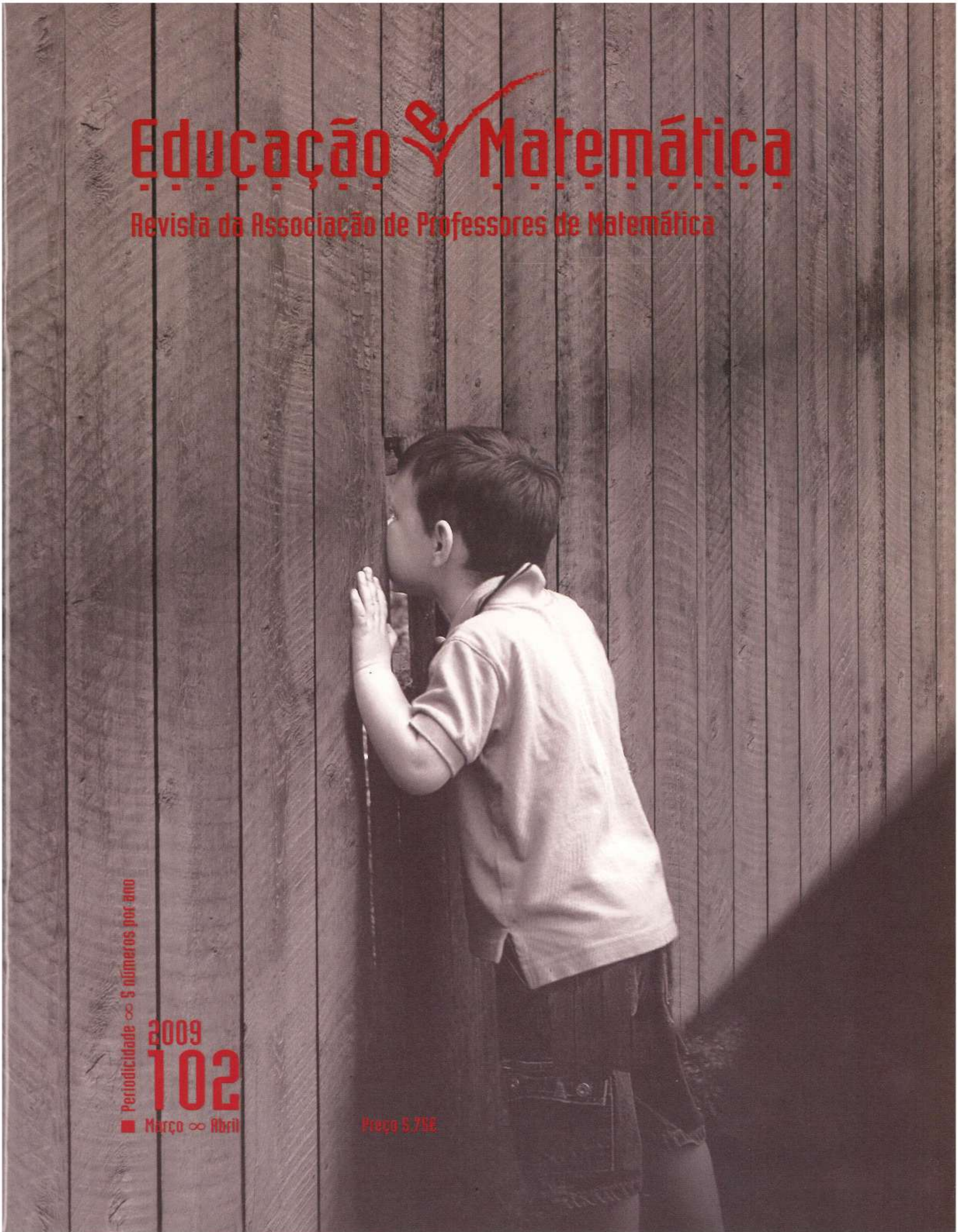
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2009

102

Março ∞ Abril

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Canha Nunes
Cristina Tudella
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Abril 2009
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2530–250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222

Porte Pago

Saíu da redacção

Claúdia Fialho deixou de integrar a redacção da revista *Educação e Matemática*. Pelo contributo que deu à revista enquanto permaneceu na redacção, aqui fica o nosso agradecimento.

Sobre a capa

«É um milagre que a curiosidade sobreviva à educação formal.»
—Albert Einstein

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Maria Boavida, Bruno Magina, Célia Maria Rolo, Cristiane Wilhelms, Danilo Janesk de Souza, Elvira Santos, Germano Lechner, João Pedro da Ponte, João Torres, José António Fernandes, Luísa Selas, Luizete Dias, Margarida Silva, Mª José Costa, Paula Fonseca, Paulo Afonso, Paulo Ferreira Correia, Sara Cabaço, Sheila Fabricia Schuck Backes.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

Três anos de Plano da Matemática, o que mudou?

Elvira Santos Manuela Pires

O Plano da Matemática (PM) surge após a análise dos resultados obtidos no exame nacional do 9° ano, em 2005, e assenta nos projectos elaborados por cada uma das escolas participantes, que são cerca de 97% das escolas públicas de Portugal Continental com 2° e/ou 3° ciclos. As medidas postas em prática para atingir o objectivo comum — a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática — dependeram da realidade de cada escola, da análise e experiência dos seus professores, da cultura da escola, dos recursos existentes. Ao longo dos três anos de duração do projecto, as escolas foram fazendo correcções do plano inicial, em função das reflexões que efectuaram. Do trabalho realizado, destacamos a intervenção em três níveis diferentes: a formação de pares pedagógicos; o trabalho colaborativo dos professores e o trabalho entre as escolas.

Um dos grandes investimentos dos projectos foi a constituição de pares pedagógicos, quase metade das turmas dos 8° e 9° anos de escolaridade e cerca de 30% das turmas do 5°, 6° e 7° anos funcionam com assessorias/pares pedagógicos na aula de Matemática, o mesmo acontecendo em Estudo Acompanhado, onde a percentagem é superior. Esta estratégia, que passa por ter dois professores na sala de aula de Matemática ou em Estudo Acompanhado, surgiu da necessidade de realizar tarefas de natureza mais aberta, de usar materiais e tecnologias ou realizar um apoio mais individualizado. Esta foi a medida mais suportada pelo crédito horário atribuído no âmbito do PM (cerca de 52% do crédito horário atribuído às escolas foi utilizado na constituição de pares pedagógicos) e tem-se revelado promissora, tanto em termos das aprendizagens dos alunos, como em termos de trabalho colaborativo entre professores.

A realização de reuniões regulares de planificação, elaboração de materiais, reflexão sobre o trabalho realizado e discussão de estratégias para a sala de aula é um outro nível de intervenção e contribui para a consolidação do trabalho colaborativo dos professores nas escolas. Embora com limitações na sua aplicação, a indicação para a existência de tempo comum semanal à terça-feira para os professores se reunirem, foi fundamental para a implementação desta medida.

A importância dada ao trabalho entre escolas, através do dispositivo de acompanhamento, que passa por reuniões mensais entre os coordenadores e professores do PM e o respectivo professor acompanhante ajudou a quebrar o isolamento das escolas. Este trabalho teve como suporte a formação dos professores acompanhantes, com um plano específico de formação que decorreu duas vezes por ano lectivo, e reuniões mensais, a nível regional, coordenadas por um elemento da Comissão de Acompanhamento. Nas reuniões realizadas com as escolas, sob coordenação do professor acompanhante, que registam um elevado número de presenças, foram abordados temas e tarefas que proporcionaram momentos de discussão e reflexão. O relato de estratégias utilizadas com os alunos aumenta a compreensão das potencialidades das tarefas e, neste processo de partilha, tem-se ganho energia para persistir ou mudar.

Inicialmente, verificou-se uma tendência para diversificar a natureza das tarefas e os recursos pedagógicos em outros espaços que não a sala de aula de Matemática. Mas, gradualmente, ao longo dos três anos, a atenção foi-se centrando no trabalho realizado na aula de Matemática, em sequências de tarefas e não tanto em tarefas isoladas. É possível reconhecer nos alunos uma evolução positiva na atitude e motivação face à Matemática e no domínio de conceitos e procedimentos. Como medidas a tomar continuam a ser apontados o aumento do tempo de trabalho dos alunos destinado à Matemática e a articulação entre os três ciclos.

E o futuro?

Segundo os dados dos relatórios periódicos das escolas, que foram divulgados através do sumário executivo do relatório elaborado pela Comissão de Acompanhamento, as escolas têm uma visão muito positiva quanto à forma como os seus professores aderiram a este desafio. Continua a existir vontade de dar continuidade a este trabalho, para melhorar a aprendizagem dos alunos, sobretudo no que se refere ao desenvolvimento das capacidades de resolver problemas, raciocinar e comunicar matematicamente.

Um outro aspecto que merece maior atenção prende-se com as práticas dos professores. Há que persistir no desenvolvimento do trabalho em curso, dando especial atenção às práticas avaliativas, em particular, ao modo como se trabalha, analisando o que se faz, mas também, e sobretudo, como se faz e quantas vezes se faz.

O Plano da Matemática contribuiu para a mudança de cultura e prática profissionais, partindo dos projectos de escola. Mas a consolidação de experiências — por exemplo, o trabalho em par pedagógico ou o trabalho na sala de aula com vista ao desenvolvimento das capacidades transversais — exige a continuidade de condições permitidas pelo PM e outros recursos. Neste sentido, é importante continuar a dar uma ênfase especial à integração curricular, articulação entre os ciclos e à formação contínua de professores dos três ciclos, tendo como pano de fundo os desafios do Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico.

Elvira Santos, Escola Básica 2° e 3° ciclos de Álvaro Velho
Manuela Pires, Escola Secundária Eng. Acácio Calazans Duarte

Pequenos investigadores matemáticos

Do pensamento à comunicação e da comunicação ao pensamento

Ana Maria Boavida   Margarida Silva   Paula Fonseca

A nossa experiência diz-nos que é no espaço entre perguntas e respostas que se joga muito do que conduz a aprendizagens significativas. Deixar o aluno só com uma tarefa e dar-lhe oportunidade, posteriormente, de divulgar as suas conclusões sem que seja apresentado o que as fundamenta nem o percurso que a elas conduziu, pode ser importante mas carece de uma parte essencial: acompanhar o processo de construção do seu pensamento.

A resposta intuitiva, a dúvida inicial, a procura de um caminho, a defesa de uma ideia, a formulação e análise de uma conjectura, são aspectos que devem ser partilhados entre pares e entre professor e alunos. Da interacção entre uns e outros poderão resultar aprendizagens importantes, momentos inesquecíveis e descobertas fantásticas acerca de um problema, da actividade desenvolvida, ou simplesmente acerca de si, da sua relação com os outros e com a Matemática. Nestes momentos, além de pensar sobre a Matemática, pensa-se Matemática, pensa-se com a Matemática, pensa-se matematicamente.

Este artigo resulta, antes de mais, da inter-animação de várias vozes: as dos alunos de duas turmas do 6° ano de escolaridade onde foi explorada uma mesma tarefa — O problema das baguetes — incluída num dos materiais de formação do Programa de Formação Contínua em Matemática da

ESE de Setúbal; as de Paula e Margarida, suas professoras; e a de Ana, formadora do referido programa. Em particular, foca-se na descrição e análise da experiência de realização de um *congresso matemático* em cada uma das turmas.

A primeira parte, centra-se na relevância educativa da comunicação matemática, fundamentando a sua importância e clarificando o significado de *congresso matemático*. Em seguida, apresentam-se aspectos particulares relacionados com a concretização dos dois congressos referidos designados por *O dia dos «clicks»* e *Como as fracções denunciam as injustiças*. Por último, reflecte-se sobre a experiência e destacam-se potencialidades dos congressos matemáticos para o desenvolvimento de uma comunicação matemática fundada num discurso intencionalmente reflexivo e instrutivo e, assim, favorável ao raciocínio matemático.

A relevância educativa da comunicação matemática

Comunicar: um objectivo curricular

A valorização da comunicação matemática é uma ideia que sobressai, já há algum tempo, nas orientações curriculares para o ensino e aprendizagem da Matemática de diversos países. Por exemplo, em 1989, o NCTM incluía a «A Matemática como Comunicação» no conjunto de normas orientadoras da «reforma da matemática escolar na próxima década [1990–2000]» (APM, 1991, p. vi). Esta recomendação foi reforçada, pouco depois, pela publicação de um novo documento que continha normas sobre o papel do professor e do aluno no discurso da aula de Matemática (APM, 1994). Mais recentemente, em 2000, a «Comunicação» é uma das cinco normas de processo consideradas pelo NCTM como devendo orientar os modos de adquirir e utilizar o conhecimento matemático ao longo dos doze primeiros anos de escolaridade (APM, 2007).

Portugal não é alheio a esta situação. O Currículo Nacional do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2001), refere que a comunicação matemática deve ser um dos aspectos transversais à globalidade dos diversos tipos de experiências de aprendizagem em que é importante envolver todos os alunos. Em particular, salienta que a importância de desenvolver «a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação» (p. 57).

O novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007) reforça a relevância da comunicação, referindo-se-lhe como um dos objectivos gerais a ter em conta nos três ciclos da escolaridade básica e como uma das «três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática» (p. 7) que deve «merecer uma atenção permanente no ensino» (p. 1).

O desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática pelos alunos é, assim, um objectivo curricular importante e a criação de oportunidades de comunicação adequadas é assumida como uma vertente essencial do trabalho que se realiza na sala de aula. Neste contexto, é fundamental que os alunos aprendam, não só a falar, mas também a escutar.

Aprender a falar, aprender a escutar

Ajudar os alunos a desenvolver a sua competência matemática é uma das tarefas centrais do professor, o que pressupõe *certas modalidades de comunicação e uma determinada cultura de sala de aula*.

Há várias perspectivas sobre comunicação matemática que, segundo Brendefur e Frykholm (2000), emergem da análise de documentos curriculares. Estes autores agrupam-nas em quatro categorias que representam níveis sucessivos de comunicação no sentido em que cada um inclui características do seu antecessor.

No primeiro nível, que designam por *comunicação unidireccional*, o professor tende a dominar o discurso da aula, fazendo exposições, colocando perguntas fechadas e dando poucas oportunidades aos alunos para comunicar as suas estratégias, ideias e pensamentos.

No segundo nível — *comunicação contributiva* —, o discurso centra-se em «interacções entre professor e alunos em que a conversação se limita ao apoio e partilha, frequentemente com pouco ou nenhum pensamento profundo (...) Estas conversações são, tipicamente, de natureza correctiva» (p. 127).

A *comunicação reflexiva* — terceiro nível — tem semelhanças com a contributiva no sentido em que também há partilha de ideias, estratégias e resoluções. No entanto, as conversações matemáticas constituem pontos de partida para o aprofundamento da compreensão matemática dos participantes. Ou seja, o que os alunos e professor dizem e fazem num determinado momento torna-se subsequentemente um objecto explícito de discussão e reflexão.

Por último, na *comunicação instrutiva*, mantém-se o encorajamento à partilha de ideias e à reflexão sobre essas ideias e suas relações. Contudo, o professor, em virtude da conversação que ocorre, não só começa a compreender os processos de pensamento, pontos fortes e limitações dos alunos, como começa a modelar o ensino subsequente tendo em conta estes aspectos para que aprofundem a sua compreensão sobre a Matemática que está em jogo: «o curso da experiência da sala de aula é alterado como resultado da conversação» (p. 148). É precisamente esta característica que torna este tipo de comunicação tão poderoso.

As orientações expressas no novo programa de Matemática do ensino básico vão no sentido de valorizar os últimos dois níveis de comunicação: comunicação reflexiva e instrutiva. Estes níveis são conceptualmente diferentes dos anteriores (unidireccional e contributiva), pois o foco muda da transmissão de informação para a construção e negociação de significados (Brendefur e Frykholm, 2000). Esta mudança acarreta alterações significativas no papel dos alunos e do professor.

Poder-se-á dizer que ela pressupõe alunos disponíveis e professores ousados, dispostos a aceitar o desafio de trocarem algumas tarefas previsíveis e rotineiras para se lançarem em actividades mais abertas e mais exigentes. Para terem condições de o fazer, será necessário «olhar o tempo da aula» como um momento privilegiado para o encontro. O encontro de uma pequena comunidade matemática. Momento de partilha, de descobertas, de dúvidas, de questões, de conjecturas, de argumentos, meios de prova, justificações. E, por esta via, um momento propício à aprendizagem:

> A partilha de ideias matemáticas permite a interacção de estratégias e pensamentos de cada um com os outros. Ou seja, permite que as ideias se tornem objectos de reflexão, discussão e eventual reformulação. As tentativas de comunicar um raciocínio pessoal proporcionam oportunidades para uma compreensão mais profunda da matemática». (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008, p.62)

Neste processo, o professor deverá ser, simultaneamente, líder e participante. As suas intervenções permitirão manter a coesão do grupo na vertente da relação e da tarefa. Poderá repetir ideias centrais para as realçar, dizer de uma outra forma uma ideia apresentada por um aluno para a tornar mais inteligível para os outros, fazer perguntas inquietantes, provocadoras e desafiadoras. «A pergunta deixa de ter como objectivo único, o teste de conhecimentos dos alunos para ser o elemento catalisador de uma comunidade de aprendizagem» (Boavida *et al.*, 2008, p. 64).

Este pensar sobre o pensamento, permite aos alunos e ao professor uma comunicação muito rica do ponto de vista matemático, pois deixa transparecer «um caminho de aprendizagem», onde sucessivamente, através de pequenos avanços e recuos, o pensamento se vai estruturando. O «erro» faz parte deste percurso. Não é devastador, algo a evitar a todo o custo. Pelo contrário, pode permitir construir alicerces mais profundos desde que se reflicta sobre ele. Os diferentes ritmos de aprendizagem não se tornam bloqueadores dessa aprendizagem, na medida em que percursos diversos dos alunos permitem que cada um encontre o seu próprio percurso. E assim, «a comunicação desempenha um papel importante que é o de permitir que um modelo de pensamento de um aluno se transforme num *modelo para pensar* dos restantes.» (Boavida *et al.* 2008, p. 62).

Torna-se, portanto, muito importante *aprender a falar* e *aprender a escutar*. Escutar com simpatia e disponibilidade para seguir o pensamento do outro, clarificando o próprio pensamento. Comunicar exige organização, escutar exige muita concentração, auto-controlo e respeito. Escutar é uma oportunidade para integrar uma outra perspectiva, para nos apercebermos de uma incoerência no raciocínio ou até da dificuldade na compreensão de uma ideia. Partilhar os sentimentos e as ideias co-responsabiliza os alunos pelas aprendizagens próprias e dos seus pares. A forma como cada um fala, participa, intervém e escuta pode ser facilitadora ou inibidora da aprendizagem dos demais.

Congressos Matemáticos: um caminho favorável à comunicação

Num congresso matemático (Fosnot, C. & Dolk, M., 2002), onde a comunicação reflexiva e instrutiva tem um lugar de destaque, permite vivenciar, na sala de aula, «muitos dos aspectos essenciais da actividade de produção matemática, tal como é desenvolvida na comunidade dos matemáticos» (Boavida, 2008, p. 57). A sua realização é o culminar de um processo que começa por propor aos alunos que, em grupos/pares, explorem uma tarefa e que elaborem um cartaz onde explicitem as estratégias utilizadas de modo a mostrar a outros os seus raciocínios. É-lhes, também, pedido que preparem a apresentação do cartaz e que antecipem questões que os colegas lhes poderão colocar. Por último, o professor, de acordo com os objectivos que estabeleceu para a aula, as características dos alunos e o tipo de estratégias usadas, selecciona os cartazes que serão apresentados e por que ordem o serão. O congresso matemático consiste na apresentação, análise e discussão colectivas destes cartazes e, no seu decurso, todos alunos são incentivados a colocar questões aos colegas.

Durante todo este processo, surgem várias oportunidades para reflectir sobre Matemática. Em primeiro lugar, durante o trabalho de pares/grupo há que pensar sobre a resolução da tarefa. A elaboração do cartaz constitui uma segunda oportunidade de reflexão, não só porque os alunos têm que se preparar para apresentar e defender o seu raciocínio, mas também porque, ao tentarem prever as questões dos colegas, reanalisam a sua própria resolução o que é favorável ao aprofundamento da compreensão. A terceira oportunidade surge na altura em que os cartazes são partilhados na turma, pois quem apresenta tem que interpretar questões colocadas, tentar responder-lhes e apresentar argumentos que permitam a outros entender o modo como pensaram. Os restantes elementos da turma são responsáveis por escutar criticamente o que é dito, por tentar encontrar sentido no que ouvem e por intervir caso não compreendam ou não concordem. Assim sendo, «a resolução de problemas é apenas um ponto de partida. É uma rampa de lançamento para o intenso discurso matemático durante o congresso» (Dolk, 2008, p. 52).

Congressos matemáticos a propósito do problema das baguetes

Criando condições

A tarefa designada por problema das baguetes, cujo enunciado se apresenta em seguida, consiste num relato feito, na primeira pessoa, por uma professora.

A decisão de propor esta tarefa às duas turmas do 6° ano de Paula e Margarida prende-se com as potencialidades que lhe encontraram para favorecer a compreensão do conceito de número racional e suas diversas representações, bem como das operações adição e multiplicação de números representados sob a forma de fracção.

Em qualquer das turmas, a sua exploração ocupou duas aulas de noventa minutos. Paula e Margarida estiveram presentes em todas estas aulas e Ana nas de uma das turmas. Na primeira, os alunos trabalharam em grupo para resolver a tarefa e estruturar os cartazes. A segunda, destinou-se à realização dos congressos matemáticos, ou seja à comunicação e discussão em grande grupo tendo por ponto de partida a apresentação destes cartazes.

Na altura, Paula e Margarida tinham já trabalhado a noção de fracção, a equivalência de fracções e a adição e sub-

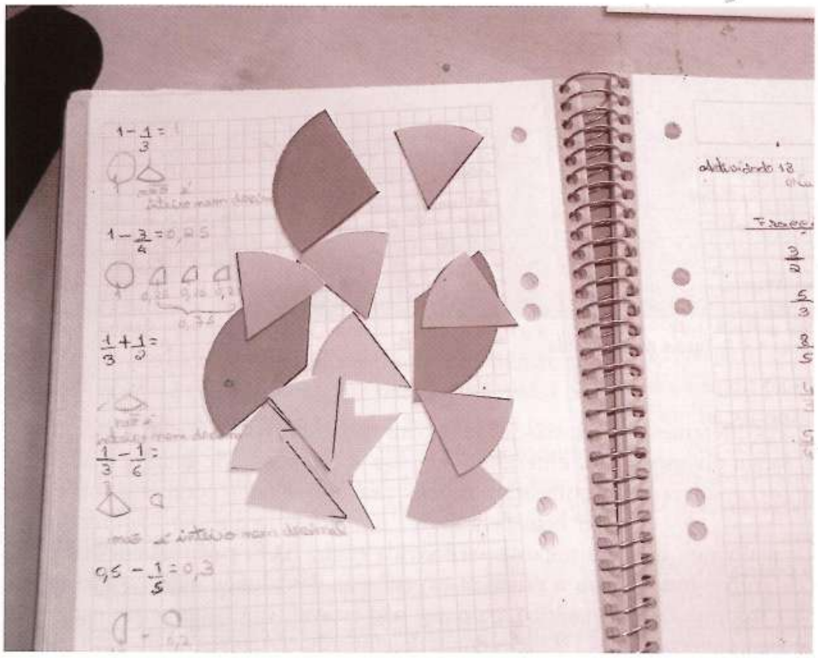


Figura 1

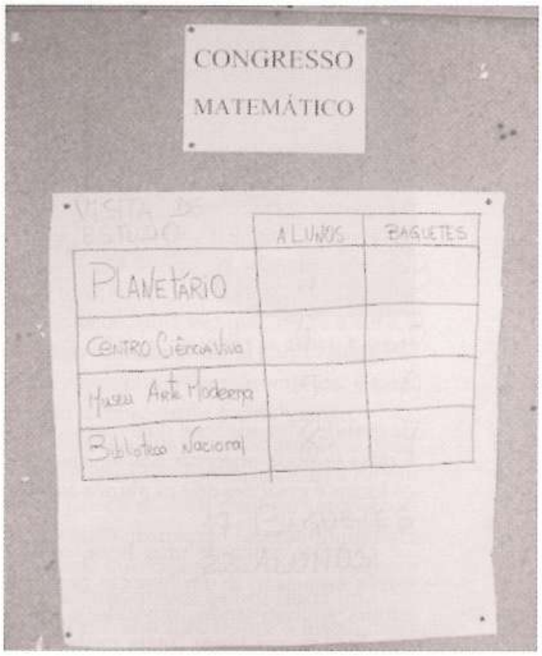


Figura 2

tracção de números representados sob a forma de fracção sem recurso a regras operatórias. Para o efeito, apoiaram-se nos «queijos», termo adoptado nas turmas para designar um material que ilustra representações geométricas de fracções: metades, terços, quartos, quintos, sextos, oitavos e décimos, sendo a unidade um círculo (figura 1). O objectivo deste recurso é ajudar os alunos a trabalhar o sentido de número racional, a olhar a fracção como uma relação entre a parte e o todo e não como um mero quociente entre dois números.

Já era prática comum nas turmas solicitar aos alunos que descrevessem os seus processos de pensamento, que explicassem e justificassem as suas ideias e que elaborassem «pequenas composições matemáticas». No entanto, Paula e Margarida nunca tinham experimentado envolvê-los numa actividade que passasse pela realização de um congresso matemático e, através da experiência, pretendiam criar um espaço em que fosse privilegiada uma discussão colectiva em torno de ideias matemáticas significativas.

Em qualquer das turmas, o enunciado da tarefa foi apresentado aos alunos oralmente, em tom de quem conta uma história. À medida que se lia, os dados eram registados numa tabela bem visível (figura 2). Como primeira abordagem ao problema, pediu-se aos alunos que reflectissem sobre a pergunta «houve justiça na distribuição das baguetes para o almoço dos alunos?» e que dissessem o que lhes ocorria espontaneamente. Debateram-se com a ideia e esgrimiram argumentos emitindo as suas opiniões de forma um tanto desorganizada. Estava criado um desequilíbrio favorável a uma análise mais profunda do problema.

Foram, então, formados grupos de quatro/cinco alunos a quem foi pedido que procurassem um lugar para trabalhar. A cada grupo foi dada, somente, uma folha de papel cenário

O problema das baguetes[1]

[...] No ano passado, uma das minhas turmas estava a desenvolver um projecto que era muito abrangente, cruzando saberes de várias disciplinas. Um dia, decidimos ir pesquisar dados para o projecto e pedimos a colaboração de alguns pais que estavam disponíveis para nos acompanhar. Cada um dos grupos de trabalho foi para um sítio diferente já que tinha um adulto perto. Assim, cinco alunos foram para o Planetário, quatro foram para o Centro de Ciência Viva, cinco foram para o Museu de Arte Moderna e, por último, oito alunos foram para a Biblioteca Nacional. O problema é que a empregada do bar da escola, ao preparar-lhes baguetes para o lanche, fez apenas dezassete baguetes e distribuiu-as do seguinte modo: deu três baguetes aos quatro alunos que foram para o Centro de Ciência Viva e quatro aos cinco que foram ao Museu de Arte Moderna; os oito que foram à Biblioteca ficaram com sete baguetes e as três restantes deu-as aos cinco alunos do Planetário.

Na aula seguinte, conversámos sobre como tinham corrido as visitas de estudo. Alguns dos meus alunos queixaram-se de que a distribuição das baguetes não tinha sido justa, pois alguns alunos tinham tido mais comida do que outros. O que pensam disto? Será que tinham razão? Eu não tenho a certeza...

Figura 3. Turma da Paula

Figuras 4 e 5. Turma da Margarida

de grandes dimensões e dois marcadores de cores diferentes. Como se pode observar nas figuras 3, 4 e 5, foram diversos os locais e posições que os alunos escolheram para resolver o problema.

Durante cerca de uma hora, os alunos trabalharam na tarefa enquanto as professoras percorriam os grupos indagando, incentivando, ouvindo e recolhendo informações que lhes permitissem, mais tarde, organizar os congressos matemáticos.

Apresentam-se, em seguida, aspectos relativos à concretização de cada um destes congressos. O primeiro, intitulado *O dia dos «clicks»*, ocorreu na turma de Paula e inclui intervenções seleccionadas, feitas por diferentes grupos, a propósito da visita ao Planetário. O segundo — *Como as fracções denunciam injustiças* — desenrolou-se na turma de Margarida. Em qualquer dos casos, optou-se por trazer para primeiro plano a voz da professora da turma, pelo que o texto correspondente a cada um é escrito na primeira pessoa.

Congresso O dia dos «clicks»

Ao longo do congresso, procurei orientar a partilha e discussão de ideias preocupando-me em assegurar que se tocavam os aspectos matemáticos mais importantes trabalhados em cada grupo e, simultaneamente, que fossem reanalisados raciocínios feitos à luz de ideias que iam sendo consideradas válidas na turma. Decidi iniciar a apresentação dos cartazes pelo grupo de Teresa. O episódio a seguir apresentado ilustra aspectos do modo de pensar deste grupo.

Episódio «Só dividimos metades em quintos»

Teresa (apontando para o cartaz do seu grupo — figura 6): Nós temos cinco alunos e três baguetes, temos que dividir ao meio as baguetes. Cada aluno come metade e dividimos o que sobra em cinco partes e fica uma parte para cada aluno.

Paula: Como é que surge no cartaz a fracção 1/10 se afirmaram estar a dividir em cinco partes?

Teresa (apressa-se a explicar): Só dividimos metades em quintos. Então, temos uma baguete dividida em dez e sabemos que cada uma representa um décimo.

Considerei o contributo de Teresa muito positivo. No entanto, não me limitei a aceitá-lo e decidi intervir com uma questão que teve o intuito de provocar a reflexão. Com efeito, entendo que «para a promoção de uma aprendizagem significativa é mais proveitoso fazer perguntas, ou devolver boas perguntas a um aluno do que dar-lhe prontamente respostas» (Boavida *et al.*, 2008, p.66). Além disso, esta era a primeira experiência dos alunos num congresso matemático, pelo que não estavam ainda despertos para o papel que deveriam desempenhar. Através da questão que coloquei pretendi, também, modelar este papel, ou seja dizer aos alunos, de uma forma implícita, o que espera das suas intervenções.

O segundo grupo a mostrar o seu cartaz foi o de Gonçalo. Ao começar, este aluno não apresentou o trabalho preparado previamente pelo seu grupo, pois a anterior explicação de Teresa levou-o a questioná-lo e a reformulá-lo, como se pode observar no seguinte episódio.

Episódio «Escrevemos 1/5 mas deveríamos ter escrito 1/10»

Gonçalo: Enganámo-nos! Escrevemos 1/5 mas deveríamos ter escrito 1/10. Então, eram cinco alunos, três baguetes. O que fizemos foi dividir cada baguete ao meio e ainda sobrou uma metade para comer. Essa metade dividimo-la em cinco partes iguais.

(Gonçalo desenha a baguete no quadro (figura 7) explicando qual a parte comida por cada um dos alunos do Planetário).

Filipa: Não entendo!

Gonçalo: Só metade de uma baguete está dividida em cinco partes mas se estivessem a falar de uma baguete inteira estaria dividida em dez partes.

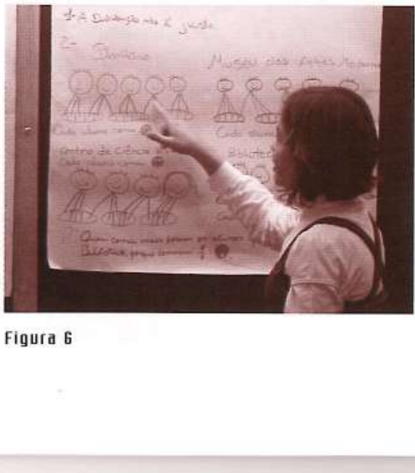


Figura 6

Cátia: Afinal cada aluno não come um décimo mas um quinto de metade de uma baguete!

(Gonçalo fica em silêncio tal como os seus colegas de grupo).

Paula: Que tal ouvir o que o próximo grupo tem para nos comunicar? Talvez possa ajudar a «desbloquear» a situação!

Este episódio mostra que as interacções que ocorrem na turma vão ajudando a criar uma nova compreensão. Gonçalo «soltou-se» do seu trabalho e procura uma forma de explicar a outros o que tinha ficado tão claro para si. Pareceu-me que este «click» ainda não se tinha dado para todos e achei muito curioso o facto de Gonçalo ter ficado em silêncio após a intervenção de Cátia. Decidi dar tempo para que o pensamento se pudesse organizar, pois dar tempo para pensar é outra forma de fazer uma pergunta aberta. Simultaneamente, propus a outro grupo, que sabia poder ajudar a avançar, que iniciasse a sua apresentação o que dá origem ao episódio apresentado a seguir.

Episódio «Já percebi professora!!! O quinto é da metade!».

Filipa (apoiando-se no cartaz representado na figura 8): Então nós no Planetário dividimos as baguetes ao meio e deu seis meios, sobrava um meio que deve ser dividida igualmente pelos alunos. Dividiu-se essa baguete em cinco metades...

Vários colegas: Metades!?

Filipa (atrapalhada): Em décimas.

Cristiana: Nós sabemos que 1/2 é 0,5 e 1/10 é 0,1 então cada aluno come 0,6.

Gonçalo (exclama do lugar): 1/5 da metade é 1/10 da baguete inteira!

Paula: Como se pode escrever matematicamente o que o Gonçalo acabou de dizer?

(Gonçalo escreve: 1/5 × 1/2 = 1/10 e procura os «queijos» para justificar o seu raciocínio: figura 9).

Tatiana (entusiasmada): Já percebi professora! O quinto é da metade!

E muito animada com a descoberta recorre aos decimais para clarificar a situação:

Tatiana: Se 0,5 é metade e dividirmos em cinco partes cada parte é 0,1!

Foi muito interessante constatar que com o decorrer da actividade, os alunos se vão apropriando da condução do próprio processo ensino e aprendizagem, esclarecendo, questionando, mostrando, provando, numa alternância sucessiva de papéis. O diálogo deixou de ser exclusivamente entre mim e os alunos para passar a ser também entre pares. Fui-me apercebendo dos processos de pensamento dos alunos e, apoiando-me neste conhecimento, fui preparando as minhas intervenções futuras. Por exemplo, a questão que coloquei na sequência da intervenção de Gonçalo, prende-se com o formalismo matemático, uma vez que, nessa altura, a expressão a quinta parte da metade já tinha ganho significado. Depois de garantida a compreensão matemática, é também importante aprender a representar formalmente.

Ao acompanhar o trabalho dos diversos grupos e baseando-me na análise das diversas resoluções, escolhi a ordem de apresentação dos cartazes de modo a permitir um percurso do mais concreto ao mais abstracto. Intencionalmente reservei para o final o grupo que organizou o seu trabalho a partir do conceito de percentagem que nunca tinha sido trabalhado na turma. O episódio seguinte ilustra o início desta apresentação.

Episódio «Gostava de perceber melhor essa ideia...»

Rinald: Cada aluno comeu 6/10 ou seja 60% da baguete.

Tatiana: Se a unidade fosse 100% então os alunos comiam 60% ... É isto que queres dizer?

Paula: Gostava de perceber melhor essa ideia... Por que não usar os queijos para explicar melhor essa ideia aos teus colegas? Um queijo inteiro corresponde a que parte?

Quando preparei as aulas associadas ao problema das baguetes, não suspeitei que fosse mobilizado o conceito de percentagem. Devido à «novidade» deste conceito para a generalidade dos alunos, na sequência deste episódio senti necessidade de ser mais interventiva para os ajudar a caminhar na sentido da sua apropriação. Aos poucos e à medida que determinadas questões cruciais foram sendo colocadas, questionadas, debatidas, as ideias, tão profundamente intuitivas de início, foram-se clarificando, o pensamento foi-se estruturando e os alunos começaram a atribuir sentido ao conceito de percentagem. Esta estratégia, não esperada, revelou-se muito útil pois permitiu relacionar as diferentes

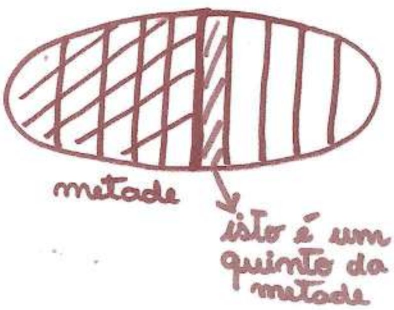


Figura 7

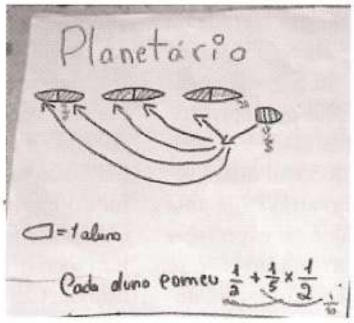


Figura 8

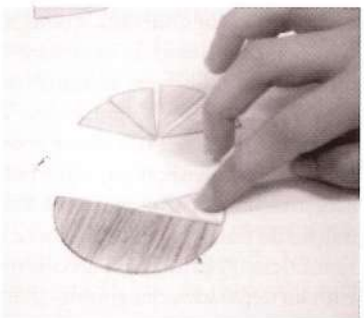


Figura 9

formas de representação de números racionais e utilizar estratégias de cálculo mais eficazes.

Como as fracções denunciam injustiças

Assim que foram confrontados com o problema das baguetes, os meus alunos começaram entusiasticamente a tecer considerações sendo convergente a ideia de que a partilha não tinha sido justa. Salientaram, de imediato, que dar três baguetes a um grupo de quatro alunos ou a um grupo de cinco alunos não é a mesma coisa. Perguntei-lhes, então, se estávamos perante uma divisão ou uma distribuição. Neste momento as opiniões dividiram-se. Debateram-se com a ideia e emitiram as suas opiniões de forma um tanto caótica. Reflectiam «em voz alta». Estava instalada a dúvida... Nada como uma dúvida para aguçar o espírito!

Depois de os deixar falar um pouco desordenadamente, pedi-lhes que organizassem as ideias e que interviessem um de cada vez para que todos pudéssemos seguir os raciocínios. Por exemplo, Mafalda dizia que as baguetes tinham sido «divididas» e «distribuídas», porque «era a mesma coisa»! Já Helder discordava mas não sabia bem porquê. José afirmava que a divisão «é em partes iguais». Depois destas intervenções, perguntei o que pensavam os restantes alunos e foram muitos os que responderam que José tinha razão. Depois de exemplificar com dois alunos uma distribuição (um rebuçado para um, três para o outro) e uma divisão (dois rebuçados para cada um), a turma decidiu que era «mais justo» dividir do que distribuir.

De volta ao problema acrescentei o desafio mais emocionante. Se não houve justiça na distribuição das baguetes, então que parte coube aos alunos de cada visita de estudo? A quem coube a parte maior? E a menor? E foi com este desafio que se iniciou o trabalho de grupo. Para diferenciar os vários grupos, usei papéis coloridos e salientei a importância de elaborarem cartazes com as suas estratégias de resolução.

A análise destes cartazes, bem como o acompanhamento do trabalho de grupo, revelou a existência de diferentes níveis de maturidade matemática. Tendo consciência da forma como todos tinham trabalhado, «sabia», com o que cada grupo podia contribuir para o todo e, portanto, decidi que as apresentações se fizessem a partir dos grupos que tinham usado estratégias mais icónicas para que todos pudessem ir acompanhando os raciocínios.

Três grupos procederam, de imediato, à representação das baguetes dividindo-as pelo número de alunos que tinha ido a cada visita de estudo. Como não eram suficientes para cada aluno ficar com uma, começaram por «dar» metade de uma baguete dividindo as restantes pelo número de alunos, ou ainda dividindo as restantes metades de baguetes pelo número de alunos. O grupo dos Verdes foi o que apresentou o trabalho com um maior grau de formalidade e simbolismo. Não desenhou baguetes passando, de imediato, à representação da parte que cabia a cada aluno através de uma adição de fracções e comparando, em seguida, as expressões numéricas. A princípio pareceu-me que estes alunos não se tinham deparado com grandes dificuldades. No entanto, durante a apresentação do cartaz, reparei que nem todos os elementos do grupo conseguiam explicar e defender o seu trabalho. Aparentemente, alguns não o percebiam bem, o que era indiciador de que alguém do grupo tinha o pensamento formal mais desenvolvido. Penso que, neste caso, foi muito importante ver como colegas de outros grupos que utilizaram um pensamento mais concreto, ligado a ícones, resolveram o problema: desenharam as baguetes e atribuíram a cada elemento a sua parte (ver, por exemplo, figura 10).

Figura 10

A comparação das quantidades de baguete que cada aluno «comeu» durante a visita de estudo não foi feita da mesma forma por todos os grupos. Alguns representaram a fracção sob a forma de número decimal, outros recorreram «aos queijos». Um grupo apresentou a estratégia de comparação ilustrada na figura 11: representou o que cada um comeu em igual quantidade — metade de uma baguete! — e depois trabalhou com o que ultrapassou a metade, pois, como disseram, «todos comeram metade e mais um bocadinho»!

Não houve dificuldades nas diferentes representações dos números racionais. Conhecendo o trabalho dos alunos, penso ser pacífica a questão de conversão da fracção decimal em numeral decimal mas resolvi perceber como lidaram com $1/4$ e $3/8$. Apressaram-se a dizer que utilizaram o «cálculo em árvore», uma das memórias da turma: um quarto é a metade da metade de uma unidade, para obter oitavos é só fazer novamente metade; ou então, usando as cadeias numéricas, 4×25 é 100 logo $4 \times 0{,}25$ é cem vezes menor que 100, portanto é 1; se 25 é a quarta parte de 100 então, 0,25 é a quarta parte de 1; $1/8$ é metade de 0,25, logo é 0,125; para obter $3/8$ é só ir buscar três partes. Estavam justificadas as «divisões milagrosas»!

O congresso matemático não terminou aqui. Muitas outras questões foram nascendo a partir de intervenções variadas e relativamente a vários locais da visita, até termos chegado à resposta final. Concluiu-se que o grupo mais beneficiado foi o da Biblioteca Nacional e o mais prejudicado foi do Planetário. Os alunos salientaram, ainda, uma conclusão muito importante: as fracções não enganam! Mostraram logo se houve justiça na distribuição das baguetes! Não houve! Comprovado! E... provado que é um termo bem mais matemático.

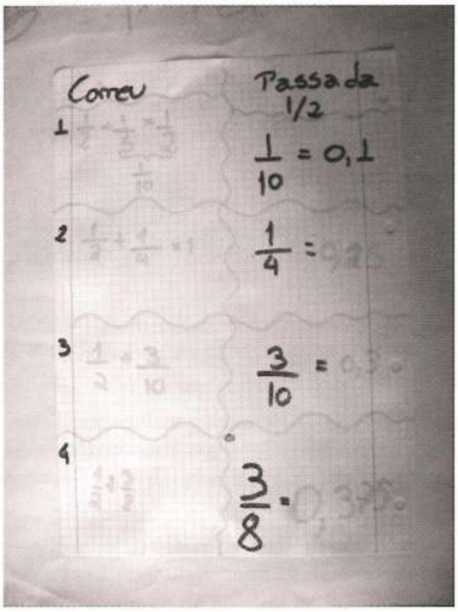


Figura 11

Reflectindo sobre a experiência

Não foi por acaso que os episódios seleccionados para este artigo se relacionam com a visita ao Planetário. De facto, em qualquer das turmas a primeira questão estruturante da discussão foi a parte que cabia a cada aluno que foi a este local: 1/2 + 1/5 da metade, 1/2 + 1/5 × 1/2 ou 1/2 + 1/10 ? Para uns alunos era evidente a equivalência entre estas expressões. Para outros não. Foram necessárias diversas intervenções, várias reformulações destas intervenções, subtis mas substantivas, para que aos poucos esta ideia fosse ganhando significado. Neste processo, «os queijos», foram um recurso importante, como é bem visível no comportamento de Gonçalo que, ao querer-se fazer entender, a eles recorre.

A partir da compreensão, pelos alunos, do porquê da equivalência entre 1/5 × 1/2 e 1/10 foram analisados outros exemplos de multiplicação de números representados sob a forma de fracção e, por generalização, chegou-se à regra operatória que, fruto da experiência vivida, ganhou sentido para os alunos.

Neste processo, as questões colocadas foram cruciais para a comunicação que ocorreu. Por exemplo, a interpelação de Paula «*Como é que surge no cartaz a fracção 1/10 se afirmaram estar a dividir em 5 partes?*» focou a atenção dos alunos num aspecto crucial e desempenhou um papel provocador e desafiador do pensamento matemático.

Gerir a comunicação parece um «trabalho sem rede». É aos poucos, à medida que se vão vivendo experiências do tipo das realizadas, que se vai ficando com maior sensibilidade para orientar as interacções e para colocar as perguntas que permitem manter o grupo comprometido com as ideias matemáticas em discussão e que provocam conflitos cognitivos necessários à aprendizagem. Muitas das perguntas que inquietam, que desafiam, são escolhas do momento, pois estão intimamente relacionadas com intervenções dos alunos que não se podem prever de antemão. No entanto, há muitas outras em que se pode e deve pensar antecipadamente, no momento da planificação. Por esta via, o professor dota-se de recursos que lhe poderão ser úteis na dinamização e gestão da comunicação e, simultaneamente, aumenta a sua capacidade de improvisar, em acção, as «perguntas certas» na hora certa, ou seja, perguntas que poderão originar importantes momentos de reflexão.

Um outro aspecto a destacar, prende-se com a natureza da tarefa apresentada. Com efeito, «uma escolha cuidadosa das tarefas (...) tem um papel importante na criação de oportunidades ricas de comunicação. (Boavida, *et al.* 2008, p. 62). No momento em que foi proposto o problema das baguetes, os alunos não podiam resolvê-lo pela mera aplicação de conhecimentos previamente adquiridos. Para encontrarem a solução, tinham que ultrapassar uma descontinuidade entre o ponto em que estavam e aquele a que pretendiam chegar. Além disso, o problema parecia ser motivador e permitia a utilização de várias estratégias de resolução que requeriam graus de sofisticação matemática diferentes. A conjunção de todos estes aspectos levava a suspeitar que a sua exploração poderia fazer surgir discussões matemáticas significativas, o que veio a acontecer. Assim, tarefas com estas características parecem ser favoráveis à realização de congressos matemáticos.

Através do problema das baguetes pretendeu-se trabalhar a comunicação oral e escrita, começando por incentivar os alunos a descreverem os seus processos de pensamento numa linguagem própria com a intenção de, a pouco e pouco, os ajudar a aperfeiçoá-la de modo a aproximarem-se duma linguagem cada vez «mais matemática». Procurou-se incentivar uma comunicação progressivamente mais rigorosa, uma vez que há uma estreita relação entre os processos de estruturação do pensamento e a linguagem. Tentou-se, também, que os alunos verbalizem os seus raciocínios, discutissem processos de resolução, confrontassem ideias e pensassem sobre o pensamento de outros. Procurou-se, ainda, promover o sentido crítico, não só sobre o conteúdo da comunicação mas também sobre a forma de comunicar. Todos os grupos reflectiram sobre a mesma questão. Tentou-se delinear o ensino tendo em conta as estratégias, raciocínios e dúvidas dos alunos e, assim, procurou-se fomentar uma comunicação reflexiva e instrutiva (Brendefur e Frykholm, 2000). No entanto, foi ao longo do tempo e através do diálogo continuado, que se desenvolveu a compreensão matemática.

Neste contexto, o congresso matemático foi «mestre». Permitiu aumentar o apreço pela necessidade de precisão da linguagem. Possibilitou que, de forma equilibrada, os alunos desenvolvessem capacidades e aptidões, construíssem uma compreensão significativa de conceitos e praticassem o cálculo sem estarem «presos» a um formalismo excessivo. Facilitou a aprendizagem de «certos conteúdos» essenciais em salas de aula em que se privilegia uma comunicação instrutiva e reflexiva em que se incluem, segundo Lampert (2001), a importância da escuta atenta, da expressão audível, da participação organizada e do respeito mútuo.

Os alunos agiram como «pequenos investigadores matemáticos» num percurso que tem muitas semelhanças com o trabalho dos matemáticos: houve momentos de grandes dúvidas, de «erro», de partilha entre colegas, de novo investimento, de argumentação e de prova. Interiorizaram uma atitude de co-responsabilização mútua pelas aprendizagens de todos e ao exteriorizarem essa atitude escutando activamente, respeitando as diferenças de opinião e procurando argumentos válidos para fundamentarem as suas ideias, agiram como professores. Foi com prazer que observámos alunos a começarem a usar as perguntas para orientar os colegas num determinado processo de pensamento ou a manifestar preocupação por alguém parecer não estar a acompanhar o que estava a ser explicado, incentivando-o a colocar a sua dúvida ou a apresentar a sua ideia.

Em suma, foram várias as razões que nos levaram a apreciar toda a actividade matemática desenvolvida a propósito do problema das baguetes e a encontrar nela potencialidades não antecipadas. Há, no entanto, uma que consideramos central: embora o professor tenha um papel essencial, o processo de aprendizagem deve estar centrado no aluno que tem, também, em si, a responsabilidade de o desenvolver, envolvendo-se a si e aos outros. Ficámos com mais consideração pelos alunos, com maior conhecimento das suas potencialidades e até surpreendidas com o desempenho de alguns. Usando as palavras de Margarida, «não mais nos atreveremos a dizer que os alunos não são capazes». Desafiamos outros professores a deixarem-se surpreender, a ousarem utilizar as «capacidades escondidas» dos seus «brilhantes» alunos!

Nota

1 Extracto de um material de formação do Programa de Formação Contínua em Matemática da ESE de Setúbal, adaptado de Fosnot, C. & Dolk, M. (2002).

Referências

APM (Ed.). (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM (documento original publicado em 2000).

APM (Ed.). (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM/IIE (documento original publicado em 1991).

APM (Ed.). (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM/IIE (documento original publicado em 1989).

Boavida, A. M. (2008). Arqueologia educativa e congressos matemáticos. Em J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 55–59). Lisboa: Escolar Editora.

Boavida, A. M., Paiva, A., Cebola, G. Vale, I. Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no 1° ciclo do ensino básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Brendefur, J., Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, 125–153.

Dolk, M. (2008). Problemas realistas: um ponto de partida para uma sequência de oportunidades de aprendizagem. Em Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (Eds.). *O Sentido do Número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. (pp. 35–53). Lisboa: Escolar Editora.

Fosnot, C. & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals and percents*. Portsmouth: Heinemann.

Lampert, M. (2001). Teaching problems and the problems of teaching. New Haven, CT: Yale University Press.

Ministério da Educação. (2001). *Currículo nacional do Ensino Básico: Competências essenciais*. Lisboa: ME/DEB.

Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H., Brenda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Ana Maria Boavida, ESE de Setúbal

Margarida Silva, EB 2/3 Pinhal de Frades

Paula Fonseca, EB 2/3 Pinhal de Frades

Materiais para a aula de Matemática

Borrachas em caixas

Esta tarefa poderá ser resolvida por alunos do 4°, 5° ou 6° anos de escolaridade. Envolve a mobilização da capacidade de visualização espacial e os conceitos de volume e de divisão. Em termos de capacidades transversais mobiliza-se o raciocínio e a comunicação matemática. Na exploração da tarefa pelos alunos, o recurso a cubos coloridos pode ser vantajoso e ajudar na construção de uma argumentação.

É importante que antes de lhes ser apresentada esta tarefa, os alunos tenham tido a oportunidade de realizar actividades diversificadas com volumes. A manipulação de cubos de encaixe para fazerem vários empilhamentos, ou construírem prismas com determinadas dimensões, são actividades que permitem lidar com as três dimensões e desenvolver a visualização espacial. Por exemplo, descobrir maneiras diferentes para empilhar 36 cubos, tendo de obter uma construção prismática, é uma actividade de exploração que permite visualizar as transformações obtidas quando o volume é mantido, mas as dimensões do comprimento, da largura e da altura variam. A planificação das construções obtidas em papel quadriculado também poderá ajudar a desenvolver estes conceitos.

Alice Carvalho

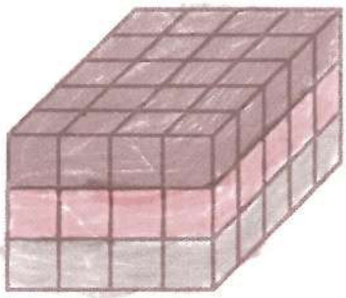
Borrachas em caixas

Em cada uma das caixas seguintes há 60 borrachas. Cada cubo representa uma borracha.
Em cada caixa, há borrachas de três cores. O número de borrachas de cada cor é igual.

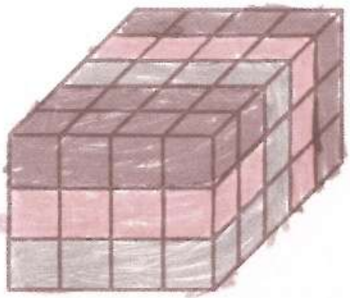
Estes trabalhos foram feitos por dois alunos do 4º ano. Em cada caixa, eles representaram a distribuição das 60 borrachas (60 cubos) pelas três cores, de maneira diferente. Estão todas correctas.

As duas caixas de cima são do Diogo e a debaixo é da Rita.

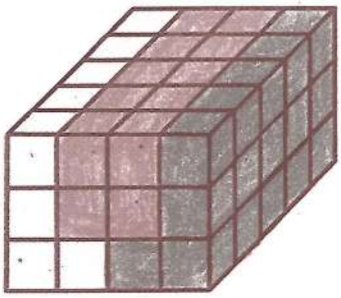
Através de palavras e cálculos, mostra como podes saber que nas três caixas o número de borrachas de cada cor é o mesmo.



Caixa A



Caixa B



Caixa C

Estratégias espontâneas de alunos do 9.º ano em Combinatória

Paulo Ferreira Correia
José António Fernandes

Introdução

Tradicionalmente, a principal área de aplicação da Combinatória tem sido as Probabilidades, usada na determinação do número de casos possíveis e de casos favoráveis a um acontecimento (Watson, 1996). Também Piaget e Inhelder (s/d) relacionam o raciocínio combinatório com o raciocínio probabilístico ao assumirem que uma escassa capacidade de raciocínio combinatório reduz a aplicação do conceito de probabilidade a casos muito simples, restringidos a situações de enumeração directa dos casos possíveis que constituem o espaço amostral.

No prefácio do livro *Razonamiento Combinatorio*, de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994), Fischbein realça a importância da capacidade combinatória como uma das condições básicas do raciocínio lógico. Na opinião do autor, a Análise Combinatória, com os seus conceitos e métodos, constitui «um pré-requisito estrutural importante para a dinâmica e potência criativa do raciocínio lógico em geral» (p. 11). Nesta perspectiva, não cultivar o raciocínio combinatório poderá revelar-se uma séria limitação no desenvolvimento do pensamento formal dos jovens (Batanero, Godinho & Navarro-Pelayo, 1994).

Por outro lado, os problemas de Combinatória facilitam o desenvolvimento de processos de enumeração, de realização de conjecturas, de generalização e o pensamento sistemático, essenciais para a aprendizagem da matemática em todos os níveis de ensino (English, 2005). Ainda o facto de as estratégias de resolução de problemas de Combinatória constituírem estratégias gerais, aplicáveis não apenas à Combinatória, relevam o papel que a Combinatória pode desempenhar na aprendizagem de técnicas gerais de resolução de problemas (Roa, Batanero, Godino & Cañizares, 1996).

Exemplificam-se, seguidamente, as principais estratégias utilizados pelos 27 alunos de uma turma do 9.º ano, no ano lectivo 2006–2007, na resolução individual de 15 problemas de Combinatória: 3 de permutações simples; 4 de arranjos com repetição; 4 de arranjos simples; e 4 de combinações simples. Em todas as operações combinatórias, num dos problemas pedia-se uma fórmula de determinação de todas as configurações possíveis num conjunto de n elementos (questões c), enquanto todos os outros envolviam valores constantes dos parâmetros e era dado um exemplo de configuração.

Estratégias espontâneas utilizadas pelos alunos

Com os quatro grupos de problemas do questionário, pretendia-se averiguar as estratégias espontâneas utilizadas pelos alunos para contar:

1. as P_3, P_5 e P_n, respectivamente nas questões *1a)*, *1b)* e *1c)*, na situação de *dispor amigos em fila para tirar uma fotografia*;
2. os $\overline{A}_2^3$, $\overline{A}_2^5$, $\overline{A}_2^n$ e $\overline{A}_3^5$, respectivamente nas questões *2a)*, *2b)*, *2c)* e *2d)*, na situação de *formar números*;
3. os A_2^3, A_2^5, A_2^n e A_3^5, respectivamente nas questões *3a)*, *3b)*, *3c)* e *3d)*, na situação de *definir bandeiras com barras horizontais*; e
4. as C_2^3, C_2^5, C_2^n e C_3^5, respectivamente nas questões *4a)*, *4b)*, *4c)* e *4d)*, na situação de *formar grupos de pessoas para participarem num concurso*.

Enumeração

A estratégia *enumeração* (*não sistemática* usada em 4% dos casos e *sistemática* usada em 27%) foi a mais utilizada pelos alunos na resolução dos problemas propostos.

A estratégia *enumeração não sistemática* foi utilizada, sobretudo, nas operações combinatórias que envolviam pequenos valores dos parâmetros e revelou-se pouco eficaz na obtenção das respostas correctas (ver tabela 1).

Nesta estratégia os alunos não recorreram a um método organizado de contagem, limitando-se apenas a procurar configurações possíveis por comparação com as já encontradas (ver figura 1).

Este mesmo aluno explica a sua estratégia de resolução no seguinte diálogo, que manteve com o investigador, da seguinte forma:

A8 — *Hum... Não estou a encontrar mais diferentes.*

Investigador — *Pronto, se achas que terminaste podes passar ao seguinte.*

A8 — *Sim. [Pausa] Estou a ver se consigo.*

Investigador — *Estás a ver se consegues...*

A8 — *Estou a ver se consigo encontrar mais algum [caso]. Mas acho que não.*

A estratégia utilizada pelo aluno A3 poderá ser encarada como uma estratégia de transição entre um método de contagem por tentativas e um procedimento sistemático de enumeração (ver figura 2).

Grupos de problemas	Questões a)	Questões b)	Questões d)	Total
Permutações simples	4 (75%)	4 (0%)	—	8 (38%)
Arranjos com repetição	1 (0%)	0	0	1 (0%)
Arranjos simples	2 (0%)	1 (0%)	0	3 (0%)
Combinações simples	0	0	1 (0%)	1 (0%)
Total	7 (43%)	5 (0%)	1 (0%)	13 (23%)

Tabela 1. Número de resoluções obtidas por enumeração não sistemática na resolução dos 4 grupos de problemas (percentagem de respostas correctas)

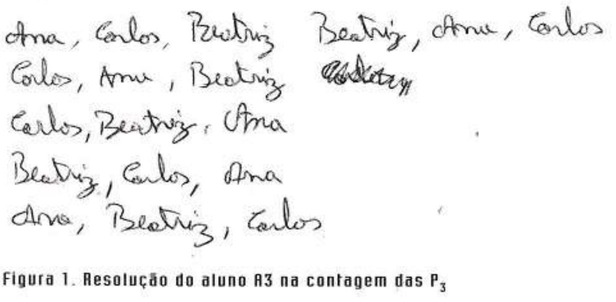


Figura 1. Resolução do aluno A3 na contagem das P_3

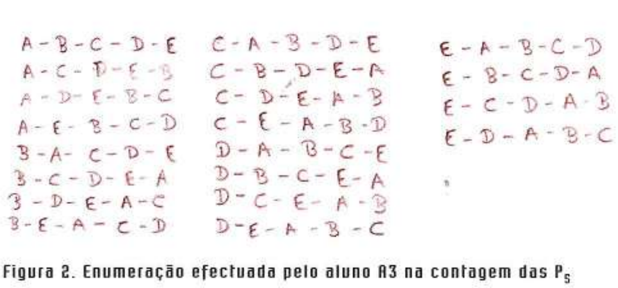


Figura 2. Enumeração efectuada pelo aluno A3 na contagem das P_5

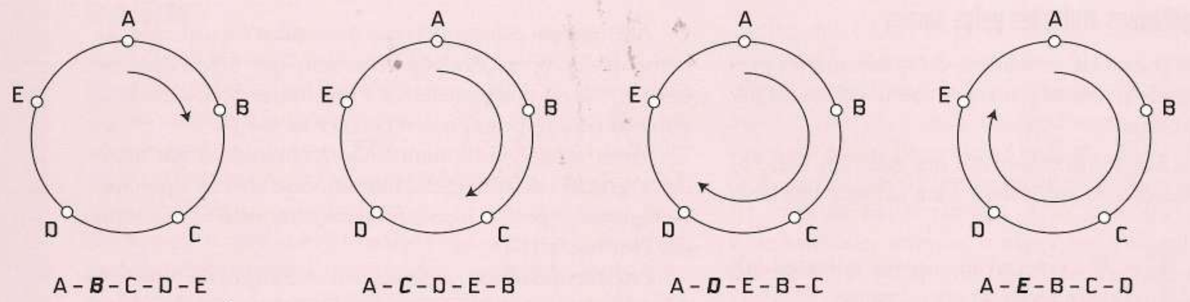


Figura 3. Interpretação da estratégia utilizada pelo aluno A3 na contagem das P_5

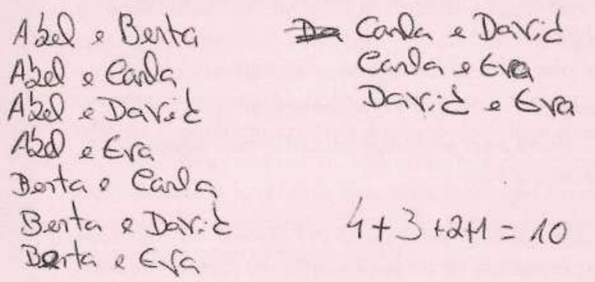


Figura 4. Enumeração efectuada pelo aluno A3 na contagem das C_2^5

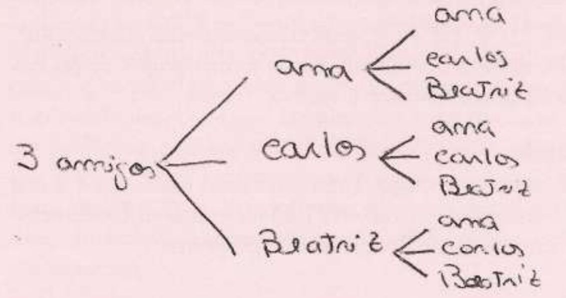


Figura 6. Diagrama de árvore construído pelo aluno A23 na contagem das P_3

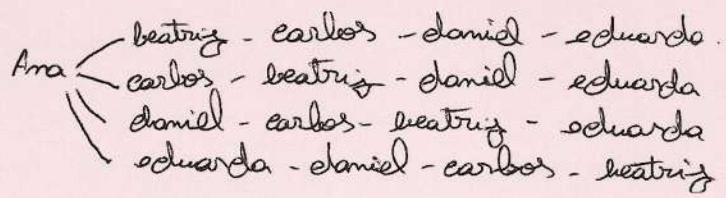


Figura 5. Parte do diagrama de árvore construído pelo aluno A16 na contagem das P_5

O processo de enumeração utilizado consiste na construção das configurações a partir da sequência $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ no sentido do movimento dos ponteiros do relógio, com a fixação de cada uma das letras na primeira posição (ver figura 3).

A estratégia *enumeração sistemática* foi utilizada, particularmente, na resolução das questões que envolviam um menor número de elementos, situações em que se revelou mais eficaz na medida em conduziu a mais respostas correctas (ver tabela 2).

O procedimento algorítmico predominante consistiu na utilização de elementos pivô a partir dos quais eram construídas as configurações. Em particular, o número de possibilidades para P_5 dificultou a utilização dos procedimentos de enumeração sistemática utilizados na contagem das P_3, conduzindo a erros de repetição de configurações e ao esquecimento de outras e à fixação de apenas uma parte dos elementos a fixar. A forma pouco adequada de estruturação da resposta e a ausência de simbolização abreviada também dificultou o controlo do processo de enumeração.

O potencial do procedimento sistemático de enumeração usado por alguns alunos na resolução dos problemas de combinações simples reside na utilização dos elementos num único sentido e na fixação de cada um dos elementos, associando-lhes cada um dos nomes que se encontram à sua direita (em C_2^5 Abel – Berta – Carla – David – Eva), evitando-se, deste modo, a repetição de elementos e as configurações que diferem apenas na ordem de disposição dos nomes (ver figura 4). No entanto, na contagem das , a maior dimensão da amostra representou um factor de dificuldade na repetição completa deste método.

A partir da enumeração efectuada, os alunos A1 e A7 percepcionaram que a solução da questão pode ser obtida pela soma dos $n-1$ primeiros números naturais, isto é, que as

$$C_2^n = \sum_{i=1}^{n-1} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1),$$

com $n \geq 2$, como se verifica no seguinte diálogo:

Grupos de problemas	Questões a)	Questões b)	Questões d)	Total
Permutações simples	11 (100%)	3 (0%)	—	14 (79%)
Arranjos com repetição	14 (100%)	15 (87%)	2 (0%)	31 (87%)
Arranjos simples	11 (100%)	7 (71%)	2 (0%)	20 (80%)
Combinações simples	11 (55%)	9 (56%)	3 (0%)	23 (48%)
Total	**47 (89%)**	**34 (68%)**	**7 (0%)**	**88 (74%)**

Tabela 2. Número de resoluções obtidas por enumeração sistemática na resolução dos 4 grupos de problemas [percentagem de respostas correctas]

Grupos de problemas	Questões a)	Questões b)	Questões d)	Total
Permutações simples	11 (91%)	6 (0%)	—	17 (59%)
Arranjos com repetição	10 (90%)	8 (88%)	1 (0%)	19 (84%)
Arranjos simples	9 (89%)	8 (88%)	3 (33%)	20 (80%)
Combinações simples	11 (18%)	5 (20%)	0	16 (19%)
Total	**41 (71%)**	**27 (56%)**	**4 (25%)**	**72 (63%)**

Tabela 3. Número de resoluções obtidas por diagrama de árvore na resolução dos 4 grupos de problemas [percentagem de respostas correctas]

Grupos de problemas	Questões a)	Questões b)	Questões d)	Total
Permutações simples	0	5 (40%)	—	5 (40%)
Arranjos com repetição	1 (100%)	2 (100%)	9 (56%)	12 (67%)
Arranjos simples	5 (100%)	9 (56%)	5 (100%)	19 (79%)
Combinações simples	4 (0%)	6 (0%)	0	10 (0%)
Total	**10 (60%)**	**22 (41%)**	**14 (71%)**	**46 (54%)**

Tabela 4. Número de resoluções obtidas por operação na resolução dos 4 grupos de problemas [percentagem de respostas correctas]

A1 — *Eu tenho aqui uma coisa curiosa. Eu escolhi primeiro o Abel para fazer as combinações e depois... [Pausa]*

Investigador — *A Berta e a Carla.*

A1 — *Pois foi. E depois à medida que eu... [Pausa] Mas isto também é normal... [Pausa] que eu ia fazendo as outras combinações o número ia diminuindo. Uma, duas, três, quatro, com o Abel. Três com a Berta, duas com a Carla e uma com o David. Talvez não tenha nada a ver, mas...*

Investigador — *Mas chamou-te a atenção, não é?*

A1 — *Exacto.*

Diagrama de árvore

A estratégia *diagrama de árvore* (usada em 22% das resoluções) também foi utilizada predominantemente nas questões que envolviam um menor número de elementos, situações em que esta estratégia também se revelou mais eficaz.

Para além de se tratar da segunda estratégia mais utilizada na resolução dos problemas propostos, os alunos revelaram dificuldades na sua construção e interpretação. Em particular, nos problemas de permutações simples registou-se uma tendência para os alunos construírem um número inadequado de ramos (ver figura 5) e reduzirem os níveis de ramificação (ver figura 6).

Operação

À medida que aumentavam os valores dos parâmetros envolvidos nas operações combinatórias, observou-se uma preferência pela estratégia *operação* (utilizada em 14% das resoluções), predominantemente de multiplicação e usada isoladamente ou combinada com uma das estratégias anteriores. Esta estratégia revelou um grau de eficácia significativo, particularmente nas questões *d)* e na questão *1b)*, comparativamente com as estratégias *enumeração* e *diagrama de árvore* (ver tabela 4).

Na contagem das P_5, os alunos recorreram apenas à operação de multiplicação para obterem uma resposta correcta (ver afirmação do aluno A6) ou incorrecta (ver afirmação do aluno A10), verificando-se, no segundo caso, que os alunos reduziram a dois o número de factores.

A6 — *Se tenho cinco lugares para preencher com eles, [isto é, com os cinco amigos], no primeiro posso pôr cinco e no segundo só posso pôr quatro. Já não posso pôr o primeiro. No terceiro três. Não posso pôr nem um nem outro. (...) Portanto, cinco vezes quatro, vezes três, vezes dois, vezes um.*

A10 — *O número total de alunos com quatro alunos que viriam a seguir ao primeiro* [5×4].

Na contagem dos $\overline{A}_3^5$ destacam-se as respostas correctas obtidas por recursão e aquelas que associam incorrectamente a ideia de triplo à expressão 5×5, como factor compensador do aumento da dimensão da amostra de 2 ($\overline{A}_2^5$) para 3 ($\overline{A}_3^5$), como afirmaram os alunos A4 e A10.

A4 — Não sei se está bem! Fazia 5×5 (...) mas depois fazia mais uma vez vezes 5. Aqui [na questão *2b)*] pedia com dois algarismos e eu multipliquei duas vezes. Aqui multiplicava três [$5 \times 5 \times 5$].

Grupos de problemas	Questões			Total
	a)	*b)*	*d)*	
Permutações simples	1 (100%)	9 (56%)	—	10 (60%)
Arranjos com repetição	1 (0%)	2 (50%)	11 (82%)	14 (71%)
Arranjos simples	0	2 (100%)	9 (100%)	11 (100%)
Combinações simples	1 (100%)	6 (17%)	2 (0%)	9 (22%)
Total	**3 (67%)**	**19 (47%)**	**22 (82%)**	**44 (66%)**

Tabela 5. Número de resoluções obtidas por enumeração/diagrama de árvore e operação na resolução dos 4 grupos de problemas (percentagem de respostas correctas)

A10 — (...) Agora como há hipóteses de três números, multipliquei por 3 [, isto é, $5 \times 5 \times 3$].

Na contagem dos A_3^5, através da operação de multiplicação, os alunos obtiveram a expressão numérica correcta $5 \times 4 \times 3$ (ou equivalente), fazendo também uso da recursão.

Enumeração e operação e diagrama de árvore e operação

As estratégias *diagrama de árvore* e *operação* (utilizada em 8% das resoluções e com um grau de eficácia de 68%) e *enumeração* e *operação* (utilizada em 6% das resoluções e com um grau de eficácia de 63%) foram mais utilizadas nas questões que envolviam um maior número de elementos, revelando nesses casos um grau de eficácia significativo (ver tabela 5).

Nestas estratégias foram incluídas as resoluções que envolviam a construção de diagramas parciais (ver figura 7) ou enumerações parciais que serviram de base à generalização, através da operação de multiplicação ou da operação de adição. Destas operações, os alunos recorreram predominantemente à operação de multiplicação.

Fórmula

A estratégia *fórmula* (utilizada em 18% das resoluções) foi utilizada na resolução das questões *c)*, tendo predominado a utilização de símbolos matemáticos sobre a descrição em linguagem corrente. Estas questões revelaram um elevado grau de dificuldade para os alunos, registando-se: 7 respostas à questão *1c)*, sendo 3 correctas; 20 respostas à questão *2c)*, sendo 14 correctas; 17 respostas à questão *3c)*, sendo 9 correctas; e 14 respostas à questão *4c)*, sendo apenas uma correcta.

O aluno A5 apresentou a seguinte explicação na escrita de uma fórmula das C_2^n:

Três nomes. Para cada um deles há sempre os outros dois. Dava-me um total de 6 hipóteses. Mas como não posso repetir as pessoas, [pausa] não vou repetir os conjuntos só por estarem de maneiras diferentes, o A e o B ou o B e o A, eu aqui teria que eliminar (...) três respostas. Aqui em 20 teria que eliminar dez. Ou seja, eu percebi que de todos os resultados que eu podia ter só podia contar metade deles. Por estes dois casos eu cheguei à conclusão que o número de pessoas que estão a concorrer vezes esse número menos 1 a dividir por 2 vai-me dar o número total de possibilidades.

A utilização da estratégia *operação* (por iniciativa do aluno ou por questionamento do investigador) nas questões *b)* revelou-se central na obtenção de uma resposta correcta nas questões *c)*.

As fórmulas incorrectas mais frequentes foram $2n$ (para $\overline{A}_2^n$, A_2^n e C_2^n) e $n(n-1)$ (para P_n e C_2^n), salientando-se na primeira a multiplicação das dimensões da população e da amostra, usada com elevada frequência, e na segunda a consideração indevida da ordem no caso das combinações, que aliás foi a principal razão do elevado insucesso registado nesta operação combinatória. Em geral, nesta estratégia, algumas das fórmulas incorrectas representam apenas uma tentativa de adivinhação da resposta, enquanto outras surgem na sequência das resoluções efectuadas nas questões *a)* e *b)*.

Algumas implicações para o ensino

A utilização de modelos sistemáticos de enumeração, de forma completa, revelou-se central na resolução correcta dos problemas de Combinatória propostos, já que a falta de sistematização e a dificuldade em repetir procedimentos sistemáticos de enumeração conduziram ao esquecimento ou à repetição de configurações. Esta conclusão foi também referida por outros autores (e.g., Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994; Silva, Fernandes & Soares, 2004).

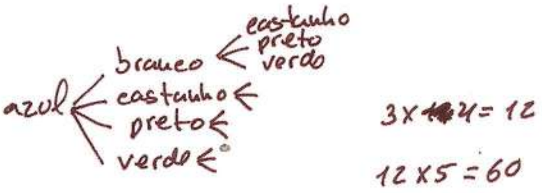


Figura 7. Resolução do aluno A21 na contagem dos A_3^5

As dificuldades reveladas pelos alunos na construção e interpretação de diagramas de árvore realçam a pertinência do seu uso explícito no ensino uma vez que, de acordo com Fischbein (1975), os alunos ao usarem o diagrama de árvore estão a assimilar uma lei de construção em que os sucessivos passos do raciocínio implícito ao modelo ocorrem indutivamente e quase directamente.

A identificação incorrecta de operandos e as dificuldades em generalizar a um maior número de casos leva-nos a partilhar com DeGuire (1991) a ideia de que, embora a resolução de vários problemas através de enumeração e diagrama de árvore se pode tornar enfadonha, estas estratégias poderão convencer o aluno sobre a razoabilidade de multiplicar para obter o número de configurações possíveis e da vantagem de usar procedimentos mais eficazes, como o princípio fundamental da contagem.

Muitos problemas de Combinatória podem ser solucionados pela utilização de outros anteriormente resolvidos ou pelo recurso a problemas mais simples que envolvam um menor número de casos (Dossey, 1991). Contudo, nestas situações, os alunos revelaram muitas dificuldades. Admitindo que estas dificuldades se devem «a uma relação inadequada ou insuficiente com a recursão e a indução matemática (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994, p. 63), acreditamos que os problemas combinatórios poderão ajudar os alunos a desenvolver destrezas a este nível.

As dificuldades dos alunos em estabelecer conexões entre as operações combinatórias, nomeadamente entre arranjos e combinações, enfatizam a importância que os problemas de Combinatória podem ter no desenvolvimento de processos de raciocínio analógico. Segundo English (2005), o raciocínio analógico reveste-se de grande importância, já que um dos objectivos da educação matemática é que os alunos identifiquem conexões entre as ideias matemáticas e apliquem esta compreensão na construção de novas ideias e na resolução de novos problemas.

Referências bibliográficas

Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

DeGuire, L. (1991). Permutations and combinations: A problem-solving approach for middle school students. In M. Kenney & C. Hirsch (Eds.), *Discrete mathematics across the curriculum, K-12* (pp. 59–66). Reston, VA: NCTM.

Dossey, J. (1991). Discrete mathematics: The math for our time. In M. Kenney & C. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12* (pp. 1–9). Reston, VA: NCTM.

English, L. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In J. Graham (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121–141). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: D. Reidel.

Piaget, J. & Inhelder, B. (s/d). *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Editora Record. (Tradução portuguesa do original de 1951)

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. & Cañizares, M. J. (1996). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, 36, 433–446.

Silva, D., Fernandes, J. A. & Soares, A. (2004). Intuições de alunos de 12.° ano em Combinatória: um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. Sousa & S. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de Probabilidades e Estatística* (pp. 61–84). Braga: Centro de Investigação em Educação, Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.

Watson, R. (1996). Students' combinatorial strategies. *Teaching Mathematics and its Applications*, 15(1), 27–32.

Paulo Ferreira Correia
Escola Secundária/3 de Barcelos
José António Fernandes
Universidade do Minho

A formação contínua em Internet e a sua utilização pedagógica

Um estudo com professores de Matemática dos 2º e 3º ciclos do distrito de Castelo Branco

Célia Maria Rolo
Paulo Afonso

Este artigo surge após um estudo tendo como população os professores de Matemática, do Quadro de Escola e do Quadro de Zona Pedagógica, de 2° e 3° Ciclos do Ensino Básico do distrito de Castelo Branco, e pretende evidenciar a influência que a formação contínua em Internet adquirida por esses professores tem na sua rentabilização pedagógica que é feita.

Enquadramento do estudo

A sociedade de informação e comunicação em que vivemos é caracterizada pelos enormes avanços a nível tecnológico. A escola, como consequência da sua inserção na comunidade, não pode ficar alheia a estes avanços. Por isso, não faz sentido pensar numa escola sem Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC).

Das novas Tecnologias de Informação e Comunicação que actualmente temos à nossa disposição, a Internet é, provavelmente, a face mais visível e aquela que está mais na «moda». A sua utilização no processo de ensino-aprendizagem permite ao nível da informação, a pesquisa e consulta de uma grande quantidade de dados que o professor poderá utilizar na exploração de conteúdos, na planificação das suas aulas e na avaliação dos alunos, assim como manter-se informado sobre vários assuntos relativos à Matemática: desenvolvimentos que ocorrem nesta área, tarefas, experiências, acontecimentos, encontros, etc. (Varandas, Oliveira, Ponte, 1999). Por outro lado, os professores poderão colocar actividades *on-line* (por exemplo, problemas ou fichas de trabalho) para os alunos resolverem ou simplesmente os resultados da avaliação dos alunos. Além disto, também ao nível da comunicação, a Internet possibilita a interacção entre os vários elementos da comunidade educativa, permitindo uma útil troca de experiências e de trabalho colaborativo. Como referem Wiesenmayer e Koul (1998), «the Internet and the World Wide Web provide a vast array of resources for science educators. Any teacher using Internet can access graphics, sound files, lesson plans, documents, data, software and a large on-line community of researchers, educators and hobbyists» (p. 271).

A introdução das Tecnologias de Informação e Comunicação na escola trouxe implicações a vários níveis, em particular no processo de ensino e aprendizagem da Matemática: ao nível dos «objectivos do ensino da Matemática, dos conteúdos curriculares, das actividades matemáticas, da comunicação e ambiente da aula e na avaliação» (Ponte e Canavarro, 1997, p. 101). A acrescentar a isto, a introdução da Internet na escola trouxe implicações ao nível da redefinição do papel do professor e do aluno.

Quanto ao papel do aluno, ao aprender com as TIC e não através das TIC, tende a «adquirir novas oportunidades de participação no ambiente de sala de aula» (Viseu, 2003, p. 39). O centro de acção educativa é o aluno, envolvendo-se este numa «aprendizagem mais activa, construtiva e intencional» (Jonassen *et al*, 1999, citado por Viseu, 2003, p. 39).

Relativamente ao novo papel do professor, este para além de possuir conhecimentos na sua área disciplinar, terá de possuir conhecimentos na área da informática para poder utilizar as TIC com os alunos. Por isso, o professor deve saber, entre outras coisas, utilizar *software* utilitário, *software* educativo e as TIC em situações de ensino-aprendizagem (Ponte, Oliveira e Varandas, 2002).

De facto, para que o professor possa assumir este novo papel, terá de ter competências para utilizar as Tecnologias de Informação e Comunicação. E para isso, como afirmam os autores do Livro Verde para a Sociedade da Informação em Portugal (Missão para a Sociedade de Informação, 1997), «é indispensável que a formação inicial e contínua lhes confira um verdadeiro domínio destes novos instrumentos pedagógicos» (p. 36). É, então, essencial que haja um amplo programa de formação de professores em termos de utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação e que sejam dadas aos professores oportunidades para que vejam as potencialidades da utilização das TIC na sala de aula, em particular da Internet, de modo a que seja estimulada a sua utilização em contexto educativo.

Relativamente a este assunto, no caso particular do distrito de Castelo Branco, o número de acções de formação em TIC, promovidas pelos Centros de Formação das Associações de Escolas no distrito, diminuiu de 2002 para 2003, tendo aumentado nos dois anos lectivos seguintes, para no ano seguinte diminuir. O número de professores que frequentaram acções de formação em TIC também acompanhou esta tendência.

Face ao exposto, parece-nos pertinente que se coloque a seguinte questão: *será que a frequência de acções de formação em Internet por parte dos professores de Matemática influencia a sua utilização em contexto educativo?* Este foi o nosso problema de investigação.

Tópicos Metodológicos

Para dar resposta ao problema de investigação atrás referido utilizámos o questionário como instrumento de recolha de dados. Este questionário era constituído por sete blocos de questões: dados pessoais e profissionais; formação em TIC; utilização da Internet a nível pessoal; utilização da Internet a nível educativo, na aula de Matemática; utilização da Internet a nível educativo, com os alunos, mas fora do âmbito disciplinar (aulas de apoio, clubes, etc); utilização da Internet a nível educativo, sem interacção directa com os alunos (na preparação de aulas e avaliação dos alunos) e opinião sobre a Internet.

Este estudo refere-se a dois anos lectivos: 2004/2005 e 2005/2006. No ano lectivo 2004/2005 aplicámos o pré-questionário a uma amostra de professores, recorrendo a uma amostragem por cachos e estratificada. Após aplicação e validação do pré-questionário (Rolo e Afonso, 2005), o questionário foi aplicado a todos os professores de Matemática (estudo de população), dos 2° e 3° Ciclos do Ensino Básico, do Quadro de Escola e do Quadro de Zona Pedagógica do distrito de Castelo Branco, num total de 175 professores, no ano lectivo seguinte, sendo a taxa de retorno de 70%.

Numa primeira fase, fez-se a caracterização da população em estudo em termos de utilização da Internet; numa segunda fase e no intuito de conhecermos que influência tem a formação contínua em Internet adquirida pelos professores de Matemática na sua rentabilização pedagógica que é feita, formulámos a seguinte hipótese de investigação: *Não há diferenças significativas na utilização da Internet em contexto educativo por parte dos professores que frequentaram acções de formação em Internet e aqueles que não frequentaram.*

Caracterização da população

A maioria dos professores lecciona numa escola de vila, é do sexo feminino, tem entre 31 e 40 anos, possui mais de 10 anos de serviço, possui licenciatura, realizada numa Universidade, com estágio integrado na formação inicial.

Quanto à formação inicial, a maioria dos professores referiu que não teve qualquer disciplina onde abordasse a utilização da Internet para fins pedagógicos. Em relação à formação contínua, cerca de 70% já realizaram pelo menos uma acção de formação no âmbito da Internet. Os âmbitos mais frequentados foram a pesquisa de informação, a concepção de páginas *web* e a exploração de *software* educativo. O âmbito menos frequentado foi o correio electrónico. A maior parte dos professores referiu que a frequência das acções de formação foram úteis ou muito úteis, tendo em conta os efeitos pedagógicos produzidos e refere sentir necessidade de mais formação, nomeadamente na exploração de conteúdos de Matemática e na construção de conteúdos didácticos para colocar *on-line*. O âmbito menos referido foi os grupos de discussão.

A *nível pessoal*, a maioria dos professores possui ligação à Internet em casa, que utiliza algumas vezes por semana, para consulta e pesquisa de informação, para comunicar e, numa menor parte, para realizar outras tarefas. A pesquisa de informação é essencialmente de âmbito geral e relacionada com a Matemática. O *e-mail* é utilizado com os amigos e com colegas professores. Como factores impeditivos de uma maior utilização da Internet a nível pessoal foram referidos a falta de tempo e a falta de formação específica. Como menos referido está a falta de motivação.

A *nível educativo*, na aula de Matemática, mais de 60% dos professores refere não utilizar a Internet na aula de Matemática. Aqueles que o fizeram foi essencialmente para realizar actividades de consulta e pesquisa de informação e actividades recreativas, nas áreas da Geometria e História da Matemática.

Com os alunos, mas fora *do âmbito disciplinar* (clubes, aulas de apoio, ...), cerca de 80% utiliza a Internet neste âmbito, essencialmente para consulta e pesquisa de informação e actividades recreativas.

Sem a interacção directa com os alunos, cerca de 70% utilizam a Internet para preparar aulas, na sua maioria para pesquisar e consultar informação, e numa menor parte para fazer *download* de ficheiros e para comunicar com colegas para troca de materiais.

Quanto à componente de avaliação dos alunos, apenas cerca de 15% dos professores afirma utilizar a Internet para esse fim. Aqueles que a utilizam fazem-no essencialmente para consulta de informação sobre parâmetros de avaliação.

Os factores que os professores consideram como mais impeditivos de uma maior utilização da Internet em contexto educativo, na aula de matemática são: a falta de meios técnicos, falta de formação específica, elevado número de alunos por turma, a extensão dos programas e a falta de tempo.

Quanto à *opinião* que os professores têm em relação à Internet, os professores demonstram ter uma atitude mais positiva do que negativa.

Relação da formação em Internet com a sua rentabilização pedagógica

Para dar resposta ao problema de investigação, formulámos a hipótese anteriormente referida. Do teste de hipóteses concluímos que a frequência de acções de formação em Internet não influencia directamente a sua utilização em contexto educativo. De facto, embora a maioria dos professores já tivesse frequentado acções de formação em Internet, não se verifica uma grande utilização em contexto educativo, principalmente na aula de Matemática e na componente de avaliação dos alunos. A taxa de utilização da Internet em contexto de sala de aula é baixa. Aqueles que a utilizam fazem-no raramente, na sua maioria uma vez por período. Dos professores que realizaram pelo menos uma acção de formação, cerca de 70% não utilizou a Internet, com os alunos, na aula de Matemática e daqueles professores que não realizaram qualquer acção de formação em Internet, a maioria (cerca de 85%) não a utiliza em contexto de sala de aula. Por outro lado, a avaliação que os professores fazem das acções de formação frequentadas em Internet também não influencia directamente a sua utilização na aula de Matemática, com os alunos, dado que dos professores que avaliaram as acções de formação em pouco ou nada útil, cerca de 75% não a utilizou em contexto de sala de aula. Dos professores que avaliaram as acções de formação em útil ou muito útil, cerca de 70% não a utilizou em contexto de sala de aula.

Em relação ao âmbito das acções de formação em Internet, a vertente de pesquisa e consulta de informação é a mais rentabilizada, uma vez que esta vertente é uma das áreas em que os professores mais frequentam em termos de acções de formação e é a mais utilizada em contexto educativo, principalmente na componente de preparação de aulas e com os alunos, mas fora do âmbito disciplinar (clubes, aulas de apoio, ...).

Quanto à produção de conteúdos educativos, esta é a área que está mais subaproveitada pelos professores e a menos rentabilizada. Apesar de a concepção de páginas *web* ser um dos âmbitos mais frequentados, em termos de acções de formação, no entanto possui um baixo índice de utilização em contexto educativo e mesmo a nível pessoal pois, mais de 90% dos professores afirma não possuir página pessoal. O facto de grande parte dos professores referir necessitar de mais formação ao nível da concepção de conteúdos didácticos e de páginas web acaba por ser um reflexo dos baixos índices de utilização a este nível.

Relativamente à vertente da comunicação, é curioso verificar que existe uma baixa utilização da Internet em contexto educativo, provavelmente explicada pela fraca frequência dos professores nas acções de formação nesta área. No entanto, é interessante verificar que se trata de uma área em que os professores referem necessitar de menos formação. Provavelmente, os professores também não conhecerão as potencialidades pedagógicas da utilização desta vertente da Internet, em contexto de sala de aula, pois o seu nível de utilização é baixo em termos educativos, contudo o e-mail é bastante utilizado ao nível pessoal, por cerca de 76% dos professores inquiridos.

Sugestões

Os resultados deste estudo sugerem-nos uma reflexão a dois níveis: formação em TIC e investigações futuras. Em relação ao primeiro nível, pensamos que se deve apostar cada vez mais na formação inicial e contínua de professores, em termos de Internet, uma vez que quase todos os professores dizem sentir necessidade de mais formação. Por outro lado, o índice de utilização da Internet, principalmente a nível educativo, é baixo. Além disto, apesar de se registar um aumento no número de acções de formação em TIC, pensamos que a oferta ainda é insuficiente. Mas, não se trata apenas de dar formação ao professor para que ele adquira competências para a sua utilização, mas sim mostrar-lhe o verdadeiro potencial ao nível educativo, para a sua disciplina específica. É importante e necessário que o professor possa ver as potencialidades da Internet aplicadas a situações de sala de aula, na preparação das suas aulas e na avaliação dos seus alunos. Pensamos que esta questão da formação contínua de professores é uma importante questão a reflectir cuidadosamente, para se dar resposta às necessidades diferenciadas de formação dos professores.

Ao nível de investigações futuras, apesar de todas as políticas educativas e fundos comunitários investidos para fomentar a utilização da Internet em contexto educativo, ainda não existe uma cultura enraizada de utilização da Internet na sala de aula, no distrito de Castelo Branco. É, pois, necessário que se faça uma verdadeira avaliação, de âmbito nacional, acerca dos investimentos que têm sido feitos nesta área e a sua aplicação e utilização em contexto de sala de aula.

Uma vez que os resultados obtidos neste estudo, têm por base práticas declaradas e não observadas, será importante a realização de estudos de caso, para comparar estas duas vertentes, nomeadamente recorrendo a observação de aulas em que o professor utiliza a Internet e analisando-se as planificações dos professores, pois estas poderão revelar manifestação de concepções acerca da sensibilização para a utilização das TIC nas suas aulas.

Por último, sugerimos a realização de um outro tipo de estudos, que visem averiguar as razões que levam a que os professores utilizem significativamente a Internet fora do contexto disciplinar (aulas de apoio, clubes, ...) e que não façam o mesmo em contexto de sala de aula.

Referências bibliográficas

Missão para a Sociedade da Informação (1997). *Livro Verde para a Sociedade da Informação em Portugal*. Lisboa: MCT.

Ponte, J., Oliveira, H. e Varandas, J. (2002). *As novas tecnologias na formação inicial de professores. Análise de uma experiência*. Disponível em

`http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Ponte-Oliveira-Varandas(SPCE).doc`.

Consultado em 2006.05.29.

Ponte, J. e Canavarro, A. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Rolo, C. e Afonso, P. (2005). Utilização pedagógica da Internet por parte de professores de Matemática do 2° e 3° ciclos do distrito de Castelo Branco. *XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática — Actas 2005*. Lisboa: APM, pp. 591–603.

Varandas, J., Oliveira, H. e Ponte, J. (1999). *A Internet na formação de professores*. Disponível em

`http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/99-Varandas-etc(ProfMat-ICM).doc`.

Consultado em 2005.01.04.

Viseu, S. (2003). *Os alunos, a Internet e a escola — contextos organizacionais, estratégias de utilização*. Lisboa: Ministério da Educação.

Wiesenmayer, R. e Koul, R. (1998). Integrating Internet Resources into the Science Classroom: Teachers' Perspectives. *Journal of Science Education and Technology*, (7), 3, 271–277.

Célia Maria Rolo
Escola E. B. 2,3/S Pedro da Fonseca de Proença-a-Nova
Paulo Afonso
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco

ProfMat 2009

Havemos de regressar a Viana!... dizia-se no ProfMat de há vinte anos!

Lá estaremos todos, nos dias 3, 4 e 5 de Setembro, para o XXIV encontro anual de professores de Matemática.

Neste ProfMat estão já confirmadas sessões plenárias. Abrirá o encontro o Prof. Domingos Fernandes com uma retrospectiva dos últimos vinte anos da Educação Matemática em Portugal e perspectivas para o futuro; seguir-se-lhe-á a Professora checa Nada Sthelikovà que apresentará diferentes abordagens de ensino através de exemplos adequados aos vários níveis de escolaridade. O *Atractor* e o *Ano Internacional da Astronomia* serão tema para outros dois momentos plenários devido à sua pertinência e actualidade.

A fechar o encontro, o Programa propõe uma parte da manhã dedicada à implementação do novo Programa de Matemática do Ensino Básico, momento que promete ser esclarecedor e aglutinador das várias ideias debatidas em sessões dos dias anteriores e, depois, uma última conferência plenária proferida pelo Reitor da Universidade de Lisboa, Professor António Nóvoa.

Haverá painéis e conferências com discussão, onde a Matemática e a Educação Matemática são as preocupações dominantes, incidindo na formação contínua dos professores, no papel das organizações internacionais ligadas à Matemática, nos manuais escolares, na História da Matemática e em muitos outros temas.

Mas, a par de tudo isto, o encontro vive e afirma-se pela participação activa e intensa de todos. Assim, convidamos os participantes a colaborarem na execução do Programa proposto, disponibilizando-se a dinamizar sessões práticas, comunicações em simpósios, apresentação de *posters*, sessões especiais, exposições, ...

Aqui fica um forte apelo ao acompanhamento atento do sítio do ProfMat 2009, em `www.apm.pt`.

Oficina de Matemática numa escola da Damaia

Dois professores — os mesmos que escreveram este artigo — levaram a cabo a dinamização de uma Oficina de Matemática. Em que consistiu esta iniciativa? Como reagiram os seus participantes? Que conclusões se retiraram desta experiência? Tentaremos, de seguida, responder a estas e outras questões.

Apesar de as férias da Páscoa estarem à porta, o último dia de aulas do 2.° período foi longo para dois professores da Escola EB2 Professor Pedro D'Orey da Cunha da Damaia.

Assim, em vez de nos despedirmos da escola e apressávamo-nos, com a ajuda de alguns colegas — Maria João Costa e Jorge Machado — a preparar a sala onde iríamos receber as seis turmas que se tinham inscrito na Oficina de Matemática por nós preparada.

Os Objectivos

Com a Oficina de Matemática, além de querermos proporcionar aos alunos um momento de aprendizagem divertida e significativa, combatendo mitos e clichés, pretendemos desenvolver neles:

- o espírito de cooperação;
- a capacidade de raciocínio;
- a capacidade de comunicação;
- a capacidade de resolução de problemas.

A Oficina

Tendo partido da nossa própria iniciativa, a Oficina de Matemática foi apresentada e aprovada em Assembleia de Escola e bem recebida por vários professores que a ela aderiram, levando consigo os seus alunos.

Sabendo com antecedência quais as turmas, a que horas e quantos alunos iriam à oficina, foi fácil gerirmos o espaço e os recursos, de modo a assegurarmo-nos de que tudo correria bem.

Chegados os alunos à sala, começámos por lhes dar uma breve explicação sobre o que ali iria acontecer e pedimos-lhes que se juntassem em pequenos grupos e se distribuíssem pelas várias mesas.

A oficina era constituída por várias actividades, sobretudo jogos, que tínhamos disposto pela sala. Uns alunos começavam a realizar actividades de um lado da sala, outros do outro, mas no fim todos acabavam por experimentar a totalidade das actividades disponíveis.

No final, tínhamos um livro onde pedíamos aos alunos que deixassem as suas mensagens, algumas delas citadas no final deste artigo, entregando-lhes depois um certificado de participação.

Os Jogos

As actividades que usámos na Oficina de Matemática foram, quase todas elas, retiradas de antigas agenda do professor da APM e adaptadas sempre que achámos conveniente, tendo já algumas sido anteriormente utilizadas por nós em contexto de sala de aula.

De seguida, vamos descrever um dos jogos, enunciando as suas regras, apresentando os seus tabuleiros e outras peças e comentando o modo como os alunos a eles reagiram.

Bolas de Snooker

O objectivo é colocar no triângulo as 15 «Bolas de Snooker», 5 vermelhas, 5 amarelas e 5 verdes, de tal modo que a distância entre quaisquer bolas da mesma cor seja a maior possível (figura 1).

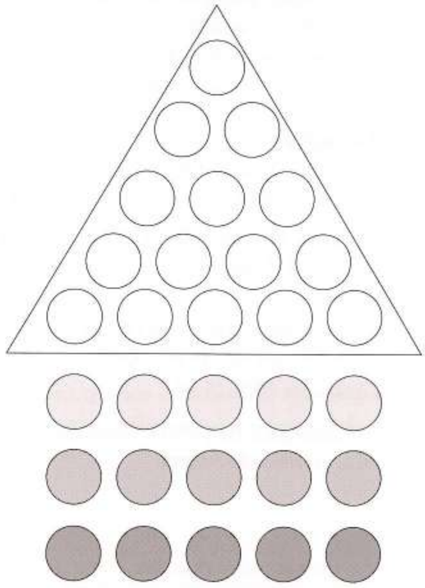


Figura 1. Bolas de Snooker

O jogo termina quando se conseguir descobrir a posição que cada bola deve ocupar no triângulo.

Esta actividade funciona como um enigma, devendo ser realizada individualmente ou em pequeno grupo, permitindo assim que haja entreajuda por parte dos alunos.

Com um maior ou menor número de tentativas e erros, toldos os alunos que experimentaram este jogo conseguiram terminá-lo, mesmo aqueles que, nas aulas, se mostraram sempre menos motivados e trabalhadores, como é o caso de uma aluna de uma turma do 5.° ano com a qual um de nós estagiou.

Ao contrário do que é habitual nas aulas de Matemática, em que os alunos nos pedem sempre a solução dos exercícios ou problemas em que estão a trabalhar, foi curioso verificar que, desta vez, isso raramente aconteceu, pois eles próprios foram capazes de se auto-corrigir.

Comentários dos alunos

De entre as várias mensagens que foram escritas no nosso livro de visitas, seleccionámos as três seguintes, todas elas de alunos do 6.° ano de escolaridade:

«A Matemática pode se divertida»;

«Gostei do último dia de aulas antes da Páscoa»;

«Aprendi muitas coisas sobre a Matemática».

Considerações finais

A realização desta oficina foi, de certa forma, a concretização de um (pequeno) sonho, tudo graças ao espírito de iniciativa, empenho e dedicação.

Foi bastante interessante verificar a grande adesão demonstrada pela maioria dos alunos, sobretudo de um grupo proveniente de uma turma problemática, que nos quis ajudar, fazendo (e muito bem) de guias aos seus colegas.

Constatámos claramente a grande flexibilidade a nível da utilização destes jogos, uma vez que foi possível realizá-los não só na oficina mas também nas aulas.

Tendo leccionado com turmas não muito boas no que diz respeito ao comportamento e ao aproveitamento, esta oficina acabou por constituir também, para nós, uma surpresa e uma lufada de ar fresco autênticas.

Gostaríamos ainda de aproveitar esta oportunidade para salientar a importância que se deveria dar aos jogos na sala de aula, não só como forma de consolidação de conteúdos mas também para a sua primeira abordagem. Nunca esqueçamos que a brincar (também) se aprende!

Bruno Magina
Investigador no Projecto Matemática Ensino da Universidade de Aveiro

Sara Cabaço
Professora na Escola EB 2,3 Avelar Brotero de Odivelas

Dando Vida aos Logaritmos

Um dos grandes desafios da escola na atualidade é provocar no aluno o interesse em aprender. A desmotivação do estudante impede a construção do conhecimento. Como conseqüência, o professor também se desestimula, prejudicando a sua prática docente e o aluno acaba não aprendendo.

Durante nossa prática de ensino, no curso de licenciatura em Matemática, percebemos essa falta de motivação entre os alunos. Em decorrência desse fato, analisamos algumas situações escolares que podem ser desestimulantes. Dentre elas, percebemos que o estudo dos logaritmos no ensino médio é muito superficial, centralizando-se em teorias e propriedades, tornando a aprendizagem sem significado.

Dentre os conteúdos trabalhados em matemática, os logaritmos freqüentemente aparecem como o que menos apresenta significado para os estudantes. Perguntado sobre o estudo dos logaritmos, um aluno do ensino médio (ensino secundário, no Brasil) revela que os «logaritmos não trazem o menor sentido para mim. Faço os cálculos, mas, na verdade, não sei o que estou calculando. Não vejo necessidade em aprender isso.»

Essa falta de significação levou-nos a pesquisar alternativas diferenciadas de se trabalhar o conteúdo de logaritmo. Pensamos ser necessário desenvolver a teoria e aplicar as propriedades, entretanto isso pode ser trabalhado de forma mais interessante, através de exercícios de aplicação e não simplesmente exercícios mecânicos. Maria Teresa Esteban no seu livro «O que sabe quem erra» coloca que «o contexto atual exige que os professores e professoras desenvolvam novas competências, se tornando bons professores e professoras desde perspectivas diferentes das assinaladas pelos modelos tecnicistas» (2002, p. 95).

Os alunos, em geral, apresentam dificuldades na aplicação das propriedades dos logaritmos. Normalmente vêem os logaritmos como um conteúdo isolado dos demais e não percebem o emprego dos mesmos em situações cotidianas. Isso se dá pelo fato do professor, na maioria das vezes, não trabalhar as aplicações.

Para que seja possível a utilização dos logaritmos em exercícios e ou atividades contextualizadas, é necessário trabalhar os logaritmos de forma contextualizada, o professor deve buscar alternativas em livros. A troca de experiências com educadores de matemática que já utilizem materiais concretos e ou exercícios contextualizados na elaboração de suas aulas, também são algumas alternativas. O educador não deve se restringir apenas à utilização de livros didáticos, pois esses normalmente trazem apenas conceitos restritos e exercícios de fixação, sem desenvolver o pensamento autônomo do aluno.

Sugestões de fontes de pesquisas que os professores podem utilizar são livros paradidáticos, artigos, revistas de matemática, internet entre outros. Fazendo um estudo mais elaborado sobre aplicabilidade dos logaritmos, percebemos que esse conteúdo está presente em diversas áreas do conhecimento inclusive em muitas situações cotidianas que passam despercebidas aos nossos olhos. Em seguida, traremos alguns exemplos de aplicabilidade dos logaritmos.

Escala Richter

De uma maneira mais ilustrativa, temos como exemplo de aplicação de logaritmos à Escala Richter. De acordo com Cynthia Adeline Pinheiro Henrique o sismógrafo Charles F. Richter formulou uma escala de magnitude baseada na amplitude dos registros das estações sismográficas. O princípio básico da escala é que as magnitudes sejam expressas na escala logarítmica, de maneira que cada ponto na escala corresponda a um fator de 10 vezes na amplitude das vibrações. Por isso é usado o logaritmo de base 10, onde ele classifica cada grau da escala em 1,2,3... em vez de falar 10,100,1000... o que dificultaria mais o processo para o cálculo. No entanto o modo de classificá-lo através da escala usada é bem fácil de se trabalhar, correspondendo assim que se houver um abalo de magnitude 4,0 ele será dez vezes maior que o de magnitude 3,0, cem vezes maior que a 2,0, mil vezes maior que a 1,0.

Cálculo do PIB

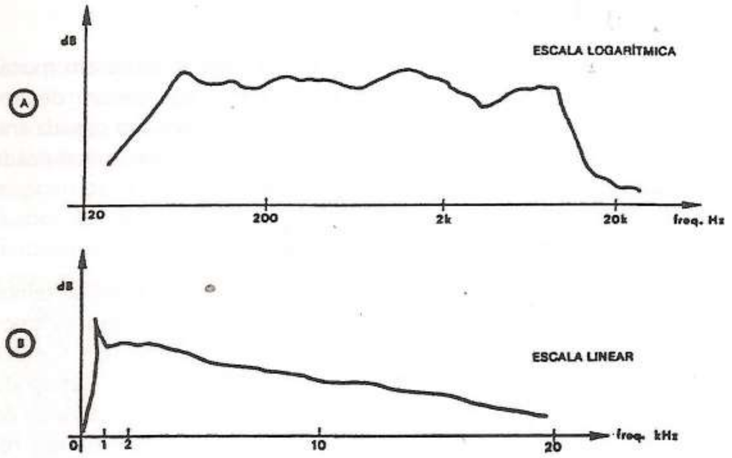
Os logaritmos também estão presentes no cálculo do Produto Interno Bruto (PIB). Na Revista do Professor de Matemática 53 (2004, p. 31) consta a fórmula do cálculo do índice do PIB.

$$PIB = \frac{\log(PIB \text{ per capita}) - \log 100}{\log 40000 - \log 100}$$

onde PIB per capita é o valor do ordenado *per capita* do país analisado.

Telecomunicações

Outro exemplo de aplicabilidade de logaritmos é nas telecomunicações. Nessa área, os logaritmos são muito difundidos, principalmente entre os estudantes de engenharia, pois têm um contato mais direto. Em uma comunicação via rádio ou telefone, por exemplo, temos a presença



(12)
Comparação entre duas formas de se apresentar a mesma curva de resposta de um alto-falante

de ruído (interferências na linha de comunicação) que pode atrapalhar a transmissão de um canal a outro. Para saber como se comporta o ruído, um dos instrumentos que se utiliza é o cálculo do Teorema de Shanon, que calcula a capacidade de um canal de comunicação numa linha de transmissão:

$$C = w \log_2(1 + S/N),$$

onde:
C = capacidade do canal de transmissão;
w = largura de banda (freqüência em que está sendo transmitido o sinal);
S/N = relação sinal/ruído (quantas vezes o sinal é superior ao ruído em uma linha de transmissão).

Não é difícil de compreender essa relação e constata-se que o logaritmo está directamente ligado nesse cálculo. Nesse exemplo é possível de ser trabalhada também a propriedade da mudança de base de um logaritmo, pois se utilizar a calculadora nesse caso, deve-se mudar a base 2 para a base 10 e, assim, obter o resultado.

Normalmente, quando se trabalha com frequências, os logaritmos estão presentes.

Curva de Resposta

A curva de resposta é uma representação gráfica do comportamento de onda sonora que sai de um alto-falante, por exemplo. Nessa representação encontra-se duas formas para a escala: a linear e a logarítmica, sendo que essa última traz mais detalhes na análise e por isso é a que mais se utiliza nessa medição. A escala logarítmica é largamente usada nos estudos de ondas sonoras.

Percebe-se que no gráfico com escala logarítmica (primeiro gráfico), os detalhes são mais visíveis, além do que a unidade de medida inicia em Hz, enquanto que na escala linear a unidade já inicia em kHz, não tendo assim, uma grande precisão na observação do comportamento da onda. Essa análise feita através desse gráfico logarítmico tem por finalidade acompanhar o rendimento de um alto-falante e se esse não foi mal construído.

Procurámos expor situações reais onde são aplicáveis os Logaritmos Matemáticos, um conteúdo até então distante dos alunos. Se mesmo um conteúdo de face tão abstrata pode ser relacionado com situações confrontadas no cotidiano, creio que tantos outros conteúdos não só devem como também podem ser melhores tratados nas aulas de Matemática. Cabe a nós educadores, as reflexões, o que e como queremos ensinar aos nossos alunos! As alternativas estão diante de nós, devemos apenas fazer a escolha certa.

Cristiane Wilhelms
Danilo Janesh de Souza
Germano Lechner
Sheila Fabricia Schuck Backes
Unisinos — Universidade do Vale do Rio dos Sinos

Contos com Contas no Projecto Divertir com o Saber

No ano lectivo de 2006/2007 a peça *Contos com contas* foi apresentada a vinte e quatro turmas, no âmbito do *Projecto Divertir com o saber*, desenvolvido no Município de Vila Nova de Gaia. As sessões foram apresentadas ao Sábado em empreendimentos de habitação social.

O público era constituído por crianças na faixa etária correspondente ao primeiro ciclo, embora houvesse alguns elementos um pouco mais velhos ou mais novos, sendo que o espectro de idades se balizou entre os quatro e os doze anos. O número de crianças por sessão variou entre os três e os doze.

As sessões foram apresentadas nas salas de A.T.L. pertencentes aos empreendimentos sociais, sendo que a generalidade dos grupos recebeu a peça de teatro no seu espaço de trabalho, sem necessidade de deslocação. Nos casos em que a sala de aula era demasiado exígua, a peça foi apresentada noutros espaços, nomeadamente numa sala anexa, numa garagem e até numa cozinha.

Contos com contas é uma peça de contadores de histórias onde, através de três histórias do domínio da tradição oral portuguesa, são exploradas aprendizagens matemáticas, em interactividade directa com as crianças. A peça tem a duração média de uma hora, apresentando variações de acordo com as dinâmicas de resposta das crianças, nas actividades interactivas.

Como é apanágio do *Projecto Faunas*, a peça utiliza recursos cenográficos simples, de modo a criar a ilusão teatral sem prejudicar o carácter itinerante e adaptativo do espectáculo. Público e actores estão ao mesmo nível espacial, não existindo separação entre palco e plateia, de modo a possibilitar o contacto directo da assistência com os objectos teatrais.

A peça não foi concebida propositadamente para o *Projecto Divertir com o saber*, pois, fazendo parte da programação do *Projecto Faunas*, tinha sido já apresentada em diversas escolas da Área Metropolitana do Porto, prevendo-se a continuidade das apresentações.

Por determinação do calendário do projecto, a maioria das sessões teve a duração de duas horas, onde o grupo estava dividido em duas turmas e, assim, houve duas sessões seguidas.

Geralmente, os membros do grupo de teatro — Isabel Fernandes Pinto e Maria João Pinto — chegavam ao local meia hora mais cedo, acompanhadas das monitoras responsáveis pelas turmas, para organizar o espaço e montar o cenário. À chegada, as crianças eram dispostas nas cadeiras da assistência pela monitora responsável. No final da apresentação, havia uma conversa com os alunos, onde eles podiam apresentar dúvidas e exprimir as suas impressões, seguida de um recontar das três histórias, pelos membros da assistência.

Depois, consoante a capacidade de resposta dos grupos (sendo que havia grupos pouco preparados e outros já mais avançados), era feita uma actividade geométrica relacionada com a segunda história, em que as crianças, partindo de um quadrado de papel, tinham que o dividir em dois rectângulos iguais, em dois triângulos iguais e achar o centro. Então, era lançado um enigma: Será que, se cortarmos o quadrado por qualquer linha recta que passe no centro, estamos a dividi-lo ao meio? As crianças acabavam por encontrar resposta afirmativa da seguinte maneira: dividiam o quadrado através de uma linha qualquer que passasse no centro, cortavam-no por essa linha e, sobrepondo as duas formas, concluíam, então, que tinham achado duas partes geometricamente iguais.

Estas duas partes iguais sobrepostas, ao serem destacadas uma da outra com um movimento de rotação em que a charneira era uma das arestas, geravam uma figura simétrica. Em algumas sessões onde houve mais tempo e mais capacidade de resposta por parte dos alunos o conceito de simetria foi bastante trabalhado, nomeadamente através de um jogo de movimento dramático, em que as crianças eram desafiadas a encontrar posições simétricas e assimétricas na sua postura corporal experimentando, assim, fisicamente, ambos os conceitos.

Na generalidade das turmas, foi pedido às crianças que fizessem um desenho sobre a peça de teatro que tinham visto, de modo a ficarem registadas as suas impressões.

No enquadramento dos propósitos lançados no *Projecto Divertir com o saber*, a intervenção da peça *Contos com contas* teve como objectivos principais estimular a aprendizagem e o interesse pela matemática e treinar os conhecimentos adquiridos pelos alunos, incidindo um enfoque especial sobre o cálculo mental. É importante clarificar que, embora para algumas crianças mais jovens fosse a primeira vez que contactavam com alguns conteúdos focados na peça, o objectivo não era ensinar, mas sim pôr em prática alguns conhecimentos anteriormente adquiridos, de modo a que as crianças se sentissem capazes de responder aos desafios lançados durante a actuação.

O envolvimento das crianças na peça, para além de ter a consequência imediata de uma sessão mais estimulante para a assistência, visa imprimir nos alunos a consciência do carácter prático do conhecimento, tornando-os sujeitos activos que utilizam o saber para se integrarem e resolverem as situações com que se deparam.

Lenga-lengas, provérbios e rimas são recursos utilizados para estimular a memória, revelando-se particularmente eficazes na aprendizagem das tabuadas. Assim, através de um processo lúdico enraizado na cultura popular, a criança cultiva a memória e o entusiasmo pelo conhecimento.

Os contos tradicionais constituem um manancial de aprendizagens que não deixam de ter validade mediante a passagem do tempo, focalizando questões que preocupam o indivíduo desde sempre. A necessidade individual de vencer a preguiça e a procura da justiça, a interdependência pai/filho e o conflito entre gerações; a luta entre o bem e o mal e a importância de uma estratégia racional para resolver os problemas — constituem as três grandes temáticas subjacentes às histórias seleccionadas para a peça. Os problemas matemáticos estavam implícitos nos enredos das histórias, sendo que o nosso trabalho consistiu em potenciá-los e desenvolvê-los tornando-os elementos teatrais de interactividade com as crianças. Assim, a matemática emerge do contexto narrativo, convivendo numa teia de relações interdisciplinares, na qual participam a ética, os afectos, o jogo, o medo, a coragem, etc. Pretende-se deste modo que a criança seja estimulada a procurar o conhecimento matemático na ficção e na realidade, estabelecendo pontes entre o âmbito abstracto onde este se representa e a vida do jovem.

Na generalidade das sessões, foi notório o entusiasmo que as crianças apresentavam, quando chamadas a participar. Apenas num caso uma criança mostrava reserva em participar activamente, porém, quis assistir à sessão, tendo revelado bastante interesse no final. A grande maioria das crianças que interagiram directamente na peça, principalmente na interpretação de personagens, mostrou-se orgulhosa depois de o ter feito, chegando mesmo a manifestar às intérpretes a grata recordação desse momento, aquando do Campeonato de cálculo mental.

As crianças que tinham conhecimentos já adquiridos mostravam-se empenhadas em mostrá-los e pô-los à prova nas respostas que eram requeridas durante a peça. Esse facto demonstra o potencial que esta peça apresenta enquanto campo de treino do conhecimento matemático adquirido. Exercitados em ambiente teatral, os conhecimentos são vivenciados de forma significativa, passando do âmbito abstracto para o concreto e inscrevendo-se na memória sensorial da criança.

Registou-se a existência de crianças muito jovens que, perante situações que focavam conteúdos avançados demais para a sua idade escolar, persistiam em procurar as respostas. Exemplar foi o caso de um menino que, frequentando o primeiro ano, ainda não estudara a tabuada. Porém, na sua curiosidade fervorosa, olhava para os quadros de tabuada que estavam expostos na sala de aula e, perante as perguntas da Cabra Cabreses, gritava os números respectivos que lia. Este é um exemplo de como um jogo ficcional pode desafiar a criança a procurar o conhecimento.

Por outro lado, houve grupos que revelaram profundas dificuldades na aprendizagem da matemática. Nestes grupos, revelou-se mais importante o conteúdo moralizante e afectivo das histórias do que os conteúdos matemáticos. A segunda história, especificamente, mostrou ter tido um forte impacto, deixando a assistência silenciosa e reflexiva perante o drama retratado. Isto leva-nos a reflectir sobre o âmbito social deste Projecto, exigindo uma grande adaptabilidade dos intervenientes.

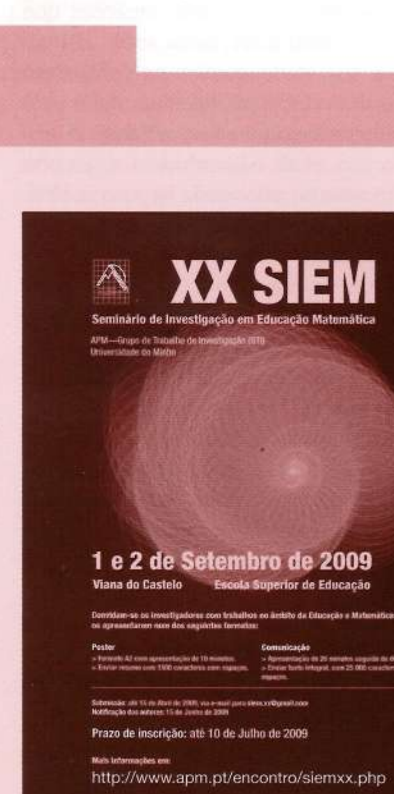
As formas de manifestação da identidade dos grupos foram efectivamente muito diversas. Duas turmas apresentaram comportamentos muito particulares e de algum modo reveladores da sua realidade social. Aconteceu que, na primeira história, quando três bolsas de dinheiro são distribuídas pelas três crianças, estas guardam-no como se fosse real, evitando cedê-lo às personagens que lhes surgem no decorrer da peça, como seria suposto. Na segunda história, quando o pai ralha com o filho, há uma criança que logo lhe responde, num registo bem audível: «Fale baixinho, faz favor!» Esta reacção imediata e impulsiva às situações apresentadas mostra que estas não lhes são alheias nem desconhecidas. Certamente que desejariam ter uma bolsa de dinheiro para poderem comprar o que desejassem; certamente que a figura de um pai de voz grossa não lhes é desconhecida e alguns até gostariam de vencer o medo que têm dele. Para além da veiculação de conhecimentos, que é objectivo deste projecto, está a formação de pessoas capazes de enfrentar a realidade e os seus problemas, muitas vezes carentes de auxílio nesse sentido. Assim, o jogo dramático tem um potencial revelador deste tipo de problemas, o qual pode assumir um papel auxiliar no trabalho de assistência social destas populações.

Em todo este processo, a participação dos formadores foi fundamental, no sentido de preparar as crianças para a recepção do teatro e de desenvolver outras actividades pedagógicas relacionadas com as histórias. Para além disso, alguns materiais expostos nas salas foram úteis para a compreensão dos conteúdos das histórias e até para a obtenção de respostas por parte dos alunos — recorde-se o menino que lia os painéis da tabuada expostos na parede. Todos estes elementos formam uma ambiência propícia à aprendizagem e ao exercício do conhecimento, postos à prova em vários momentos da sessão de teatro.

Observando a experiência deste ano lectivo, julgamos ter encontrado e posto em prática um processo de colocar o teatro e os contos tradicionais ao serviço da aprendizagem, neste caso concreto da aprendizagem matemática. Porém, este processo não será único, mas antes exemplificativo da vasta contribuição que o teatro e a cultura tradicional podem prover à aprendizagem.

Os provérbios e lengalengas constituem um manancial de cultura matemática, abrangendo um vasto leque de conteúdos, desde as sequências numéricas à geometria, passando por operações e medidas de grandeza. Estes recursos podem ser utilizados por si só ou integrados numa peça de teatro mais abrangente, como foi o caso do *Contos com contas*.

A poesia pode ser definida como matemática transmutada em palavras. Neste âmbito, podemos trabalhar: a métrica dos versos, recorrendo a exemplos concretos como os poemas narrativos da Literatura de Cordel Nordestina; as sequências de rimas e suas diferentes combinações (sendo aabb, abab ou abba as mais simples); e a criação de novos poemas, em conjunto com as crianças, tendo por base as estruturas rítmicas estudadas nos exemplos citados. Estas actividades poderão ser congregadas num atelier onde as crianças terão a oportunidade de estudar os elementos matemáticos na poesia e de criar eles próprios novos poemas, reproduzindo as estruturas de rima e métrica. Assim, procura-se estimular criativamente a criança, envolvendo-a como ser expressivo e edificador do seu próprio saber.



XX SIEM 09

O XX SIEM ocorrerá em Viana do Castelo de 1 a 2 de Setembro de 2009, na Escola Superior de Educação, e pretende constituir um espaço de divulgação e discussão em torno de temáticas actuais de investigação em Educação Matemática, envolvendo investigadores nacionais e internacionais.

Neste seminário haverá lugar a três conferências plenárias, um painel temático, comunicações e posters. Convidam-se os investigadores com trabalhos já realizados ou em fase de desenvolvimento no âmbito da Educação Matemática a apresentarem os seus trabalhos.

Para mais informações e realizar inscrição consultar a página do encontro: `http://www.apm.pt/encontro/siemxx.php`.

A moeda falsa

Temos 12 moedas de ouro, aparentemente iguais, só que uma é falsa e pesa menos que as outras. Desconhecemos o peso das moedas. À nossa disposição está uma balança, daquelas que nos indicam o peso do que colocarmos no seu prato.

Que método devemos seguir para garantir que descobrimos sempre a moeda falsa em quatro pesagens?

Problema adicional: Se tivermos direito a seis pesagens, qual é o maior conjunto de moedas em que conseguimos sempre encontrar a moeda falsa?

(Respostas até 25 de Junho para zepaulo@armail.pt)

Os quatro filhos da família Canelas

O problema proposto no número 100 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

O casal Canelas tem quatro filhos, nenhum deles gémeo de outro. Fui visitá-los e, a certa altura, disse-me a mais velha, a Ana: — *Já reparaste que o produto da minha idade pela da minha irmã Carla é seis vezes maior agora do que era há seis anos atrás?*

O Bruno, o segundo dos irmãos, estava ao lado e reparou: — *Olha, é curioso, o mesmo acontece com a minha idade e a do meu irmão Daniel.*

Que idades têm os quatro filhos da família Canelas?

Apesar de, com o atraso da saída da revista, o prazo de entrega das resposta ao problema ter sido muito curto, houve um número muito sigificativo de resoluções. Foram nada menos do que 18: Alberto Canelas (Queluz), Ana Rita Machado (Guimarães), Anabela Alves & Rita Pereira (Guimarães), Armando Fernandes (Aveiro), Carminda Marques (Fafe), Daniel Meneses (Oliveira de Frades), Edgar Martins (Queluz), Fátima Cardoso (Moimenta da Beira), Graça Braga da Cruz (Ovar), Mária Correia Almeida, Maria Pedro, Patrícia Martins, Patrícia Sampaio, Paula Portela (V. F. Xira), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Regina Veríssimo (Figueira da Foz), Ricardo Poças (Viseu) e Rute Cipriano (Lisboa).

Quase todos seguiram o mesmo método. Vejamos a resolução da Paula.

Sejam a, b, c e d as idades actuais da Ana, Bruno, Carla e Daniel, respectivamente (em que a, b, c e d são números naturais). Há 6 anos atrás, as idades seriam:

Idade da Ana: $a-6$; idade do Bruno: $b-6$; idade da Carla: $c-6$; idade do Daniel: $d-6$.

Como o produto das idades da Ana e da Carla é seis vezes maior agora do que era há seis anos atrás, satisfaz a seguinte equação: $a \cdot c = 6(a-6) \cdot (c-6)$ que resolvida em ordem a a é equivalente a:

$$a = \frac{36c - 216}{5c - 36}$$

Da mesma forma, as idades do Bruno e do Daniel também satisfazem a equação:

$$b = \frac{36d - 216}{5d - 36}$$

Procuremos, na calculadora gráfica, os valores inteiros positivos de a para os correspondentes valores de c.

Carla	Ana
1	5,806
2	5,538
3	5,143
4	4,5
5	3,273
6	0
7	−36
8	**18**
9	**12**
10	10,286
11	9,474

(note-se que podemos parar logo que, na tabela, se verifique $a < c$)

Existem dois pares de soluções na tabela, (18,8) e (12,9). Como as idades do Bruno e do Daniel satisfazem a mesma equação, também estarão nesta tabela. Logo, como a Ana é a irmã mais velha, tem 18 anos, e a sua irmã Carla tem 8 anos. Por outro lado, o Bruno tem 12 e o Daniel 9.

Verificação para Ana e Carla:

Agora: $18 \times 8 = 144$. Há 6 anos atrás, a Ana com 12 anos e a Carla 2: $12 \times 2 = 24$. Ora $24 \times 6 = 144$, ou seja, o produto das idades da Ana e da Carla é seis vezes maior agora do que era há seis anos atrás.

Verificação para Bruno e Daniel:

Agora: $12 \times 9 = 108$. Há 6 anos atrás, o Bruno com 6 anos e o Daniel com 3: $6 \times 3 = 18$. Ora $18 \times 6 = 108$, ou seja, o produto das idades do Bruno e do Daniel é seis vezes maior agora do que era há seis anos atrás.

A Mária faz uma interpretação muito curiosa (e correcta) do enunciado do problema. Por isso, além desta resposta, apresenta mais duas. *Segunda resposta:* Dois filhos terem 18 anos e os outros dois terem 8 anos porque é possível, numa certa altura do ano, dois filhos, sem serem gémeos, terem a mesma idade (com uma diferença de menos de 1 ano). *Terceira resposta:* O mesmo caso anterior, mas com dois filhos com 12 anos e os outros dois com 9 anos.

A matemática e o desenvolvimento cultural

O Flatland e a importância da Educação

Luizete Dias

Há já alguns anos que pretendia ler o *Flatland*. Pelo relato que me tinha sido feito considerava que esta obra tinha muita proximidade com a minha área de investigação. Quando o comecei a ler, por momentos, fiz aquilo que em fenomenologia se chama uma *epoché*, isto é, suspendi o conhecimento filosófico e mergulhei completamente num outro universo, a geometria. O próprio nome da obra é disso sugestivo. *Flatland — O País Plano*. Trata-se do relato que um Quadrado faz acerca do *modus vivendi do seu universo*. De facto, é de universos de referência ou horizontes de questionamento que trata toda a obra.

Quando analisamos a totalidade do texto consideramo-lo um texto clássico. Sob a forma de alegorias, à boa maneira clássica, o autor serve-se de um Quadrado para mostrar que consoante a dimensão em que nos possamos encontrar, assim é a leitura que fazemos da realidade. Consoante o nível de consciência que temos da realidade, assim são as interpretações que podemos fazer.

No País Plano encontramos descritas três dimensões. A primeira dimensão é «o Reino Pontual, o Abismo Sem Dimensões»[1]. A segunda dimensão, onde já existe o comprimento e a largura, é conhecido pelo Mundo Linear. A terceira, e última dimensão, detentora do comprimento, da largura e da altura é designado por Espaço. Descobrimos uma ordem cosmológica, através da organização destas três dimensões.

Temos acesso à descrição das três dimensões, estruturados hierarquicamente, através das viagens que o Quadrado vai fazendo, orientado pela Esfera, um sólido geométrico que vem do Espaço, para *iniciar* o Quadrado nos mistérios da verdade.

Ah! Como é parecida, na sua cegueira e intransigência, a humanidade de todas as Dimensões! Pontos, Linhas, Quadrados, Cubos, Hipercubos — estamos todos unidos pelos mesmos erros, somos todos igualmente Escravos dos preconceitos Dimensionais...

Edwin A. Abbott

Os três reinos dimensionais

Na primeira dimensão, o *ponto* considera-se como o único habitante do seu próprio reino. «Ele é o seu próprio Mundo, o seu próprio Universo; não tem ideia de mais ninguém a não ser ele mesmo; não conhece Comprimento, nem Largura, nem Altura, porque nunca os experimentou; não só não tem qualquer conhecimento do número Dois, como nem sequer pensa na Pluralidade; porque ele próprio é Um e Tudo, não sendo realmente Nada.»[2] É retratado o egocentrismo do *ponto*, de uma forma admirável. Tudo é o *ponto* e tudo existe em função dele. O *ponto* é omnipresente e omnisciente. Daí que o Monarca *ponto* tenha afirmações como a seguinte: «Ah, o divino poder criador do Todo num Só! Ah, o prazer, o prazer de Ser!»[3]

A Esfera critica o *ponto* e o Reino Pontual afirmando que «estar satisfeito consigo próprio é ser inferior e ignorante, é melhor aspirar a algo do que ser cego e imponentemente feliz»[4].

A segunda dimensão, ou dimensão do plano é a área central de toda a narrativa. Aliás, só temos acesso às outras duas dimensões, após o relato entusiástico do Quadrado de sua dimensão. Trata-se de uma dimensão com uma verdadeira ordem política. Tem uma legislação eficiente e legitimada — que nos reporta para as categorias políticas da exequibilidade e da desejabilidade. Os habitantes desta dimensão vivem organizados, de acordo com o direito natural, numa hierarquia bastante definida e formal, com pouca maleabilidade. Vale a pena olhar um pouco mais de perto estes pontos.

Para conseguirmos perceber como se vive nesta dimensão, o autor apresenta-nos um exercício de abstracção. Imaginemos que o *Flatland* é uma folha de papel, ou um tampo de uma mesa, e que só podemos olhar para o tampo da mesa, com o olhar ao nível da mesa. Dito de outro modo, só podemos ver o comprimento e a largura. E diga-se, em abono da verdade, que muitas vezes não conseguimos, consoante a perspectiva em que nos encontramos, ter uma verdadeira noção da largura e do comprimento das figuras que observamos. Nessa folha de papel existem Linhas, Triângulos, Quadrados, Pentágonos, Hexágonos e outras figuras que circulam livremente sobre a superfície.

Como estas figuras só se percepcionam como Segmentos de Recta, como se distinguem entre si, e, consequentemente, conseguem co-habitar nesse País, com organização e sem grandes atropelos?

Aqui entramos na exposição política do País Plano. A natureza da dimensão do plano obrigou os governantes a estabelecerem uma legislação adequada ao conjunto de limitações que lhes estava permanentemente destinado. Antes de salientar as limitações do País do Plano, importa descrever a forte hierarquia social, ou digamos geométrica, deste País. Comecemos pela base da pirâmide hierarquica. As Mulheres são Segmentos de Recta. Os Soldados e os Operários de classes baixas são Triângulos isósceles. A Classe Média é constituída por Triângulos equiláteros. Os Cavalheiros são os Quadrados e as Figuras de Cinco Lados. A Nobreza, tendo uma especificidade própria, apresenta diversos níveis. Assim, começam pelas Figuras de Seis Lados e, aumentam de categoria consonante o número de lados que possuem até merecerem a designação de Polígonos, como destaca o nosso narrador. A Ordem Circular ou Eclesiástica, a classe mais elevada de todas, é a classe das figuras que, não sendo círculos, têm um número de lados tão grande que o seu comprimento se torna tão pequeno que quase não se conseguem distinguir dos círculos.

Esta estratificação social, embora rígida, não é estática, pelo menos para algumas das classes. As classes mais baixas permanecem iguais no seu processo evolutivo. No entanto, para as outras classes, nomeadamente a partir dos Quadrados, existe uma lei da natureza que estabelece que cada filho do sexo masculino têm sempre mais um lado que o seu progenitor. Se houvesse dúvidas, ficariam dissipadas com a informação anterior. Estamos num país fortemente patriarcal. As mulheres são o elemento mais baixo, menos digno e menos inteligente de toda a hierarquia. Contudo o mais ardiloso. Senão vejamos, o facto de se tratarem de segmentos de recta permite que se estiverem de perfil não sejam vistas. Criando assim, oportunidade para ouvir conversas importantes e de matar os concidadãos, perfurando-os, se assim o desejarem. As mulheres mantêm sempre a sua condição de mulheres e têm muitas restrições na convivência social, pelas razões acima enumeradas.

Voltemos às limitações naturais do País do Plano. Qualquer Triângulo Isósceles ou Equilátero, Quadrado, Pentágono, Hexágono, Círculo é sempre percepcionado como um Segmento de Recta. Dito de outro modo, todas as classes são percepcionadas como se de mulheres se tratassem. Esta limitação natural levou à criação de três métodos para a distinção entre os habitantes. O primeiro método e, o mais elementar, é o método do tacto. As Mulheres e as classes mais baixas distinguem-se pelo tacto. Outro dos métodos utilizado é o da audição. Os Triângulos Equiláteros, os Quadrados e os Pentágonos utilizam esta técnica para distinguir os seus amigos e as outras classes pela voz. Por seu lado, as classes mais evoluídas fazem o reconhecimento pela vista. Mas somos confrontados, novamente, com o problema da percepção de tudo como um segmento de recta. Como podem as classes mais evoluídas ter segurança que a sua visão percepciona correctamente as diferentes classes. O narrador esclarece-nos. Apenas as classes mais altas fazem o reconhecimento pela vista, porque estes possuem uma visão treinada. Treino que resulta dos estudos de Geometria. Como esclarece: «qualquer criança do Espaço iniciada nos Estudos de Geometria sabe que, se eu puser o olho de forma que o raio da visão bissecte o ângulo (A) do indivíduo que se aproxima, o meu olhar pousará exactamente entre os dois lados mais próximos de mim (CA e AB) e que os verei de igual modo, como se tivessem o mesmo tamanho.

Então, no caso do Comerciante, (figura 1, o que verei? Verei um segmento de recta DAE[5] no qual o ponto médio (A) estará muito brilhante, porque se encontra mais próximo de mim, mas, num e noutro lado do segmento, esse brilho esbater-se-á rapidamente, uma vez que os lados AC e AB *penetrarão rapidamente no nevoeiro*, e o que me parecerá

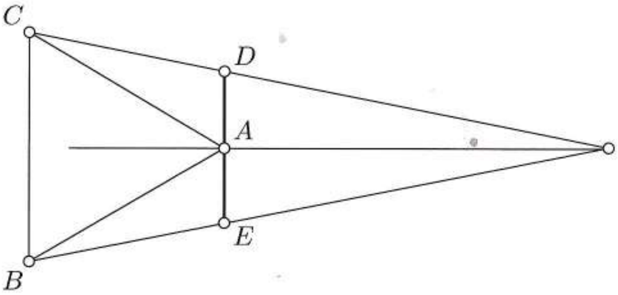


Figura 1

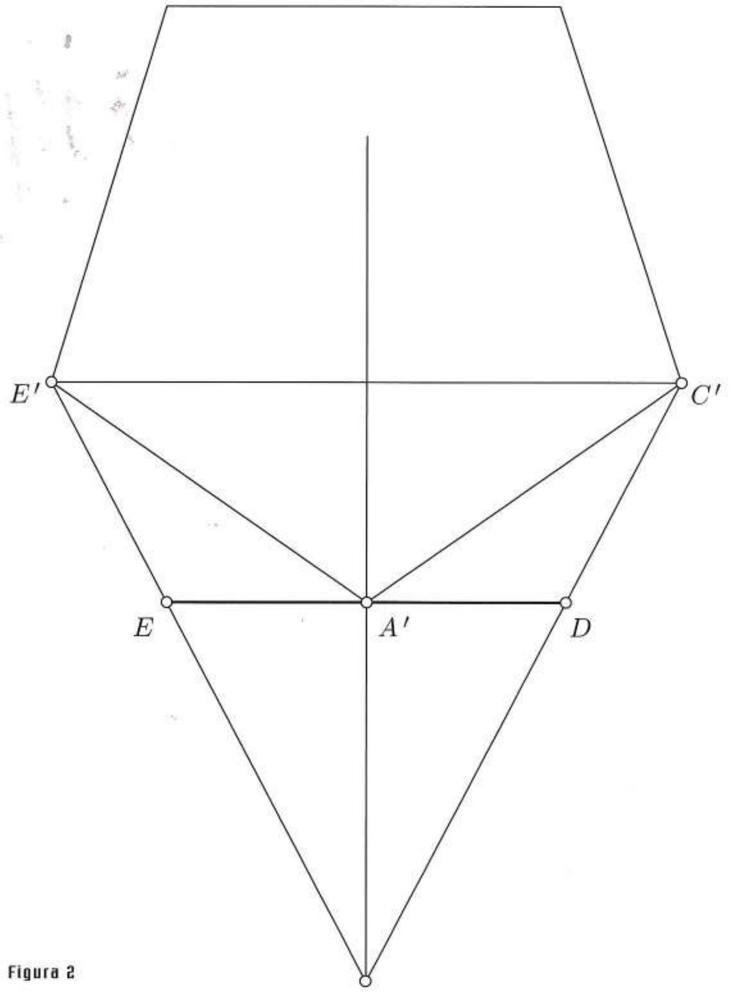


Figura 2

serem as extremidade do Comerciante, isto é, D e E, será, *de facto, muito pouco claro*.

Por outro lado, no caso do Médico (figura 2), embora veja também um segmento de recta ($D'A'E'$) com o centro brilhante (A'), o brilho desaparecerá menos rapidamente em direcção às pontas, pois os lados ($A'C'$, $A'B'$) penetrarão menos rapidamente no nevoeiro: o que me parecerá serem as extremidades do Médico, isto é, D' e E', não serão para mim tão escuras quanto as do Comerciante.»[6]

A descoberta de uma outra dimensão

O *Flatland* é uma obra de natureza clássica. Todo o processo de aquisição dos novos conhecimentos, por parte do Quadrado, resultou de três momentos chave: a afirmação inocente de uma criança, o seu neto. O sonho tido nessa mesma noite e finalmente, a visita de um ser vindo de uma outra dimensão — visita esta estabelecida por uma lei da natureza que determinava que na passagem de milénio, um sólido geométrico da terceira dimensão visitasse a segunda dimensão e inicia-se uma das figuras do plano nos ensinamentos superiores.

Conta-nos o Quadrado, que na véspera do último dia do ano de 1999, cansado do estudo aturado das suas recriações favoritas em Geometria, resolve ir descansar. Durante o sono tem um sonho estranho. O sonho passa-se no Mundo Linear. Das várias peripécias, que não conto para não tirar o deleite da leitura, há a salientar a estranheza do Quadrado quando se vê confrontado num Plano que é inferior ao seu. A sua tentativa para compreender esse mesmo plano foi imediata. Seguida de uma vontade de demonstrar ao Monarca do Reino que a realidade em que este vivia era originadora, não de felicidade, como a que verificava no Rei, mas de tristeza, por se tratar de um plano incompleto. Essa tentativa foi em vão. Não só, o Rei não o compreendeu, como tentou matá-lo. Felizmente, confessa o Quadrado, foi acordado pelo despertador.

O segundo momento determinante para o acordar do Quadrado passou-se no ultimo dia do 1999 ano da era do Reino Plano. Depois de ter estado a treinar o Reconhecimento Visual com o seu neto mais novo, um promissor jovem invulgarmente brilhante e de angulosidade perfeita, o nosso Quadrado resolve recompensá-lo com algumas noções de Aritmética aplicada à Geometria. Colocou-lhe o seguinte problema:

«Tomando nove Quadrados, cada um com uma polegada de aresta, justapu-los de modo a perfazer um grande Quadrado, de aresta igual a três polegadas, e demonstrei ao meu Neto que, embora nos fosse impossível ver o interior do Quadrado, poderíamos, mesmo assim, deduzir o número de polegadas quadradas dum Quadrado apenas elevando ao quadrado o número de polegadas de um dos lados: «e portanto», disse, «sabemos que 3^3, ou 9, representa o número de polegadas quadradas dum Quadrado cujo lado tem de comprimento 3 polegadas».

O pequeno Hexágono meditou sobre isto durante algum tempo e depois respondeu ao avó: «Mas tem-me ensinado a elevar números à potência três: penso que 3^3 deve ter qualquer significado em Geometria; qual é ele?» «Absolutamente nenhum», repliquei, «pelo menos em Geometria não significa nada, uma vez que a Geometria lida apenas com Duas Dimensões.» Seguidamente comecei a mostrar ao rapaz como um Ponto, movendo-se ao longo dum comprimento de três polegadas, descreve um Segmento de Recta de três polegadas, que pode ser representado pelo dígito 3; e como um Segmento de Recta de três polegadas, movendo-se paralelamente a si mesmo ao longo dum comprimento de três polegadas, forma um Quadrado de três polegadas de aresta em cada direcção, que pode ser representado por 3^2.»[7]

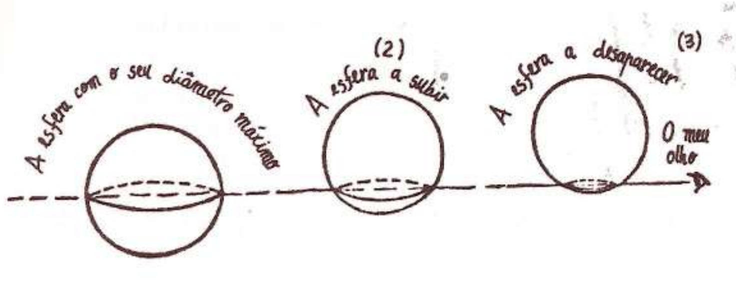


Figura 3

O neto rebate o argumento chamando a atenção que se um Ponto ao mover-se três polegadas descreve um Segmento de Recta de três polegadas e pode ser representado pelo dígito 3 e se um Segmento de Recta de três polegadas movendo-se paralelamente a si mesmo descreve um Quadrado, representado por 3^2, então um Quadrado de três polegadas de aresta quando movido paralelamente sobre si mesmo terá que descrever «Qualquer coisa (mas não vejo o que possa ser) de três polegadas em cada direcção — e isto tem de ser representado por 3^3.»[8]

O avô, o Quadrado, irritado manda o neto deitar-se e acusa-o de dizer disparate e ser louco. Nesse momento a nossa personagem sente a presença de alguém que não consegue ver. Essa voz diz-lhe que o rapaz não é louco e que 3^3 tem um significado geométrico óbvio. O sobressalto foi imediato. Depois das hostes mais calmas, dá-se o momento chave da iniciação do Quadrado nos «mistérios do Espaço». A tentativa inicial foi em vão. Até que a Esfera, o sólido que visita o Reino Plano, resolve dar-lhe uma prova real daquilo que afirmava. Começa por salientar que em virtude do Quadrado não possuir a capacidade de elevar a sua vista, para além da superfície do *Flatland* não pode ver mais do que uma secção ou círculo de cada vez. Mas, continua a Esfera, «podeis ao menos observar que, à medida que me elevo no Espaço, as minhas secções se tornam cada vez mais pequenas. Vede, vou-me elevar; e o resultado para vós é que o meu Círculo diminuirá cada vez mais até que se reduza a um ponto para, finalmente, desaparecer.»[9] (Figura 3)

Qualquer leitor do Espaço percebe facilmente e com clareza tudo o que o visitante da *Flatland* estava a afirmar. E, atendendo às circunstâqncias do Quadrado, também percebe como as palavras e demonstrações da Esfera o deixaram confuso. A Esfera ao ganhar consciência da dificuldade que o Quadrado apresentava em acompanhar os seus argumentos, passa à acção e arrasta o Quadrado para o Espaço. Leva-o para a 3ª dimensão. Para o espaço do comprimento, largura e altura.

Depois de tudo aprender, o Quadrado quer regressar ao País Plano para esclarecer os seus concidadãos. Contudo, em virtude de uma tradição milenar, esperava-o a prisão. É que segundo rezava uma tradição milenar, no primeiro dia de cada novo milénio, chegava ao País Plano o «Apóstolo do Evangelho das Três Dimensões»[10]. E, esse novo apóstolo era recebido por soldados prontos a prendê-lo, dada a perturbação que este arauto pretendia. Mesmo assim, o Quadrado anseia por poder regressar e elucidar os demais habitantes do *Flatland.*

Este movimento triádico resultou numa desorientação, na verdadeira acepção da palavra, que originou o renascimento de um novo homem, neste caso, um novo Quadrado. Um Quadrado que deixou de olhar para a realidade à luz da segunda dimensão porque descobriu a existência de uma terceira dimensão. O que o levou a ansiar pela descoberta da quarta e quinta, ou talvez mais dimensões existentes, desconhecidas pela maior parte dos habitantes das dimensões superiores.

Se não existissem outras razões diria que é esta perspectiva que torna o *Flatland* uma obra despretensiosa e excepcional. É precisamente pela demonstração da existência de três planos incompletos em si mesmos que Edwin A. Abbott nos leva à verdadeira natureza da educação e da responsabilidade que todos temos enquanto cidadãos. Enquanto nos ativermos apenas na nossa dimensão, no nosso pequeno quintal ou nicho continuaremos a ser solipsistas e felizes ignorantes. Sem qualquer noção de toda a realidade que nos ultrapassa. Propagando o vício da imodéstia e soberba.

Deste modo, o que Abbott, através do Quadrado pretende é que todos possamos aspirar ao puro e verdadeiro desenvolvimento. Assim, que começamos a trilhar o caminho para em direcção a esse desenvolvimento, a modéstia e a humanidade tornam-se nossos fieis companheiros. É assim, que na dedicatória, o autor nos convida para a leitura do *Flatland*...

«Aos
Habitantes do ESPAÇO EM GERAL
E; EM PARTICULAR, A H. C.
É Dedicado Este Trabalho
Por um Humilde Natural da Flatland,
Na Esperança de que,
Tal como ele foi Iniciado nos Mistérios
Das TRÊS DIMENSÕES,
Apesar de conhecer APENAS DUAS,
Também os Cidadãos desta Região Celestial
Possam aspirar, cada vez mais alto,
Aos Segredos de QUATRO, CINCO OU MESMO SEIS
DIMENSÕES,
Contribuindo assim
Para o possível Desenvolvimento desse raro e
Excelente Dom da MODÉSTIA
Entre as Raças Superiores
De HUMANIDADE SÓLIDA»[11]

A semelhança do acordar do Quadrado com a Alegoria da Caverna de Platão Ou O Flatland e a importância da educação

Julgava que com a leitura do *Flatland* tinha abandonado o universo da Filosofia. Mas tenho que confessar que estava enganada! Enquanto lia o texto várias eram as situações que me levavam a recordar o período clássico da nossa cultura ocidental[12]. Nomeadamente Platão. Para além da proximidade óbvia da utilização de alegorias, Edwin Abbott e Platão partilham a mesma preocupação com a nossa *natureza* e com o seu cultivo.

Platão através da célebre Alegoria da Linha e da Alegoria da Caverna salienta, não só, a natureza humana, bem como, a importância da educação na transformação dessa mesma natureza. Deixem-me mostrar-vos o que pretendo, através da Alegoria da Caverna. Imaginem, como nos diz Platão, homens agrilhoados pelas pernas e pescoços, presos desde a infância numa habitação subterrânea, com apenas uma entrada de luz que se estende a todo o comprimento da gruta.

Os escravos ou habitantes da caverna, porque se encontravam presos com correntes, não podiam mexer a cabeça. A iluminação da gruta era um fogo que ardia trás deles. Entre os prisioneiros e a fogueira existia um caminho ascendente ao longo do qual foi construído um muro. E ao longo desse muro, homens transportavam estatuetas de homens e de animais. De tal modo os escravos da caverna viam as sombras dessas estatuetas projectadas pelo fogo na parede oposta da caverna e, não os homens que as transportavam. Atendendo a que nunca tinham tido acesso à verdadeira realidade consideravam que as sombras projectadas na parede da caverna eram, na realidade, objectos reais.

Platão confronta-nos com a seguinte questão: o que aconteceria se um dos prisioneiros fosse solto das cadeias e curado da sua ignorância? O ter que voltar o pescoço, endireitar-se, andar e olhar para a luz provocaria dor e o escravo voltar-se-ia na busca do refúgio do mundo outrora conhecido, ou seja, dos objectos que antes podia ver sem qualquer tipo de dor. Se para além disto o obrigassem a subir o caminho íngreme e rude teria que primeiro habituar-se à luz do Sol. Primeiro, começaria por olhar para as sombras, depois, para as imagens dos homens e dos objectos reflectidos na água e, finalmente, para os próprios objectos. Só depois deste processo, desta progressão em três etapas, poderia o escravo contemplar como o mundo visível é na realidade.

Contudo, o escravo teria que regressar ao plano em que tinha nascido. Tinha que voltar para a caverna, ainda que sentisse que 'mais vale ser um pequenino ser e contemplar a realidade, do que um rei entre os que contemplam as sombras'. O que o esperaria não seria agradável. Entre o ter que se habituar a ver as sombras e encarar o riso dos seus companheiros esperava-o a dura prova de uma condenação à morte.

Quando comparadas as duas alegorias as proximidades são flagrantes. O Quadrado que descobriu a terceira dimensão e o escravo que ascendeu ao mundo visível sofreram com a descoberta. Como Platão salienta sentiram dor. Sentiram a dor de deixarem de estar acomodados à realidade que conheciam e tiveram que aprender a reconhecer as limitações do seu próprio conhecimento. Quando cheios de conhecimento, e já com uma natureza alterada, regressam ao seu meio natural e sofrem a desolação e a tristeza de estarem num mundo inferior e de não conseguirem convencer os seus concidadãos.

É por isso que a relação que se pode estabelecer entre estas duas alegorias nos remete para a importância da educação. Quer o matemático quer o filósofo pretendem fazer-nos o alerta. Sem mergulharmos no verdadeiro conhecimento não poderemos ver a realidade nas suas múltiplas dimensões. Ficaremos remetidos a uma visão reduzida e incompleta.

Mas desengane-se o leitor se considera que o investimento no conhecimento nos leva à aquisição da verdade. Se assim fosse, assumiríamos novamente o papel do rei de cada das dimensões e intitular-nos-íamos como sábios, ficando, mais uma vez, aquém desta busca incessante que deve ser a educação, ou o amor pelas coisas belas. Daí que possamos *concluir* com as belas palavras de Platão acerca do Eros, a personificação do filósofo. Eros, filho do Engenho (por sua vez filho da Sabedoria) e da Pobreza, é forçosamente um filósofo porque se situa no meio termo entre o sábio e o ignorante. A razão desta natureza é justamente a sua origem: de uma parte, um pai sábio e engenhosos e, de outra, uma mãe desprovida de sabedoria e recursos. Pelo que, Eros não é nem imortal nem mortal, nem um Deus nem um ignorante. Isto porque «nenhum deus ama o saber ou deseja ser sábio (pois já o é), nem qualquer outro que possua o saber se dedica à filosofia, do mesmo modo que não são também os ignorantes que a ela se dedicam ou que aspiram a ser sábios! A ignorância acarreta efectivamente consigo este peso: é que os que julgam possuir em suficiência beleza, bondade e inteligência, nada disso possuem: e quem se não crê destituído não aspira, consequentemente, a um bem de cuja falta se não apercebe.»[13]

Notas

1 ABBOTT, Edwin, *Flatland, o País Plano*, Lisboa, Edições Gradiva, p. 126 (a partir daqui será referenciado apenas *Flatland*).

2 *Flatland*, p. 126.

3 *Flatland*, p. 128.

4 *Flatland*, p. 127.

5 Embora se tenha mantido a notação do texto original é importante salientar que, na actual notação, um segmento de recta define-se por dois pontos.

6 *Flatland*, p. 44-45.

7 *Flatland*, p. 94.

8 *Flatland*, p. 94.

9 *Flatland*, p. 101–102.

10 *Flatland*, p. 114.

11 *Flatland*, p. 5.

12 Embora, também existam marcos do período moderno no texto. O registo biográfico da ascenção do Quadrado ao plano das três dimensões, pode permitir a inserção deste texto na modernidade.

13 Platão, O *Banquete*, 204 a, Edições 70.

Bibliografia

Abbott, Edwin, *Flatland, o País Plano*, Lisboa, Edições Gradiva.

Platão, *República*, Lisboa, FCG, 1990.

Platão, O *Banquete*, Edições 70, 1991.

Luizete Dias

Escola Secundária Poeta António Aleixo

O Delicious, as redes sociais e a Matemática

O Centre for Learning & Performance Technologies (`http://www.c4lpt.co.uk/recommended/top100.html`) colocou no final do mês de Outubro de 2008, de acordo com as votações de 223 especialistas, o *Delicious* (`delicious.com`) no topo de 100 ferramentas tecnológicas com potencial para a educação. Nessa mesma lista, o *PowerPoint* ocupa um modesto 8.º lugar e o *Moodle* o 9.º.

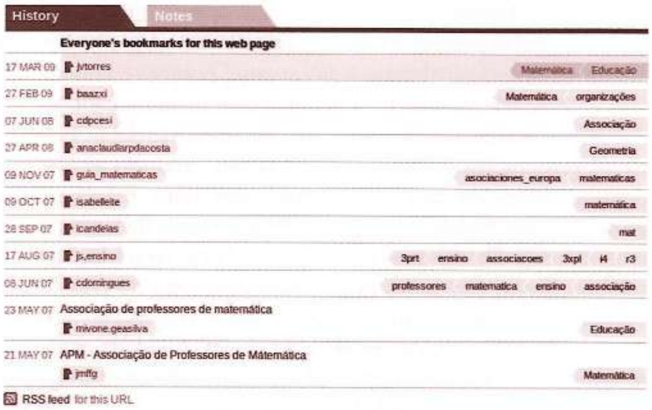
Que ferramenta é esta e por que razão lhe atribuem tanto potencial? Sou utilizador, há mais de um ano, e confesso ter ficado surpreendido com esta escolha. Trata-se de uma ferramenta que permite guardar e organizar as nossas ligações a páginas na Internet. Mas não só! Na caracterização talvez se deva acrescentar também a palavra «partilhar» e pode residir aí o seu potencial educativo ... mas já lá iremos!

Todos nós temos *sites* que frequentamos mais vezes que outros. Os programas de navegação na Internet (*browsers*) integram, desde as suas primeiras versões, ferramentas que nos ajudam a voltar com facilidade a essas páginas. Denominando estas ligações de *Bookmarks* ou *Favoritos*, elas permitem guardar atalhos, de uma forma simples, de modo a acedermos a *sites* que visitamos com maior frequência, evitando a tarefa fastidiosa de ter de memorizar os endereços ou de os anotar, para os recuperar de cada vez que necessitamos visitá-los de novo.

No entanto, esse registo é feito, normalmente, apenas na máquina que utilizamos e, por essa razão, esse método deixa de ser prático quando utilizamos vários computadores em diversos locais. Imagine, por exemplo, que quer mostrar a um colega uma página da Internet que descobriu recentemente, na sala de professores da sua escola, mas que tem o endereço guardado apenas nos *Favoritos* do seu PC, em casa... A solução para minimizar esse problema pode passar por guardar essa informação na Internet, tornando-a acessível a partir de qualquer máquina ligada à rede. Este método foi seguido por muita gente que exportava as ligações para HTML e depois as transferia para a Internet juntando à sua página pessoal. Assim podia aceder às ligações em qualquer lugar e também partilhar essa informação com possíveis interessados.

As ferramentas de *social bookmarking* permitem fazer isso de forma automática e com a mesma facilidade e transparência com que guardamos as ligações nas listas locais no nosso computador. Ferramentas como o *Delicious*, o *Diigo* (em `http://www.diigo.com`, outra ferramenta análoga) têm barras de botões que se instalam nos programas de navegação mais comuns e permitem, com um simples clique, guardar, organizar e classificar os *sites* que visitamos.

A informação dessas páginas é inserida automaticamente e o utilizador terá apenas de preencher a classificação da mesma, fornecendo descritores (*tags*) que a agrupem segundo diferentes temas ou critérios. Neste sentido, basta preencher os campos necessários para que deste modo possamos



O Delicious

Nuvem de tags

criar, gratuitamente, uma conta que funcionará como uma *biblioteca* pessoal *online*, acessível em qualquer local com acesso à Internet. Os descritores ou *tags*, são palavras escolhidas por nós que permitirão identificar facilmente as ligações e, consequentemente, os *sites* que queremos aceder. No entanto, essa classificação é nossa e, se por um lado eu sei exactamente o que costumo associar a determinada palavra, essa palavra pode ser utilizada por outras pessoas para classificar páginas no âmbito de outras temáticas. Em suma, a classificação que cada um propõe é feita de acordo com os seus interesses, servindo, principalmente, para o seu benefício próprio. Em simultâneo, é criada automaticamente uma *nuvem de tags*, isto é uma representação de palavras que utilizamos para classificar as ligações guardadas, onde as mais frequentes aparecem em tamanho maior. Podemos igualmente consultar a *nuvem de tags* de outro utilizador, ficando, deste modo, com informação relativa às suas principais áreas de interesse.

Se pesquisássemos no *Delicious* a página da APM, no dia 17 de Março (exercício que acabo de fazer) ficaríamos a saber que onze utilizadores a registaram no sistema, classificando-a com descritores como *Matemática, Professores, Ensino, Associação, Geometria*, entre outros... Teríamos acesso a todas as páginas que estes onze utilizadores, entre os quais me incluo, referenciaram, podendo todos os outros ou apenas alguns, serem também professores de Matemática. Além da página da *nossa* Associação, estes dez utilizadores registaram também outros recursos que poderão ter interesse para outros professores de Matemática.

Se, por exemplo, seguir a pista de uma colega que está registada como isabelleite, chego à lista dos seus favoritos e em particular aos que classificou também com o descritor (*tag*) *Matemática*. Entre essas páginas descubro a ligação para o *Illuminations* que está registado no sistema por mais de 2250 pessoas, sendo certamente este número um indicador de que se trata de uma ligação a seguir ou pelo menos de uma página muito, muito popular!

Temos então uma ferramenta que, à primeira vista, poderia parecer servir apenas para guardar as ligações favoritas, mas se pode revelar também um poderoso motor de pesquisa, onde a indexação não é feita por nenhum algoritmo, mais ou menos sofisticado e eficiente, mas por pessoas que, como nós, têm interesses em diferentes áreas. Há sempre a possibilidade de alguns usuários terem os mesmos ou alguns interesses parecidos aos nossos e que, por isso, possam ter informação que desconhecemos, mas que nos interessa.

Se explorarmos um pouco as potencialidades do *Delicious* descobriremos que podemos criar pequenas comunidades, onde os membros partilham os mesmos interesses. Para além disto, é possível ao classificar um determinado recurso, recomendá-lo a outros utilizadores do sistema bastando para isso um simples clique no seu nome na hora de adicionarmos a ligação em causa. Podemos juntar a lista das nossas ligações ao nosso blogue ou fazer uma entrada no *Twitter* com essa informação! *Twitter*?! Onde ouvimos já falar disto? Bom, fica para a próxima, se algum leitor quiser escrever sobre essa ferramenta de *Microblogging*.

Entretanto, podem encontrar o que vou marcando como interessante em `http://delicious.com/jvtorres`

João Torres
ESE de Setúbal

Quando o trabalho de grupo atravessa fronteiras

Há muito que reconhecemos as vantagens do trabalho colaborativo como uma mais valia para as aprendizagens dos alunos. Também o trabalho colaborativo entre professores é uma modalidade à qual muitos de nós reconhecem inúmeras vantagens. E se os parceiros do trabalho colaborativo estiverem a quilómetros de distância? Mesmo em países diferentes.

Hoje as (ainda novas para uns, já velhas para outros) Tecnologias da Informação e Comunicação, vulgo TIC, abrem novas perspectivas a todas estas vertentes do trabalho colaborativo. Na verdade hoje é possível ter parceiros de trabalho em qualquer ponto do Globo. Neste pequeno texto deixo, a título de exemplo, duas breves ilustrações de projectos colaborativos com estas características desenvolvidos no âmbito do e*Twinning*.

O e*Twinning*[1], uma Acção do Programa *Life Long Learning* da União Europeia, tem por objectivo principal a criação de redes de trabalho colaborativo entre as escolas europeias, através do desenvolvimento de projectos comuns, com recurso à Internet e às TIC. Esta iniciativa é suportada por uma plataforma on-line (`http://www.etwinning.net`) na qual qualquer professor, de qualquer disciplina e qualquer nível de ensino, do pré-escolar ao secundário, se pode registar e inscrever uma ideia para um projecto de parceria. Uma vez encontrado um colega, de outro país, interessado na mesma ideia, ou numa ideia semelhante há que elaborar o projecto e submetê-lo a aprovação. Uma vez aprovado o projecto é só começar a trabalhar, utilizando as ferramentas disponibilizadas pela plataforma (*Twinspace*) ou outras se assim o entenderem. Vejamos dois exemplos de projectos que envolveram a disciplina de Matemática.

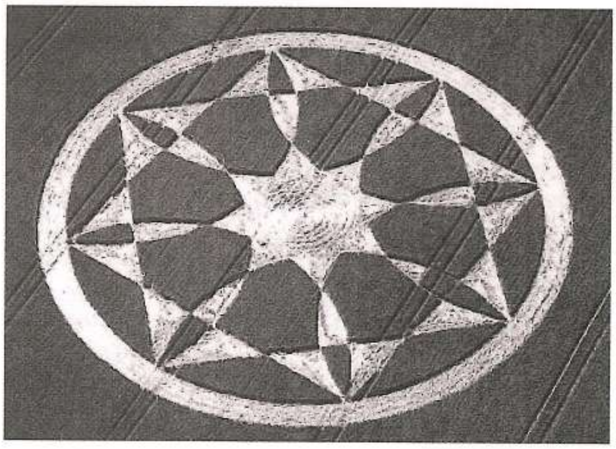


Figura 1

Crop Circles Challenge — Collaborative maths on the net

As misteriosas formações geométricas (Figura 1) encontradas em campos de cultivo e que têm, em diferentes momentos, dado origem a fantásticas explicações foram o ponto de partida, ou devo dizer o foco de inspiração, para este projecto de matemática colaborativa na net.

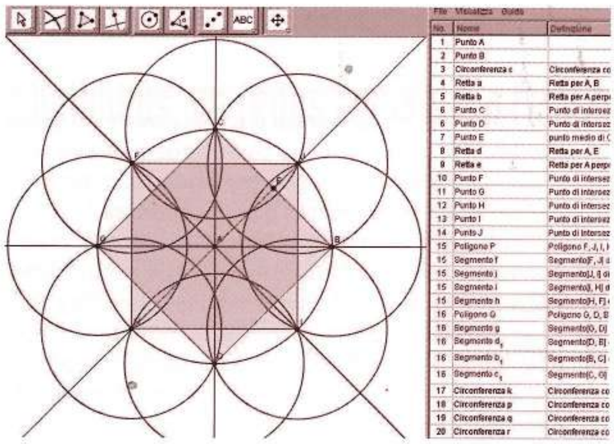


Figura 2

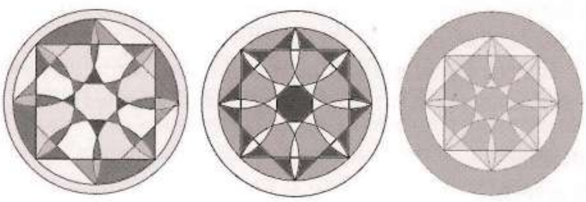


Figura 3

Figura 4

Alunos com idades compreendidas entre os 13 e os 18 anos, de diferentes escolas em diferentes países nomeadamente na Bélgica, na Grécia e na Itália foram desafiados numa primeira fase a encontrar imagens aéreas dos *Crop Circles*. Uma vez identificadas e escolhidas algumas dessas imagens a tarefa proposta foi a reconstrução geométrica destas imagens, com o recurso a *software* de Geometria Dinâmica, na maior parte dos casos, o Geogebra (figura 2). A última fase do trabalho correspondeu à coloração das imagens criadas, desta vez com o recurso a *software* gráfico (figura 3), e nalguns casos os alunos foram para o terreno «marcar» o seu próprio *Crop Circle*.

Os produtos deste trabalho estão publicados nos sítios do projecto.

`http://www.vivante.it/com@net/crop_circles.html`
`http://www.math.be/`
`http://users.sch.gr/dkastani/encrop.html`

Nonius & Copernicus

Neste projecto o trabalho colaborativo teve contornos diferentes. Os alunos com idades compreendidas entre os 13 e os 15 anos, de uma escola portuguesa e de uma escola polaca, foram organizados em grupos de quatro elementos, dois de cada país. Os dois pares de alunos de cada grupo trocam entre si problemas e avaliam, mediante critérios pré-estabelecidos e com a supervisão do respectivo professor, as resoluções feitas pelos parceiros.

Esta metodologia de trabalho contribui para o desenvolvimento de competências de comunicação, em termos genéricos mas também em aspectos específicos da disciplina de Matemática.

A esta vertente de trabalho relacionada com a resolução de problemas acrescentaram-se algumas investigações sobre Pedro Nunes e Nicolau Copérnico, também elas feitas em pequenos grupos e partilhadas entre portugueses e polacos.

A muito breve apresentação que aqui se faz destes dois projectos pretendeu ilustrar um novo leque de possibilidades de trabalho colaborativo que as tecnologias nos abrem. No primeiro caso, as TIC permitiram às escolas entrarem em contacto uma com a outra e elaborarem um projecto conjunto. A concretização do trabalho passou pela utilização de *software* específico, e a sua publicação ultrapassou as ferramentas disponibilizadas pelo *eTwinning*. Para o segundo projecto as tecnologias permitiram igualmente a concepção de um projecto comum e suportaram a colaboração entre os elementos do mesmo grupo que se encontravam geograficamente muito afastados.

E aqui fica o desafio aos leitores da revista que tenham um projecto colaborativo a distância, *eTwinning* ou não; para que escrevam para esta secção, ou um artigo autónomo, a contar-nos da vossa experiência. A ideia, as dificuldades, a concepção do projecto, o desenvolvimento do projecto. E os alunos? Que dizem eles da experiência?! Haverá com certeza muito para relatar e partilhar.

Notas

1 Pode saber mais sobre o *eTwinning* em `http://www.erte.dgidc.min-edu.pt/etwinning`

As imagens aqui apresentadas foram capturadas dos sítios dos projectos.

Ana Luísa Paiva
Esc. Sec. c/3º Ciclo Padre António Vieira

35 anos depois de Abril, a escola ainda não acabou?

Três alunos de Penacova cumprem serviço comunitário após manifestação na escola

André Jegundo

Jovens de 18 anos foram constituídos arguidos pela eventual prática dos crime de coacção após terem tentado encerrar a escola a cadeado

Os estudantes, agora com 18 anos, foram constituídos arguidos pela eventual prática do crime de coacção e por proposta do Ministério Público (MP), com a concordância dos próprios, vão prestar serviço comunitário de modo a evitar uma possível acusação e condenação.

Três alunos da Escola Secund... de Penacova vão cumprir 20 horas de serviço comunitário por terem tentado encerrar a escola a cadeado durante uma manifestação contra o Estatuto do Aluno, em Novembro passado. Os estudantes, agora com 18 anos, foram constituídos arguidos pela eventual prática do crime de coacção e por proposta do Ministério Público (MP), com a concordância dos próprios, vão prestar serviço comunitário de modo a evitar uma possível acusação e condenação. Contudo, os pais e a associação de encarregados de educação da escola estão "indignados" e dizem que os estudantes "sofreram na prática uma condenação".

Por proposta do MP de Penacova, e com a concordância de uma juíza de instrução criminal, o processo de que os estudantes são alvo foi suspenso durante quatro meses e as 20 horas de "serviço de interesse público" devem ser prestadas "no estabelecimento de educação onde foram praticados os factos", refere o despacho do MP. Ao mesmo tempo, os três jovens vão ser acompanhados pelo

Os estudantes tentar...

Centro de Observação ... de Coimbra, onde ont... presença pela primeir...

O caso remonta a 17 ... ano passado, quand... Eduardo se prepar...vam o portão da escola a c... de uma manifestação ... tuto do Aluno. Uma patrulha da GNR que se encontrava no local impediu-os de encerrar a escola e os estudantes acabaram por ser identificados. "Não chegámos a colocar o cadeado porque a GNR falou connosco e disse-nos que, se o fizéssemos, poderíamos ter problemas", refere Gonçalo.

no dia de uma manifestação contra o Estatuto do Aluno. Uma patrulha da GNR que se encontrava no local impediu-os de encerrar a escola e os estudantes acabaram por ser identificados. "Não chegámos a colocar o cadeado porque a GNR falou connosco e disse-nos que, se o fizéssemos, poderíamos ter problemas".

...do os estu... ...m auto da ... para o MP. ...iormente ...rações no ...tão que ti... ...e estavam ... prática do crime de coacção por terem tentado encerrar a escola", revela Patrícia Luís, advogada de um dos estudantes. Os ... endem... foram ... não ter... advogada lembra que o crime de coacção é punível "também na forma tentada".

Os advogados que representam os estudantes aconselharam-nos a aceitar a proposta de suspensão do processo formalizada pelo MP de modo a evitar uma eventual acusação. Ilda Simões, advogada de dois dos estudantes, defende que esta foi a "melhor forma" de terminar o processo. "Julgo que é uma forma didáctica de lhes mostrar que têm o direito de se manifestar e de fazer greve mas que não podem impedir os outros de entrar na escola, como pretendiam naquele dia", defende. Opinião diferente têm os pais dos alunos, que dizem não compreender por que razão os estudantes têm de cumprir serviço comunitário se "não praticaram qualquer crime". Paula Bernardes e Pedro Santo, mãe e pai de dois dos alunos envolvidos, defendem que o caso devia ter sido resolvido "dentro da escola, no âmbito de um processo disciplinar e não através de um processo judicial", posição defendida pela associação de pais da escola que ontem emitiu um comunicado a criticar a actuação da justiça.

Também ontem a Confederação Nacional Independente de Pais e Encarregados de Educação (CNIPE) "condenou" a situação em que os três estudantes estão envolvidos, defendendo que se trata de um caso "grave, ... contra a liberdade de ex... ...stão a ser tratados como ...os delinquentes e não são", ... Maria José Viseu, presidente da CNIPE. com Lusa

se trata de um caso "grave, que atenta contra a liberdade de expressão".

In Público, 23 de Abril de 2009

A escola ainda não acabou, mas a alguns dias da celebração dos 35 anos do 25 de Abril, dois jovens vão cumprir 20 horas de serviço comunitário por terem tentado encerrar a escola a cadeado durante uma manifestação contra o Estatuto do Aluno, um assunto que lhes diz directamente respeito. A situação é tanto mais grave, quanto o fazem por um assunto que respeita à escola, à porta da escola, onde se deveria praticar a democracia e a liberdade. Deveriam existir órgãos representativos que efectivamente permitissem os alunos expressar as suas opiniões sobre diversos assuntos da própria escola, nos quais são os principais envolvidos.

Ressalve-se que todos estamos de acordo que a lei deve ser aplicada e a justiça deve funcionar, mas como é referido num dos blogues que comenta a notícia «Três alunos de Penacova cumprem serviço comunitário após manifestação na escola» do Público de 23 de Abril de 2009:

É preocupante a contrastante facilidade e celeridade com que a justiça portuguesa julga os «pequenos casos» ou os «casos dos pequenos» quando comparada com a complexidade e morosidade dos «grandes casos» ou dos «casos dos grandes»! Por muito que a lei deva ser cumprida, a lei também deveria ser cumprida por todos. Mas a principal acção adulta sobre as crianças e jovens é pedagógica e não punitiva (...)

Como diz a canção de Jorge Palma, *a escola ainda não acabou*, mas está a perder a capacidade de resolver os seus problemas. *Há sempre tanta matéria a estudar*, como se os outros assuntos não tivessem qualquer interesse. Como se a escola também não fosse um espaço de educação, de reivindicação de direitos e do direito à manifestação. A GNR educou: «Não chegámos a colocar o cadeado porque a GNR falou connosco e disse-nos que, se o fizéssemos, poderíamos ter problemas», refere Gonçalo. E a escola? O que fez a escola? A escola não são os alunos?

Já consigo filosofar
Sei uma ou duas palavras em grego
Enquanto o tempo deixar
E a escola não se afundar
Vou alterando o meu ego

Helena Amaral
Paulo Dias

A Escola

Eu nasci lá para os lados do rio
Passava os dias a jogar à bola
Mas eu não era excepção
E antes que desse por isso
Já estava na escola

O programa elementar
Entre o Euclides e o Arquimedes
Mas sempre que a informação
Dá uma volta no espaço
Eu quero sintonizar

A escola ainda não acabou
Há sempre tanta matéria a estudar
Que eu chego mesmo a ter medo
De em qualquer momento
Já não ter lugar
Já não ter lugar
Para mais conhecimento

Já consigo filosofar
Sei uma ou duas palavras em grego
Enquanto o tempo deixar
E a escola não se afundar
Vou alterando o meu ego

Vou deixando as moscas pairar
Vou vendo se o Godot já chegou
E quando me dá na tola
Dou um chuto na bola
Só para me aliviar

A escola ainda não acabou
Há sempre tanta matéria a estudar
Que eu chego mesmo a ter medo
De a qualquer momento
Já não ter lugar
Já não ter lugar
Para mais conhecimento

A escola ainda não acabou
Há sempre tanta matéria a estudar
Que eu chego mesmo a ter medo
De a qualquer momento
Já não ter lugar
Já não ter lugar
Para mais conhecimento
Mais conhecimento

Jorge Palma, 1989

Back to Basics à portuguesa

O *back to basics* foi um movimento curricular de cariz profundamente conservador que surgiu em muitos países, no fim da década de 1960 e início da década de 1970, como reacção à Matemática Moderna. Criticava-se esta por, ao procurar ensinar uma Matemática mais coerente, mais unificada e mais actual, ter descurado as habilidades básicas dos alunos, nomeadamente o cálculo numérico e a manipulação de expressões algébricas.

Este movimento *back to basics* foi muito forte em diversos países, como a França e os Estados Unidos da América. Pautou-se por discussões intermináveis, num clima extremamente emotivo, muito frequentemente baseadas em argumentos demagógicos, anedotas e caricaturas, umas vezes verdadeiras outras vezes falsas. Acabou por esmorecer à medida que se foi tornando claro que as propostas do *back to basics* criavam problemas ainda piores do que aqueles que elas se propunham resolver.

Nessa altura, em Portugal, não chegou a haver propriamente um *back to basics*, apesar de ter havido uma renovação do ensino da Matemática pautada pelas perspectivas da Matemática moderna. Houve uma ou outra pequena tentativa, nesse sentido, mas nada de consequente, talvez pelo facto dos programas de Matemática de 1970 conterem elementos «modernos», ao mesmo tempo que continuavam a conter muitos elementos «tradicionais», em especial no 1.° ciclo e no ensino secundário.

No entanto, o século XXI fez surgir no nosso país um *back to basics* retardado, cujo alvo agora já não é a Matemática moderna, que entretanto desapareceu de cena, mas um suposto «eduquês» de orientação «construtivista». Basta atentar em exemplos como os seguintes de conhecidos porta-vozes deste movimento (excepto na última citação, os itálicos são meus):

> Ao mesmo tempo que se desprezam os objectivos modestos, destacam-se metas utópicas (...) O construtivismo educativo dogmático [fala] da compreensão, da descoberta autónoma e do desenvolvimento do raciocínio e, ao mesmo tempo, [repudia] o desenvolvimento das *destrezas básicas* que lhes são antecedentes (Crato, 2007).

> Insiste-se no uso da calculadora desde o 1.° ciclo. Aquilo que toda a gente sensata vê com facilidade, que é a necessidade de evitar a máquina enquanto se aprende a *tabuada* e *as operações elementares*, os ideólogos dogmáticos do «eduquês» não conseguem ver (Crato, 2007).

> Nos ciclos iniciais (1.°-2.°-3.°) deve ser dada prioridade à aquisição de *competências calculatórias básicas*, com recurso à memorização. É um erro a utilização de calculadoras pelos alunos nestes níveis (Queiró, 2007).

> A *calculadora gráfica* é perspectivada pelos programas do ensino secundário, «não como ferramenta de cálculo mas como *substituto para os conceitos, eliminando as definições formais*» (Buesco, 2003, itálico do autor).

A regra principal deste discurso é que «vale tudo», seja verdadeiro ou falso, desde que ajude a atingir o objectivo. Distorcem-se as posições que se querem criticar, inventa-se, fantasia-se. A preocupação não é esclarecer mas confundir.

Pense nisto: Que resposta merece este tipo de ataques às posições curriculares da APM?

Referências

Buescu, J. (2003). Sintomas, diagnósticos e terapêuticas: O olhar de um matemático. In CNE (Ed.), *O ensino da Matemática: Situação e perspectivas* (pp. 155–204). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Crato, N. (2007 Outubro 27). Eduquês envergonhado. *Expresso-Actual*.

Queiró, J. F. (2007). Comentário ao Documento «Programa de Matemática do Ensino Básico», colocado em discussão em 1/7/2007 (parecer enviado ao Ministério da Educação) (Retirado de `http://www.mat.uc.pt/~jfqueiro/parecerPMEB.html` em 29.Mar.2009)

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Ptolomeu? No Ano Internacional da Astronomia? — Parte I

Maria José Costa

0. Justificando a escolha

Quem não dispõe de livros específicos mas tem acesso às novas tecnologias, poderá procurar conhecer Ptolomeu a partir de um meio geral de rápido acesso, como a Wikipédia: «*Claudius Ptolemaeus* (em grego: *Κλαύδιος Πτολεμαῖος*; cerca de 83–161 d.C.), em português dito *Cláudio Ptolomeu* ou *Ptolemeu*, foi um cientista grego que viveu durante o período helenista, provavelmente em Alexandria, na então província romana do Egipto. Ele é reconhecido pelos seus trabalhos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia. Realizou também trabalhos importantes em óptica e teoria musical.». E dá-lhe um rosto a partir de uma gravura do século XVI.

Ou seja: Ptolomeu pode ser conhecido por ligações a outras sabedorias que não a Matemática ou a Astronomia ...

Continuando a consulta lê-se: «A sua obra mais conhecida é o Almagesto (que significa ‹O grande tratado›), um tratado de astronomia.» Apresenta o conhecimento astronómico babilónico e grego e é uma das mais importantes e influentes da Antiguidade Clássica; «nela se basearam as astronomias de Árabes, Indianos e Europeus até o aparecimento da teoria heliocêntrica de Copérnico.» Além disso, «o Almagesto veio a servir, por exemplo, de inspiração às tabelas astronómicas medievais de Afonso X, de Abraão Zacuto (1473) e de Munique (1509).»

Uma parte deste artigo baseia-se na investigação levada a cabo aquando da preparação da minha tese de mestrado.

Num astrolábio construído no séc. XV, talvez em França ou em Inglaterra, se pode ler na alidade: «aqui está o mundo projetado num plano, graças a Ptolomeu que mostrou o caminho para estudos sábios».

A mesma entrada refere alguns revezes: Ptolomeu também foi mal apreciado por muitos e durante muitos séculos.

De facto, e ao contrário de outras civilizações, a cultura árabe fez perdurar trabalhos que de outro modo se teriam perdido ao traduzir para a sua língua as obras encontradas nos territórios que ocuparam. Lamentavelmente, traduções posteriores a partir do legado árabe contribuiram para a difusão de alguns lapsos, que em regra foram atribuídos ao autor e não aos tradutores!

Por outro lado, há quem acuse Ptolomeu de ser um mero escrevinhador de textos dos seus antecessores: Tycho Brahe e Isaac Newton, por exemplo, acusaram Ptolomeu de não ter realizado nenhuma observação astronómica, tendo-se limitado a copiar os resultados de Hiparco.

Delambre (1749–1822) e Lalande (1732–1807) foram dois dos críticos mais acérrimos dos séculos XVIII e XIX. Delambre, um dos astrónomos mais competentes e um dos mais bem informados entre os historiadores de Astronomia, põe em dúvida as qualidades de Ptolomeu enquanto observador e critica duramente alguns aspectos do *Almagesto*, nomeadamente, a descrição do astrolábio, a determinação da circunferência da Terra e da excentricidade da Lua; considera-o um insignificante seguidor de Hiparco; apesar disso, reconhece-o como precursor de Kepler: terá sido a partir da hipótese da órbita da Lua ser oval, avançada por Ptolomeu, que Kepler terá considerado elíptica a órbita da Lua. Lalande (1732–1807) corrobora a opinião negativa de Delambre: o único aspecto positivo que encontra na obra de Ptolomeu prende-se com a preservação dos trabalhos dos antepassados em geral e de Hiparco em especial.

O facto de lhe ser atribuída a autoria de uma obra sobre Astrologia, também não contribuiu para a sua boa imagem.

Hoje, porém, Ptolomeu estará reabilitado aos olhos dos astrónomos e será da mais elementar justiça lembrar a obra deste astrónomo grego num ano internacional que pretende celebrar a astronomia.

1. Ptolomeu: vida e obra

Não podemos esperar encontrar retratos fidedignos de Ptolomeu. Há diversas imagens apresentadas como retratos do astrónomo, incluindo algumas em que ele figura de cara rapada quando todos os filósofos gregos tinham de usar barba. Por vezes apresentam-no com uma coroa na cabeça, talvez incluindo-o na dinastia ptolemaica fundada por Ptolomeu I, o Sábio, general macedónico dos exércitos de Alexandre o Grande que ficou à frente dos destinos do Egipto de 323 a.C. a 283 a.C. após a morte do conquistador. A separação entre o cientista e a dinastia foi levada a bom porto pelo astrónomo mouro Haly Abenrudian (séc. XI), mais tarde apoiado por Nicole Oresme (séc. XIV): as posições das estrelas registadas por Ptolomeu já estão afectadas do valor da precessão, fenómeno desconhecido no tempo de qualquer um dos governantes da dinastia ptolemaica ...

Vejamos uma descrição de Ptolomeu atribuída aos árabes, a civilização posterior mais próxima da época em que ele viveu:

... de estatura média,
de pele branca,
andar imponente,
pés pequeninos,
uma mancha vermelha na bochecha direita,
uma barba negra e espessa,
mas os dentes da frente salientes e descobertos.
A sua voz era doce e sonora,
Mas o bafo era forte.
Andava muito,
Muitas vezes a cavalo;
era rápido a zangar-se e lento a acalmar-se;
por outro lado sóbrio,
e fazendo frequentes abstinências.

Há muitas datas para a sua vida, algumas bastante fáceis de rejeitar.

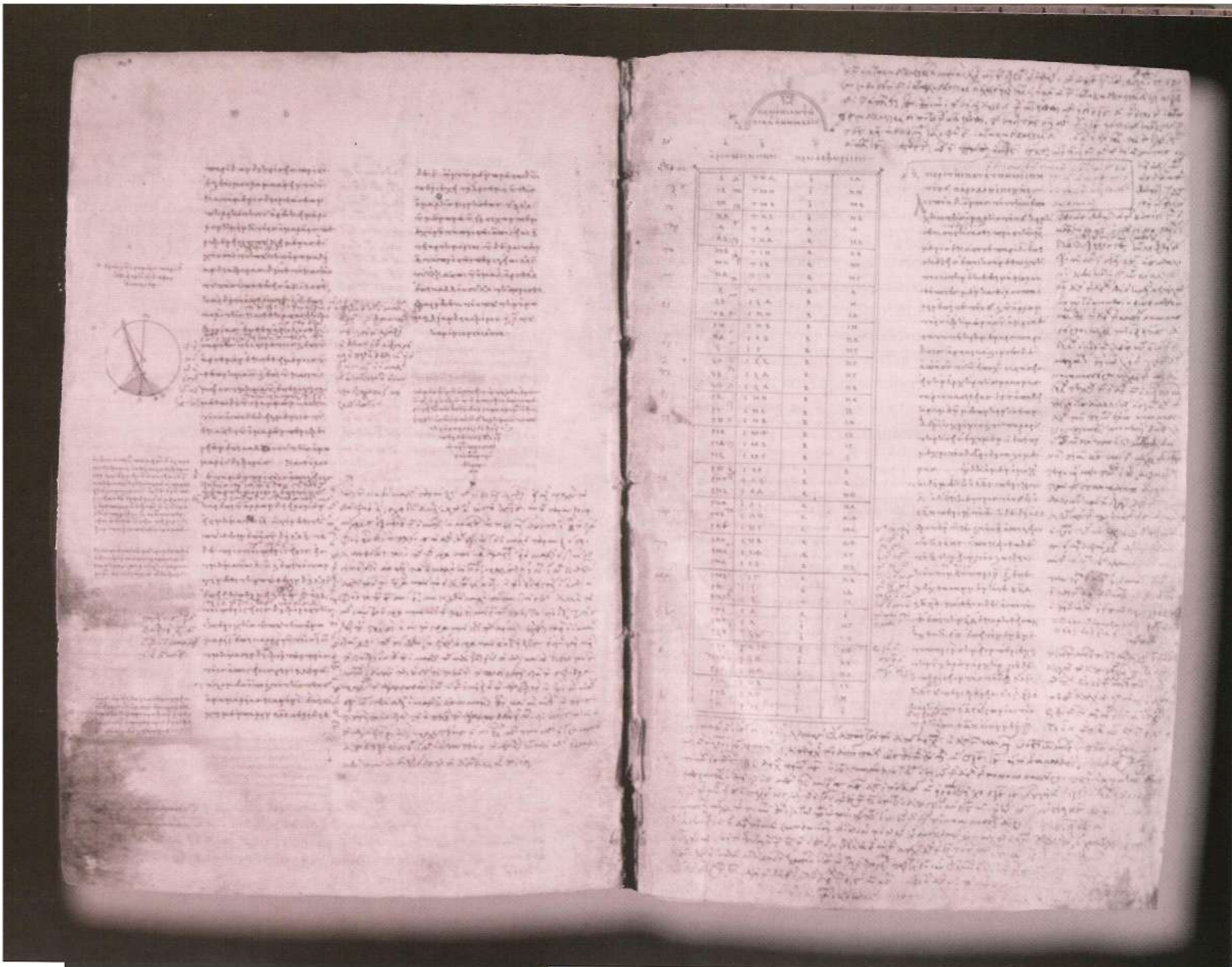
Registos há que provam, e o *Almagesto* é um deles, que Ptolomeu observou durante 14 anos; ora, juntando os anos necessários para coligir todos os elementos recolhidos, o tempo necessário a ganhar conhecimento básico para o trabalho que se propunha levar a cabo e ainda o número de anos que os árabes atribuem à sua vida, a mais credível será 90–168.

O rio Nilo viu-o nascer (em Ptolomemais Hermiu) e morrer (em Canope); terá realizado a maioria das suas observações na cidade de Alexandria.

O Egipto que viu nascer Ptolomeu estava sob o domínio romano que se seguiu à dinastia ptolemaica e que perdurou de 30 a.C. a 379 d.C.. A nova governação impôs algumas restrições aos apoios criados por esta dinastia afectando as actividades artísticas, literárias e religiosas. Por exemplo, foram suprimidos os apoios ao sustento do culto e confiscadas as fortunas dos templos. A cidadania romana só podia ser adquirida pelos alexandrinos e os romanos não podiam casar nem com gregos nem com indígenas — para longe iam as recomendações de Alexandre o Grande que incentivava a mistura das raças e o cruzamento dos que o acompanhavam com as populações locais.

Apesar de os soberanos continuaram a subsidiar os sábios do Museu de Alexandria, estes praticamente só produziam comentários e críticas a textos o que denotava alguma decadência. Num contexto de relativa erosão, ganha maior interessse a postura de Ptolomeu, ao manter de mãos dadas a observação, a teoria e a prática à boa maneira helenística.

Ptolomeu notabilizou-se fundamentalmente na Astronomia. A sua «Composição matemática» como ele próprio intitulou a obra, *a grande compilação do saber astronómico*, mereceu da parte dos árabes o adjectivo «grande» que depois passou a «grandíssima». Foi da união deste adjectivo com o artigo arábico al que nasceu o nome «al-majist» e que mais tarde se converteu na designação que ainda hoje é usada: *Almagesto*. Todas as outras obras existentes sobre astronomia passaram a ser designadas por «Pequena Astrono-



Páginas do Almagesto

mia». Com esta obra *magistral*, Ptolomeu *coroou o trabalho dos astrónomos da antiguidade*. São-lhe ainda atribuídas outras obras no campo da Astronomia:

Analema.—analisa a projecção ortogonal de pontos da esfera celeste em três planos fazendo entre si ângulos de 90°: horizonte, meridiano e 1° vertical.

The Planisphaerium.—explica a projecção estereográfica devida a Hiparco (ca. 180 a.C.) cujo trabalho se perdeu, mas talvez lançada por Apolónio (ca. 225 a.C.).

Hyppothes tonoplanomenon.—consagrada às hipóteses planetárias, inclui uma tabela com o nascimento e o ocaso das estrelas.

Há ainda outras obras, noutras áreas, das quais se destacam:

Peru rupon [i.e., das balanças].— dedicada à Mecânica.
Peri diastasens [i.e. da dimensão].—na qual Ptolomeu prova que não podem existir mais do que três dimensões do espaço.

Cânon real.—contém tábuas históricas sobre os reis babilónicos.

Geografia [em oito volumes].—teve entre os geógrafos o mesmo efeito que o *Almagesto* teve entre os astrónomos.

Óptica [em cinco volumes].—aborda a teoria da refracção dos corpos celestes e a reflexão em espelhos.

Harmónica [em três livros].—contém a teoria dos sons usados na música grega.

Tetrabiblon ou *Quadripartitum*.—tratado de Astrologia, em quatro livros; revela que Ptolomeu aceita as superstições do seu tempo.

2. O Almagesto

Nesta obra, organizada em 13 livros subdivididos num número variável de capítulos, valoriza as aplicações práticas da teoria.

Fundamenta os fenómenos observados, desembaraçando-a das especulações e generalizações vagas que a obstruíam guindando-a a ciência exacta.

Desenvolve a Trigonometria cujas bases tinham sido lançadas por Hiparco e aperfeiçoa a teoria dos epiciclos (movimento de astros como a Lua, por exemplo, em torno de um circulo chamado deferente) formulada por Apolónio: *o que ensina em detalhes trigonométricos não é coisa nova, mas está oferecido muito hábil e metodicamente.*

Apesar de defender um sistema geocêntrico deixou uma teoria planetária cuja leitura é recomendável a todos os estudantes de Astronomia.

Segundo as palavras de Neugebauer, «não se pode ler um único capítulo de Copérnico ou de Kepler sem conhecer exaustivamente o Almagesto».

Ao longo de vários séculos, incluindo o séc. XX, o *Almagesto* teve diversas traduções, umas a partir do texto grego, outras a partir do texto árabe, e deu origem a comentários.

Vejamos alguns desses trabalhos mais recentes.

Em 1939, são republicados em Roma *Commentaires de Pappus et de Theon d'Alexandrie sur l'Almageste*, em dois volumes, e em 1974, Pedersen publica A *Survey of the Almagest.*

Em 1952 aparece a primeira tradução inglesa devida a Taliaferro. A versão grega elaborada por Heiberg (1898–1903) dá origem a duas traduções: uma para alemão da responsabilidade de Manitius, considerada muito útil e precisa (1912–13) e uma outra, elaborada por G. J. Toomer (1998), considerada a melhor tradução disponível em língua inglesa.

Em 1813, e da responsabilidade do Abade Nicolas Halma (1756–1828), sai em Paris uma tradução elaborada directamente do grego para francês a partir dos manuscritos originais existentes na Biblioteca Imperial de Paris. Esta obra, republicada em 1988, inclui notas de Delambre, o tal astrónomo que antes tão crítico tinha sido. Talvez tenha sido a que mais justiça fará à obra, na medida em que permite desfazer ambiguidades e corrigir juízos.

Saíram então novos comentários, agora bastante elogiosos sobre o papel de Ptolomeu no desenvolvimento do conhecimento astronómico, que permitem rebater as acusações de que tinha sido alvo. Porém continua difícil identificar a verdadeira inovação do seu trabalho, devido à ausência dos escritos dos astrónomos seus antecessores.

Nos dias de hoje, têm-se desenvolvido esforços no sentido de mostrar que Ptolomeu foi um dos principais expoentes na antiguidade no que diz respeito ao método científico e já é reconhecido como um competente e original astrónomo.

2.1

Na apresentação da obra, o autor faz saber que metas se propõe atingir:

— estudar a ciência dos movimentos celestes mas sem perder de vista tudo aquilo que possa contribuir para a beleza da ordem e do método

— pesquisar princípios tão belos e harmoniosos como os que compõem a ciência matemática.

Explicita também outras finalidades da obra, como:

— aumentar o gosto pelas verdades eternas

— juntar ao que ainda for recolher entre as descobertas dos antecessores os resultados que ele próprio obtiver

— apresentar essa colecção de forma tão concisa e acessível quanto possível.

Informa ainda que tem outros objectivos como:

— expor tudo o que possa servir para a teoria dos corpos celestes

— incluir o que está suficientemente explicado pelos antigos

— clarificar o que não está bem demonstrado ou bem concebido.

2.2

A obra está dividida em capítulos agrupados em 13 livros, assim intitulados:

I: Princípios da Astronomia esférica

II: Desenvolvimento dos problemas relativos à esfera segundo a altura do pólo

III: Movimentos do Sol

IV: Características principais da teoria da Lua

V: Continuação da teoria da Lua; distâncias deste astro e do Sol

VI: Tábuas da Lua e tábuas dos eclipses

VII: As estrelas fixas, com um catálogo de estrelas boreais

VIII: Catálogo de estrelas austrais, Via Láctea, nascimentos e ocasos

IX: Ordem das esferas planetárias, movimentos de Mercúrio

X: Movimentos de Vénus e de Marte

XI: Movimentos de Júpiter e de Saturno, tábuas dos planetas

XII: Retrogração dos planetas superiores, digressões dos planetas

XIII: Latitudes dos planetas

2.3

Numericamente, Ptolomeu trabalha no sistema sexagesimal de origem babilónica. Assim, $33^p\ 12'\ 9''$ representa o número 33,2025, proveniente da mudança de base sexagesimal para decimal: $33 + 12/60 + 9/3600$.

O cuidado com o cálculo é extremo: escolhe o sistema sexagesimal por este evitar *o embaraço das fracções* (provavelmente uma referência às fracções egípcias). Quando não pode recorrer a valores exactos, utiliza os valores mais aproximados de modo que *o que se despreza não impeça os resultados de serem sensivelmente exactos.*

Opta pela circunferência dividida em 360 partes, (divisão atribuída aos astrónomos babilónios, que também lhe chamaram grau e o dividiram em 60 partes) e o diâmetro em 120 partes, acrescentando que *se verá pela prática, que esse número era o mais cómodo que se podia escolher*.

2.4

Para multiplicar, Ptolomeu recorre, provavelmente, às tabelas usuais na Babilónia. Quanto à divisão, Ptolomeu pressupõe conhecido o quociente e submete-o à operação inversa; recorre, depois, a tentativas baseadas em valores aproximados, procurando o quociente mais aproximado.

A raiz quadrada é calculada a partir da definição actual de raiz quadrada de um número e aos produtos notáveis.

Perante o tempo necessário para a realização dos cálculos, mesmo reconhecendo a existência de tabelas de cálculo e a familiaridade que os astrónomos da antiguidade tinham com o sistema numérico sexagesimal, há autores que põem a hipótese de Ptolomeu ter recorrido a computadores humanos para conseguir construir as várias tabelas que figuram no *Almagesto*: assistentes que colaboravam com Ptolomeu na feitura dos cálculos numéricos a quem cabia a repetição ou determinações por outros métodos para certificar os valores encontrados. Estes colaboradores tanto poderiam ser da responsabilidade da biblioteca de Alexandria como da responsabilidade do astrónomo.

2.5

Ptolomeu tem a preocupação de explicar muitos dos resultados matemáticos que utiliza, mas não trata de igual modo os aspectos numéricos e geométricos: omite, por exemplo, as regras e os métodos que permitem efectuar os cálculos, por vezes intrincados. Quando se serve de resultados devidos a Apolónio, Hiparco, ou Menelau, inclui uma exposição sobre as suas descobertas; quando recorre a proposições euclidianas não lhes faz qualquer comentário, como pressupondo o conhecimento total de *Elementos*. As proposições euclidianas usadas por Ptolomeu encontram-se nos Livros I, II, III, IV, VI, e XIII.

Recorre à utilização da «Álgebra Geométrica», dizendo, por exemplo, «rectângulo» em vez de «produto» e resolvendo equações à custa dos produtos notáveis.

2.6

Ptolomeu trabalha com diversas funções concebidas como uma relação entre os elementos de dois conjuntos numéricos; por exemplo: numa tabela lança o comprimento de meia corda de arco de acordo com a amplitude do ângulo ao centro correspondente. Ora construir esta tabela não é senão tabelar uma função.

2.6.1

As funções algébricas utilizadas são exclusivamente do tipo $y = ax + b$ e utilizadas para relacionar a longitude (λ), a velocidade angular (ϖ) e o tempo (t); permitem determinar a longitude num determinado instante, à custa da velocidade angular e das constantes relativas a um tempo e uma longitude iniciais, respectivamente t_0 e $\lambda_m(t_0)$. São usadas para construir efemérides de planetas, contudo na forma de proporcionalidade directa, ou seja, do tipo $y = ax$, considerando como variável independente $t - t_0$ e como variável dependente $\varpi(t - t_0)$.

2.6.2

Uma das funções trigonométricas utilizadas relaciona o comprimento da corda com a amplitude do arco respectivo Trata-se da função:

$$\mathrm{crd}(x) = 2R\mathrm{sen}\, x/2,$$

com $0° < x \leq 180°$.

Ptolomeu serve-se, por vezes, da tabela com os valores desta função para determinar a amplitude do arco a partir do comprimento da corda, o que não deixa de ser a utilização da função inversa. Passa, contudo, sem qualquer comentário, sobre qualquer um dos modos de utilizar esta tabela.

Ptolomeu não utiliza apenas funções de uma variável: recorre a funções com duas e três variáveis, a propósito da resolução de problemas de Astronomia utilizando Trigonometria esférica.

2.7

Para determinar o valor do comprimento de uma corda cujo arco não está tabelado usa a fórmula

$$f(x) = f(x_n) + [f(x_{n+1}) - f(x_n)] \times \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n},$$

com x em $]x_n, x_{n+1}[$, ou seja, recorre a uma interpolação linear.

2.8

Ptolomeu também determina máximos de uma função, sem contudo deixar um método geral: recorre a métodos exactos nuns casos e noutros a métodos geométricos e trigonométricos, pressupondo o conhecimento do maximizante e sem qualquer indicação para a sua determinação; por vezes baseia-se apenas na inspecção da tabela que representa a função, partindo dos valores desta para os do argumento. Mas é impensável que Ptolomeu confiasse apenas na intuição: apesar de não enunciar as propriedades que têm a ver com a variação lenta de uma função na vizinhança de um máximo, é provável que se tenha familiarizado intuitivamente com elas pela análise das funções tabeladas.

2.9

Ptolomeu recorre a métodos aproximados para efectuar cálculos numéricos que hoje se baseiam na determinação de limites e usa uma linguagem próxima da de acréscimos correspondentes em trabalhos actualmente resolvidos por derivação. Todavia, todos estes trabalhos relacionados com funções são baseados não em teoremas mas sim em regras práticas ou seja, têm por base a arte prática e não a ciência teórica.

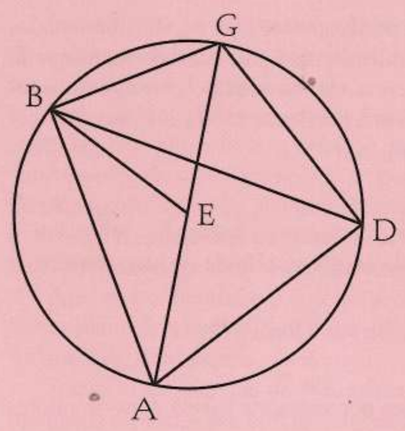


Figura 1

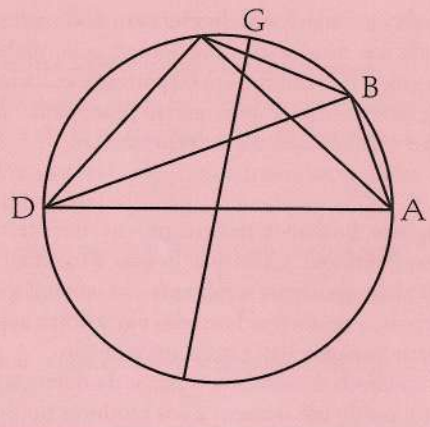


Figura 2

2.10. A Trigonometria Plana do Almagesto

Encontra-se no Livro I, num capítulo intitulado *Avaliação das cordas inscritas no círculo*. Trata-se de um capítulo que poderia pertencer a um livro de Matemática.

Escreve Ptolomeu que para facilitar a prática vai elaborar uma tabela com os valores dessas cordas, para arcos que diferem de meio grau. Para isso faz cálculos e demonstrações, partindo de um teorema actualmente com o seu nome mas já conhecido de outras civilizações.

2.10.1. Teorema de Ptolomeu

Trata-se de um lema de carácter elementar que poderá ter precedido Ptolomeu mas que é provado pela primeira vez no *Almagesto*. Diz esse teorema:

Seja $[ABGD]$ um quadrilátero qualquer inscrito num círculo de diagonais AG e BD. Então:

$$AG \times BD = AB \times GD + AD \times BG.$$

Para demonstrar esta proposição, Ptolomeu considera um ponto auxiliar, E, sobre a diagonal $[AG]$, determinado de modo que os ângulos ABE e DBG sejam iguais.

Na sua demonstração tem papel especial a proporcionalidade entre os lados opostos a ângulos iguais nos pares de triângulos $[ABD]$ e $[BGE]$, $[ABE]$ e $[BGD]$.

A sua tese é enunciada em termos de áreas: trata-se de provar que o rectângulo construído sobre AG e BD é igual aos dois rectângulos de lados opostos $ABGD$, e $ADBG$.

Demonstrado este teorema, Ptolomeu vai utilizá-lo para relacionar comprimentos de cordas inscritas num círculo, partindo de quadriláteros nas condições do teorema mas adequadamente inscritos (figura 1).

2.10.2

Determinação do comprimento da corda de um arco que seja a diferença de dois arcos de cordas conhecidas.

Considera conhecidos os comprimentos das cordas $[AG]$ e $[AB]$ e pretende determinar o da corda $[BG]$, num círculo em que $[AD]$ é um diâmetro — donde se tirará a fórmula que permite calcular o seno de um ângulo que é a diferença de outros dois (figura 2).

2.10.3

Determinação do comprimento da corda correspondente a um arco tomado como metade de um arco outro.

Para isso, considera conhecido o comprimento da corda $[GB]$ e pretende calcular o comprimento da corda $[GD]$, na hipótese de o ângulo GAB ter amplitude dupla do ângulo GAD e $[AG]$ ser um diâmetro (figura 3).

2.10.4

Determinação do comprimento da corda de um arco que seja a soma de dois arcos de cordas conhecidas.

Ptolomeu considera o círculo $ABGD$, de diâmetro $[AD]$ e centro Z e nele os arcos consecutivos AB, BG; traça as cordas $[AB]$ e $[BG]$. E escreve: «eu digo que, se unirmos os pontos A e G pela recta AG, esta recta será também dada».

Pela construção se vê que esta última corda corresponde ao arco que é a soma dos arcos determinados pelas cordas $[AB]$ e $[BG]$.

Para alcançar o seu objectivo, recorre a um outro quadrilátero: $[BGDE]$, obtido a partir de um outro diâmetro traçado para o efeito, $[BE]$.

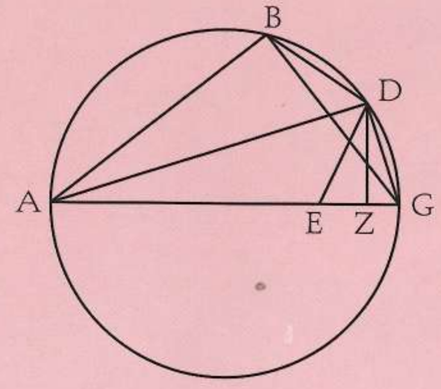


Figura 3

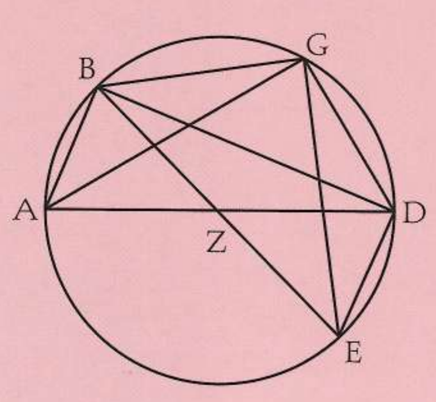


Figura 4

Nesta demonstração, e ao contrário das anteriores, não dá muitas justificações (figura 4).

2.10.5

Determinação do comprimento das cordas referentes aos arcos de $36°$, $60°$, $72°$, $90°$ e $120°$.

O facto de já ser possível relacionar cordas nas condições acima descritas, ainda não permite construir qualquer tabela: há que ter à partida, pelo menos o comprimento de uma delas.

Com esse objectivo, Ptolomeu começa com a construção de polígonos regulares com 5 e 10 lados, passando depois à determinação do comprimento do lado respectivo, começando por este e passando àquele. A partir dos valores encontrados e com as deduções anteriores já pode registar o comprimento das cordas correspondentes a muitos arcos: $36°/2 = 18°$; $18°/2 = 9°$; $9°/2 = 4°30'$; $72°+36° = 108°$; $108°/2 = 54°$; $54°/2 = 27°$; $27°/2 = 13°30'$, etc. Porém tem consciência de que não chegará a todos quantos pretende!

Proposições euclidianas ajudam: o lado do hexágono é igual ao raio do círculo circunscrito; e o teorema de Pitágoras também: obtém o comprimento do lado do quadrado.

As avaliações de comprimento serão feitas tomando para comparação o comprimento do diâmetro do mesmo círculo; necessitando de uma unidade da medida, considera o diâmetro dividido em 120 partes (representado por 120^p).

E a aplicação das fórmulas deduzidas é recorrente: com medidas de novas cordas, obtém ainda a mais outras ...

2.10.6

Determinação da corda do arco suplementar de um arco dado.

Mesmo assim, ainda há amplitudes que ficam de fora. É imprescindível a relação entre os senos de ângulos suplementares. Ptolomeu afirma: «sendo $x°$ a amplitude de um arco qualquer, (e representando o comprimento de corda respectiva por por $\mathrm{crd}(x°)$), então

$$[\mathrm{crd}(x°)]^2 + [\mathrm{crd}(180° - x°)]^2 = (120^p)^2.$$

Assim, tabela a corda que determina o arco de $144°$ como suplementar do arco primeiramente considerado, $36°$, e assim por diante: as relações anteriores e a aplicação da igualdade fundamental da Trigonometria permitem obter mais valores para a sua tábua.

2.10.7

Para atingir completamente o seu objectivo, ou seja tabelar cordas de meio em meio grau desde $0°$ a $180°$ e permitir ainda a determinação das restantes cordas neste intervalo, dedica-se ao problema da interpolação, segundo os comentadores, de um modo muito engenhoso.

Começa por provar a proposição:

Sejam duas cordas diferentes traçadas num círculo; a razão entre o comprimento dessas cordas, da maior para a menor, é menor que a razão entre os arcos respectivos, tomados na mesma ordem.

Esta proposição já tinha sido usada por Aristarco, Arquimedes e Menelau, mas nunca tinha sido demonstrada.

Em linguagem actual, esta proposição equivale a

$$\mathrm{sen}\ \alpha/\mathrm{sen}\ \beta < \alpha/\beta$$

Para fazer a demonstração (figura 5), que vamos omitir, recorre a proposições de Euclides apoia-se na figura junta, na qual

- $[AB]$ e $[BG]$ são cordas desiguais
- $[BD]$ é a bissectriz do ângulo ABG
- D e E são os pontos de intersecção da bissectriz $[BD]$ com a circunferência e com a corda $[AG]$
- o arco de circunferência de centro D e raio DE corta os segmentos de recta $[DA]$ e $[DZ]$ nos pontos H e T.

2.10.8

Ptolomeu reconhece que ainda não consegue a tabela prometida: por aqui não obtém o comprimento da corda que subtende um arco de 1°. Obtém, porém a corda que determina um arco de grau e meio; de facto, a partir dos arcos de amplitude 36° e 15°, por exemplo, obtém as cordas que determinam os arcos de 4°,5 e 7°,5 por aplicação sucessivamente da fórmula obtida em 2.10.3; a partir destas, a do arco de 3° por 2.10.2 e daqui a de 1°,5. Então, para obter a corda desejada,

— considera $1° = 0°{,}75 + 1/3 \times 0°{,}75 = 4/3 \times 0°{,}75$

— recorre a 2.10.7 com as cordas correspondentes aos arcos de 1° e 0°,75 por um lado e de 1° e 1°,5 por outro.

Acaba por concluir que a corda correspondente ao arco de 1° é simultaneamente menor e maior do que um mesmo valor, que será o comprimento desejado! Para avaliar da aproximação do valor obtido (1,047222) bastará pedir numa calculadora científica o seno de meio grau!

2.10.9

Todo este trabalho é teórico e, se não requer observações astronómicas, exige habilidade de cálculo e sólidos conhecimentos matemáticos. A intenção da construção tal tábua de cordas é clara: *afim de ter à mão os valores prontos dessas rectas* [inscritas no círculo], ou seja: a tabela dispensa o cálculo do comprimento de uma corda de cada vez que o astrónomos dele necesita. Por isso,

(...) colocaremos adiante tabelas de 45 linhas cada, dispostas em três colunas, das quais a primeira conterá as grandezas dos arcos crescendo sucessivamente por meio grau; a segunda dará as suas subtensas avaliadas em partes das quais o diâmetro contém 120; e a terceira oferecerá o trigésimo dos acréscimos das subtensas para cada meio grau (...).

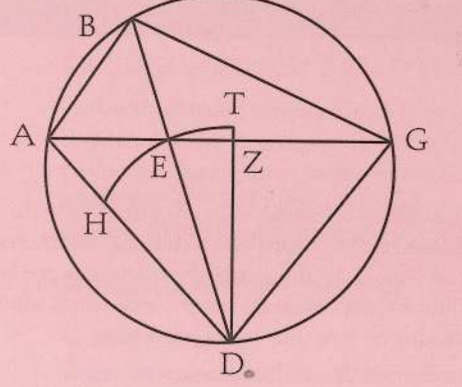


Figura 5

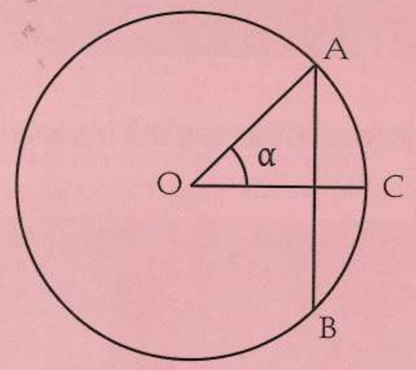


Figura 6

Mas entende que convém mostrar de onde vem esse valor: em caso de dúvida ou na ausência da tabela permite a sua confirmação ou a sua determinação; por isso todo o trabalho que antecede a sua apresentação.

Convertida a tabela de cordas em tabela de senos, como adiante se verá, e escrevendo os comprimentos no sistema decimal actual, é surpreendente a exactidão dos valores obtidos por Ptolomeu: as diferenças entre os valores obtidos por conversão dos tabelados e os valores dados por um computador situam-se entre $-0{,}0083$ e $0{,}0013$. E mais de 99% dos resultados coincidem em pelo menos cinco casas decimais e mais de 66% já coincidem em pelo menos seis casas decimais.

Sabe-se que Hiparco, no dizer de comentadores o astrónomo mais eminente da antiguidade, terá escrito um tratado sobre a construção de tábuas de cordas, que entretanto se perdeu. Mas o assunto já terá merecido a atenção de astrónomos ainda mais remotos: a tablete hoje conhecida como Plimpton 322, de origem babilónica, é uma prova disso, ao apresentar uma tábua de secantes; gravada em escrita cuneiforme estima-se que provenha de antes de 1600 anos de Cristo. E no papiro de Rhind, aproximadamente da mesma época, há problemas que envolvem a cotangente do ângulo entre a face e a base da mesma pirâmide.

Se, estes dois exemplos sugerem pouca originalidade na tábua de cordas de Ptolomeu, são-lhe reconhecidos dois méritos: o modo elegante adoptado por Ptolomeu na exposição do cálculo dos comprimentos das cordas e a primazia na explicação das bases empirícas e as razões teóricas dos procedimentos.

2.10.10

Uma tabela como esta é facilmente convertível numa tabela trigonométrica. Para o efeito, basta considerar a figura 6, na qual

- $[AB]$ é uma corda da circunferência de centro O, que determina o ângulo ao centro de amplitude 2α.
- $[OC]$ é perpendicular a $[AB]$.

Então é:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{\overline{OA}} = \frac{\text{crd}\,(2\alpha)}{2 \times \overline{OA}}$$

É esta a fórmula que permite converter a tabela de cordas de Ptolomeu numa tábua de senos, pois, essencialmente, da metade da corda do arco duplo se obtém o seno do arco metade e deduzir as fórmulas que permitem determinar as razões trigonométricas do ângulo «soma», «diferença» e «metade», hoje conhecidas como «fórmulas de Ptolomeu», a partir das deduções **2.10.2**, **2.10.3**, **2.10.4**.

Este artigo terá continuidade no próximo número da *Educação e Matemática* dando um ênfase especial a Ptolomeu Astrónomo.

Referências bibliográficas

Costa, M.J., *A Trigonometria Plana do Alamagesto*, tese de mestrado (1995), APM, Lisboa, 1995.

Katz, Victor J., *A History of Mathematics, an introduction*, Harper Collins College Publishers, 1993.

Neugebauer, O., *The exact sciences in antiquity*, Dover, New York, 1969.

Pedersen, O., *A survey of Almagest*, Odense University Press, 1974.

Ptolomeu, *Composition Mathematiques*, traduzido do grego por M.Halma. Reimpressão da edição publicada em 1813. Blanchard, Paris, 1988.

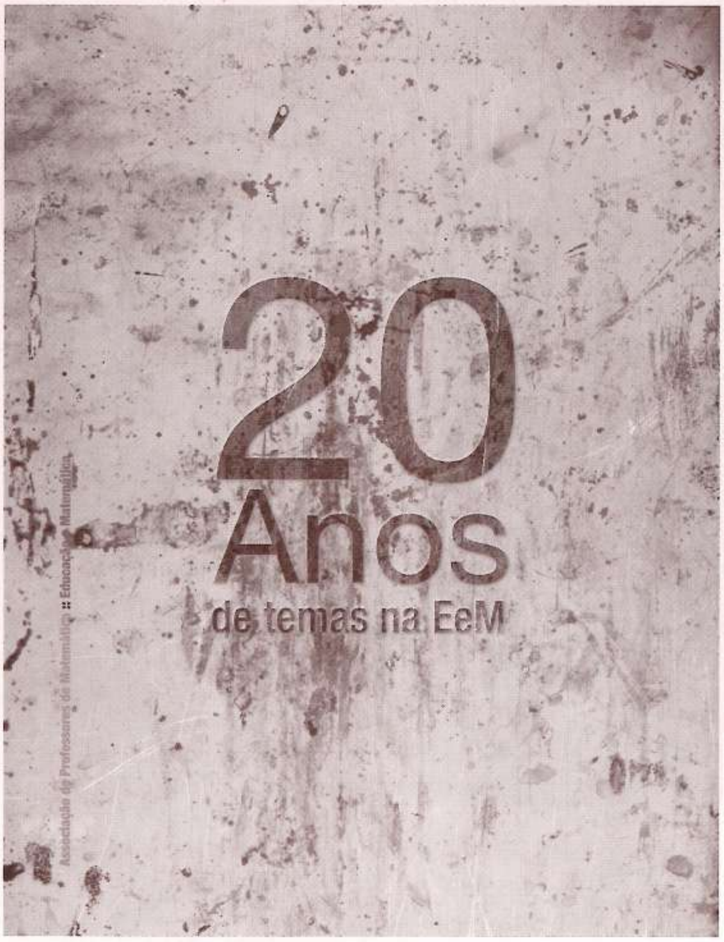
Stumpff, K., *Astronomia*, Enciclopédia Meridiano//Ficher, Editora Meridiano, Lisboa, Abril, 1965.

Van der Waerden, B. L., *Scien Awakering I*, P. Noordhoff LTD, Groningen Holand.

Maria José Costa

Educação e Matemática: vinte anos de temas, vinte anos de pessoas

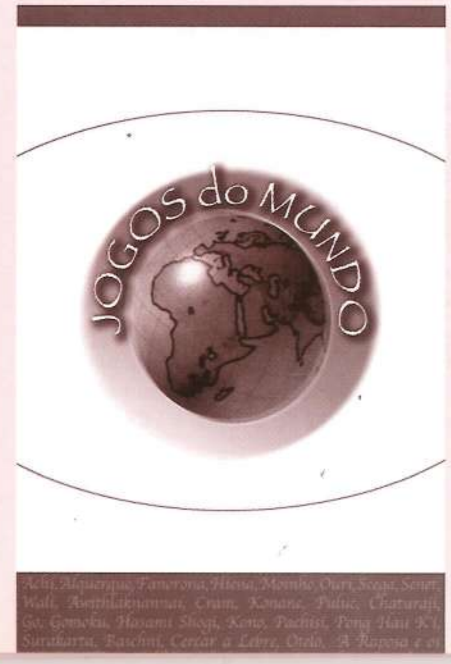
Edição APM, 2008 | PVP: 16,50€ Sócio: 11,00€



A *Educação e Matemática* celebrou vinte anos de existência em 2007. Ao longo deste tempo, foram vários os temas que mereceram atenção na revista. Estes vinte anos de revista são, por isso, vinte anos de muitos temas, mais de vinte certamente. Muitos deles estão retomados no livro que agora propomos:

1. *Aprender Matemática: Memorizar e mecanizar versus compreender e resolver problemas* (João Pedro da Ponte)
2. *Literacia Matemática: Uma procura de contributos para formar cidadãos mais críticos e interventivos* (Cristina Loureiro)
3. *A Matemática nos primeiros anos: Alguns desafios* (Lurdes Serrazina)
4. *O professor de Matemática* (Isabel Rocha)
5. *Avaliação das aprendizagens: Funções, forma, conteúdo* (Leonor Santos)
6. *Matemática: Problemas antigos, uma perspectiva moderna* (António M. Fernandes)
7. *O prazer dos problemas* (José Paulo Viana)
8. *História e Ensino da Matemática* (Maria José Costa)
9. *Geometria no ensino da Matemática: 20 anos da revista Educação e Matemática* (Nuno Candeias)
10. *As funções: Um olhar sobre 20 anos de ensino e aprendizagem* (António Domingos)
11. *Tecnologias na Escola* (Branca Silveira)
12. *Cinco pontos fundamentais para transformar a educação matemática* (João Filipe Matos)

Este livro reúne assim um conjunto de artigos originais que discutem e problematizam aspectos diversos da educação matemática no presente contexto educativo e curricular português, constituindo uma oportunidade para rever o passado recente e perspectivar os desafios do futuro próximo.



Jogos do Mundo

2ª Edição, APM, 2009 | PVP: 11,25€ Sócio: 7,50€

Esta brochura apresenta os 30 jogos que constituem a exposição *Jogos do Mundo*, agrupados de acordo com o que se supõe ser o seu continente de origem. Cada jogo é apresentado através do tabuleiro, das regras e de um conjunto de notas. Quando foi possível incluiu-se um breve resumo da sua história.

A brochura contém ainda referências bibliográficas e referências a sites que são relevantes na abordagem deste tema. *Jogos do Mundo* deu origem a uma exposição com o mesmo nome, constituída na sua maior parte por jogos de estratégia e de tabuleiro, e pelas respectivas regras.

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2009

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `http://www.apm.pt`

Assinaturas das revistas para 2009

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções