\dfrac{2n^3+3n^2+4n}{12}$
- Se n ímpar, $Q=\dfrac{2n^3+3n^2+4n+3}{12}$

Resultados do Grande Concurso Educação e Matemática

Para comemorar a publicação do seu número 100, a revista *Educação e Matemática* organizou um concurso que consistia na resolução de um problema. O enunciado previsto era:

Usando o conjunto de algarismos {9, 9, 8, 8, 7, 7, 6, 6, 5, 5} exactamente por esta ordem e as operações de multiplicação e divisão, obter o resultado mais próximo de 100.

Infelizmente, uma série de enganos e erros levou a que o texto aparecesse com várias alterações, passando a incluir também os algarismos de 4 a 2 e a operação «raiz» (sic). Desta forma, o problema perdeu parte do seu interesse. Tornou-se bastante simples obter exactamente o valor 100 e praticamente todos os concorrentes indicaram esse valor, o que obrigou ainda a ter de atribuir os prémios por sorteio.

Por isto tudo, pedimos desculpa aos nossos leitores.

Tivemos 95 participantes na Categoria A (alunos dos ensinos básico e secundário) e 26 na Categoria B (geral). Os nossos agradecimentos a todos eles e os parabéns aos vencedores.

Eis a lista dos premiados.

Categoria A

1° Edgar Ferreira Lourenço Duque, *EB2/3 de Marrazes*
2° Rafael Alexandre Oliveira Florêncio, *ES de Alcácer do Sal*
3° Marta Alexandra Amorim Miranda, *ES Quinta do Marquês*
4° Eliana Alexandra Patrício Moreira, *EB2/3 A Ribeirinha*
5° Rodrigo Manuel Pereira Gomes, *Colégio Vieira de Castro*
6° Diana Cangueiro, *ES Cacilhas–Tejo*
7° Henrique Ferreira, *Agrup. Esc. Artur Gonçalves*
8° Carlos Adelino Oliveira Pereira, *EB2/3 Prof. Dr. Egas Moniz*
9° Maria Salomé Serranito, Colégio do Vale
10° Ana Rita Nazário, *Agrup. Esc. Artur Gonçalves*
11° Jaime Manuel Andrade, *EB2/3 Dr. Pedrosa Veríssimo (Paião)*
12° Gonçalo Fernandez, *EB2/3 António Sena Faria Vasconcelos*
13° José Luís Teixeira, *ESFRL — Leiria*
14° Pedro Sousa Guimarães, *EB À Beira Douro — Medas*
15° Ana Campos, *Esc. Faria de Vasconcelos — Castelo Branco*
16° Flávia Antunes, *Esc. Artur Gonçalves*
17° João Paulo Gaspar Silva, *Colégio do Vale*
18° Wu Zhen, *ES/3 Maria Lamas*
19° Luis Carlos Pinto, *Agrup. Esc. Artur Gonçalves*
20° Diogo Filipe Lopes, *Agrup. Esc. Artur Gonçalves*

Prémios: 1° – Unidade Portátil TI-Nspire; 2° – Calculadora Gráfica Casio VI-9850GB Plus com interface TV; 3° e 4° – Diciopédia 2008; 5° – Colecção «Mestres da Arte» (8 volumes); 6° – 3 exemplares da Colecção Biblioteca Científica; 7° – 2 exemplares da Colecção Biblioteca Científica; 8° a 10° – 2 exemplares da Colecção «Mestres da Arte»; 11° a 20° – um exemplar da Colecção «Mestres da Arte».

Categoria B

1° Mária & Madalena Correia de Almeida
2° Ricardo Filipe Campos Poças (Viseu)
3° Dolores Follador (Curitiba, Brasil)

Prémios: 1° – Unidade Portátil TI-Nspire (versão professor); 2° – Calculadora Gráfica Casio VI-9850GB Plus com interface TV; 3° – Diciopédia 2008.

Comentários

Sobre o problema e as muitas possibilidades de o resolver, gostávamos de partilhar o que nos enviaram dois concorrentes.

Ana Cristina Oliveira: Mostrei o enunciado no Atractor, onde trabalho, e a equipa resolveu tentar encontrar TODAS as melhores soluções. Eis os resultados a que chegou:

A. Sem usar raízes (portanto, usando só as operações de multiplicação e divisão)

   1. há 216 maneiras de obter exactamente 100 entre as combinações possíveis (que são 14.348.907). Em anexo segue a lista dessas soluções exactas.

   2. além destas soluções exactas, a melhor aproximação é 100.000482121333387 ...

B. Se usar raízes quadradas,

   1. pode-se facilmente obter mais soluções exactas.

   2. quanto às soluções aproximadas, é fácil concluir que há soluções tão próximas de 100 (mas diferentes de 100) quanto se quiser.

Face às conclusões de A1 e B2, não há qualquer interesse em considerar raízes de índice mais elevado.

O Atractor admite colocar no seu site essas conclusões (se houver tempo para as verificar com cuidado), por admitir poderem interessar os leitores da revista *Educação e Matemática*.

Edgar Martins (Queluz):

100=9/9/8/8/7*7*6*6*5*5*4*4/3/3*2*2

entre outras milhares de maneiras de chegar lá.

Junto envio um ficheiro Excel (xls) com 2084 maneiras de chegar ao número 100 mantendo a ordem dos números e usando multiplicação, divisão e uma ou outra raiz quadrada. Há mais, mas achei que 2084 já chegavam :).

Final do 5º Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos

A final do 5.° Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos (CNJM) teve lugar no passado dia 13 de Março de 2009, numa das belas cidades do interior, a Covilhã, concretamente na Universidade da Beira Interior (UBI). Como vem sendo hábito, o campeonato decorreu numa atmosfera fantástica, a começar pelo estival dia, que pôde envolver de forma extraordinária os 1204 alunos das 279 escolas participantes.

À semelhança das outras edições, estavam em competição seis jogos, distribuídos pelos três ciclos do ensino básico e pelo ensino secundário (3 jogos diferentes por ciclo). Os participantes, uma vez mais, receberam crachás com um código numérico, correspondente à escola, ciclo de ensino e jogo, bem como uma t-shirt com a identificação do jogo.

Durante o período da manhã, jogaram-se as eliminatórias e após um curto intervalo para almoço decorreram as finais. Tal como nas três edições anteriores continuou-se a optar pelo apuramento dos vencedores através do mesmo processo de eliminatórias, o sistema suíço, uma vez que permite encontrar com maior rigor os vencedores.

A comissão organizadora pôde uma vez mais contar com o estimável apoio de um grande número de monitores, alunos da Universidade da Beira Interior, e dos nossos colegas do Núcleo de Viseu e de Aveiro da APM, como júris.

À medida que o campeonato foi decorrendo, os participantes e acompanhantes puderam desfrutar de um conjunto de actividades e exposições, a saber:

— Visita aos Laboratórios / Oficinas dos departamentos de: Engenharia Têxtil, Engenharia Electromecânica; Ciências Aeroespaciais; Química; Letras e Ciências do Desporto;

— Visita ao Museu dos Lanifícios e à Tinturaria.

Mudanças/ Novidades

Em relação às edições anteriores houve algumas alterações. O jogo Konane substituiu o Pontos e Quadrados no 1.° Ciclo e o Semáforo no 2° Ciclo. O jogo Amazonas foi substituído no 3.° Ciclo pelo Rastros e no Ensino Secundário pelo Avanço.

Paralelamente ao CNJM decorreu pela primeira vez um torneio, do jogo Semáforo, para invisuais, tendo-se para o efeito utilizado tabuleiros e materiais específicos.

Entrega de prémios

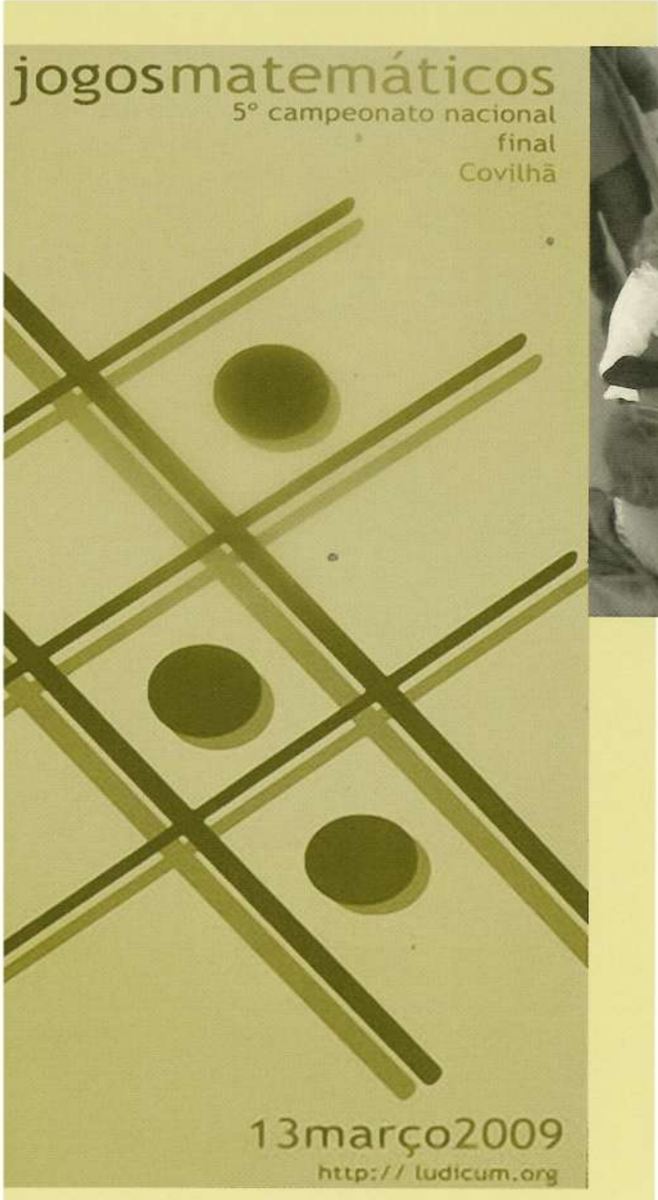
Estiveram presentes na cerimónia de entrega de prémios, Manuel Silva, reitor da UBI, Ana Noronha, Directora Executiva da agência Ciência Viva, Isabel Dias, Presidente do Departamento de Matemática, Arsélio Martins, presidente da APM, Nuno Crato, presidente da SPM, além de Jorge Nuno Silva, da comissão organizadora.

Todos os finalistas receberam livros da Porto Editora/ Gradiva e todos os campeões receberam computadores portáteis. Quem estiver interessado em saber mais sobre o 5.° CNJM pode consultar o *site* oficial dos CNJM que inclui fotos entre outras informações sobre a final 2009:

`http://ludicum.org/cnjm/cnjm5`

Finda mais uma edição fica o desejo que a próxima seja tão boa como as anteriores. Parabéns a todos os envolvidos, em particular aos alunos e professores que estiveram presentes, e em especial à organização local, colegas do Departamento da Universidade da Beira Interior, pelo excelente trabalho.

M.ª Teresa Santos
Comissão Organizadora do CNJM5



Premiados

Semáforo (1° ciclo)

1° Pedro Miguel Pereira, *Esc. Básica André Resende (Évora)*
2° João Pedro Pisco, *Agrupamento 2 de Évora*
3° Ricardo Miguel Lopes, *EB1 de Pero Negro*

Konane (1° ciclo)

1° Pedro Miguel Ferreira, *EB23 do Bairro Padre Cruz*
2° Rafael Filipe Fernandes, *Agrupamento de Escolas de Jardins de Stª Comba Dão*
3° Tiago Filipe Ferreira, *Agrupamento de Escolas Aradas*

Ouri (1° ciclo)

1° Mariana Matos Pinto, *EB1 Castro Daire*
2° Ana Miguel Santiago, *EB1 Aguada de Cima*
3° Ema Sofia Ferreira, *Colégio Sagrado Coração de Maria (Lisboa)*

Konane (2° ciclo)

1° Tiago João Sousa Silva, *EB23 Gonçalo Nunes*
2° Eduardo Alexandre Sousa, *EB23 de Cávado*
3° Luís Miguel Vieira, *EB23 de Matosinhos*

Ouri (2° ciclo)

1° João Maria Menezes, *Colégio Nª Srª Lurdes*
2° Ana Laura Nogueira, *EB23 Alpendurada*
3° Ana Cláudia Marques, *Cooperativa vale S. Cosme*

Hex (2° ciclo)

1° João Nuno Valente, *Agrupamento de Escola Esgueira — Aires Barbosa*
2° André Oliveira Pinheiro, *EB23 Martim de Freiras (Coimbra)*
3° Ricardo António Lino, *Colégio Laura Vicunha (Vendas Novas)*

Ouri (3° ciclo)

1° Fábio André Araújo, *Escola Secundária /3° ciclo Valbom*
2° Alexandre Joel Marinho, *Escola Secundária Felgueiras*
3° Beatriz Norte, *EB Stª Catarina*

Hex (3° ciclo)

1° Miguel Christian Schon, *EB23 D. João II*
2° Pedro José Azevedo, *Escola Secundária /3° ciclo Oliveira do Douro*
3° Nuno Miguel Burnay, *Escola Secundária Portela*

Rastros (3° ciclo)

1° Fábio Carvalho, *EB23 A ribeirinha (Porto)*
2° Tiago José Henriques, *Colégio Dr. Luís Pereira da Costa (Leiria)*
3° Leonardo Oliveira, *Agrupamento de Escola de Esgueira — Aires Barbosa*

Hex (Secundário)

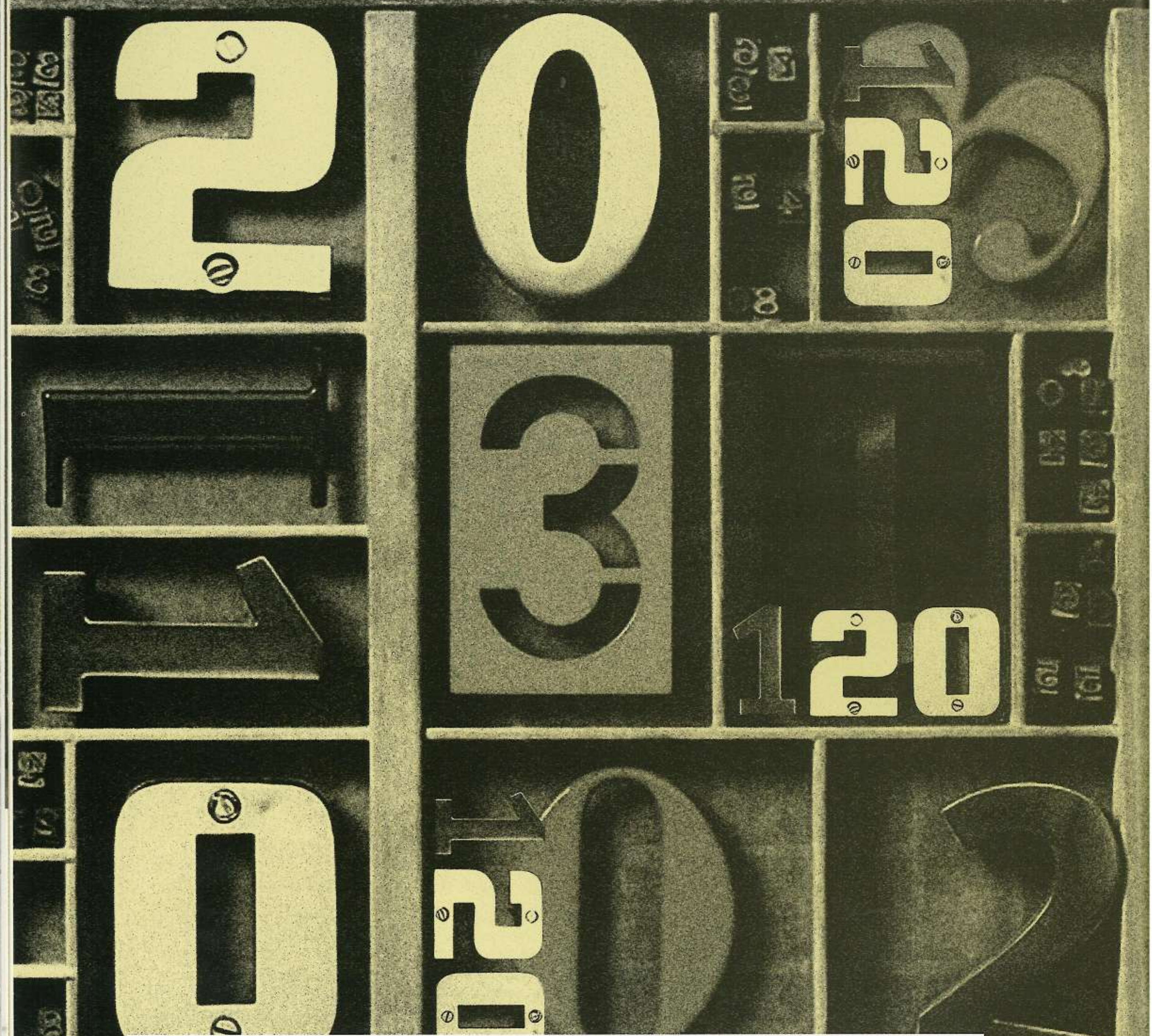
1° Luís António Maduro, *Escola Secundária Infanta D. Maria (Coimbra)*
2° Bruno Manuel Pires, *Instituto Vaz Serra*
3° Fábio André Costa, *Escola Secundária/3° ciclo Bernardino Machado (Figueira da Foz)*

Rastros (Secundário)

1° Manuel Borges Reis, *Escola Secundária Camões*
2° João Filipe Alexandre, *Escola Secundária/3° ciclo de Montejunto*
3° Pedro José Palma, *Escola Secundária Leal da Câmara*

Avanço (Secundário)

1° Rui Frias Moreira, *Escola Secundária Leal da Câmara*
2° Yaroslav Minakov, *Cooperativa de V.S. Cosme Didáxis*
3° Tiago Alves, *Escola Secundária da Amadora*



Múltiplas conexões matemáticas envolvendo o número 120

Paulo Afonso

Existem muitos tipos de números que são objecto de estudo nas aulas de matemática: os pares, os ímpares, os primos, os primos entre si, os compostos, os perfeitos, os quadrados, os triangulares, os naturais, os inteiros, os relativos, os racionais, os reais, os irracionais, etc. Destes, há alguns que se distinguem pela sua importância histórica, como seja o 1, o zero, o Pi, ou o de ouro. Não obstante isto, tem-se vindo a descobrir aspectos fascinantes acerca de outros bem mais «modestos», em termos da sua importância relativa como entes da História da Matemática, como seja o 9, o 1089, o 3037 ou o 142857. Basta uma consulta rápida na Internet para nos apercebermos das suas particularidades do ponto de vista matemático.

Contudo, não é acerca destes números que eu vou incidir a minha reflexão. Decidi escolher um outro, o 120, por permitir um leque variado de conexões a alguns conceitos matemáticos. Se reflectirmos acerca da importância deste valor nas nossas vidas, facilmente o associamos a aspectos do tempo (sistema sexagesimal), ou ao limite de velocidade nas auto-estradas. Conectado ao tema da condução de veículos motorizados, muitas já terão sido as pessoas que tiveram que se submeter ao pagamento de coimas de 120 euros devido a excesso de velocidade. Vejamos, pois, com mais pormenor, as seguintes propriedades mágicas deste número.

a) Tem o privilégio de ser formado pelos três primeiros números inteiros (0, 1 e 2);

b) Pode ser obtido pela adição de alguns números da sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...). Eis alguns exemplos:

$$2 + 8 + 21 + 89 = 120$$
$$2 + 3 + 5 + 21 + 34 + 55 = 120$$
$$2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 89 = 120$$

c) Como número composto, pode ser obtido através da multiplicação de vários factores primos:

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

d) Também pode ser obtido através da adição de oito dos dez primeiros números primos:

$$120 = 3 + 5 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29$$

Aliás, tendo em conta a conjectura de Goldbach, que diz que qualquer número par maior ou igual a quatro pode ser obtido pela adição de dois números primos (in `http://pt.wikipedia.org/wiki/Conjectura_de_Goldbach`), o 120 resultaria da adição de 103 com 17, ou de 113 com 7 ou de 117 com 3;

e) É um número triangular (Afonso, 2006b), o que significa que existem dois números inteiros consecutivos que multiplicados entre si originam um produto que é o dobro desse valor 120. Refiro-me aos números 15 e 16, pois 15 × 16 = 240. De facto, o 120 é o 15° número triangular, pois $120 = [n \times (n + 1)] : 2$, sendo $n = 15$;

f) Pode-se associar o valor 120 ao conceito de amplitude de ângulos, designadamente à amplitude dos ângulos externos de um qualquer triângulo equilátero ou à amplitude de qualquer ângulo interno de um hexágono regular;

g) Ao adicionarmos os seus dígitos constatamos que a soma é 3, logo o 120 é divisível por 3. Este facto permite que nos questionemos acerca de quais serão os nove números inteiros consecutivos que permitem transformar a figura seguinte num quadrado mágico, de ordem três, com soma mágica 120:

Eis uma possível solução, envolvendo os seguintes números consecutivos 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43 e 44:

37	44	39
42	40	38
41	36	43

h) Será que também pode ser afecto a um quadrado mágico de ordem quatro, isto é, será que existem dezasseis números inteiros consecutivos que permitem a elaboração de um quadrado mágico de soma 120?

Através dos três exemplos seguintes pode-se perceber que existe uma regularidade neste tipo de figuras:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

2	16	15	5
13	7	8	10
9	11	12	6
14	4	3	17

3	17	16	6
14	8	9	11
10	12	13	7
15	5	4	18

Quando a sequência se inicia pelo valor 1, a soma é 34; quando se inicia pelo valor 2, a soma é 38; quando se inicia pelo valor 3, a soma é 42. Prolongando este padrão, resulta o seguinte:

Início	Soma	Início	Soma	Início	Soma	Início	Soma
1	34	2	38	3	42	4	46
5	50	6	54	7	58	8	62
9	66	10	70	11	74	12	78
13	82	14	86	15	90	16	94
17	98	18	102	19	106	20	110
21	114	22	**118**	23	**122**		

O padrão anterior permite concluir que não é possível obter-se um quadrado mágico, de ordem 4, envolvendo dezasseis números inteiros consecutivos cuja soma seja 120. O máximo que se obtém por defeito é 118 e o mínimo que se obtém por excesso é 122.

Ora, se formalizarmos este padrão, percebemos que:

1. $34 = 34 + 0 \times 4$
2. $38 = 34 + 1 \times 4$
3. $42 = 34 + 2 \times 4$
4. $46 = 34 + 3 \times 4$
5. $50 = 34 + 4 \times 4$

...

$n \quad = 34 + (n - 1) \times 4$

Se igualarmos esta lei de formação ao valor 120, concluímos que «n» terá que ser 22,5, e este valor será o início da seguinte sequência numérica: 22,5; 23,5; 24,5; 25,5; 26,5; 27,5; 28,5; 29,5; 30,5; 31,5; 32,5; 33,5; 34,5; 35,5; 36,5; 37,5.

Façamos o quadro:

22,5	36,5	35,5	25,5
33,5	27,5	28,5	30,5
29,5	31,5	32,5	26,5
34,5	24,5	23,5	37,5

Confirma-se, pois, que se pode construir um quadrado mágico, de ordem 4, cuja soma mágica 120 resulta da utilização dos dezasseis números decimais acima enunciados;

i) Seria interessante investigar se o 120 tem alguma relação com as potências de base dois (Afonso, 2008a). (Ver figura 1).

Através de uma exploração algébrica, a resolução da equação seguinte: $x^2 + 2x^2 + 4x^2 + 8x^2 = 120$ dar-nos-ia a resposta «8» como sendo a primeira das potências a considerar. A tabela anterior vem confirmar que o valor 120 pode ser obtido a partir da adição de quatro potências de base dois consecutivas $2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$;

j) Se for feito um estudo semelhante para o caso de quatro potências consecutivas de base 3 iremos ficar surpreendidos...

Associemos, ainda, o número 120 às (k) operações aritméticas, (l) aos divisores de um número, bem como (m) às regularidades algébricas;

k) Tentemos encontrar dois números inteiros positivos, de modo a obter-se o valor 120 pela adição da sua soma com a sua diferença e com o seu produto (adaptado de Berloquim, 1991).

Ora, por via da experimentação ou da tentativa e erro, uma possível solução seria a que envolve os valores 30 e 2, pois a sua soma é 32, a sua diferença é 28 e o seu produto é 60; logo, 32 + 28 + 60 = 120.

Em contexto de sala de aula, seria interessante que os alunos tentassem investigar se ainda seria possível obter-se outras soluções. O desejável era estruturar a resolução em termos algébricos, pois poder-se-ia pensar em dois números inteiros positivos «x» e «y», sendo «$x \geq y$». O enunciado da tarefa permite a seguinte escrita matemática: $x + y + (x - y) + xy = 120$. Resolvendo esta equação, resulta que $x = 120 / (2 + y)$. Ora, este resultado implica que se tenha que pensar num valor inteiro positivo para o «y» de modo que ao adicionar-se ao valor 2, o resultado divida exactamente o valor 120. Assim, obter-se-á um valor inteiro para o «x»;

l) Tendo em conta esta análise, seria interessante que os alunos encontrassem todos os divisores do 120, podendo fazê-lo pelo processo de decomposição em factores primos (factorização): $120 = 23 \times 3 \times 5$. O conjunto dos divisores de 120 seria formado pelos seguintes elementos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120. Voltando novamente à fórmula: $x = 120 / (2 + y)$, obter-se-ão sete respostas:

y	x	$x + y$	$x - y$	xy	$x + y + (x - y) + xy$
0	60	60	60	0	60 + 60 + 0 = **120**
1	40	41	39	40	41 + 39 + 40 = **120**
2	30	32	28	60	32 + 28 + 60 = **120**
3	24	27	21	72	27 + 21 + 72 = **120**
4	20	24	16	80	24 + 16 + 80 = **120**
6	15	21	9	90	21 + 9 + 90 = **120**
8	12	20	4	96	20 + 4 + 96 = **120**
10	10	20	0	100	20 + 0 + 100 = **120**

Logo, as oito respostas possíveis envolvem os seguintes pares ordenados (60, 0); (40, 1); (30, 2); (24, 3); (20, 4); (15, 6); (12, 8) e (10, 10).

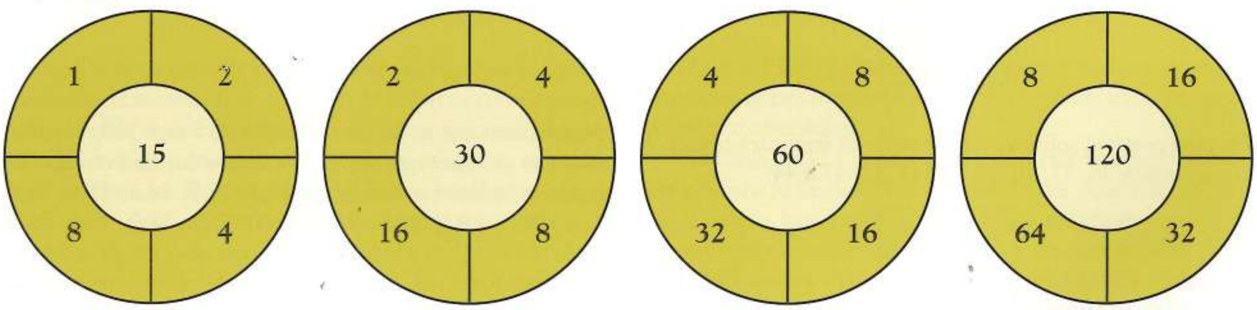


Figura 1.

Note-se que ao adicionar-se o valor de «y» ao valor 2, obtém-se um divisor de 120, que ao multiplicar pelo respectivo valor de «x», outro divisor de 120, obtém exactamente o produto 120, isto é: (2, 60); (3, 40); (4, 30); (5, 24); (6, 20); (8, 15); (10, 12) e (12,10);

m) Pensemos agora no seguinte enunciado: tente encontrar dois números inteiros positivos, de modo a obter-se o valor 120 pela adição da soma do dobro do maior dos dois valores com o outro e com a diferença do dobro do maior com o outro e com o produto do dobro do maior com o outro;

Neste caso, voltando a ser «$x \geq y$», estamos perante a seguinte equação: $2x + y + (2x - y) + 2xy = 120$. A sua resolução permite chegar-se à seguinte igualdade: $x = 120 / (4 + 2y)$. Fazendo-se uma tabela semelhante à anterior:

y	x	$2x + y$	$2x - y$	$2xy$	$2x + y + (2x - y) + 2xy$
0	30	60	60	0	60 + 60 + 0 = **120**
1	20	41	39	40	41 + 39 + 40 = **120**
2	15	32	28	60	32 + 28 + 60 = **120**
3	12	27	21	72	27 + 21 + 72 = **120**
4	10	24	16	80	24 + 16 + 80 = **120**

Resultam cinco possíveis soluções: (30, 0); (20, 1); (15, 2); (12, 3) e (10, 4).

Fazendo-se um paralelismo entre as duas tarefas acabadas de analisar, seria interessante desafiar os alunos a procurarem o enunciado que permite, para o resultado 120, as seguintes soluções: (15, 0); (10, 1); (6, 3) e (5, 4)?

Em síntese, e tirando partido do número 120, este texto visa evidenciar que o tema das conexões matemáticas pode contribuir para que os alunos tenham uma visão integrada da Matemática, onde os conceitos manifestem múltiplas relações entre si e com aspectos da sua vida quotidiana (House & Coxford, 1995; Ortega, 2005; Afonso, 2006a; 2008b). Cabe ao professor criar cenários de aprendizagem baseados em pequenas investigações e em trabalho diferenciado, de modo a que esta visão holística da Matemática possa chegar à sala de aula.

Bibliografia

Afonso, P. (2006a). Investigações e Conexões Matemáticas. In *Actas* do 2[nd] Internacional Meeting — Elementary Mathematics Education (EME06) — Suporte DVD (ISBN 978-972-99970-5-1). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação.

Afonso, P. (2006b). A Magia das Conexões Matemáticas — um caso envolvendo os números triangulares. *Educação e Matemática*, 90, pp. 35–38.

Afonso, P. (2008a). Conexões Matemáticas: As Potências de Base 2. *Educação e Matemática*, 97, pp. 33–36.

Afonso, P. (2008b). *O Mundo Mágico das Conexões Matemáticas*. Castelo Branco: IPCB.

Berloquim, P. (1991). *100 Jogos Numéricos*. Lisboa: Gradiva.

House, P., & Coxford, A. (1995). *Connecting Mathematics across the Curriculum*. Reston: NCTM.

Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona: GRAÓ.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Conjectura_de_Goldbach, consultado a 7 de Abril de 2009.

Paulo Afonso

ESE/IP de Castelo Branco

1.º Fórum de Investigação em Ciências da Educação

O 1.º Fórum de Investigação em Ciências da Educação é uma iniciativa das Unidades de I&D em Ciências da Educação. Pretende ser um espaço de debate e diálogo inter Unidades sobre as políticas e práticas de investigação, seus problemas e perspectivas.

Terá lugar nas instalações da Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade de Lisboa, nos dias 16 e 17 de Outubro de 2009. As inscrições são gratuitas mas sujeitas a inscrição até 30 de Julho de 2009. Para mais informações consulte:

http://fice.ie.ul.pt/

Sobre o papel dos Departamentos de Matemática na vida e desenvolvimento da comunidade

Este artigo pretende estimular a discussão no meio matemático sobre o lugar que a Universidade e, em particular, os respectivos Departamentos de Matemática (DM) deve ocupar na comunidade em que se insere. A perspectiva clássica de que a Universidade, por ser portadora do conhecimento científico, desempenha um papel fulcral no desenvolvimento intelectual é hoje questionada pelo simples facto de que a sua participação no processo educativo global é apenas uma pequena parcela de entre muitas componentes.

Criado em 2005 por docentes do departamento de Matemática da Universidade de Aveiro (DMat), o grupo de trabalho EECM [4] dedica-se desde o início a desenvolver actividades na área da educação não formal e que são implementadas no exterior do DMat. Neste processo é envolvido um largo espectro da comunidade: crianças dos 4–13 anos, pais e educadores dessas crianças, jardins-de-infância e escolas de todos os ciclos do ensino básico e do ensino secundário. Convém aqui salientar a organização de «workshops» de matemática destinados a pais/educadores de crianças dos 4–9 anos. Foi também da responsabilidade do EECM a organização, em 2007, dos dois primeiros cursos de matemática da Academia de Verão da UA dirigidos a alunos dos grupos etários 12–15 e 15–18 [4].

Um dos problemas com que nos deparámos desde sempre relaciona-se com o entendimento por parte dos nossos colegas sobre a natureza do trabalho por nós desenvolvido. Muitos são aqueles para os quais a educação não formal é uma actividade menor, e que consideram ser uma «brincadeira» todo o envolvimento com crianças, daí não ser uma actividade importante... A existência deste preconceito e tentar alterar esta situação é a principal razão deste artigo.

Tendo presente a actividade por nós desenvolvida até ao presente momento e que pretendemos continuar a desenvolver, parece-nos primordial esclarecer quais os princípios que norteiam a nossa acção. Mais, esperamos deste modo poder sensibilizar alguns dos nossos pares para também eles desenvolverem trabalho em educação não formal com/para crianças ou com/para alunos dos ensinos básico e secundário. Contrariamente ao que possa parecer à primeira vista, a nossa acção não é motivada por razões quixotescas próximas de uma militância altruísta. O que nos move é acreditar com convicção nos resultados que deste modo é possível alcançar [8].

Vamos começar por expor o que pensamos serem alguns dos problemas da actualidade que atravessam transversalmente todas as universidades. Simultaneamente, vamos também tentar explicar porque é que a actuação dos DM é importante e porque é que cremos estarem reunidos os pressupostos para que eles desempenhem um papel significativo junto da comunidade.

Um dos aspectos fundamentais para as instituições é o seu financiamento. Actualmente, o financiamento das universidades depende em grande parte do afluxo de novos estudantes. Daí ser fundamental para as instituições cativar os futuros alunos... Deste modo, torna-se importante a opinião que a comunidade tem sobre a capacidade que a universidade demonstra para preparar especialistas competitivos nas respectivas áreas de actividade: com boas bases de formação e com bons hábitos de trabalho.

No panorama actual, o estudante médio que ingressa no ensino superior revela uma preparação desadequada para os programas que lhe são propostos no âmbito da matemática superior, manifestando frequentemente grandes dificuldades perante os mesmos. Contrariando todas as expectativas existentes, a realidade revela que o estudante que chega à universidade foi sujeito, durante a sua escolaridade, a processos que incidem preferencialmente na repetição de técnicas e na execução de sequências de diferentes algoritmos. (O leitor interessado na problemática do behaviourismo em educação encontra bastante literatura disponível, nomeadamente [5]).

Durante décadas um dos objectivos principais do ensino secundário consistia em preparar os alunos para o seu ingresso no ensino superior. Actualmente, entre as finalidades do ensino secundário já não se encontra tal desígnio. Não é de admirar, portanto, que exista um desfasamento entre a preparação dos jovens à entrada nas universidades e a exigência dos programas universitários. Urge resolver este problema.

O que temos e o que propomos:

1. O ensino universitário depende da qualidade da preparação dos jovens que concluem o ensino secundário,
2. As escolas secundárias não têm total responsabilidade sobre essa mesma qualidade.

Conclusão: À universidade interessa-lhe poder controlar e poder influenciar todo o processo de qualificação dos estudantes.

Não nos parece correcto tentar atribuir a causa do problema da preparação dos jovens que entram no ensino superior à qualidade da formação inicial dos professores ou à quantidade das acções de formação contínua que frequentam durante a sua carreira profissional. Desde o primeiro ciclo que os professores trabalham com programas que foram pensados para turmas com grande número de crianças. O dimensionamento destas turmas não permite que se desenvolva com regularidade trabalho individual com as crianças. Ora, este tipo de trabalho é fundamental na detecção da existência de focos de incompreensão e na eliminação dos mesmos.

A existência de círculos experimentais de matemática (CEM) a funcionar regularmente nas escolas e com a participação dos professores das universidades pode contribuir para a resolução deste problema [1]. A frequência de cursos intensivos durante as férias de verão (ou outros períodos de férias) permite que os jovens aprofundem alguns aspectos do conhecimento que não lhes é proporcionado no ensino regular.

Preparar uma geração é um processo demorado e envolve um investimento que tem que ser feito ao longo de um vasto período. Por vezes, o entendimento entre financiadores e universidades não é o melhor. O apoio económico depende, entre outros factores, da opinião que a sociedade tem da importância do trabalho desenvolvido pelos cientistas.

O ensino de crianças por cientistas: gasto desproporcional de recursos?

Começando por um exemplo: há pouco tempo uma mãe colocou a seguinte situação: as suas filhas gémeas, de 6 anos de idade, perguntaram-lhe, «*porque é que os números não param de aumentar? Existe um último número?*» A mãe em causa tem uma boa formação pessoal e receou dar uma resposta que fosse incorrecta. Note-se que esta mesma questão colocada a um cientista pode ser motivo para discutir com as crianças muitos modelos e teorias simples. Podendo o tema ser abordado sucessivamente ao longo dos anos. Pode começar-se com a sugestão de se (re)contarem todos os bebés nascidos e/ou que ainda irão nascer; depois pode pedir-se às crianças que sugiram elas próprias algum assunto. Ao analisar conjuntamente o tema proposto pela criança, pode acontecer que este último conduza a uma situação em que exista um «último número». A regularidade de tais conversas permite que depois de alguns anos ela chegue a discutir, por exemplo, a incomensurabilidade da diagonal do quadrado. Para o cientista (e para o professor com experiência de cientista) cada pergunta colocada pela criança torna-se num tópico para uma conversa, durante a qual ele pode fazer observações ou colocar questões que estejam na base de futuras reflexões. Ainda relativamente ao exemplo colocado, pode perguntar-se: *Quantos milhares são precisos para contar as estrelas? Mil? Pode ser... Porque se acendem as estrelas, ... Se as estrelas se acendem, alguém deve precisar disso...*

A sociedade portuguesa manifesta preocupação e alguma dificuldade em aceitar o analfabetismo e a iliteracia. Surpreendentemente, o mesmo não acontece relativamente ao desconhecimento de conceitos elementares associados à Matemática. Não existe qualquer relutância não só em aceitar, como até em desculpabilizar a iliteracia matemática. O mais preocupante é que esta atitude atravessa transversalmente toda a sociedade portuguesa, incluindo os próprios professores. Quanto aos pais, a sua atitude é mais de resignação, vendo este problema como mais um dos desígnios do nosso fado! Em geral, também os próprios pais não tiveram grande sucesso em Matemática!

Lutar contra esta situação é uma das finalidades da realização de *workshops* para pais de crianças em idade do pré-escolar e do 1° ciclo do ensino básico. Durante estas sessões de trabalho é possível (in)formar os pais sobre algumas ideias presentes no processo de educação integral das crianças, desde a mais tenra idade, e explicar-lhes o valor fundamental que a colaboração dos pais tem nesse processo [4]. A sociedade condena todo o pai que não providencie o bem estar físico dos seus filhos, sendo de aceitação comum que esta é uma das obrigações dos pais. No entanto, a mesma sociedade manifesta-se indiferente para com aqueles pais que deixam os seus filhos sem alimento intelectual. Mudar a atitude dos pais sobre a importância real do papel que podem ter no desenvolvimento intelectual dos seus filhos é uma tarefa fundamental e que urge ser implementada.

Qual é o objectivo do cientista que trabalha com crianças e de que forma é que ele pode ajudar os professores?

O sistema de educação actual tem por base o axioma de Volter: «*a criança é uma folha de papel em branco que precisamos de preencher*». Assim, os professores fornecem às crianças vários conjuntos de saberes. Convém salientar, aqui, a importância de cada falha neste sistema. Por exemplo, os danos provocados pela acção de um mau professor durante um certo período de tempo podem levar alguns anos a ser reparados. Se recorrermos às ideias de Pestalozzi e tornarmos interessante o objecto de estudo, o processo educativo torna-se mais efectivo. Quando as crianças têm interesse nos assuntos, elas próprias solicitam os saberes. Ao ajudarmos a criança a sentir em si a capacidade de analisar, raciocinar e concluir, fazemos com que ela deixe de reproduzir acriticamente aquilo que vê. Neste caso já não são os professores que reclamam pelos conhecimentos dos alunos, mas é a própria criança que fica na posição de reclamante. Em termos futuros podemos ter a certeza que, independentemente das circunstâncias, uma criança cuja educação aposte no desenvolvimento dos saberes que a interessam, tornar-se-á num bom especialista. Neste sentido, a actuação do cientista vai permitir despertar e aumentar o interesse da criança pela descoberta e pelo conhecimento. A sua acção não pretende de modo algum substituir o papel do professor em situação de sala de aula, mas sim ajudar a descobrir novos focos de interesse para a criança, abordando os respectivos assuntos de forma clara e com a profundidade adequada ao nível etário e desenvolvimento da criança.

A dificuldade em trabalhar com alunos do pré-escolar

O trabalho de educação não formal com crianças do pré-escolar permite ao professor universitário testar o seu próprio sistema de comunicação. As crianças desta idade são espontâneas, estão abertas para coisas novas e não têm juízos pré formados. A espontaneidade, em particular, permite ter a certeza de que se as crianças não o querem ouvir, isto deve-se ao facto de o assunto que lhes está a apresentar não os interessar. Para interessar a criança é necessário «descer» ao seu nível e é preciso conhecer muito bem as representações que ela tem. Isto só é possível quando se realiza trabalho individual com a criança. «Trabalho» é a palavra adequada, porque a preparação das sessões com crianças exige uma constante reflexão sobre o que cada uma sabe e quais são as suas respectivas representações. É fundamental que se tente perceber porque em dado momento se desinteressam as crianças, isto no sentido de averiguar se a razão do desinteresse reside em alguma falha de comunicação ou se é o assunto que é inadequado. Para que as crianças se interessem pelos assuntos não é necessário transformar tudo em brincadeira e que o seu interlocutor seja um «palhaço», mas é necessário que elas o entendam.

Existe um sentido que determine a interacção dos DM e das escolas?

Ao longo da história pode observar-se que quando uma sociedade se apercebe da existência de defeitos no sistema educativo procede de imediato à criação de comissões e por vezes à atribuição de fundos. Na realidade, a educação escolar existe já há mais de 2 mil anos e, ingenuamente, pensa-se sempre que mais um esforço vai conduzir o sistema para a perfeição. (Um exemplo clássico é o «boom» das reformas que foram efectuadas nos EUA imediatamente após o lançamento do primeiro satélite russo [5,6]).

O autor (E.L.) na altura em que iniciou a sua actividade de educação complementar em matemática na Rússia ficou surpreendido por não existir uma estratégia comum na forma de lidar com as crianças. Em cada região do país foi desenvolvida uma abordagem própria. Isso foi devido não só à vastidão do país, mas também ao facto de muitos dos cientistas e professores terem motivações diferentes. No entanto, todos eles tinham uma causa comum: o trabalho com crianças. Um outro aspecto muito importante consiste na ajuda dada pelos alunos «mais velhos» e estudantes universitários. Este tipo de experiência está presente na sociedade portuguesa: organizações de escuteiros trabalham recorrendo a um princípio semelhante há já mais de cem anos. O processo de funcionamento é bastante simples: os alunos «mais velhos» e os estudantes universitários participam como monitores dando assistência ao processo de educação dos mais jovens. Deste relacionamento resulta a criação de laços afectivos entre as crianças e os jovens monitores. Estes tornam--se modelos para as crianças e, estas com o decorrer do tempo criam o desejo de ser como eles. Saliente-se que o recurso a tal prática pedagógica é muito útil para a formação de futuros especialistas, sem que para isso seja necessário gastar muito tempo. O recurso a monitores possibilita, também, o envolvimento de um maior número de crianças.

Referências

[1] S. Genkin, I. Itenberg, D. Fomin, Mathematical Circle: (Russian Experience), American Mathematical Society; 1 edition (July 1996).

[2] Urie bronfenbrenner, Two worlds of childhood: U.S. and U.S.S.R. New York: Russel Sage Foundation 1970.

[3] http://www.ams.org/distribution/mmj/vol1-4-2001/dedication.html

[4] Escola de Educação Complementar em Matemática, http://eecm.mat.ua.pt

[5] Malaty, G., 1998, Eastern and Western mathematical education: unity, diversuity and problems. In: Int. J.Math. Educ/ Sci. Technol., 3, pp. 421–436. Solmu, 1997.

[6] R. Feinman, Surely You're Joking, Mr. Feynman! W. W. Norton, 1985

[7] www.naturalmath.com, Maria Droujkova.

[8] C. P. Peirce, Issues of pragmatism, Dover Publications, Inc, 1955.

Evgeny Lakshtanov

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Materiais para a aula de Matemática

Construção de triângulos — Desigualdade Triangular

Este material de sala de aula é uma proposta para abordar a desigualdade triangular no 3° ciclo do ensino básico. Como metodologia de sala de aula o autor sugere o trabalho em pequenos grupos, a utilização de palhinhas de diferentes comprimentos e a possibilidade de usar *software* de geometria dinâmica. Recomendamos a leitura do artigo «A propósito da desigualdade triangular», publicado neste número da revista.

José Avelino Carmo

EB 2.3/S de Arcos de Valdevez

Construção de triângulos — Desigualdade triangular

O Problema

A Ana e a Beatriz são duas amigas da mesma turma que vivem, respectivamente, a 7 km e 4 km da escola que frequentam. Qual é a distância entre a casa da Ana e a casa da Beatriz?

Simulação com palhinhas

1. Fazendo a simulação das distâncias com palhinhas, discutam as seguintes questões:

   1.1. Será possível as duas amigas viverem a 10 km uma da outra?

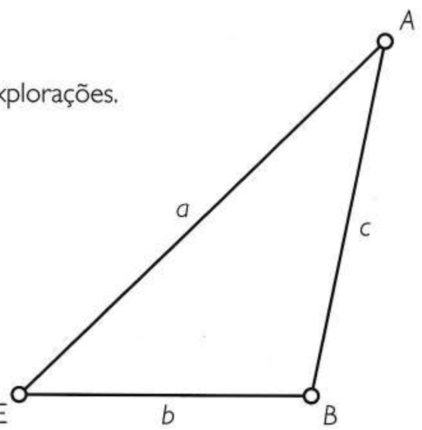
   1.2. Será possível as duas amigas viverem a 12 km uma da outra?

   1.3. Será possível as duas amigas viverem a 2 km uma da outra?

   1.4. Qual poderá ser a distância máxima entre as casas das duas amigas? E a mínima?

   1.5. Qual é, afinal, a distância entre as casas das duas amigas?

Sugestão: Tentem construir triângulos com as palhinhas e registem as vossas explorações.



Desigualdade triangular

2. As casas A e B das duas amigas e a escola E são os vértices de um triângulo de lados $a = 7$, $b = 4$ e $c = 5$.

   2.1. Completa a tabela.

a	b	c	$a+b$	$a-b$	$a+c$	$a-c$	$c+b$	$c-b$

   2.2. Compara o comprimento de cada lado do triângulo com a soma e a diferença dos outros dois. O que concluis?

   2.3. Tira conclusões sobre a relação entre os comprimentos dos três lados de um triângulo (desigualdade triangular).

A propósito da desigualdade triangular

Relato de uma aula com uma turma do 7º ano

José Avelino Carmo

A escolha dos problemas para a sala de aula e a sua ligação (aplicação) a situações da vida quotidiana dos alunos constitui um desafio, tanto para o professor, preocupado em apresentar problemas interessantes e que despertem a curiosidade e a discussão entre os alunos, como para os próprios alunos, que, por vezes, não estão à espera de encontrar tantas ligações da Matemática com a realidade, nem várias soluções diferentes (e correctas) para o mesmo problema, principalmente quando se trata de um problema aberto.

A resolução de problemas, as actividades de investigação e a articulação entre estes dois tipos de experiências de aprendizagem, para além dos aspectos transversais da aprendizagem da Matemática, aos quais se juntam os materiais manipuláveis e as novas tecnologias, são alguns dos aspectos presentes na tarefa apresentada a uma turma do 7° ano, que passo a descrever.

Para introduzir o conceito de desigualdade triangular, recorri ao seguinte problema: A Ana e a Beatriz são duas amigas da mesma turma que vivem, respectivamente, a 7 km e 4 km da escola que frequentam. Qual é a distância entre a casa da Ana e a casa da Beatriz?

Depois de distribuir uma ficha com o problema e algumas questões orientadas para exploração e obtenção das respostas pretendidas, mandei um aluno ler o problema em voz alta. Logo que a Vanessa acabou de ler o problema, diz o Luís: «é fácil, as duas amigas vivem a 11 km uma da outra». Estava aberta a discussão. Perguntei a esse aluno como tinha chegado à resposta de 11 km e, prontamente, ele pediu para fazer um esquema (figura 1) no quadro para explicar melhor: «se aqui está a escola (ponto E), a Ana vive a 7 km e a Beatriz a 4 km, então 7 + 4 = 11» (figura 1).

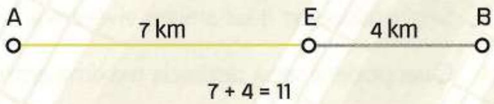


Figura 1.

Pareceu-me que toda a turma ficou convencida de que aquele raciocínio estava correcto, mas o esquema feito pelo Luís foi mais um ponto de partida para outra resposta. Diz então a Jennifer: «já sei, vivem a 3 km uma da outra, porque 7 – 4 = 3, pois elas podem viver ambas para o mesmo lado».

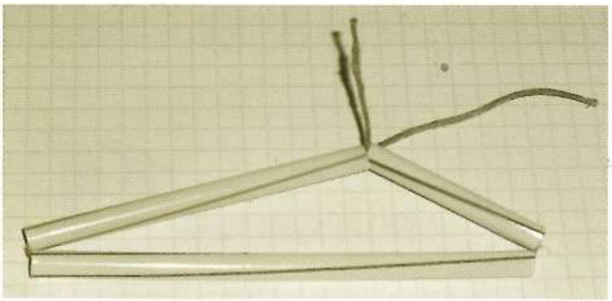


Figura 2.

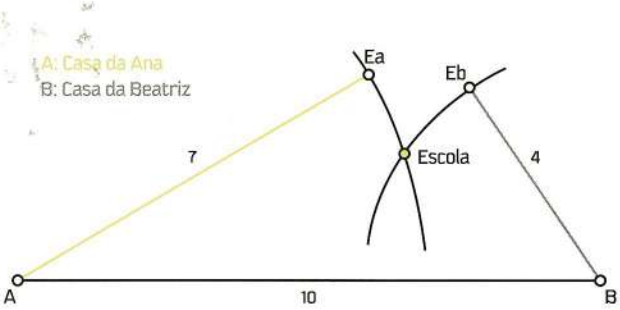


Figura 3.

Voltei-me para a turma e perguntei se um problema, aparentemente tão simples, podia ter duas respostas correctas. Surge então a resposta mais inesperada de uma aluna — Carina — com fracos resultados em Matemática: «não conhecemos a Ana nem a Beatriz, por isso não sabemos a resposta correcta». Esta observação, embora pertinente, não provocou grande reacção nos alunos. Talvez aqui se levante o problema da capacidade de abstracção, pouco desenvolvida na maioria dos alunos. Geralmente, os alunos estão à espera de encontrar uma única resposta, que julgam ser a correcta, talvez por não estarem habituados a resolverem problemas mais abertos, ou por pensarem que a matemática tem de encontrar sempre uma única resposta para um problema concreto.

Pareceu-me que a discussão estava a esmorecer e ainda não tinha entrado no tema que pretendia explorar. Disse para avançarem para a primeira questão da ficha de trabalho (materiais para a sala de aula). Será que as duas amigas podem viver a 10 km uma da outra? Agora não houve nenhuma resposta imediata, embora, timidamente, alguns alunos começassem a dizer que sim. Distribuí pelos alunos 3 palhinhas de sumo, já cortadas com 7, 4 e 10 cm de comprimento. Voltei-me novamente para a turma: Suponham que estas palhinhas representam as três distâncias em causa, à escala, como é óbvio. Já agora, alguém sabe qual é a escala que estamos a usar? A Jennifer disse logo: «é assim, 1 cm representa 1 km, por isso a escala é 1 para 1 km, não, é 1 para 1000».

Para além da simulação de situações da realidade, é importante fazer, sempre que possível, conexões com outros conteúdos, não só para os relembrar, mas principalmente para que os alunos vejam a articulação e a aplicação de conteúdos anteriores em novas (ou diferentes) situações, aspecto em que a Matemática é muito rica.

Inicialmente, alguns alunos não estavam a perceber para que serviam as palhinhas. Outros fizeram logo um triângulo (fotografia da figura 2).

Depois de todos os alunos, em grupos de dois, terem construído o triângulo com as palhinhas, mostrei através de um *sketch* em *Geometer's Sketchpad* (figura 3), pronto a utilizar, como podiam fazer a construção do triângulo partindo da distância ($c = 10$) entre a casa das duas amigas.

Naquele momento os alunos estavam convencidos de que as duas amigas podiam viver a 10 km uma da outra. Neste caso, as suas casas e a escola já não estavam alinhadas na mesma recta.

Para alimentar a discussão, coloquei uma questão que não estava na ficha — Quantas soluções tem o problema? Houve alunos que disseram muitas e houve até quem dissesse que qualquer solução servia. Avançamos então para a questão seguinte — Será que as duas amigas podem viver a 12 km uma da outra? Distribuí mais três palhinhas por cada par (com 7, 4 e 12 cm de comprimento) e os alunos começaram a construir o *triângulo* (figura 4). Quase de imediato começaram a surgir as respostas: «não dá um triângulo, porque este lado é maior do que os outros dois» .

Pareceu-me que os alunos ficaram convencidos de que a distância máxima entre as casas das duas amigas não podia passar de 11 km. Mostrei essa impossibilidade através de um novo *sketch* (figura 5).

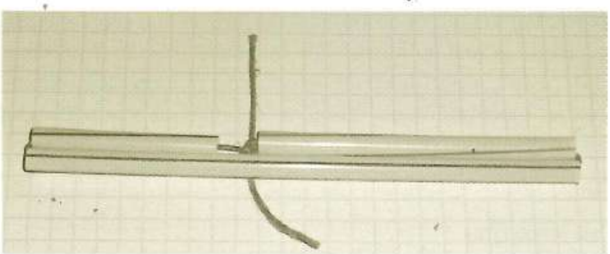


Figura 4.

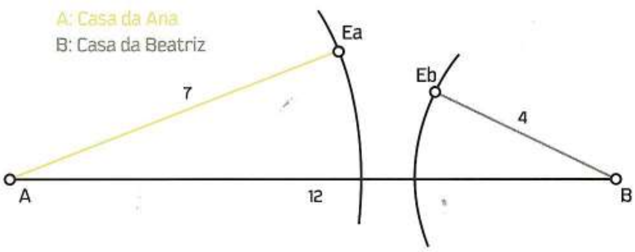


Figura 5.

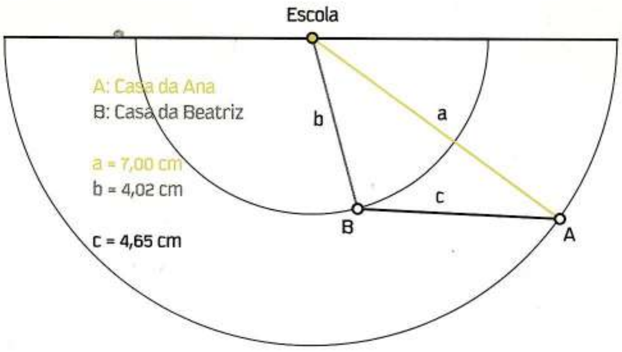
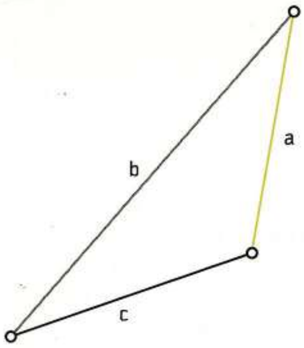


Figura 6.



b – c	a	b + c
3,38 cm	3,95 cm	10,32 cm
2,94 cm	4,08 cm	11,17 cm

a – c	b	a + c
1,08 cm	3,48 cm	14,69 cm
0,04 cm	7,06 cm	8,20 cm

a – b	c	a + b
7,49 cm	7,88 cm	15,28 cm
2,98 cm	4,12 cm	11,14 cm

Figura 7.

Perguntei qual poderia ser a distância mínima. Houve quem adiantasse que podia ser qualquer distância menor do que 11 km, mas alguns alunos refutaram logo dizendo que não podia ser inferior a 3 km. Distribuí novamente três palhinhas por cada par (com 7, 4 e 2 cm de comprimento) e os alunos aperceberam-se logo que, desta vez, também não conseguiam formar um triângulo. Mostrei também essa impossibilidade através de outro *sketch*. A resposta ao problema passou a ser óbvia — a distância entre as casas das duas amigas pode variar entre 3 e 11 km, inclusive.

Para generalizar a resposta ao problema mostrei mais um *sketch* animado (figura 6) onde os alunos podiam ver todas as possíveis soluções (neste caso infinitas). É uma boa forma de finalizar a discussão e exploração deste problema.

Como os lugares geométricos fazem parte do programa do 8º ano, este é um problema que pode ser abordado pelos alunos em ambiente de geometria dinâmica, através da construção de duas circunferências com centro num ponto designado por escola.

Só depois de toda esta discussão surgiu a necessidade de relacionar os três lados de um triângulo, através de uma questão que se encontrava na ficha de trabalho — Supondo que as casas das duas amigas e a escola formam os vértices (A, B e E) de um triângulo de lados $a = 7$, $b = 4$ e $c = 5$ (distância entre as casas das amigas), compara cada lado do triângulo com a soma e a diferença dos outros dois. O que concluis?

Depois de os alunos completarem uma tabela, com a soma e a diferença de cada um dos pares de lados possíveis, facilmente concluíram que qualquer lado é menor do que a soma dos outros dois e maior do que a sua diferença (desigualdade triangular). Para mostrar que esta desigualdade é válida para qualquer triângulo, recorri a outro *sketch* (figura 7), com três tabelas para comparar cada lado com a soma e a diferença dos outros dois, em que alguns alunos mexeram, arrastando um dos vértices e verificando que aquela desigualdade se mantinha válida, qualquer que seja a forma do triângulo.

Esta conclusão foi depois trabalhada de outra forma: Será que quaisquer três medidas podem ser lados de um triângulo? Em que situações é que isso acontece? Depois de resolvido um exercício do manual, chegou-se a uma conclusão mais simples: três medidas podem ser lados de um triângulo se a soma das duas mais pequenas for maior do que a terceira.

Para além do carácter experimental da tarefa proposta, estes problemas podem mostrar aos alunos que a Matemática não é um corpo de conhecimentos acabado, mas sim em constante construção, havendo sempre lugar para a descoberta. Por vezes, pôr os alunos a discutirem um problema, de preferência real ou retirado da realidade (versão simplificada), pode conduzi-los para descobertas matemáticas importantes, mostrando que, afinal, a Matemática tem aplicação em muitas situações reais, além de promover o espírito crítico e reflexivo nos nossos alunos, cidadãos de amanhã.

José Avelino Carmo
EB 2,3/S de Arcos de Valdevez

Acesso à internet durante os exames

Público

ÚLTIMA HORA

Medida piloto

Estudantes dinamarqueses poderão ter acesso à Internet durante exames

11.05.2009 - 14h46

O Ministério da Educação dinamarquês vai testar a utilização da Internet durante exames em algumas escolas do ensino secundário.

A medida baseia-se na ideia de que os alunos não deveriam ser privados de uma ferramenta tão usada nos seus estudos como um computador, até porque outros aparelhos como calculadoras já são permitidos actualmente.

"É um bom meio para pesquisar dados históricos ou artigos que podem ser úteis num exame escrito" disse a semana passada Soren Vagner, um consultor do Ministério da Educação dinamarquês ao jornal MetroXpress.

O consultor deixou claro, no entanto, que os examinadores iriam estar atentos a plágios ou a conversas online com terceiros durante os exames. Os examinadores irão conduzir inspecções aleatórias ao historial de busca dos computadores dos alunos e vão confirmar se as respostas foram copiadas literalmente de outra fonte.

Os alunos parecem satisfeitos com a iniciativa: "É uma boa medida, já que os exames devem reflectir a realidade" disse Mina Bernardini, presidente da Associação das Escolas Secundárias Dinamarquesas ao jornal Politiken. "Quando fazemos trabalhos ou relatórios para a escola também usamos a Internet" acrescenta.

Segundo o mesmo jornal, a medida será testada no Outono, em exames fictícios. Se a iniciativa for bem sucedida, será colocada em prática de forma oficial em 2011.

In Público, 11 de Maio de 2009

O Ministério da Educação dinamarquês vai testar a utilização da Internet durante exames em algumas escolas do ensino secundário.

A medida baseia-se na ideia de que os alunos não deveriam ser privados de uma ferramenta tão usada nos seus estudos como um computador, até porque outros aparelhos como calculadoras já são permitidos actualmente.

De acordo com o jornal *Público* de 11 de Maio de 2009, está a ser ponderada a possibilidade de os alunos poderem, a partir de 2011, passar a aceder à internet durante a realização de exames do ensino secundário. Isso mesmo! A ideia é que os alunos possam fazer livremente as pesquisas que entenderem. E não, não se trata de uma proposta do nosso Ministério da Educação, mas do dinamarquês.

Que razões podem fundamentar a intenção de avançar com esta medida é uma das grandes questões que surge de imediato. Pretende-se disponibilizar aos alunos um meio para encontrar alguém que possa realizar o exame por eles? Ou que de alguma forma encontrem as respostas na internet e as copiem para a sua prova? É óbvio que não! Ainda assim, é igualmente óbvio que estas são questões que o acesso à internet nestes momentos suscita e a que os proponentes desta ideia não estão alheios. Por isso mesmo pretendem realizar em Outubro uma espécie de teste à iniciativa, utilizando exames fictícios e recorrendo a inspecções aleatórias ao historial de busca dos computadores usados pelos alunos, para detectar conversas online e respostas integralmente copiadas da internet. Mas que implicações teria uma medida destas, é algo que seria interessante ponderar, tanto ao nível do exame propriamente dito, como ao nível do processo de ensino. Será que as questões do exame continuariam a ser do mesmo tipo? Será que a abordagem de certos conteúdos de uma determinada maneira deixaria de fazer sentido? E que implicações teríamos ao nível do tipo de trabalho em que os alunos se envolveriam nas aulas?

O consultor do Ministério da Educação dinamarquês, Soren Vagner, ao defender a iniciativa afirmou que a internet «é um bom meio para pesquisar dados (...) úteis num exame escrito», referindo-se ainda à intenção de aproximar as características do trabalho que é realizado no exame às do trabalho que é realizado no decorrer do processo de ensino e aprendizagem. Está assim implícita uma valorização de conhecimentos relativos a procurar e seleccionar informação, articulando-a depois de forma consistente e apresentando-a sob a forma de resposta à questão formulada. Esta valorização propicia o surgir de umas quantas questões, nomeadamente as que se relacionam com a adequação do tipo de trabalho preconizado a uma prova escrita de tempo tão limitado. Será que faria sentido considerar outras alternativas? Poder-se-ia considerar, por exemplo, a inclusão de uma discussão oral do trabalho realizado, onde o aluno fundamentaria as suas opções e opiniões?

Helena Rocha
Manuela Pires

Construção do algoritmo para a divisão de fracções

Relato de uma experiência com alunos do 6ºano de escolaridade[1]

Luísa Selas

A nível do 6º ano de escolaridade, a tradicional dificuldade dos alunos nas operações com fracções salienta-se, muito particularmente, no que se refere à divisão. Existem recomendações no sentido de a divisão de fracções começar por ser abordada de uma forma conceptual, tirando partido dos conhecimentos sobre números e operações de que os alunos sejam já detentores (NCTM, 2000). Mas, se na introdução às fracções, e à sua adição, subtracção e multiplicação é mais ou menos frequente o recurso a representações concretas ou pictóricas, a divisão de fracções é, em geral ensinada partindo apenas do algoritmo e, portanto, sem qualquer suporte visual ou conceptual.

A transmissão da regra (*inverter e multiplicar*), quer feita simplesmente, quer apoiada em justificações envolvendo a manipulação de expressões racionais algébricas, acaba por deixar os alunos confusos e incapazes de saber quando aplicá-la. Impõe-se, portanto, desenvolver estratégias de ensino/aprendizagem significativas para o aluno que possam conduzir à interiorização, por parte destes, do algoritmo da divisão de fracções.

O recurso a actividades de natureza investigativa na sala de aula de matemática tem sido fortemente recomendado, tanto no nosso país (Ponte & Matos, 1996), como a nível internacional (NCTM, 2000). Actividades investigativas poderão ser uma forma de envolver os alunos nas suas próprias aprendizagens, quer motivando-os, quer levando-os a formular conjecturas. Investigações várias têm mostrado a possível eficácia de tais abordagens no ensino/aprendizagem, nomeadamente, no contexto das fracções, em particular com alunos com mais dificuldades.

Aprendizagem do algoritmo da divisão de fracções: uma actividade investigativa

É recomendado o uso de materiais de manipulação e de representações pictóricas antes do ensino dos algoritmos, e que se tire partido de situações do real (Bezuk & Bieck, 1993). Stuart (2000), salienta que a maioria dos alunos referem que o uso de manipuláveis como uma ferramenta para instrução os ajuda a ver a origem dos números nas fórmulas. No entanto, podendo embora promover novas oportunidades de aprender, os materiais manipuláveis não asseguram que os alunos aprendam matemática, sendo necessário fazer a transferência das ideias manipuláveis para o papel (Cobb, Yackel, & Wood, 1992).

Tem havido tentativas de abordagens de ensino que se pensa poderem ajudar o aluno a aprender o algoritmo da divisão de forma motivadora e significativa: a partir da exploração de situações de manipulação, os alunos chegam a uma listagem de resultados de divisões, a partir da qual poderão conjecturar, identificando um padrão. Numa destas abordagens, partiu-se da manipulação de materiais para explorar situações de subtracção sucessiva (Sharp, 1998). Numa outra, usou-se a ideia da divisão como o número de partes necessárias para cobrir uma outra parte de outro tamanho (Bezuk & Armstrong, 1993). Ambas as estratégias tiveram por base a ideia de que a aprendizagem dos alunos deve ser construída a partir de conhecimentos prévios básicos dos alunos sobre fracções e sobre divisão com números inteiros.

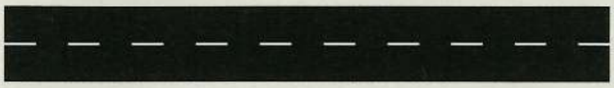
Trabalho na Estrada: Alcatroamento

Paulo e a sua equipa alcatroaram $1/8$ de um quilómetro de estrada num só dia. $1/8$ de um quilómetro é representado por esta faixa:

1. Em Março, o Paulo e a sua equipa alcatroaram uma secção de $1/2$ quilómetro da estrada a seguir representada. Quantos dias utilizaram para terminar o trabalho?

   Primeiro tenta estimar quantas vezes a faixa de $1/8$ de quilómetro cabe na secção $4/8$ quilómetro da secção da estrada.

   Depois usa a faixa da estrada para verificar.



   Podes expressar esta situação como sendo $4/8$ de um quilómetro dividido por $1/8$ de um quilómetro, isto é,

   $(4/8) / (1/8) =$ _____

2. Ainda em Abril, o Paulo e a sua equipa alcatroaram uma secção de $3/8$ de quilómetro da estrada a seguir representada. Quantos dias utilizaram para fazer o trabalho?

   Podes expressar esta situação como sendo $3/8$ de um quilómetro dividido por $1/8$ de um quilómetro, isto é:

   _____ / _____ = _____

Figura 1

Trabalho na Estrada: Reparação

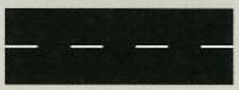
O Julho trouxe-lhe mais trabalho — o verão é o melhor tempo para fazer reparações de estrada.

1. A secção da estrada que necessitou de reparações foi de $5/16$ de um quilómetro. A equipa mantinha uma passada de $1/8$ de um quilómetro por cada dia. O patrão do Paulo quer saber quanto tempo demorou a acabar este trabalho.

   Podes ver este problema como sendo $5/16$ de um quilómetro a dividir por $1/8$ de um quilómetro por dia que podes representar por:

   _____ / _____ = _____

2. Com o decorrer do mês o Paulo e a sua equipa tiveram mais trabalho. Repararam $3/16$ de um quilómetro que a seguir está representada. Quantos dias utilizaram para terminar o trabalho?



   Podes escrever como sendo:

   _____ / _____ = _____

Figura 2

Desenvolvimento da Actividade

Tendo como base tais pressupostos, procurou-se uma actividade com uma forte componente de investigação e de exploração e que estivesse relacionada com o conhecimento que o aluno tem do mundo real, com vista a ajudar a desenvolver uma predisposição para a aprendizagem da divisão de fracções. Assim, foi construída a actividade *Trabalho na Estrada*, com base na apresentada por Bezuk e Armstrong (1993) a qual foi posta em prática numa turma de 6° ano de escolaridade.

Não se pensou que o algoritmo normalizado *inverter e multiplicar* se desenvolveria naturalmente a partir do uso de manipuláveis, mas antes que a actividade investigativa seria motivadora e que poderia levar à identificação de um padrão a partir do qual os alunos pudessem formular uma conjectura sobre um algoritmo para a divisão de fracções. A actividade foi construída de modo a iniciar-se com um exemplo que pudesse despertar a curiosidade e o entusiasmo dos alunos (exemplo ilustrado na figura 1), tendo sido propostas, em seguida, outras situações (exemplos ilustrados na figura 2 e figura 3) onde as tarefas começavam a ser cada vez mais abertas para um trabalho mais exploratório e investigativo. Dado a actividade completa ser um pouco longa, optou-se por construir 4 fichas sendo as três primeiras destinadas às sucessivas divisões com a ajuda do material manipulável (como se pode visualizar nas figuras referidas).

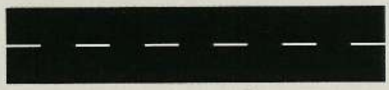
Na última (figura 4), destinada a rever a actividade até então desenvolvida e os resultados obtidos, os alunos foram confrontados com algumas das divisões efectuadas e foi-lhes pedido que conjecturassem acerca da divisão de duas fracções. Dedicou-se uma aula inteira a esta fase do trabalho por haver indicações de que obter descrições sobre o pensamento matemático dos alunos é uma tarefa complexa e demorada.

Relato de um episódio

Os alunos trabalharam em pequenos grupos sendo-lhes distribuídos a ficha da actividade e o respectivo manipulável.

Trabalho na Estrada: Pintar as faixas

Miguel e a sua equipa pintam as linhas da estrada. Eles demoram um dia a pintar $5/16$ de um quilómetro. $5/16$ de um quilómetro é representado por esta faixa.



1. Miguel e a sua equipa realizaram um trabalho no Porto. Pintaram $3/16$ de um quilómetro que está representado a seguir. Quantos dias utilizaram para terminar o trabalho?

   ____/____ = ____

2. Ainda na cidade do Porto o Miguel e a sua equipa pintaram $1/16$ de um quilómetro que está representado a seguir. Quanto tempo demorou a acabar o trabalho?

   ____/____ = ____

Figura 3

Padrões

Utiliza o teu trabalho das fichas anteriores para completar as expressões representado no seguinte quadro.

$$\frac{4}{8} \div \frac{1}{8} = 4$$

$$\frac{3}{16} \div \frac{1}{8} =$$

$$\frac{3}{16} \div \frac{5}{16} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{8} \div \frac{5}{16} =$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = 6$$

$$\frac{1}{32} \div \frac{1}{8} =$$

$$\frac{6}{8} \div \frac{1}{8} = 6$$

$$\frac{1}{3} \div \frac{1}{8} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{9}{16} \div \frac{5}{16} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{1}{16} \div \frac{5}{16} = \frac{1}{5}$$

Que conjecturas podes fazer acerca da divisão de duas fracções? Como chegaste a essa conclusão?

Figura 4

No meio da primeira ficha, alguns dos alunos, já tentavam conjecturar um algoritmo para a divisão de fracções colocando de parte o manipulável:

— *Store, eu consigo fazer a divisão sem isto.*

Mediante tal atitude o professor pediu explicações havendo desde logo a distinção clara de dois grupos: um do qual fazia parte o aluno Frederico e um outro onde a porta voz era a Sara.

Frederico: *Para dividir fracções multiplica-se pelo inverso da última fracção.*

Prof.: *Como chegaste até aí?*

Frederico: *Foi o que o meu pai me disse.*

Prof.: *Explica-me melhor.*

Frederico: *Não sei, mas o meu pai disse que era assim.*

O professor deixa a discussão entre os alunos do grupo não validando a sua resposta.

O outro grupo, o qual não tinha recebido informação extra-aula, tirou a seguinte conclusão:

— *Divide-se os numeradores e os denominadores.*

Ao que uma aluna do grupo contrapôs dizendo:

— *Mas aqui isso não dá. (1/8 : 3/4).*

Prof.: *E com a ajuda da «fatia da estrada»?*

Sara: *Boa! Cabem 6. São 6 bocados. Mas não há outra maneira sem ser com este bocado?*

Prof.: *Pensa.*

Sara: *Em vez de escrever 3/4 escrevo 6/8.*

Prof.: *Que nome se dá a essas fracções?*

Sara: *Fracções equivalentes. São a mesma coisa.*

Prof.: *Então para dividir fracções é preciso ...*

Sara: *Tem que ter o mesmo denominador e depois faz-se o mesmo que o de cima.*

Entretanto dá o toque de saída sendo retomada a aula no dia seguinte.

Os alunos entraram, sentaram-se na mesma disposição da aula anterior e ficaram à espera de novo material para trabalhar. Mas perante a situação apresentada na aula anterior pelo Frederico, o professor achou conveniente fazer a consolidação da actividade desenvolvida. Assim, o professor apresentou a toda a turma a conjectura da Sara e do Frederico. Vários alunos concordaram com a proposta da Sara não dando importância à do Frederico. O professor não valida nenhuma delas e continua a aula apresentando aos alunos as duas fichas seguintes com uma nova unidade, a qual é colocada de imediato de lado. Os alunos estavam interessados somente em verificar se a regra era válida para todos os casos.

Nuno: *E agora 3/16:5/16? O 3 não divide o 5. Eles não se dividem.*

Este comentário trouxe alguma discussão à turma tendo o professor de esclarecer qual o significado de divisível. Feito este esclarecimento a aula é interrompida pelo toque de saída tendo o professor deixado em suspenso as conjecturas dos alunos não validando nenhuma.

Na aula seguinte foi entregue aos alunos a ficha quatro na qual eles escreveram a sua conjectura. Eis alguns registos efectuados pelos alunos:

- Para dividir duas fracções tem de se dividir numerador pelo numerador e denominador pelo denominador;
- Dividir-se o numerador com numerador e denominador com denominador. O denominador deve ser igual e se não for não pode dar número com vírgula fica em fracção;
- Quando os numeradores e denominadores não dão para dividir temos que multiplicar pelo número inverso;
- Mediante tais conclusões, o professor remeteu para a turma, perguntando qual delas eles escolhiam. Ao que a turma lhe responde: multiplicar pelo inverso da segunda fracção é receita para todos os casos.

É então que se ouve Frederico dizer, com um certo alívio,

— *Afinal o meu pai sabe.*

Em jeito de conclusão

Foi posta em prática, com alunos do 6° ano, uma actividade de índole investigativa com o objectivo de proporcionar oportunidades de diálogo e de debate, de tal forma que se afastasse das abordagens a que estavam habituados e que, normalmente, contemplavam simples transmissão passiva de conhecimentos e prática de exercícios rotineiros. O professor mostrara, inicialmente, dúvidas quanto à eficácia desta abordagem por se tratar de *uma turma heterogénea com alguns alunos fracos e, que por isso, estes não se sentiriam à vontade para tirar dúvidas com o professor ou com os colegas*. Em casos destes, dizia, o método tradicional é o melhor.

Fomentar e orientar uma actividade investigativa pela primeira vez não é tarefa fácil para o professor, principalmente tratando-se de alunos para quem a experiência também era nova. O professor considerou o seu trabalho bastante complexo, pois teve de proporcionar uma atmosfera aberta, mas controlada, de forma a permitir a interacção, teve de incentivar a autonomia dos alunos, intervindo apenas quando necessário, e teve de ter em atenção os diferentes ritmos de aprendizagem.

Das situações da sala de aula, salientam-se alguns aspectos que conduzem a uma reflexão sobre a importância das experiências e conhecimentos prévios dos alunos e como podem ser um factor do empenhamento na realização de actividades investigativas deste tipo. Na verdade, o professor precisou de lidar com uma situação inesperada que pareceu poder anular o efeito da surpresa da descoberta e até fazer com que deixasse de ser necessária, descoroçoando os intervenientes principais. Foi o caso do aluno Frederico a quem o pai dissera *como se faz*. Embora, para os outros alunos, o mistério tenha permanecido em aberto até à identificação final da regra, deverá reflectir-se sobre as possíveis implicações da situação para este aluno. Enquanto os colegas exploravam a actividade, Frederico continuava imóvel no lugar pois não era capaz de se abstrair da regra que o pai lhe comunicara.

Para a maioria dos alunos, foram aulas em que, nas palavras de uma aluna mais entusiasta, se tem *a massa cinzenta sempre a trabalhar*. Os alunos, embora de início estranhassem aulas tão diferentes daquelas a que estavam habituados, acabaram por envolver-se nas actividades e nas discussões que foram surgindo. Tendo fomentado o diálogo e a interacção na sala de aula, o trabalho realizado parece ter contribuído para a auto-confiança dos alunos e para o gosto destes pela matemática.

No que respeita à aprendizagem do algoritmo da divisão, a maioria dos alunos, parece tê-lo interiorizado. Através da identificação de um padrão, formularam conjecturas, e elegeram o algoritmo padrão, nas suas próprias palavras — *a receita para todos os casos*.

Na opinião do professor, e como resultado imediato da abordagem de ensino, os alunos parecem ter atingido *um nível normal* na divisão de fracções. Neste domínio, os resultados não parecem muito interessantes. Resta, no entanto, esperar para saber, qual será, a médio e a longo prazo, a opinião do professor.

Nota

1 Trabalho desenvolvido no âmbito da Tese de Mestrado Supervisão Pedagógica no Ensino da Matemática publicada pela APM.

Referências

Bezuk, N., & Armstrong, B. (1993). Understanding Division of Fractions. *Mathematics Teacher*, 86(1), 43–46, 56–60.

Bezuk, N., & Bieck, M. (1993). Current Research on Rational Numbers and Common Fractions: Summary and Implications for Teachers. In Douglas T. Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle School Mathematics* (pp. 118–136). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 2–33.

Ministério da Educação (1991). *Programa de matemática: plano de organização do ensino-aprendizagem — 2° ciclo do ensino básico* (volume 2). Lisboa: Imprensa Nacional.

NCTM, (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1996). Processos Cognitivos e Interacções Sociais nas Investigações Matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal., & J. P. Ponte, *Investigar para Aprender Matemática* (pp. 119–137). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Sharp, J. (1998). A Constructed Algorithm for the Division of Fractions. In Lorna J. Morrow & Margaret J. Kenney, *The Teaching of Algorithms in School Mathematics* (pp. 198–203). Reston: Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Stuart, V. (2000). Math curse or Math Anxiety? [11 pag.]. *Teaching Children Mathematics*, 6(5). [Online]. Available: http://www.nctm.org/tcm/2000/01/curse.html. (Novembro 12, 2000).

Luísa Selas

Esc. Sec. José Regio

XII Encontro Nacional — «A Matemática nos Primeiros Anos»

Realizou-se o XII Encontro Nacional — «A Matemática nos Primeiros Anos», nos dias 2 e 3 de Abril de 2009, na EB 2,3 de Caldas das Taipas. Este encontro superou as expectativas dos organizadores ao reunir muito acima de duas centenas de professores do 1.° Ciclo, educadoras de infância, professores de outros graus de ensino, outros profissionais ligados ao ensino da Matemática nos primeiros anos de escolaridade, nomeadamente docentes e investigadores de instituições do ensino superior, de todas as regiões do país, incluindo Açores e Madeira.

O encontro tinha como objectivo a criação de momentos de reflexão, partilha de conhecimentos e experiências relacionados com o ensino e aprendizagem da Matemática nos primeiros anos passíveis de contribuir para uma maior sensibilização e promoção da articulação entre o pré-escolar, 1° e 2° Ciclos do Ensino Básico e uma mais-valia capaz de facilitar o sucesso dos alunos nesta disciplina.

Depois das palavras de boas vindas aos professores presentes, que abdicaram de dois dias de descanso para aprofundarem os seus conhecimentos matemáticos, iniciaram-se os trabalhos programáticos.

Foram efectuadas duas conferências plenárias. «A Comunicação Matemática na sala de aula: processo de transmissão ou de interacção?», da responsabilidade de António Guerreiro da Universidade do Algarve com o enfoque num estudo resultante do desenvolvimento de trabalho colaborativo entre três professoras e o investigador, a propósito do conhecimento e desenvolvimento dos processos de comunicação matemática e interacção na sala de aula do 1.° ciclo. Outra, da responsabilidade de Celda Choupinha da ESE do Porto, trouxe à coacção «Códigos efémeros, mensagens que circulam» com a apresentação de um código diferente dos tradicionais escrito e oral, pelas suas características físicas, assuntos visados e suporte utilizado — código do SMS e do MSN e, a partir dessas características, enunciar uma redefinição dos traços opositivos entre oralidade e escrita. Os indivíduos que usam estes códigos integram um grupo específico, que, segundo uns, é uma geração criativa que vem dar uma nova dinâmica à língua e, segundo outros, a está a descaracterizar.

Nestes dois dias de trabalhos houve lugar, também, a conferências temáticas que ocorreram em simultâneo, quatro em cada dia. Nestas conferências, os professores distribuíram-se pelas diferentes comunicações em função dos seus interesses e sensibilidades.

Na quinta-feira tiveram lugar as seguintes conferências: CT1 — «O trabalho com fracções no 1° ciclo» dinamizada por Ema Mamede, do IEC — Universidade do Minho que abordou diferentes interpretações das fracções, suas representações e a compreensão do conceito pelas crianças; CT2 — «Questões críticas relacionadas com as representações numéricas (verbais ou escritas) no percurso de aprendizagem matemática entre os 4 e os 10 anos» conduzida por Pedro Palhares do IEC — Universidade do Minho, que fez uma reflexão sobre duas vias do desenvolvimento do número no percurso de aprendizagem matemática das crianças entre os 4 e os 10 anos: o desenvolvimento das capacidades associadas às representações numéricas verbais e o desenvolvimento das capacidades associadas às representações numéricas escritas; CT3 — «Um olhar para as simetrias no 1.° ciclo do Ensino Básico» dinamizada por Lina Fonseca da ESE de Viana do Castelo, que valorizou a observação da natureza e a descoberta de regularidades e repetições que originam «equilíbrios» e uma certa «harmonia» apresentando propostas para a sala de aula; CT4 — «O que é para um pequeno um número grande e a divisão? Percepções e desenvolvimento de conceitos em aulas do 1.° e 3.° Anos» tendo como dinamizador Carlos Ribeiro da ESEC — Universidade do Algarve, Rosa Bentes e Olga Mendes da escola EB1 de Armação de Pêra, colocando em discussão o percurso efectuado pelos alunos na resolução de sequência de tarefas incidindo no desenvolvimento dos conceitos de número grande e de divisão.

Na sexta-feira tiveram lugar as seguintes conferência temáticas: CT5 — «As figuras geométricas: conceitos muito especiais» da responsabilidade de Alexandra Gomes do IEC — Universidade do Minho, referindo que as figuras geométricas, enquanto conceitos matemáticos, são construções mentais. Nesta comunicação foram identificadas algumas das características das figuras geométricas que as tornam especiais, analisado o papel desempenhado pelas definições, pelas representações na construção dos conceitos geométricos e identificadas algumas inter-relações que se estabelecem entre estas componentes (definição e representação) do conceito; CT6 — «Ensinar Matemática nos Primeiros Anos — Reflexão sobre a Prática de Sala de Aula» dinamizada por Ema Mamede, Dores Ferreira, Filipe Sousa, Leonel Vieira, Valter Cebolo, Cláudio Cadeia e Berta Alves do IEC — Universidade do Minho, que fizeram uma abordagem ao recente Programa de Matemática do Ensino Básico e ao Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.° e 2.° Ciclos. Nesta apresentação, entre outras questões, abordaram-se aspectos da resolução de problemas numa vertente didáctica, identificando deficiências e facilidades dos professores na implementação das aulas; CT7 — «Da intuição visual à generalização: Uma proposta didáctica baseada em padrões» dinamizada por Isabel Vale e Teresa Pimentel da ESE de Viana do Castelo. Estas docentes referiram que os padrões em matemática podem proporcionar contextos de aprendizagem bastante ricos e motivantes para os estudantes, onde o seu poder matemático possa ser explorado, partindo da percepção visual, aspecto que não tem sido trabalhado de forma sistemática, sobretudo em situações de natureza numérica. Aqui foi ilustrada, também, a importância que o visual pode ter na procura de relações que conduzem à generalização, componente essencial do pensamento algébrico e da construção de conceitos e propriedades. Foi igualmente efectuado um enquadramento teórico dos padrões no ensino e aprendizagem da matemática e apresentada uma proposta didáctica que passa por simples contagens até a problemas mais complexos, ilustrada com exemplos de sala de aula; CT8 — «Em torno do número do dia» da responsabilidade de Helena Amaral da EB1 Parque Silva Porto, de Lisboa, que fez uma abordagem interessante a partir do número da data para, todos os dias, por rotina, assinalar formas diversificadas de referir esse número. Foram partilhadas experiências de vários anos, sistematizada e alguma reflexão em torno da rotina vivenciada relacionando-a com as experiências de aprendizagem dos alunos.

Finalmente, tiveram lugar as sessões práticas e de discussão, dinamizadas por docentes, onde cada participante, em função de uma escolha prévia, teve a oportunidade de reflectir sobre uma diversidade de situações concretas e investigativas de sala de aula como: Jogos matemáticos — jogando e resolvendo problemas; Isometrias no 1.° ciclo; Actividades algébricas nos 1.° e 2.° ciclos do Ensino Básico: Conexões entre a Álgebra, Geometria, Números e Operações; A arte de pavimentar; Classificação e Geometria; Dar a matéria toda com uma só folha de jornal; Algoritmos sem algoritmos; Círculos Experimentais de Matemática no pré-escolar e no 1.° Ciclo; Geometria e o jogo; Blocos Padrão na sala de aula; Magia matemática; Explorando quadriláteros; Explorando tarefas com padrões para o desenvolvimento do pensamento algébrico; Novas perspectivas de Organização e Tratamento de Dados: algumas propostas de trabalho para os primeiros anos; Do Jardim-de-Infância para o Ensino Básico: Onde pára a Matemática?

Feita a apreciação global, com base nos testemunhos que foram chegando, o encontro teve uma nota muito positiva em todos os aspectos: na organização, na estruturação das conferências plenárias e das conferências temáticas, nas sessões práticas e de discussão, na recepção aos professores feita pela comunidade educativa (alunos, funcionários e professores), na alimentação fornecida pela cantina, nos *coffee breacks* e na disponibilidade demonstrada por quantos estiveram envolvidos na organização do encontro.

O facto de todos saírem satisfeitos e a tecerem rasgados elogios foi uma alegria para todos, principalmente para quem se viu nestas andanças de organizar um encontro destes, a nível nacional, numa localidade da província tão afastada dos grandes centros.

Este encontro teve o apoio da Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, Câmara Municipal de Guimarães, Junta de Freguesia de Caldas das Taipas, Edições Asa, Edições Gailivro, Porto Editora, Delta Cafés, da Escola e do Departamento de Línguas e grupo de História do 3° Ciclo que presenteou os participantes com o Sarau de Poesia «Beijarei em ti a vida enorme».

José Maria Gomes
Agrupamento de Escolas Caldas das Taipas

José Duarte

Sequências de números e a sua representação gráfica:

Exploração de um applet

Neste artigo pretende-se apresentar uma experiência realizada com duas turmas de 7° ano de escolaridade durante o estudo da Proporcionalidade Directa.

A partir da exploração de um *applet*[1] sobre sequências numéricas e respectiva representação gráfica, proporcionou-se a investigação sobre a relação existente entre a representação gráfica de uma sequência numérica e a respectiva expressão geral.

O Applet?

O *applet* seleccionado permite gerar sequências numéricas lineares, quadráticas, ou cúbicas. Para esta utilização, foi escolhida a opção de sequências lineares. Após a selecção do tipo da sequência pretendida e, accionando o botão NEW PROBLEM, a aplicação gera, aleatoriamente, uma sequência de cinco números com a respectiva representação gráfica, a qual é representada a branco.

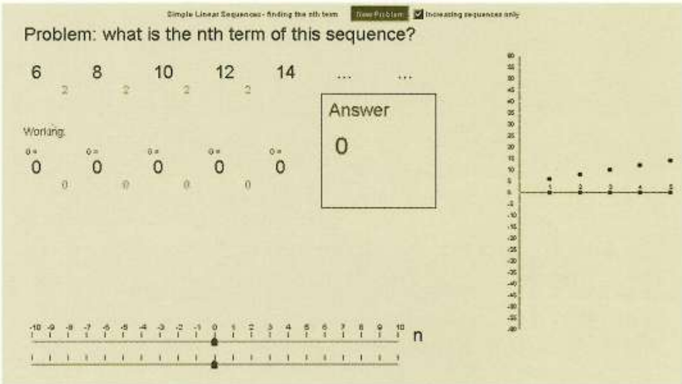
Depois de gerada a sequência numérica, inicia-se a acção do utilizador, com o objectivo de descobrir a expressão geral, que neste caso, é do tipo $a.n+b$ e que corresponde ao seu modelo. Esta acção realiza-se através do movimento de dois selectores, correspondendo um deles ao coeficiente de n e o outro ao termo independente.

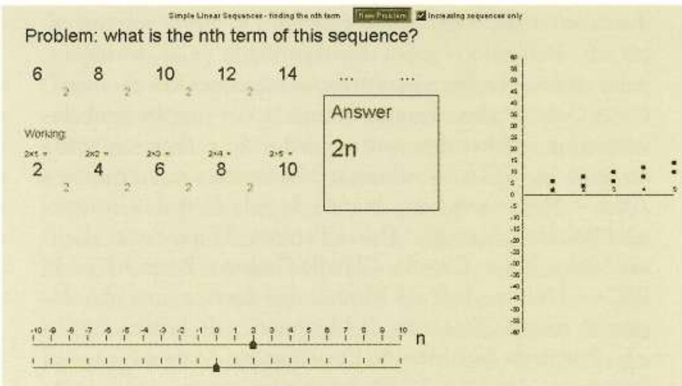
À medida que se movimenta o selector identificado por n, vão surgindo no ecrã, simultaneamente: uma nova sequência, a sua representação gráfica e também a sua representação algébrica. Permitindo, assim, ao utilizador associar as várias representações possíveis para uma mesma sequência numérica, agora de cor amarela.

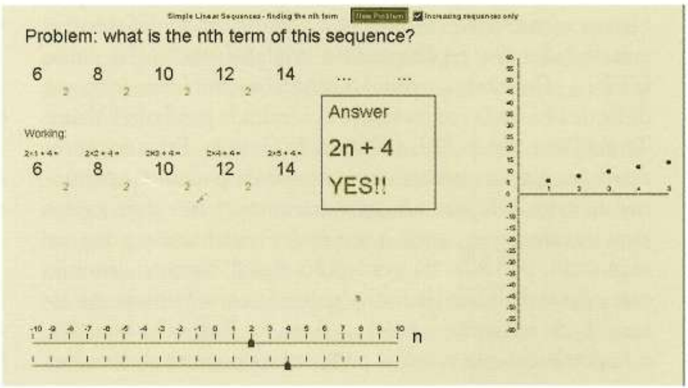
Seguidamente, conjugando o movimento dos dois selectores é possível fazer coincidir as duas sequências e, desta forma, chegar à expressão geral da sequência inicial. O processo de descoberta da expressão geral pode ser monitorizado e controlado, através da segunda sequência numérica e da sua representação gráfica, terminando quando na caixa destinada à resposta (*Answer*) surge a indicação da mensagem «YES».

As Turmas

As duas turmas envolvidas na experiência têm perfis diferentes. Sendo a turma A constituída por vinte e um alunos, cuja maioria tem feito o seu percurso escolar em conjunto, desde o início do primeiro ciclo. Esta turma integra, ainda, um aluno com necessidades educativas especiais, com currículo próprio, estando ao nível do 1° ciclo. Estes alunos, embora prefiram a disciplina de Ciências Naturais, referem a disciplina de Matemática como segunda preferência, em simultâneo com Educação Musical e Educação Física. A turma apresenta um conjunto de alunos com ritmos de trabalho diferenciados, embora revelem apetência para o trabalho de grupo e empenho na discussão das tarefas, comunicando as suas opiniões e seguindo as dos seus colegas. Possibilitam um trabalho rico através da descoberta dos conceitos. Pelo contrário, a turma B, é constituída por 24 alunos, provenientes de três turmas diferentes do 6° ano de escolaridade e tem no seu seio uma aluna que se encontra no projecto Escola Móvel, não participando assim nos trabalhos da aula. Estes alunos revelam poucos hábitos de trabalho em grupo e distraem-se com facilidade, na realização de tarefas que necessitem de maior perspicácia e persistência. Satisfazem-se facilmente com a primeira opinião que lhes ocorre sobre uma determi-







nada situação matemática, não a explorando suficientemente, embora se entusiasmem sempre, com as tarefas propostas para um trabalho desta natureza. Há ainda a acrescentar que os alunos desta turma revelam uma maior apetência para a realização de exercícios procedimentais, tendo no entanto, alguns, também, um bom cálculo mental. Para quase metade destes alunos, a Matemática é referida como a disciplina que menos gostam.

A experiência

Tudo começou com o trabalho de preparação desta experiência. Dissecar o *applet*, para perceber, não só as suas potencialidades, mas também os possíveis constrangimentos, foi um trabalho que realizei, integrada numa equipa de um projecto que visa o desenvolvimento do pensamento algébrico com utilização das TIC. Este trabalho colaborativo em equipa revelou-se essencial à continuidade desta experiência. Assim, logo nas primeiras explorações foi possível verificar as potencialidades do *applet* na descoberta da relação entre uma sequência numérica e a sua representação gráfica. No entanto, à medida que evoluiu o contacto com o *applet* o reconhecimento dessas potencialidades foi aumentando pois, devido à manipulação do utilizador, ao tentar descobrir uma determinada sequência numérica é possível reconhecer a influência dos diversos componentes da expressão geral na respectiva representação gráfica.

Na segunda fase desta experiência, desenvolvi um trabalho mais individualizado, o qual teve como objectivo construir um conjunto de situações de exploração do *applet* que permitissem a sua apropriação pelos alunos. Na tentativa de procurar as sequências mais favoráveis à aprendizagem, foi possível constatar que as sequências geradas não obedeciam a nenhum critério, que permitisse uma escolha que orientasse a sua exploração. Por outro lado, verifiquei que o modo como as sequências são geradas impossibilita a sua repetição, o que parecia à partida dificultar a minha tarefa, tanto na organização da exploração, como posteriormente na fase do trabalho com os alunos. Uma outra dificuldade também sentida, foi a das turmas irem trabalhar pela primeira vez tanto a representação gráfica como o conceito de função. Deste modo, a linguagem utilizada tanto no material a fornecer aos alunos, como no trabalho de aula, teria que ser clara e rigorosa do ponto de vista matemático, mas ao mesmo tempo, não demasiado formal, para não tornar a aula muito ‹pesada›. Esta dificuldade originou diferentes momentos de reflexão em torno da linguagem a utilizar, de modo a não comprometer o tratamento natural do assunto, tal como era pretendido.

Eis que chegou a hora!

A dinâmica, desenvolvida em sala de aula, tem por base o trabalho de grupo, onde se privilegia a discussão das diversas opiniões dentro do próprio grupo, mas também a discussão a nível da turma como acção significativa na construção do conhecimento matemático.

Depois de tantos cuidados e preocupações, eis que é chegado o momento de colocar à prova o *applet*, a tarefa e, porque não, a professora e os alunos?

Os alunos pareceram ambientar-se rapidamente ao *software*, descobrindo com sucesso o termo geral da sequência gerada pelo computador. Contudo, senti que devido à rapidez com que os resultados foram surgindo, talvez o trabalho não estivesse a ser feito com a reflexão necessária, para a qual a tarefa tinha sido planificada. Deste modo, fui insistindo para que os alunos registassem todo os passos do processo que seguiam, à medida que iam avançando na realização da tarefa. Durante esta fase, foi possível verificar que, ao dar resposta às questões colocadas, de uma forma mais organizada e sistemática, os alunos eram obrigados a separar o movimento dos dois selectores envolvidos, ou seja, o acto de registar passo a passo o processo, os ajudava a pensar sobre as suas acções. De início, embora os alunos realizassem a tarefa de uma forma intuitiva, encontrando a expressão geral que definia a sequência de números, a mesma não passaria de um jogo, como, por vezes, eles classificam as actividades desta natureza.

A discussão a nível turma

A discussão das conclusões a que os diversos grupos chegaram foi a fase da aula mais interessante, tendo os alunos conseguido relatar, muito bem, a forma como pensaram para dar resposta à tarefa proposta. Durante esta fase do trabalho, começam a esboçar-se as diferenças entre as duas turmas. Numa delas (turma A), sempre que os alunos explicavam a forma como tinham conseguido descobrir o termo geral, que caracteriza cada sequência, referiam a associação entre o movimento dos selectores e a representação gráfica. Assim, ficou claro, nas suas intervenções, que o processo utilizado foi o de fazer variar o coeficiente de n, até que as duas rectas ficassem paralelas e depois, procurar o termo independente, fazendo movimentar a colocação dos pontos, até sobrepor as duas ‹manchas›.

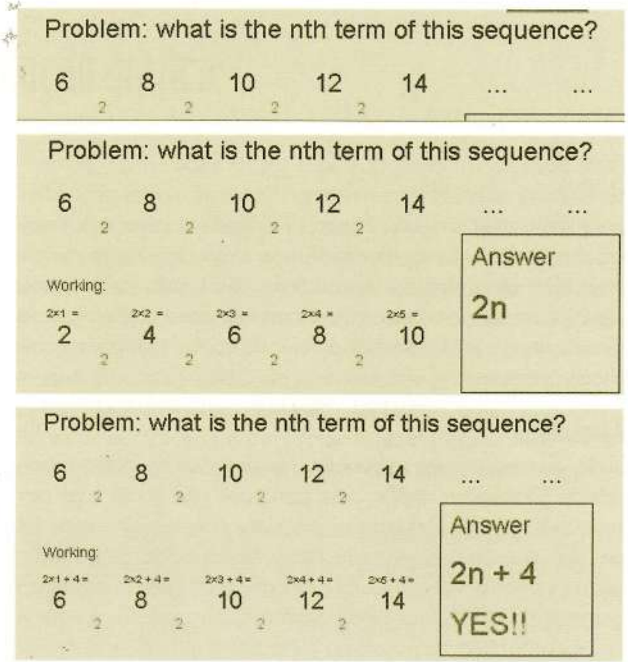
Na outra turma (turma B), os alunos argumentaram as suas descobertas, utilizando as relações numéricas existentes entre os termos consecutivos da sequência, à medida que agiam sobre os selectores. Por exemplo, quando surgia a sequência 6, 8, 10, 12, 14,..., os alunos verificaram que ela progredia de dois em dois, e então, usavam esse valor, como coeficiente de n.

Em seguida, como o primeiro termo da sequência, construída por eles, tinha o mesmo valor que a diferença entre os termos, foram acertar a expressão geral efectuando a diferença entre os dois primeiros termos, ou seja, $6 - 2 = 4$. Como essa relação se repete para os restantes termos das duas sequências, usaram esse valor (4), como termo independente, descobrindo assim a expressão geral.

Deste modo, esta turma orientou o seu trabalho sem usar a representação gráfica, o que me obrigou, como professora, a ajudar os alunos a complementar este raciocínio, através da colocação de questões, de forma que a observação também a incluísse.

Durante a discussão oral, à medida que se foi centrando a atenção no gráfico, surgiu, em ambas as turmas, a comparação dos pontos aos degraus de uma escada e depois, a imagem de uma linha recta a passar pelos pontos, comparando-a a uma rampa. Aproveitando esta associação de ideias coloquei algumas questões aos alunos que os levaram a concluir, com grande facilidade, que o valor do coeficiente de n estava associado à inclinação da recta.

Há ainda a referir que o facto do *applet* não repetir as sequências, fez com que os alunos explicassem o seu raciocínio, com exemplos que, até então, nunca tinham usado. Sendo assim, aquilo que no início parecia um constrangimento, veio a tornar-se uma mais valia para a fase da discussão e até, da utilização do quadro interactivo. Esta característica do *applet*, proporcionou a cada aluno porta-voz dos grupos de trabalho a possibilidade de «brilhar» nas suas explicações, pois demonstraram conhecer bem o processo, sem estarem dependentes das sequências trabalhadas anteriormente. Para além disso, o facto das sequências serem sempre diferentes fez despoletar nos alunos a necessidade de estarem atentos.



A última etapa da realização da tarefa

A tarefa incluía uma parte que não dependia da utilização do *applet*, a qual consistia em descobrir termos de determinada ordem, ou em indicar se um valor pertencia, ou não, a uma determinada sequência. Nesta parte do trabalho, os alunos revelaram uma maior maturidade pois já tinham trabalhado sequências numéricas anteriormente. Contudo, devido às dificuldade na elaboração dos registos escritos e devido também ao entusiasmo colocado na fase da discussão oral, o tempo previsto para a última etapa do trabalho teve que ser encurtado. No entanto, foi possível fazer um registo formal da utilização das equações sem que os alunos as tivessem estudado. Assim, para dar resposta à procura dos valores de *n*, usaram a sua experiência com os selectores. Ficou claro que, tendo usado em último lugar, o selector do valor independente, por exemplo (+4), deveriam retirar 4 ao valor total e, posteriormente, dividir pelo valor do coeficiente de *n*. Desta forma, foi possível perceber que os alunos entenderam esta fase como um andar para trás, na procura da posição do termo. Por isso, foi natural a utilização do processo inverso no movimento dos selectores, bem como nas operações que lhe estão associadas.

Em jeito de balanço

A experiência com este *applet* foi, sem dúvida, um trabalho interessante sob diversas perspectivas. Uma delas diz respeito às conexões que se efectuaram com outros tópicos matemáticos, como por exemplo, a utilização das equações para descobrir a posição de um termo de uma sequência. Para além disso, o facto de não se controlar as sequências a utilizar, veio proporcionar um primeiro contacto com os números relativos. É de salientar que foram efectuadas somas algébricas, recorrendo a esquemas na recta, sem que os alunos demonstrassem dificuldades. Mais tarde, os alunos recordaram esta experiência, quando estudaram formalmente o assunto.

O facto deste *applet* disponibilizar diversas representações, permitiu a estas turmas abordar o mesmo assunto, a partir da representação que lhes era mais familiar e depois, enriquecer a aprendizagem, através da inclusão das restantes representações.

Estes alunos demonstraram ainda alguma dificuldade em elaborar registos, quando é necessário explicar o percurso do seu trabalho. Por outro lado, a relação entre a qualidade das explicações orais e das escritas nem sempre se revelou similar. Esta constatação vem reforçar a necessidade de serem desenvolvidas em paralelo estas duas vertentes da capacidade transversal da comunicação matemática.

Durante a fase de discussão do trabalho, alguns alunos mostraram-se naturalmente mais participativos. No entanto, tenho a consciência de que este processo é evolutivo, e que, neste momento, alguns deles podem já estar em condições de participar mais espontaneamente do que outros, ajudando os colegas com as suas intervenções.

A utilização da tecnologia foi, sem dúvida, um catalisador neste trabalho. O uso dos selectores proporcionou aos alunos a realização de todas as experiências que consideraram necessárias, a reflexão sobre elas e a elaboração de conjecturas, as quais foram posteriormente discutidas desenvolvendo, assim, o pensamento algébrico.

Nota

1 `http://www.waldomaths.com/Linseq1NL.jsp`

Elvira Santos

Escola Básica do 2º e 3º ciclo de Álvaro Velho, Lavradio

APM — 2009

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2009

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `http://www.apm.pt`

Assinaturas das revistas para 2009

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções