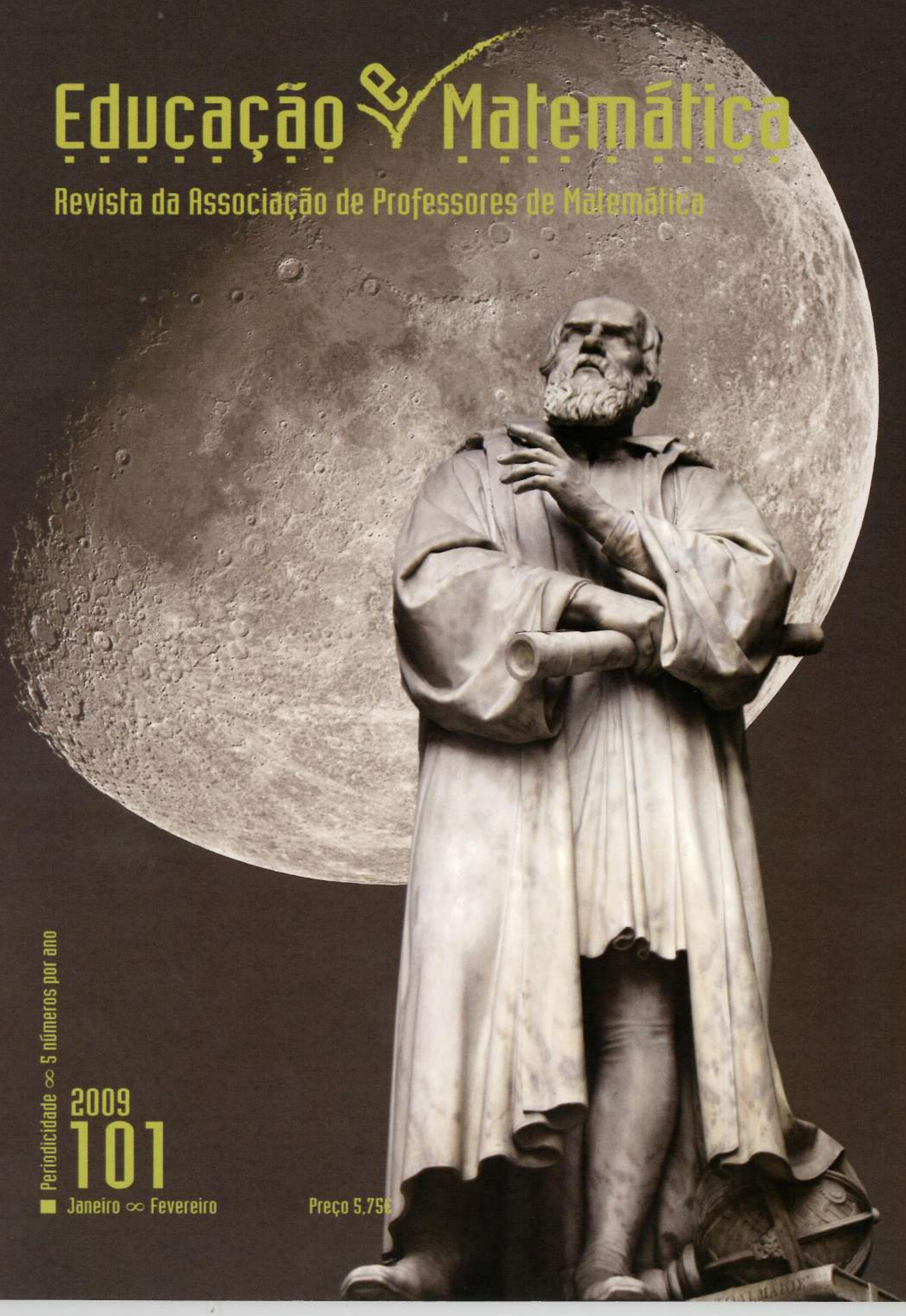
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2009

101

Janeiro ∞ Fevereiro

Preço 5,75€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Fialho
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Fevereiro 2009
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Gráfica Torriana
Fonte Santa, Paúl
2530–250 Torres Vedras

Depósito Legal nº 72011/93
Registo no ICS nº 124051
ISSN 0871-7222

Porte Pago

Saíu da redacção

Joana Brocardo deixou de integrar a redacção da revista *Educação e Matemática*. Ao longo dos anos em que permaneceu na redacção foram muitos os contributos que deu à revista, merecendo especial destaque os dois anos em que foi directora da *Educação e Matemática*. Pela qualidade, a energia e a boa disposição com que se envolveu, o nosso muito obrigada.

Sobre a capa

A capa do presente número consiste numa composição gráfica alusiva ao «Ano Internacional da Astronomia 2009». Utiliza-se na composição uma fotografia da estátua de Galileu Galilei, que se encontra no *Portico degli Uffizi*, em Florença.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Adair Mendes Nacarato, Ana Paula Silva, Arsélio Martins, Eduardo Veloso, João Fernandes, Leonor Santos, Manuel Ferreira da Costa Atalaia, Rita Bastos, Sónia Figueirinhas, Teresa Bondoso, Vincenzo Bongiovanni.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

A valorização dos indícios

Arsélio Martins, Presidente da APM

No seu prefácio ao relatório «Políticas de valorização do primeiro ciclo do ensino básico em Portugal», Deborah Roseveare, Chefe da Divisão das Políticas de Educação e Formação da OCDE, afirma que «a avaliação que realizaram em Portugal segue de perto a metodologia e abordagem que a OCDE tem utilizado para avaliar as políticas educativas em muitos países-membros ao longo dos anos» e realça que «os decisores políticos procuram realizar avaliações intermédias, (...)» para «identificar se as medidas levadas a cabo estão a conduzir aos resultados previstos (...)» defendendo a ideia de que as políticas de educação cada vez menos são iniciativas isoladas e têm evoluído para «sistemas auto-ajustáveis enriquecidos com *feedback*(...)».

Numa primeira leitura do relatório, aparecem apreciações muito positivas sobre as decisões políticas e as realizações óbvias: criação de centros escolares e equipamentos, por exemplo.

Para a formação contínua de professores, que é que nos interessa, o relatório afirma ter sido «desenvolvido um excelente modelo (...)» com «indícios de que os resultados estão a melhorar em Matemática, o que provavelmente está associado a uma melhoria do ensino desta disciplina» e em que «a colocação de formadores de professores nos agrupamentos de escolas melhora a cooperação entre escolas». A leitura atenta destas frases revela-nos o óbvio, ao mesmo tempo que não nos revela o resultado de acções empreendidas. E tudo isso pode ser revisitado a um outro nível de referências só aparentemente mais concretas. Podemos ler que os programas de formação «são executados sob a supervisão de estabelecimentos de ensino superior (...); incluem o apoio individual, a formação e o acompanhamento dos professores em sala de aula, com sessões de trabalho com os professores de instituições de ensino superior; (...) e implicam a produção de recursos didácticos específicos de apoio ao trabalho dos professores do primeiro ciclo.» que são seguidas pela afirmação de que «os programas nacionais de formação contínua lançados em 2005 são abrangentes, bem estruturados e estratégicos» e «reflectem a consciência a nível governamental da necessidade de consolidar competências-chave à luz dos resultados do PISA e da necessidade de se investir nas qualificações e no capital humano para preparar o país para a economia baseada no conhecimento e para a sociedade do futuro». Nada nos remete para a prática concreta.

Mais adiante, no relatório pode ler-se que «é necessário avaliar de forma sistemática o impacto dos programas de formação nos resultados e na qualidade do ensino e da aprendizagem nas salas de aula, nas escolas e nos agrupamentos» mas, logo adianta «as opiniões dos formadores expressas aos peritos sobre a qualidade do progresso regional e nacional são positivas, mas não se baseiam num estudo científico e são, essencialmente, impressionistas», acrescentando que «o acompanhamento do programa de formação (...) tem alguns pontos fortes (...) embora se baseie largamente em relatórios de progresso submetidos pelos centros de formação regionais». E, no próprio exemplo, tirado do relatório de acompanhamento, referem-se de novo como aspectos positivos, os aspectos do modelo definido pela política e nenhuma concretização. Pode ler-se que «um dos principais aspectos positivos salientados no relatório é o modelo de formação adoptado: grande proximidade aos formandos e o acompanhamento e a observação do ensino no contexto da escola». Este parágrafo de atribuição de toda a bondade à decisão central é muito revelador se dermos atenção a que, no mesmo exemplo, se escreve, em contraponto, que as principais limitações e obstáculos são: «um elevado número de grupos por formador a tempo inteiro; muitas vezes, agravado pelo número de formandos por grupo; a dificuldade na constituição de grupos de formação em zonas com grande dispersão geográfica de escolas; dificuldades operativas da formação, por exemplo, quando os horários se revelaram inadequados; necessidade de apetrechamento das escolas com os materiais necessários à formação; e dificuldade em os professores se tornarem autónomos diariamente, sem a presença do formador e abandonando o manual como recurso dominante». E isto não é política, porque a «boa» política volta nas referências às boas práticas na concepção dos programas de formação que nos falam de objectivos, princípios, supervisão, acreditação, modelo e estrutura de gestão do programa de formação.

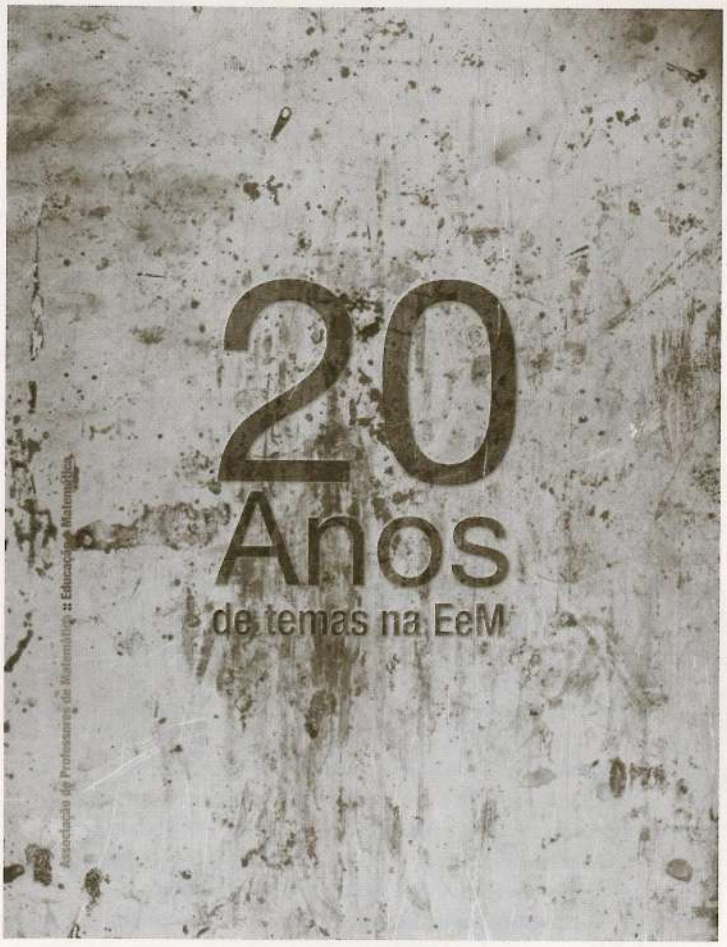
Do terreno das acções concretas, surgem notícias de boas práticas: exemplos de empenhamento e esforços dos formadores e professores; dificuldades vencidas e melhorias na formação e também no ensino e da aprendizagem das crianças e jovens. Pena é que um relatório, tão divulgado como este foi, não contenha referências concretas a resultados do trabalho dos formadores, professores e estudantes como coisa em si mesma sem estarem afundados no mar das referências genéricas à decisão política.

Este relatório deixa a desejar. E leva-nos a exigir e desejar divulgação de relatórios práticos, de práticos a reflectir sobre a formação e a sala de aula ou o mundo da escola como lugar dos dias reais, melhores e piores. Precisamos de ler os práticos. Porque alguns dos obstáculos (e dificuldades) que persistem, também neste relatório, acabam responsabilidade de ninguém. Quem deve, de facto, ser responsabilizado? Sabemos a quem atribuir as virtudes todas. E o defeito é de quem?

Como é que se levantam indeterminações e se removem obstáculos? Quem é o dono da grua?

Educação e Matemática: vinte anos de temas, vinte anos de pessoas

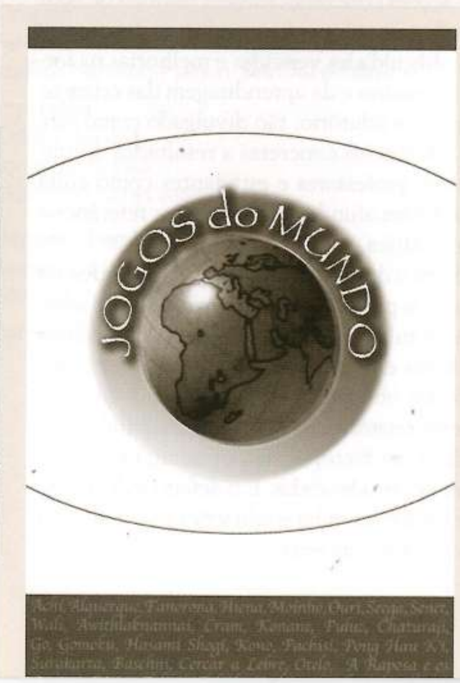
Edição APM, 2008 | PVP: 16,50€ Sócio: 11,00€



A *Educação e Matemática* celebrou vinte anos de existência em 2007. Ao longo deste tempo, foram vários os temas que mereceram atenção na revista. Estes vinte anos de revista são, por isso, vinte anos de muitos temas, mais de vinte certamente. Muitos deles estão retomados no livro que agora propomos:

1. *Aprender Matemática: Memorizar e mecanizar versus compreender e resolver problemas* (João Pedro da Ponte)
2. *Literacia Matemática: Uma procura de contributos para formar cidadãos mais críticos e interventivos* (Cristina Loureiro)
3. *A Matemática nos primeiros anos: Alguns desafios* (Lurdes Serrazina)
4. *O professor de Matemática* (Isabel Rocha)
5. *Avaliação das aprendizagens: Funções, forma, conteúdo* (Leonor Santos)
6. *Matemática: Problemas antigos, uma perspectiva moderna* (António M. Fernandes)
7. *O prazer dos problemas* (José Paulo Viana)
8. *História e Ensino da Matemática* (Maria José Costa)
9. *Geometria no ensino da Matemática: 20 anos da revista Educação e Matemática* (Nuno Candeias)
10. *As funções: Um olhar sobre 20 anos de ensino e aprendizagem* (António Domingos)
11. *Tecnologias na Escola* (Branca Silveira)
12. *Cinco pontos fundamentais para transformar a educação matemática* (João Filipe Matos)

Este livro reúne assim um conjunto de artigos originais que discutem e problematizam aspectos diversos da educação matemática no presente contexto educativo e curricular português, constituindo uma oportunidade para rever o passado recente e perspectivar os desafios do futuro próximo.



Jogos do Mundo

2ª Edição, APM, 2009 | PVP: 11,25€ Sócio: 7,50€

Esta brochura apresenta os 30 jogos que constituem a exposição *Jogos do Mundo*, agrupados de acordo com o que se supõe ser o seu continente de origem. Cada jogo é apresentado através do tabuleiro, das regras e de um conjunto de notas. Quando foi possível incluiu-se um breve resumo da sua história.

A brochura contém ainda referências bibliográficas e referências a sites que são relevantes na abordagem deste tema. *Jogos do Mundo* deu origem a uma exposição com o mesmo nome, constituída na sua maior parte por jogos de estratégia e de tabuleiro, e pelas respectivas regras.

Portefólios . . . e outras descobertas

Teresa Bondoso
Leonor Santos

No âmbito do projecto AREA[1] (Avaliação Reguladora no Ensino e Aprendizagem) um conjunto de professores tem realizado diversos estudos no sentido da construção de saberes acerca da avaliação enquanto dispositivo regulador da aprendizagem. Este projecto desenvolve-se num grupo de trabalho no qual se partilham e estudam experiências desenvolvidas em vários níveis de ensino. Em particular, a experiência que iremos abordar desenvolve-se numa sala de Jardim-de-infância, com crianças de 5 anos.

O ponto de partida

Várias foram as questões que se nos colocaram antes de propor aos alunos a construção de um portefólio. Talvez a primeira questão possa centrar-se na idade das crianças. Com alguma frequência, se ouve questionar a possibilidade de utilizar portefólios, mesmo com crianças mais velhas — do primeiro ou até do segundo ciclo. E não pela eficácia do instrumento, mas pela suposta «incapacidade» dos alunos destas idades. De facto, também nesta experiência tal questão se colocou durante a fase inicial do trabalho. Muitas vezes pensámos se seria prudente caminhar por aí: algumas vezes, a dúvida era relativa ao modo de retirar evidências de aprendizagem em discursos ainda emergentes, outras vezes tínhamos receio que a possibilidade das crianças reflectirem sobre a acção fosse ainda muito frágil e o processo se tornasse, por isso, pouco proveitoso.

Ao fim deste tempo e após alguma distância, considerámos que, apesar das dúvidas, mesmo naquela altura nenhum outro mecanismo de avaliação nos pareceu mais adequado.

A nossa experiência fazia-nos já acreditar que as crianças não só não aprendem apenas com o professor, como, a maior parte das vezes, é com ele que aprendem menos. E isso porque, mesmo sendo ainda pequenas, elas já são capazes de pensar, de relacionar experiências que vivem, de compreender situações que observam, de imitar o que acontece e de um conjunto enorme de outras coisas que não dominamos e provavelmente nunca conseguiremos enumerar. Afinal, não será a aprendizagem algo de misterioso e quase insondável?

Para além disso, é verdade que o facto da educação pré-escolar estar ainda distante de questões como a transição ou a retenção pode ter feito com que a nossa preocupação relativamente à certificação de saberes tivesse tido um peso bastante menor. Isto, muito embora tivesse acontecido que com o decorrer desta experiência tenhamos vindo a confirmar que a utilização de portefólios permite também encontrar evidências de aprendizagem e, assim, certificar saberes e competências. O facto é que a avaliação é para nós mais do que certificadora; é sobretudo um factor de apoio ao processo educativo e um importante mecanismo para garantir a diferenciação pedagógica e, deste modo, a aprendizagem.

Dificilmente conseguimos adequar a nossa acção se não conhecermos as crianças. E conhecer as crianças não é seguramente o mesmo que apenas conhecer ou analisar os seus produtos. Conhecer as crianças é essencialmente descobrir o modo como elas se desenvolvem e aprendem, isto é, o modo como elas olham o mundo e constroem as suas representações.

Assim, apesar de algumas dúvidas e inquietações, a nossa opção foi iniciar um processo que nos permitisse não só avaliar as aprendizagens, mas também ter acesso à forma como estas são compreendidas e avaliadas pelas próprias crianças.

Passamos, de seguida, à descrição da experiência, referindo um conjunto de procedimentos postos em prática no seu início e que foram sendo modificados e reformulados ao longo do tempo.

O desenvolvimento da experiência

A primeira coisa foi dizer às crianças que íamos começar a fazer uma coisa nova que servia para os conhecer melhor. Com a habitual disponibilidade e generosidade, todos concordaram. Foi-lhes dito que apenas íamos ver as coisas que cada um tinha feito e depois, eles escolheriam os três trabalhos que achavam mais importantes. Foram também informados que podíamos chamar a isso Portefólio.

Após esta conversa em grande grupo, o que passámos a fazer foi trazer para junto de nós as produções realizadas por cada criança num determinado tempo, sendo que, dessas produções, a criança seleccionava as três que considerava mais importantes. A seguir, os trabalhos eram ordenados, não existindo nenhum outro critério que não fosse a importância atribuída pela criança que, num momento de conversa individual com a professora, explicitava então as razões da sua escolha. Esta conversa era registada e esse registo era guardado junto aos trabalhos seleccionados.

Do desenvolvimento desta experiência fomo-nos apercebendo de diversos aspectos. Por um lado, pela verificação do tipo de critérios que orientavam as escolhas das crianças pudemos perceber, por exemplo, que as crianças valorizavam aspectos diferentes quando se referiam às razões das suas escolhas. Por exemplo, enquanto o António dizia que aquele trabalho devia ir para o portefólio porque tinha sido «mesmo difícil», o Miguel dizia que o importante era que naquele trabalho ele «tinha feito sozinho, sem precisar de ajuda e valia 100%, muito bom» e a Catarina dizia que tinha escolhido aquele trabalho porque o tinha feito «com a Rita, a sua melhor amiga».

Por outro lado, constatámos que cada criança tem a sua forma de descrever os processos que viveu, sendo possível ter acesso ao grau de reflexividade de cada uma. Por exemplo, enquanto algumas apenas descreviam o que tinham feito, outras justificavam as suas opções. A Daniela, referindo-se a um dos seus trabalhos, dizia: »É a mãe. Pintei às cores. E depois fiz os pés. E depois fiz os braços. E depois ficou assim: braços, pés, cabeça e cabelo». Já a Tatiana tinha descoberto que o crocodilo tinha mesmo patas. E dizia: «eu até já sabia, porque então como é que os crocodilos nadavam se não tivessem patas?». A verdade é que «os peixes também nadam e não têm patas. Mas agora que estava a pensar, só não percebia uma coisa que era como é que as cobras andam se não têm patas. Uma maneira era chegarem-se para a frente e fazerem força».

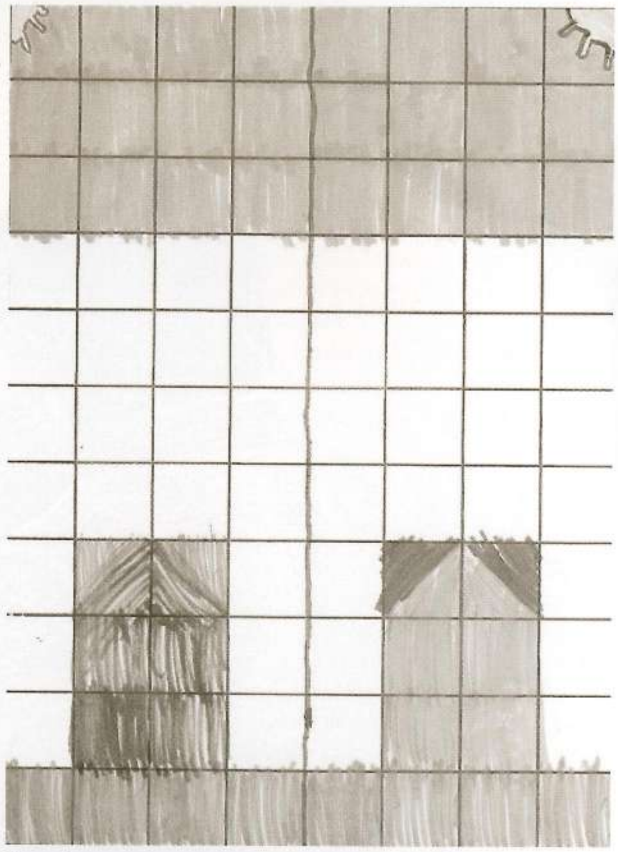


Figura 1.

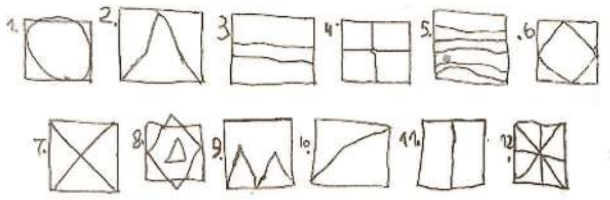


Figura 2.

Figura 3.

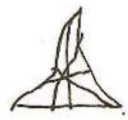


Figura 4.

Por outro lado ainda, ao avaliar com as crianças estávamos efectivamente a desenvolver mecanismos de ensino e de aprendizagem. O portefólio estava a proporcionar uma oportunidade para a abordagem de diversas áreas curriculares. A descrição que apresentamos de seguida é ilustrativa de uma das muitas situações ocorridas, nas quais a avaliação constituiu um meio para a apresentação de tarefas e desafios dirigidos a conteúdos no domínio da Matemática.

Na sala existem alguns materiais intencionalmente preparados para o desenvolvimento de determinadas tarefas e que estão permanentemente ao dispor das crianças que os vão utilizando de forma progressivamente mais autónoma. Desses materiais, destaca-se, para o exemplo que pretendemos apresentar, um conjunto de dossiers com diversas tarefas dirigidas à abordagem de diferentes conteúdos.

De um desses dossiers, o Samuel retirou uma folha quadriculada que propositadamente carecia de qualquer indicação sobre a tarefa a desenvolver. Olhando para a folha, decidiu fazer um desenho, aproveitando o quadriculado do papel. A determinada altura do seu trabalho parece ter mudado de ideias e resolveu então construir uma simetria (figura 1).

Na altura da avaliação deste trabalho, a professora e o Samuel conversaram sobre o processo desenvolvido:

Samuel: Eu pensava que era para fazer o que quisesse, mas que não era para fazer uma simetria.

Teresa: Mas porque é que tu achaste que tinhas de fazer uma simetria?

Samuel: Acho que vi o Tiago a fazer assim.

Teresa: E pensaste que o Tiago tinha razão e tu não?

Samuel: Pensei.

Teresa: Porquê? Achas que o Tiago sabe mais do que tu?

David (que assistia à avaliação enquanto fazia um trabalho): Mas tu desenhas melhor que o Tiago.

Teresa: Diz lá, Samuel...

Samuel: Também não fez mal, porque olha, Teresa, eu para fazer as casas, o telhado, vê só como é que eu fiz. Fiz um triângulo.

Teresa: Um?

Samuel: E depois pintei dois quadrados com duas cores.

Teresa: Se olhares para os quadrados pintados das duas cores, o que é que tu tens?

Samuel: Dois triângulos.

Teresa: Já viste que engraçado? Um quadrado pode ter outras formas lá dentro. Queres fazer uma experiência?

Samuel: O quê?

Teresa: Vou colocar aqui 12 quadrados. Primeiro vais numerá-los.

Samuel: Está bem, não está? (Figura 2)

Teresa: Certo. Agora vais tentar descobrir várias formas que podes fazer utilizando os quadrados.

Samuel: Já fiz.

Teresa: Agora, vais tentar explicar. Um quadrado pode ter... n° 1?

Samuel: Um círculo.

Teresa: n° 2?

Samuel: Três triângulos.

Teresa: n° 3?

Samuel: Três rectângulos.

Teresa: n° 4?

Samuel: Quatro quadrados.

Teresa: n° 5?

Samuel: Seis rectângulos.

Teresa: n° 6?

Samuel: Um quadrado inclinado e quatro triângulos.

Teresa: n° 7?

Samuel: Quatro triângulos.

Teresa: n° 8?

Samuel: Tem muitas formas. Tem um quadrado inclinado e sete triângulos.

Teresa: n° 9?

Samuel: Dois triângulos.

Teresa: n° 10?

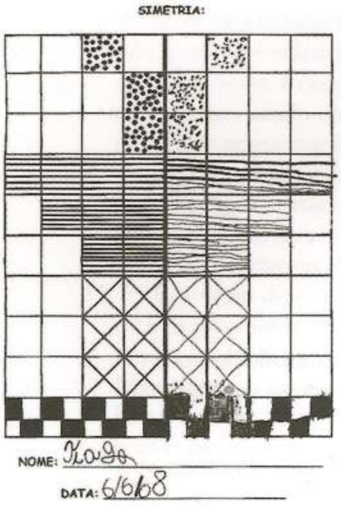
Samuel: Também tem dois triângulos

Teresa: n° 11?

Samuel: Também tem dois, mas rectângulos. Só que em vez de serem deitados, são em pé.

Teresa: n° 12?

Samuel: Tem oito triângulos. Eu consegui fazer. Até num círculo eu consigo fazer. (Figura 3) E num triângulo. (Figura 4). Olha, como fiz oito triângulos dentro de um triângulo, fiquei com nove triângulos.



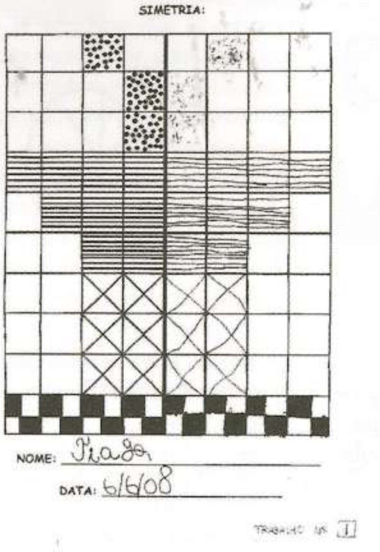


Figura 5.

Exemplo nº 1

Teresa: Eu gostava de falar contigo sobre a capa dos teus trabalhos que levaste para casa. Pode ser? Queres contar-me como foi?

Rodrigo: Muito giro. Os trabalhos eram muito giros. Eu vi com a mãe e o pai. E nem me lembrava que tinha feito aqueles trabalhos todos.

Teresa: Muito interessante, não achas?

Samuel: Acho.

Ao longo do tempo, fomos sentindo necessidade de reforçar ainda mais o carácter regulador da avaliação e, para isso, começámos por, mantendo os procedimentos que já descrevemos, acrescentar progressivamente algumas orientações. Assim, partindo da escolha livre das crianças, estas analisavam um trabalho a partir de três questões colocadas pela professora:

1. Como fizeste este trabalho?
2. O que achas mais importante?
3. O que gostavas de fazer de outra maneira?

Esta orientação levou as crianças a investirem em processos de auto-correcção que, quase sempre implicavam pensar sobre o que tinham feito e modificar os seus desempenhos. Este processo de auto-correcção está bem patente no diálogo seguinte, relativo à figura 5:

Teresa: Como fizeste este trabalho?

Tiago: Olhava para um lado e via como era. Depois tinha de fazer igual, mas do outro lado.

Teresa: O que achas mais importante?

Tiago: É que eu nunca tinha feito nenhum assim, mas o Pedro já.

Teresa: O que gostavas de fazer de outra maneira?

Tiago: As filas de baixo porque me enganei nos quadradinhos.

Por fim, sentimos que o portefólio poderia também responder à necessidade de recolha de informação sobre certas aprendizagens dos alunos, desde que a selecção dos trabalhos a incluir nos portefólios não dependesse apenas dos alunos. Assim, passou a ser integrado um momento no qual as crianças analisavam um conjunto de trabalhos seleccionados pela professora de forma a recolher dados acerca, por exemplo, do tipo de atenção que as famílias dispensam aos trabalhos realizados pelas crianças (Exemplo 1); da evolução da representação da figura humana (Exemplo 2); da representação gráfica do movimento (Exemplo 3) ou da construção da noção de quantidade e o desenvolvimento da comunicação matemática (Exemplo 4).

Teresa: Posso fazer-te algumas perguntas?

Ema: Podes, mas já fizeste igual nas outras. E eu já sei que isto é a fronteira e isto é um gráfico de barras.

Teresa: O trabalho era parecido, mas as perguntas são outras. Precisas de ficar muito atenta. Qual é o conjunto com maior…

Ema: … quantidade?

Teresa: Número de elementos.

Ema: As flores.

Teresa: Podes responder «o conjunto com maior número de elementos é o conjunto das flores.» E qual é o conjunto com menor número de elementos?

Ema: Menor é o menos. Já sei, é a árvore.

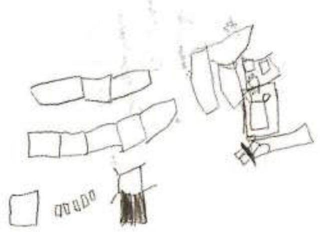
Teresa: Mas podes responder que o conjunto com…

Exemplo nº 2

Catarina: Primeiro, meti uma bola, os olhos e a boca; depois, fiz riscos, um quadrado e um rectângulo. Pintei de azul o rectângulo. E depois dois riscos. E a seguir eram só mais duas bolas.

Teresa: Como é que se chamam as bolas em linguagem matemática?

Catarina: Ai, perdão. São círculos.

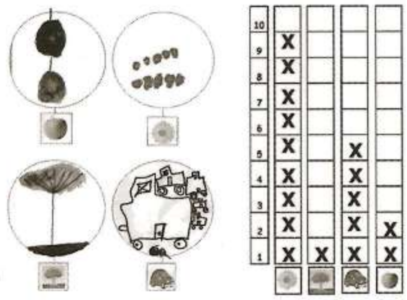


Exemplo nº 3

Fábio: Eu gostei muito do jogo que nós fizemos. Porque foi muito, muito engraçado.

Teresa: Eu gostava que me dissesses como era o jogo.

Fábio: As mesas e as cadeiras estavam «arranjadas». E nós tínhamos que passar por baixo, por cima e isso...



Exemplo nº 4

Tarefa: Representar conjuntos a partir dos dados dos gráficos de barras

Ema: ... menos árvores é o que tem menos coisas.

Teresa: Nos conjuntos, não dizemos coisas, dizemos...

Ema: ... elementos.

A concluir

Este processo foi para nós uma grande aprendizagem. Reviver as experiências, em momentos posteriores à acção, e ter acesso não apenas à visão do professor sobre o que aconteceu, mas também à visão das crianças, permitiu-nos aprender. E aprendemos que estar individualmente com as crianças, registar o que elas dizem e depois analisar esses registos nos conduz a um conhecimento mais profundo sobre elas. Sobretudo, quando os registos são retomados, emerge a coerência da avaliação realizada pela criança, do seu discurso e do modo como este revela os seus saberes. Parece que «naquela criança tudo fazia mais sentido». É como vê-la na sua globalidade. É como juntar o que habitualmente se avalia em separado.

No início deste processo não imaginávamos que o desenvolvimento desta experiência nos iria permitir fazer uma série de outras descobertas sobre a aprendizagem, sobre as crianças e, fundamentalmente, sobre a natureza da avaliação reguladora, componente da avaliação que nos interessa continuar a desenvolver e bem visível no diálogo que aconteceu com uma das crianças da sala. As suas respostas fazem-nos ver como, com uma linguagem simples, uma criança com apenas cinco anos sabe dizer coisas com que tanto nos identificamos.

Teresa: Para que serve a avaliação?

Pedro: A avaliação serve para mostrar às pessoas o que aprendemos.

Teresa: A que pessoas?

Pedro: Para mostrar às pessoas da nossa sala.

Teresa: E para ti, a avaliação serve?

Pedro: Serve para aprender.

Teresa: De que forma aprendes quando avaliamos?

Pedro: Aprendo coisas quando corrijo.

Teresa: E achas importante avaliar para sabermos se está certo ou errado?

Pedro: Isso não tem importância.

Esta não é uma experiência acabada. Embora nos pareça ter encontrado uma direcção, será importante continuar a procurar desenvolvê-la e a aperfeiçoá-la.

Nota

1 Projecto financiado pela FCT, nº PTDC/CED/64970/2006. Para mais informações sobre o projecto consultar

http://area.fc.ul.pt

Teresa Bondoso

EB1/JI da Telha Nova, nº 1, Projecto AREA

Leonor Santos

DEFCUL, CIE, DIFMAT, Projecto AREA

DirectInv

DirectInv é um jogo de cartas onde o jogador tem que tentar formar pares de cartas que representem a mesma relação entre as variáveis x e y. Pretende-se desta forma abordar as noções de proporcionalidade directa e inversa, sem no entanto exigir da parte dos jogadores um conhecimento prévio destas noções. Trata-se portanto de um jogo que tanto pode consistir uma primeira abordagem ao tema, como um aprofundamento, pois, no decorrer do jogo, os jogadores terão ocasião de aos poucos se irem apercebendo de alguns dos aspectos que caracterizam estes dois tipos de relações.

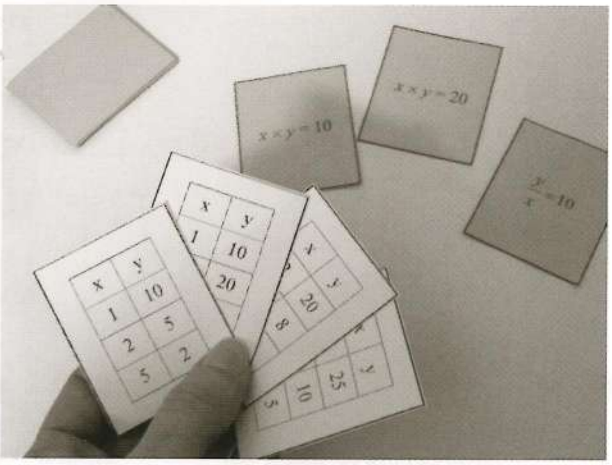


Figura 1.

Nº de jogadores: 4
Nível de ensino: 3º ciclo — 9º ano de escolaridade

Material necessário: dois baralhos de 20 cartas cada, um com tabelas e outro com relações enre as variáveis x e y.

Objectivo do jogo
O objectivo do jogo é identificar em cada carta com uma tabela uma relação entre os valores aí apresentados. Este processo é de certo modo guiado pelas cartas que se encontram sobre a mesa e que apresentam possíveis relações.

Preparação do jogo
Baralham-se as cartas com tabelas e distribuem-se cinco a cada jogador. Baralham-se igualmente as cartas que contêm relações entre as duas variáveis x e y e colocam-se três no centro da mesa, viradas para cima, deixando o restante baralho junto destas, virado para baixo. Sorteia-se qual é o primeiro jogador a jogar.

Modo de jogar
Na sua vez, cada jogador procura entre as cartas da mesa uma que faça par com alguma das cartas que tem em seu poder, ou seja, procura sobre a mesa uma carta com uma relação que corresponda à relação existente entre os números de uma das suas tabelas. Coloca o par acabado de formar sobre a mesa, para que todos o possam ver, e depois retira-o de jogo. De entre às cartas que ainda detém em seu poder escolhe uma para passar ao próximo jogador e termina a jogada retirando uma carta do baralho e colocando-a no centro da mesa, virada para cima, junto das que já aí se encontram.

Pode acontecer que não exista, ou que o jogador não se aperceba que existe, uma carta sobre a mesa que forme par com alguma das cartas que tem em seu poder. Nesse caso nenhuma carta será retirada da mesa, devendo o jogador passar na mesma uma das suas cartas ao próximo jogador e acrescentar às cartas sobre a mesa mais uma proveniente do baralho.

Pode igualmente ocorrer uma situação em que um jogador consiga formar mais do que um par ou até em que a relação escolhida se aplique a mais do que uma das suas cartas. Em qualquer destas circunstâncias o jogador deverá escolher, formando apenas um par constituído por uma carta da mesa e uma das suas cartas.

E no caso de um par ser formado incorrectamente, o primeiro jogador que o identificar tem direito a dar uma das suas cartas ao jogador que formou o par incorrecto.

Determinação do vencedor
Ganha o jogo o primeiro jogador que, ao terminar a sua jogada e passar uma carta ao jogador seguinte, fique sem cartas.

Três exemplos de jogadas
Numa situação de jogo como a apresentada na figura 1, o jogador apercebe-se que a sua tabela da esquerda corresponde à relação $x \times y = 10$ que se encontra sobre a mesa. Coloca então a sua carta junto dessa para que todos possam verificar a correcção do par que acabou de formar e, de seguida, retira as duas cartas de jogo. Escolhe então, por exemplo, a sua tabela da direita para passar ao próximo jogador e termina a jogada retirando uma carta do baralho e colocando-a no centro da mesa, junto das que aí se encontram.

Numa situação como a da figura 2, as duas tabelas da esquerda correspondem ambas à relação $x \times y = 40$. Como apenas uma carta poderá ser jogada, caberá ao jogador decidir qual a que irá colocar sobre a mesa, formando o par que sairá de jogo.

Na figura 3 o panorama é menos favorável ao jogador, uma vez que nenhuma das tabelas corresponde a qualquer das relações que se encontram sobre a mesa e, portanto, não é possível formar qualquer par. Assim, nenhuma carta poderá ser jogada e ao jogador resta apenas passar uma das suas tabelas ao próximo jogador e acrescentar às cartas sobre a mesa uma carta retirada do baralho.

Variantes
Podem ser acrescentadas ao baralho inicial quatro cartas com tabelas em branco, passando no início do jogo a distribuir-se seis cartas, em vez de cinco, a cada jogador. O jogador que recebe alguma carta com a tabela em branco preenche obrigatoriamente três dos seus valores antes do início do jogo e

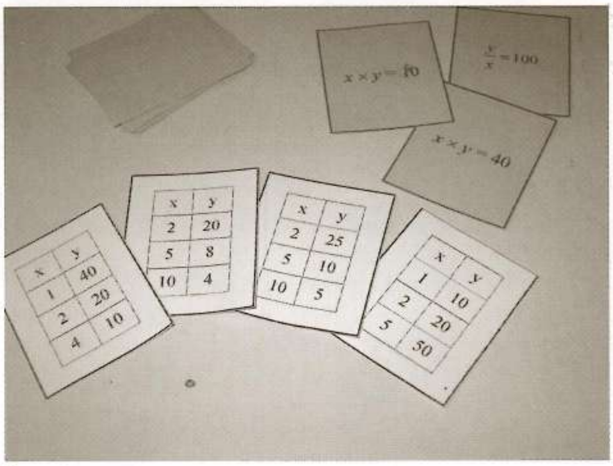


Figura 2.

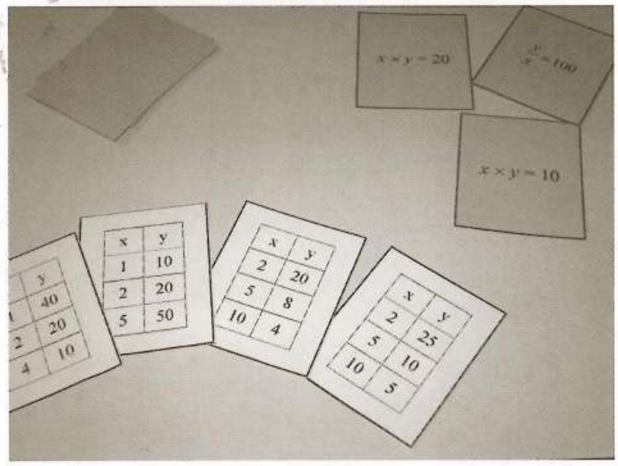


Figura 3.

Os baralhos de cartas

Cartas com tabelas

x	y
1	10
2	5
5	2

x	y
1	20
2	10
4	5

x	y
1	40
2	20
4	10

x	y
1	50
25	2
50	1

x	y
1	100
2	50
5	20

x	y
2	10
4	5
10	2

x	y
1	10
2	20
4	30

x	y
2	20
5	8
10	4

x	y
2	25
5	10
10	5

x	y
2	50
6	20
10	10

x	y
1	10
2	20
5	50

x	y
1	20
2	40
3	60

x	y
1	40
2	80
3	120

x	y
1	10
2	5
4	2

x	y
1	50
2	100
3	150

x	y
1	100
2	200
3	300

x	y
2	40
4	80
6	120

x	y
2	80
10	400
20	800

x	y
2	100
4	200
6	300

x	y
2	200
4	400
6	600

Cartas com relações (duas cartas de cada)

$x \times y = 10$	$x \times y = 20$	$x \times y = 40$	$x \times y = 50$	$x \times y = 100$
$\frac{y}{x} = 10$	$\frac{y}{x} = 20$	$\frac{y}{x} = 40$	$\frac{y}{x} = 50$	$\frac{y}{x} = 100$

os restantes três no momento em que decide jogar a carta. Deixa-se assim ao jogador a tomada de decisão relativamente aos valores que considera mais vantajosos. Esta variante tem pois a vantagem de colocar nas mãos do jogador mais poder para influenciar o jogo, no entanto, pode não ser uma boa opção quando os jogadores ainda não estão familiarizados com o jogo ou quando ainda não dispuseram do tempo necessário à compreensão das noções envolvidas.

Comentários

Duas das cartas do baralho de tabelas não representam nem uma relação de proporcionalidade directa nem uma relação de proporcionalidade inversa e tal não acontece por acaso. Com efeito, estas tabelas foram introduzidas no baralho por duas razões. Por um lado, para enfatizar que é fundamental confirmar se todos os elementos de cada tabela verificam a relação e não cometer o erro de pensar que é suficiente considerar apenas parte deles. Por outro lado, para impedir o desenvolvimento por parte dos jogadores da ideia que todas as tabelas traduzem obrigatoriamente uma relação de um destes dois tipos — proporcionalidade directa ou inversa.

Helena Rocha

Reflexão sobre a geometria [II][1]

Eduardo Veloso

Conforme previsto na parte I desta «reflexão sobre a geometria», iremos tentar responder agora ao mesmo tipo de questões que enunciámos no primeiro artigo — o que fazem os geómetras, de que problemas se ocupam, que métodos usam para resolver esses problemas ou para provar as suas afirmações? —, mas tomando agora como ponto de partida, em lugar das construções geométricas, as transformações geométricas. Para poder mostrar de início a riqueza e diversidade deste tema, não vamos de imediato impor uma definição de transformação geométrica, mas sim apresentar alguns exemplos de transformações geométricas e a sua utilização na resolução de problemas ou demonstração de resultados, deixando as sistematizações para mais à frente neste artigo.

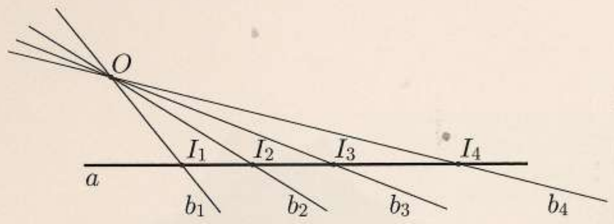
Projecção central

Consideremos dois planos, α e β, não paralelos[2], e um ponto O exterior aos dois planos (figura 1). Podemos «em geral» fazer corresponder, a cada ponto P de α, um ponto P' de β, da seguinte forma: consideramos a recta PO e a sua intersecção com o plano β, e designamos esse ponto por P' (na figura, apenas está representado o segmento PP'). Diremos então que a correspondência $P \rightarrow P'$, assim estabelecida, é uma projecção central de α «sobre» β, com centro no ponto O e que P' será a imagem de P por meio desta projecção central. Trata-se de um primeiro exemplo de transformação geométrica. Naturalmente, da mesma forma podemos considerar a transformação geométrica inversa, ou seja a que faz corresponder a cada ponto Q' de β um ponto Q de α.

Escrevemos «em geral» e «sobre» entre aspas para fazer notar o seguinte:

- existem pontos em α que não têm imagem em β, basta que a recta PO resulte paralela a β;
- pela mesma razão, a aplicação $P \rightarrow P'$ não é sobre, ou seja existem pontos em β que não são imagem de nenhum ponto de α.

Para que a projecção central seja uma verdadeira bijecção de α sobre β, juntamos aos «habituais» pontos da geometria euclidiana um novo conjunto de pontos que intuitivamente designamos por *pontos no infinito*. Neste processo, característico do trabalho em geometria, deixamo-nos conduzir ao mesmo tempo pela intuição geométrica e pela regra fundamental de trabalhar com os conceitos primitivos da cada teoria exclusivamente de acordo com as regras (axiomas) que fixámos de início e não com as nossas intuições avulsas (v. caixa *Elementos impróprios*).



Na figura, uma recta b roda em torno do ponto O, tomando as sucessivas posições b_1, b_2, b_3, ... A sua interseção com a é sucessivamente I_1, I_2, I_3, ... e intuitivamente podemos considerar que essa intersecção se afasta indefinidamente e que quando a recta b ficar paralela a a essa intersecção é um *ponto no infinito* da recta a (e também da recta b, obviamente); assim, ao conjunto dos pontos «habituais» de cada recta (a que é costume chamar pontos *próprios*) iremos acrescentar um novo ponto (o *ponto no infinito*, que é costume designar por ponto impróprio). Ao mesmo tempo, ao conjunto dos pontos próprios e das rectas «habituais» de um plano α, iremos acrescentar os pontos impróprios de todas as rectas de α, a cujo conjunto chamaremos *recta do infinito* do plano α.

Ocorre perguntar: porquê apenas um ponto impróprio, e não dois — um para «cada lado» da recta? Porque razão chamamos ao conjunto dos pontos impróprios de um plano *recta* (do infinito)? A resposta é simples: porque queremos que as regras que geriam as relações entre os antigos pontos, rectas e planos se mantenham em relação aos novos conceitos (ampliados):

- *Dois pontos A e B definem uma recta*

  Se um dos pontos (por exemplo A) é impróprio (por exemplo da recta a), a recta definida por A e B é a recta que passa por B e é paralela a a. Se os dois pontos A e B são impróprios e distintos, então são os pontos do infinito de duas rectas não paralelas a e b e a recta AB é a recta do infinito de um plano definido por um ponto qualquer do espaço e duas rectas passando por esse ponto e paralelas a a e a b.

  Nota: se uma recta tivesse dois pontos impróprios, esses dois pontos determinavam não uma recta mas um feixe de rectas paralelas.

- *Duas rectas definem um ponto (a sua intersecção)*

  O caso das duas rectas serem paralelas não é agora excepção, o ponto que definem é o ponto impróprio de ambas. Os pontos impróprios de um plano podem ser associados aos feixes de rectas paralelas (ou seja, às *direcções*) desse plano.

- *Dois planos definem uma recta (a sua intersecção).*

  Dois planos paralelos definem a recta imprópria comum a ambos.

  Quanto ao conjunto de todos os pontos impróprios do espaço. convenciona-se que formam um plano, *o plano do infinito*. O leitor poderá constatar, pensando um pouco, que esta convenção, embora com uma origem não tanto intuitiva como as anteriores, continua a preservar, e mesmo simplificar, as relações entre (a nova totalidade) de objectos (pontos, rectas e planos) do espaço.

No que se segue, como não trataremos de modo formal as questões que vamos abordar, manteremos as notações habituais para as rectas (minúsculas em itálico) e para os planos (letras gregas minúsculas), apesar de incluirem sempre, tal como o espaço, os elementos impróprios.[3]

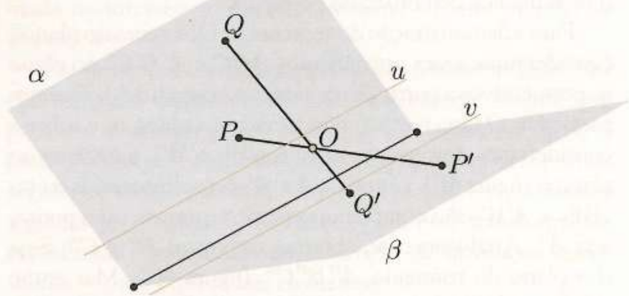


Figura 1

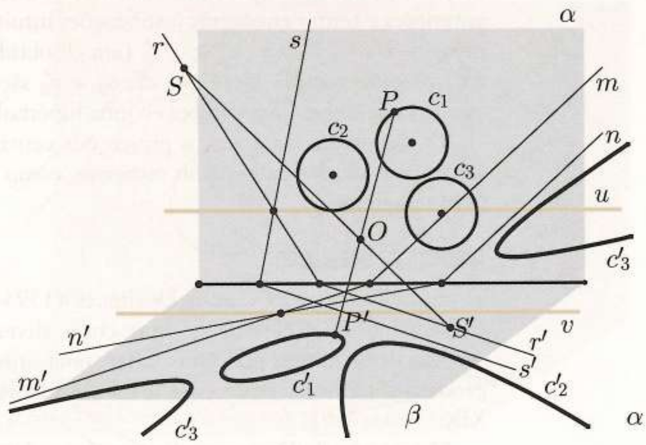


Figura 2

Neste artigo, as rectas, planos e o espaço que consideramos estão sempre ampliados com os pontos impróprios.

Se pelo ponto O fizermos passar um plano paralelo a β, ele irá intersectar o plano α numa recta u (figura 1). Os pontos de u são precisamente os pontos de α que não tinham imagem em β, e que agora têm como imagens pontos da recta do infinito de β. Se imaginarmos um ponto A em u, a imagem de A, por meio da correspondência $P \to P'$, será um dos pontos da recta do infinito de β. Considerações análogas, pensando agora na transformação inversa $Q' \to Q$, levariam à consideração da recta v, no plano β.

Assim, dados dois planos α e β, e um ponto O exterior aos dois planos, sabemos definir a projecção central de α sobre β com centro em O, a qual é uma bijecção. A cada figura F (conjunto de pontos) em α, fica a corresponder uma figura F' em β, a imagem de F por meio da projecção central. Tanto F como F' podem conter pontos próprios e impróprios. Na figura 2 considerámos algumas figuras em α (duas rectas r e s concorrentes num ponto de u; duas rectas paralelas n e m; três circunferências c_1, c_2 e c_3) e determinámos — com o auxílio do *Sketchpad* — as imagens correspondentes em β.

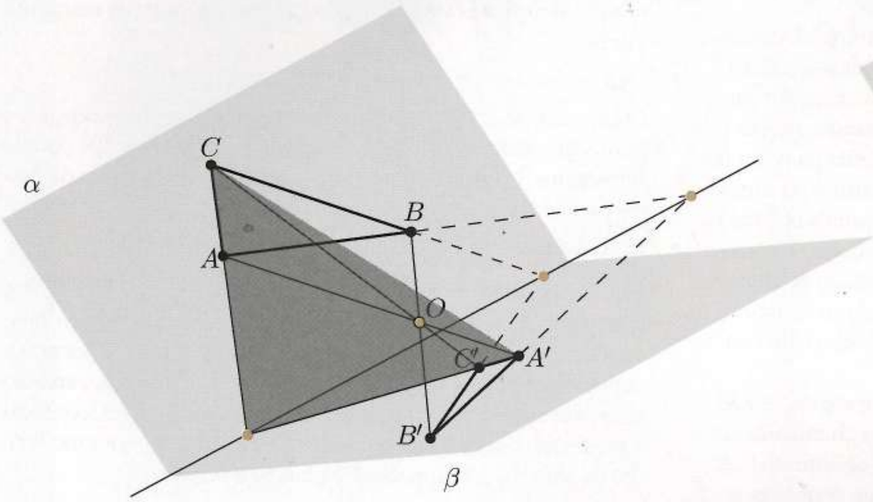


Figura 3.

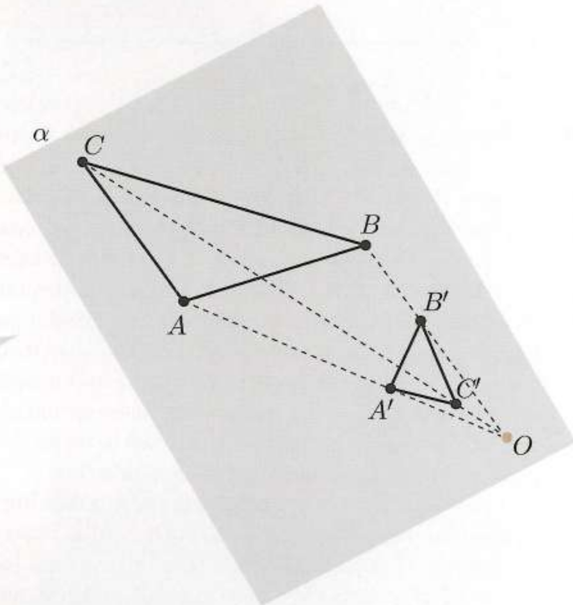


Figura 4A.

O leitor, se não tem experiência de trabalho com projecções centrais, deve procurar visualizar os diferentes casos anteriores e tentar encontrar justificações intuitivas para as imagens r', s', n', m', c_1', c_2', c_3' (em β) obtidas por meio da projecção central. Note que c_1', c_2', e c_3' são respectivamente uma elipse, uma parábola e uma hipérbole.

Os geómetras recorrem a projecções centrais para resolver problemas e demonstrar teoremas, como veremos no ponto seguinte.

Teorema de Desargues

O arquitecto francês Girard Desargues (1593–1662), um contemporâneo de Descartes, apresentou diversos resultados que constituem, por assim dizer, uma antecipação da geometria projectiva que viria a ser desenvolvida no séc. XIX.

O teorema de Desargues diz respeito a dois triângulos, ABC e $A'B'C'$, *perspectivos a partir de um ponto P*. Quer isto dizer que as rectas AA', BB' e CC' são concorrentes no ponto P. Desargues afirma que esta condição implica que as intersecções de AB com $A'B'$, AC com $A'C'$ e BC com $B'C'$ são colineares.

Existem duas versões deste teorema — ditas «no plano» e «no espaço» —, conforme os triângulos estão no mesmo plano ou em planos diferentes.

O teorema de Desargues no espaço é muito fácil de demonstrar, e começamos por ele — apoiando depois a demonstração «no plano» na versão espacial já demonstrada.

Sejam então ABC e $A'B'C'$ os triângulos dados, respectivamente nos planos α e β, e seja O o ponto a partir do qual são perspectivos (figura 3). O plano que contém os pontos $AA'CC'$ encontra a intersecção de α e β num ponto em que concorrem AC e $A'C'$. O mesmo acontece relativamente aos pares de rectas AB e $A'B'$ e BC e $B'C'$, logo o teorema fica demonstrado no espaço.

Para a demonstração do teorema de Desargues no plano[4], consideramos agora os triângulos ABC e $A'B'C'$ no plano α, perspectivos a partir de um ponto O (figura 4A). Fazemos passar por O uma recta e, não situada no plano α, e sobre e consideramos dois pontos distintos W_1 e W_2, exteriores ao plano α (figura 4B). Como O, A e A' são colineares, as rectas AW_1 e $A'W_2$ são complanares e encontram-se num ponto, seja A''. Analogamente, obtemos os pontos B'' e C''. Seja β o plano do triângulo $A''B''C''$ (figura 4C). Mas então ABC e $A''B''C''$ (resp. $A'B'C'$ e $A''B''C''$) são dois triângulos em planos diferentes (α e β) e perspectivos a partir de W_1 (resp. W_2). Logo, pelo teorema de Desargues no espaço, AB e $A''B''$ (e também $A'B'$ e $A''B''$) encontram-se num ponto de i, intersecção de α e β, e portanto o mesmo acontece a AB e $A'B'$ (resp. AC e $A'C'$ e BC e $B'C'$). Fica assim o teorema demonstrado.

Pense o leitor um pouco sobre algumas características desta demonstração. Definimos previamente uma transformação geométrica — a projecção central de um plano α sobre um plano β. A transformação geométrica foi definida como uma bijecção entre os dois planos (para o que am-

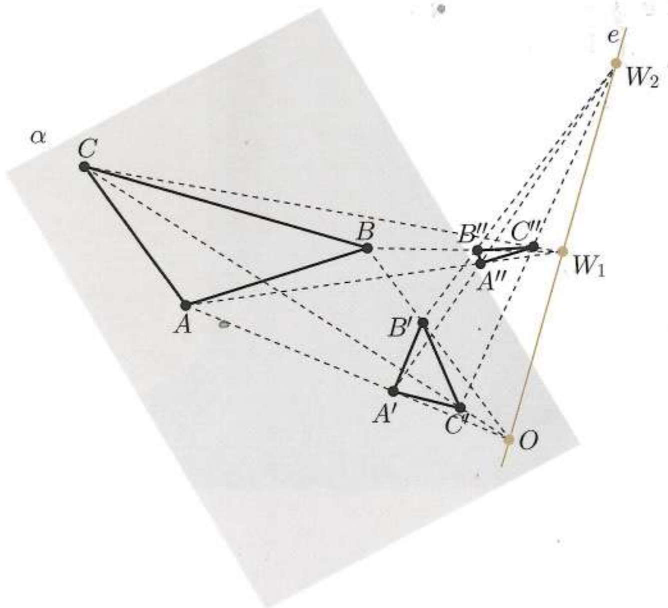


Figura 4B.

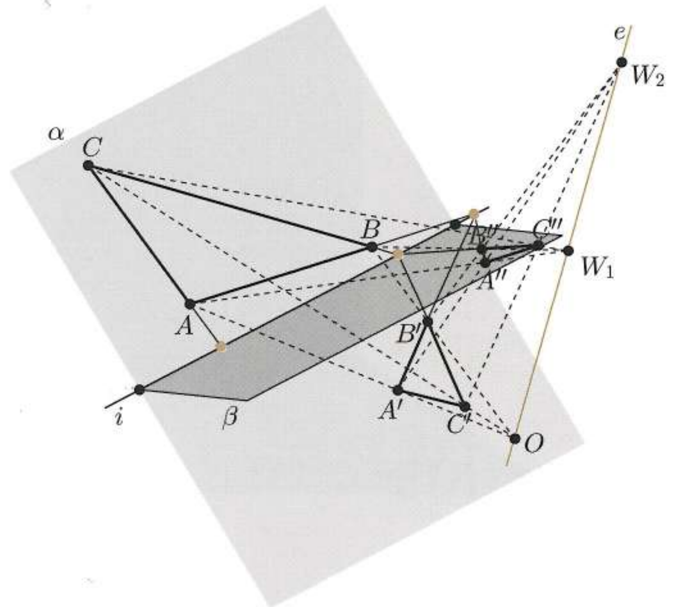


Figura 4C.

pliámos cada plano com o conjunto dos seus pontos impróprios — a sua recta do infinito). Não é difícil constatar que esta transformação geométrica preserva o conceito de ponto (isto é, transforma pontos em pontos), bem como o conceito de recta e de intersecção de duas rectas (a intersecção de duas rectas — ponto próprio ou impróprio —, é transformada na intersecção das suas imagens – ponto próprio ou impróprio).

Foi tendo em conta as propriedades (colinearidade e incidência) que ficam invariantes por projecção central que pudemos demonstrar o teorema de Desargues no plano a partir do teorema de Desargues no espaço. Nos dois pontos seguintes, vamos introduzir a projecção paralela, constatar algumas propriedades invariantes para essa transformação geométrica e apresentar um exemplo de utilização semelhante — mas muito mais elementar.

Projecção paralela

Consideremos de novo dois planos α e β não paralelos. Seja d uma recta exterior aos dois planos e não paralela a qualquer deles (figura 5). A cada ponto P do plano α fica a corresponder um ponto P' do plano β, a intersecção com β da recta que passa por P e é paralela a d. Esssa correspondência biunívoca é uma transformação geométrica, dita projecção paralela de α sobre β. Na figura 5 estão representadas diversas figuras no plano α (um triângulo, duas rectas paralelas e uma circunferência) e foram determinadas, com o auxílio do *Sketchpad*, as suas imagens em β por meio da pro-

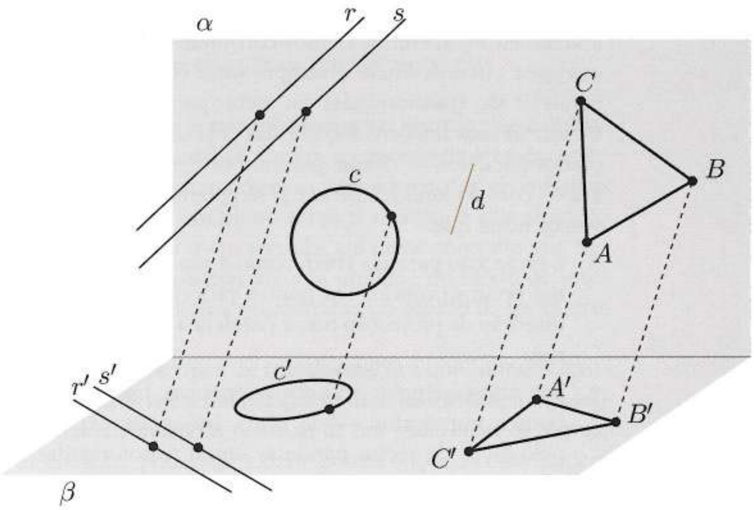
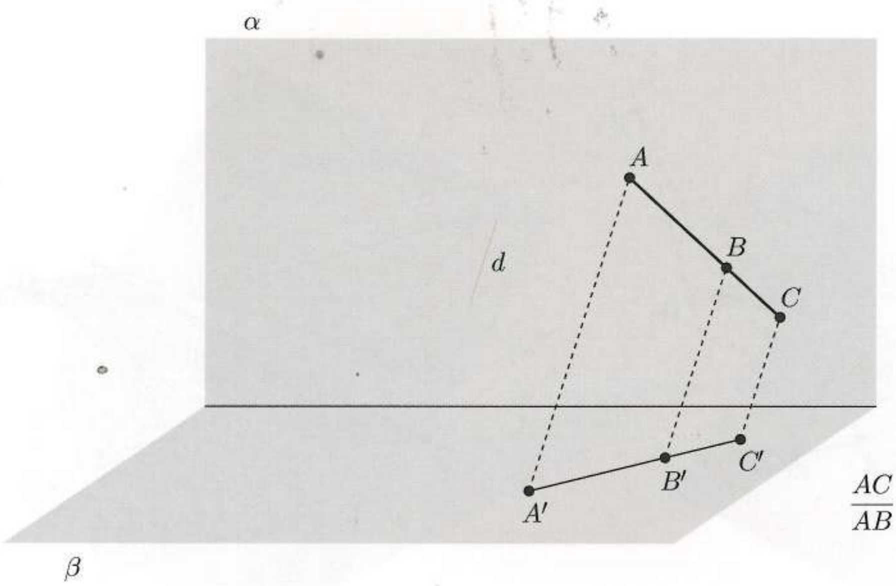


Figura 5.



$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$$

Figura 6.

jecção paralela. Se os planos α e β são considerados euclidianos (isto é, sem adjunção das rectas no infinito) nada há a acrescentar, apenas podemos constatar que a imagem de qualquer circunferência é sempre uma elipse e que rectas paralelas são transformadas em rectas paralelas (basta pensar que as suas imagens são obtidas pela intersecção de dois planos paralelos — os que passam por r e s e são paralelos a d — com o plano β). Se α e β são planos projectivos, devemos notar que:

- a projecção paralela (bem como a sua inversa) transforma pontos próprios em pontos próprios — dado que a direcção de projecção não é paralela a qualquer dos planos;
- em consequência, transforma pontos impróprios em pontos impróprios — de resto, isso pode exprimir-se pelo facto de rectas paralelas serem transformadas em rectas paralelas;
- como nenhum ponto da circunferência é enviado para o infinito, a imagem de uma circunferência é sempre uma elipse.

Uma outra propriedade da projecção paralela é o facto de deixar invariante a razão dos comprimentos de dois segmentos colineares (ou paralelos) (para concluir imediatamente no caso da colinearidade, basta observar a figura 6).

Exemplo de utilização da projecção paralela

Vamos utilizar a projecção paralela para provar que:

As três medianas de um triângulo intersectam-se num ponto.

Seja $A'B'C'$ um triângulo qualquer num plano β. Seja α um plano qualquer, distinto de β, contendo o segmento $A'C'$. Construamos em α um triângulo equilátero tendo o segmento $A'C'$ como lado, e designemos por B o terceiro vértice (façamos $A \equiv A'$ e $C \equiv C'$). Consideremos a projecção paralela de α sobre β definida pela direcção BB' (figura 7).

A imagem do triângulo equilátero ABC pela projecção paralela que definimos é o triângulo $A'B'C'$ dado. As três medianas do triângulo equilátero são as bissectrizes dos ângulos internos, e por isso encontram-se num ponto D que é o centro da circunferência inscrita. Por outro lado, os pontos médios dos lados do triângulo equilátero, dado que como vimos a razão dos comprimentos de segmentos colineares é invariante nas projecções paralelas, têm por imagens os pontos médios M_1', M_2' e M_3'. Portanto as medianas do triângulo $A'B'C'$ encontram-se num ponto D' (imagem de D pela projecção paralela).

À procura da unidade

Na reflexão que estamos a fazer sobre os processos de trabalho em geometria — sendo o foco deste artigo as transformações geométricas —, temos até agora investido em campos pouco explorados na geometria do ensino básico e secundário. Introduzimos a projecção central de um plano α sobre um plano β (não paralelos) e fomos levados a inventar os elementos impróprios (pontos, rectas e planos) e a compreender que embora a projecção central transforme rectas em rectas, não preserva outros conceitos ou noções a que a geometria, por assim dizer, nos tinha habituado: rectas paralelas são transformadas em rectas concorrentes, certas

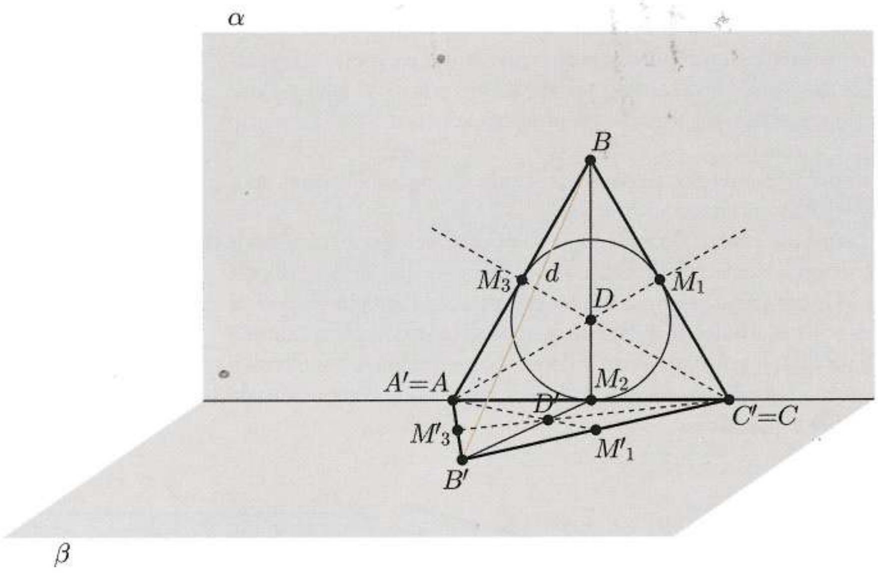


Figura 7.

rectas concorrentes são transformadas em rectas paralelas, os pontos médios dos segmentos deixam de o ser nos segmentos transformados — até os próprios segmentos podem, por transformação, deixar de ser segmentos[5] —, enfim, pouco parece resistir a uma projecção central... No que diz respeito à projecção paralela entre dois planos não paralelos, a situação parece não ser tão «desastrosa», dado que o paralelismo é conservado, os pontos médios também, os segmentos transformam-se sempre em segmentos, mas por exemplo dois segmentos com igual comprimento podem deixar de o ser (note por exemplo que na figura 7 os lados do triângulo equilátero AB e BC são transformados nos segmentos dados $A'B'$ e $B'C'$, não necessariamente iguais)...

Assim, pudemos observar como em geometria se caminha em novas direcções, se inventam novas transformações e conceitos, e se resolvem problemas e provam resultados com a ajuda dos novos entes geométricos que vão sendo criados.

No entanto, a par deste tipo de trabalho eminentemente criativo, tem existido sempre na matemática, e em particular na geometria, processos de trabalho e investigação com uma finalidade que, não excluindo a criatividade, colocam o acento tónico naquilo que poderíamos chamar *a procura da unidade*. Apenas um exemplo, em termos simples, de uma interrogação que seria natural levantar neste ponto do nosso percurso:

- a projecção central e a projecção paralela são exemplos de transformações geométricas — termo ainda indefinido neste artigo, note-se —, tais como as isometrias e semelhanças; mas enquanto naquelas as correspondências consideradas são entre planos, nas isometrias e semelhanças essas correspondências são entre pontos do mesmo plano; há alguma maneira de conferir coerência e unidade ao modo como introduzimos estes entes geométricos a que chamamos transformações?

Veremos que sim, e caminharemos no sentido dessa unidade no resto deste artigo. Como, na geometria elementar do ensino básico e secundário, as transformações geométricas estudadas são de um plano sobre si mesmo, é essa situação que vamos explorar em seguida, e é nesse contexto que iremos procurar encontrar alguma unidade no modo de integrar as transformações geométricas no estudo da geometria em geral.

Portanto, os tipos de transformações que iremos considerar (isometrias, semelhanças, afinidades e projectividades) serão *correspondências pontuais de um plano sobre si mesmo*. No entanto, poderiam existir outras opções, como poderá ver na caixa *Isometrias e Semelhanças a partir de projecções*.

Adoptaremos a definição habitual de transformação geométrica no plano[6]. Sendo dado um plano projectivo α, uma transformação geométrica é uma aplicação (função) T biúnívoca de α sobre si mesmo, ou seja faz corresponder a cada ponto P de α um (e um só) ponto P' de α — designado imagem de P por meio de T — e, além disso, para todo o ponto Q' de α existe uma pré-imagem Q em α (ou seja, tal que $T(Q) = Q'$).

Isometrias e semelhanças[7]

Devemos analisar quais as implicações de estarmos agora a trabalhar no espaço projectivo, dado que as definições habituais de isometrias e semelhanças são em geral dadas no es-

Isometrias e semelhanças a partir de projecções

Comecemos por notar que, depois da introdução dos elementos impróprios, a projecção central e a projecção paralela passam a corresponder a um único conceito, o de projecção de α sobre β a partir de um ponto do espaço (ampliado). Se o centro da projecção é um pronto próprio, estamos na situação da projecção central, se é um ponto impróprio, temos uma projecção paralela.

Quando definimos a projecção (central ou paralela) de α sobre β, tivemos o cuidado de especificar que suponhamos os planos não paralelos. Isto porque queríamos cair em situações novas.

Na realidade, ao imaginarmos uma projecção central (de centro O) entre dois planos paralelos α e β podemos considerar que estamos a partir uma dilação (ou homotetia) espacial, de centro O, e que essa dilação transforma figuras do plano α em figuras homotéticas no plano β (figura 8A). Por sua vez, uma projecção paralela entre dois planos paralelos α e β preserva a distância entre dois pontos, e reduz-se a uma translação no espaço, que tranforma figuras no plano α em figuras iguais no plano β (figura 8B). É possível, a partir daqui, obter qualquer semelhança — e não apenas a dilação —, (resp. qualquer isometria — e não apenas a translação), através da composição de projecções centrais (resp. projecções paralelas) entre planos paralelos.

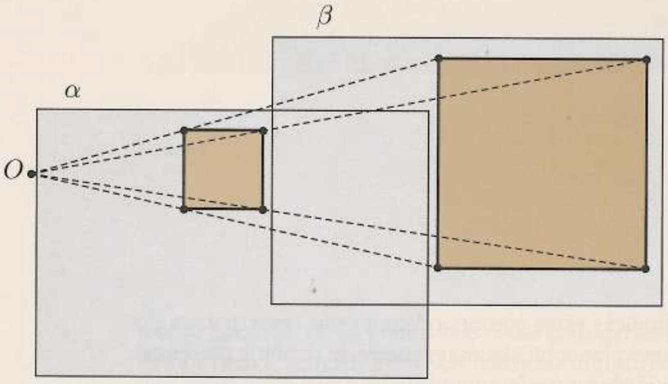


Figura 8A.

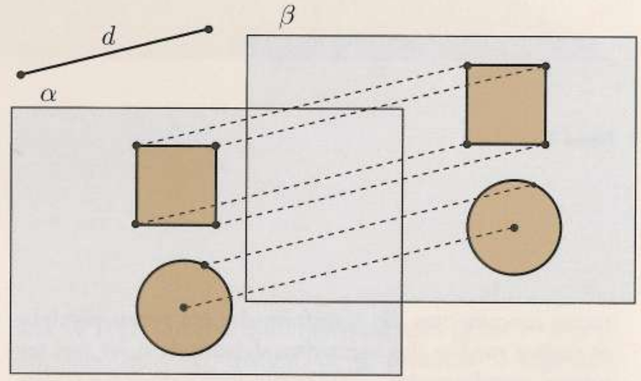


Figura 8B.

paço euclidiano não ampliado. Recordemos que a cada recta r (própria) de α corresponde um ponto impróprio, que como vimos pode ser definido por uma *direcção* no plano (ou seja pelo feixe de rectas paralelas a r). Tendo em atenção que tanto as isometrias como as semelhanças transformam rectas paralelas em rectas paralelas, isso significa que a sua actuação no plano projectivo tem a propriedade de transformar pontos impróprios em pontos impróprios, ou seja deixa fixa a recta do infinito. Apenas algumas notas exemplificativas:

- a imagem por uma translação de uma recta r é uma recta paralela a r; ou seja, a translação fixa todos os pontos de recta do infinito (o que não acontece nem com a rotação nem com a reflexão — pense porquê...)

Recordemos que a composição (ou produto) de duas isometrias é ainda uma isometria e que a inversa de uma isometria é uma isometria. Analogamente, o produto de duas semelhanças e a inversa de uma semelhança são ainda semelhanças. Portanto, tanto o conjunto das isometrias no plano como o conjunto das semelhanças têm uma estrutura de grupo[8].

Temos assim definidos dois grupos de transformações *Iso*(α) e *Sem*(α) no plano projectivo.

Projectividades e afinidades

Pretendermos agora definir dois tipos de transformações pontuais de um plano sobre si mesmo com propriedades análogas às das projecções central e paralela entre dois planos.

Seja α um plano e construamos uma cópia de α, α_1, numa posição diferente de α. Podemos por exemplo considerar uma recta própria j de α, rodar α de um certo ângulo em torno de j e obter assim α_1 (figura 9A). Tomado um ponto qualquer O para centro de projecção, definimos como anteriormente a projecção central de α sobre α_1, de centro O. O triângulo $A'B'C'$ em α_1 será a imagem, por esta projecção central, do triângulo ABC do plano α. Desfazendo agora o deslocamento de α (neste caso a rotação em torno de j) iremos obter no plano α a figura $A'B'C'$. Fica assim definida uma transformaçâo geométrica de α sobre si mesmo, a que chamaremos ainda projecção central (por vezes também designada por perspectividade). Deverá observar que:

- as rectas AA', BB' e CC' continuam ainda a ser concorrentes num mesmo ponto (próprio ou impróprio) W;
- ao levarmos de novo à coincidência α e α_1, ficam a existir sobre α as duas rectas u e v que considerámos na definição de projecção central entre dois planos diferentes

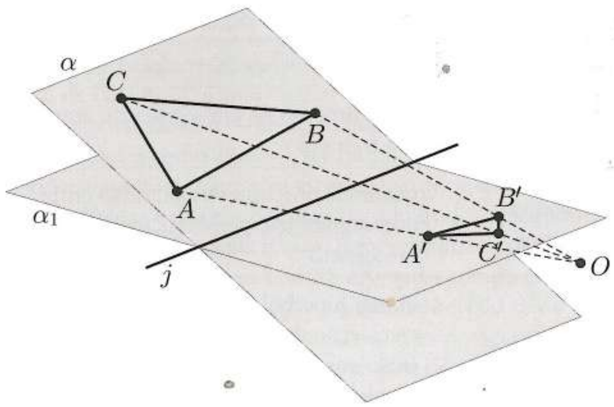


Figura 9A.

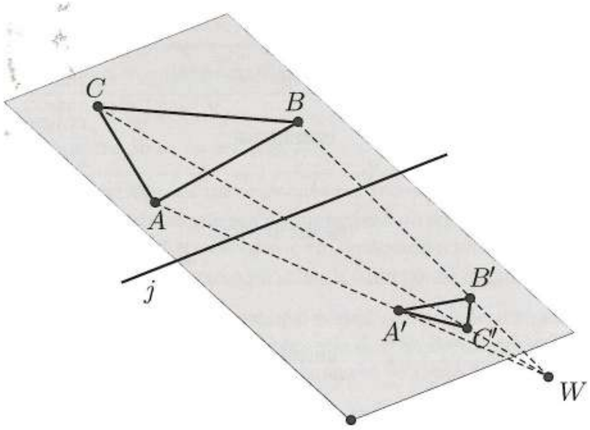


Figura 9B.

(pense um pouco no seu significado nesta nova situação);

- o processo que adoptámos (rotação) de construir uma cópia de α numa posição diferente no espaço foi apenas para servir de exemplo: qualquer deslocação de α podia ser utilizada, o que é necessário é depois trazer essa cópia à posição inicial, coincidente com α.

Esta transformação geométrica de α sobre si mesmo é um primeiro exemplo de *transformação projectiva ou projectividade*. As transformações projectivas pontuais de um plano sobre si próprio podem ser caracterizadas como tranformando rectas em rectas e são também designadas por *colineações*.

Nem todas as transformações projectivas resultam apenas de uma projecção central, como no exemplo anterior.

A composição de um número finito de projecções centrais é ainda uma transformação projectiva e pode demonstrar-se que uma transformação projectiva é sempre uma projecção central composta com uma semelhança[9]. A composição de duas transformações projectivas ainda é obviamente uma transformação projectiva, e a inversa de uma transformação projectiva é da mesma forma uma transformação projectiva. Assim, obtivemos um novo grupo de transformações no plano α, que podemos designar por $Proj(\alpha)$. Como sabemos, todas as isometrias são semelhanças, e dado que a imagem de uma recta por uma semelhança é sempre uma recta, as semelhanças são transformações projectivas. Estamos assim na presença de três grupos de transformações, em que $Isom(\alpha)$ é subgrupo de $Sem(\alpha)$ e este é subgrupo de $Proj(\alpha)$.

Podemos ainda definir um novo tipo de transformações no plano α, se efectuarmos um procedimento inteiramente análogo ao que fizemos relativamente à projecção central mas agora considerando uma projecção paralela de α sobre α_1. Obtemos uma transformação geométrica de α sobre si mesmo, que é um primeiro exemplo de uma *transformação afim ou afinidade*. As transformações afins de α sobre si mesmo caracterizam-se por transformarem rectas em rectas e fixarem a recta do infinito de α (ou, numa definição equivalente sem envolver a recta do infinito, transformarem rectas paralelas em rectas paralelas). É o caso, por exemplo, de uma composição de um número finito de projecções paralelas. Uma afinidade de α sobre si mesmo pode ser sempre obtida como o produto de uma projecção paralela com uma semelhança. Também no caso das afinidades se pode constatar que o seu conjunto forma um grupo, que podemos designar por $Afin(\alpha)$, e que, relativamente aos grupos anteriores, se situa do seguinte modo:

$$Isom(\alpha) \subseteq Sem(\alpha) \subseteq Afin(\alpha) \subseteq Proj(\alpha)$$

Geometria e grupos de transformações

As primeiras linhas do artigo *Introdução ao estudo das geometrias baseado no conceito de transformação*, que Sebastião e Silva escreveu para o número 35 da *Gazeta de Matemática*, são as seguintes:

> No célebre programa de Erlangen, mostrou Fleix Klein como o conceito de transformação permite iluminar a interdependência lógica dos diversos conceitos da geometria, sugerindo novas conexões e conduzindo a uma visão do mundo geométrico, que é a mais penetrante, a mais racional e a mais dominadora a que se possa chegar.[10]

A unidade a que nos referimos anteriormente consiste nesta *visão do mundo geométrico* exposta por Felix Klein no programa de Erlangen e que Sebastião e Siva descreve naquele magnífico artigo. Aconselhamos vivamente o leitor, se gosta de geometria e quiser pressentir essa unidade, a procurar o n° 35 da Gazeta. O que faremos aqui é apenas, em alguns enunciados demasiado breves e sem quaisquer justificações — pois de outra coisa não seríamos capazes —, tomar como

Tabela 1.

Geometrias	Transformações	Noções primitivas	Algumas noções derivadas
métrica elementar	isometrias	colinearidade, paralelismo, grandeza de segmentos	comprimento de um segmento, área de um triângulo
euclidiana	semelhanças	colinearidade, paralelismo, igualdade de segmentos	quadrado, circunferência, razão entre dois segmentos, perpendicularidade, ortocentro
afim	afinidades	colinearidade, paralelismo	elipse, hipérbole, parábola, homotetia, translação, baricentro de um triângulo, razão entre segmentos colineares ou paralelos
projectiva	colineações	colinearidade	cónica, razão dupla[13]

exemplo conceitos geométricos conhecidos e os quatro tipos de transformações geométricas que apresentámos e indicar o seu enquadramento naquela visão.

Uma teoria matemática qualquer é formada por conceitos (ou noções) e por afirmações relacionando esses conceitos. O mundo geométrico não foge a este esquema geral, e inclui conceitos como os de recta, segmento, perpendicularidade, triângulo rectângulo, quadrado e área e afirmações que os relacionam, como o teorema de Pitágoras. Na geometria (como em qualquer teoria matemática),

«é necessário fixar como primitivas ou indefiníveis certas noções, a partir das quais é possível depois definir formalmente todas as outras noções que se apresentam no desenvolvimento lógico da teoria — chamadas, por isso mesmo, noções derivadas.»[11]

Note-se que, por questões de simplicidade e comodidade, podem ser seleccionadas como primitivas noções que podem ser derivadas a partir de outras do conjunto escolhido.

Paralelamente, algumas afirmações, designadas por axiomas, e aceites sem demonstração, formam o conjunto a partir do qual todas as outras afirmações da teoria, os teoremas, são demonstradas.

A ideia fundamental de Klein, nessa visão unificada do mundo geométrico, foi considerar que as noções e propriedades geométricas se podem agrupar em diversas *geometrias*. Assim, para nos limitarmos aos exemplos que considerámos no presente artigo, a cada grupo de transformações pontuais do plano projectivo, *Isom*(a), *Sem*(a), *Afin*(a) e *Proj*(a) fica associada uma geometria, respectivamente a *geometria métrica elementar*, a *geometria euclidiana*, a *geometria afim* e a *geometria projectiva*. Essa associação consiste no seguinte: *as noções e propriedades geométricas estudadas em cada geometria são aquelas que são invariantes para as transformações do respectivo grupo* (diz-se também com o mesmo significado *noções respeitadas* ou *noções preservadas*). Por exemplo, a noção de quadrado é uma noção da geometria euclidiana porque fica invariante para as semelhanças, mas não é uma noção da geometria afim porque uma afinidade transforma em geral um quadrado num paralelogramo (pense na sombra de um quadrado provocada pela luz do sol, por exemplo). Da mesma forma, a elipse é uma noção da geometria afim (ou simplesmente uma noção afim) porque é invariante para as afinidades, mas não é uma noção projectiva — pois uma elipse pode ter como imagem, por projecção central (tipo particular de transformação projectiva), uma parábola ou uma hipérbole.

Mas a relação entre transformações geométricas e propriedades conservadas revela-se ainda mais forte, devido à seguinte propriedade fundamental:

Se uma transformação biunívoca respeita nos dois sentidos uma dada noção ou un dado conjunto de noções, respeita necessariamente qualquer outra noção que se possa definir logicamente a partir das primeiras. Reciprocamente, se uma noção é respeitada por todas as transformações biunívocas que deixam invariantes as noções dadas, ela será logicamente exprimível a partir destas.[12]

Assim, uma determinada noção pertencerá a uma determinada geometria se ficar invariante para o respectivo grupo de transformações ou se for definível a partir das noções primitivas dessa geometria, e os dois critérios são equivalentes. A tabela 1 mostra a correspondência entre as geometrias, os grupos de transformações e noções que podem ser tomadas como primitivas em cada geometria. São indicadas também algumas noções derivadas, a título de exemplo. É uma adaptação de um quadro análogo incluído no capítulo citado do livro *Textos Didácticos*, de Sebastião e Silva.

E a educação matemática?

Se a finalidade principal da *educação matemática para todos* fosse de carácter cultural, temas como os abordados nestes dois artigos poderiam — se devidamente tratados e não apenas indicados como aqui —, ser incluídos no ensino secundário e constituir assim uma espécie de síntese das experiências realizadas e dos conhecimentos adquiridos pelos alunos ao longo da escolaridade básica. Representariam, no que diz respeito à geometria, um contributo para a compreensão da natureza da matemática. Mas praticamente não existe geometria no nosso ensino secundário, e as preocupações de carácter cultural são desprezadas em face da preparação técnica para prosseguir estudos ou para entrar numa profissão. Ao mesmo tempo, o abandono das finalidades do Currículo Nacional pelo novo programa do ensino básico e a sua pobreza matemática vão no mesmo sentido utilitarista que invade completamente o nosso sistema educativo.

Resta-nos esperar que a força e beleza das ideias que tentámos transmitir atraiam alguns leitores e os convençam que vale a pena lutar por alterações tão necessárias como urgentes na nossa educação matemática.

Notas

1. Este artigo é a continuação de um artigo anterior com o mesmo título, que foi publicado no último número de *Educação e Matemática*.

2. A condição de não paralelismo dos planos α e β tem a ver apenas com o facto de nesse caso, como veremos, tanto na projecção central como na projecção paralela, as transformações resultantes serem respectivamente as «clássicas» *isometrias* e *semelhanças*, e pretendermos nestes primeiros pontos tratarmos de transformações menos conhecidas (projectividades e afinidades).

3. Para simplificar a escrita, muitos autores designam por recta projectiva a recta euclidiana (dos pontos próprios) completada com o ponto impróprio (analogamente para plano projectivo e espeço projectivo). Além disso, alguns autores, quando introduzem os elementos impróprios em geometria, embora afirmemque se trata de convenções, acresentam logo algumas frases retirando o carácter de excepcional a essas convenções. Veja-se por exemplo uma parte do texto de Sebastião e Silva, logo depois de afirmar que «as convenções relativas aos pontos impróprios têm uma base intuitiva»:

   «Não esqueçamos porém que os pontos impróprios têm uma existência puramente convencional. De resto, o mesmo se pode dizer a respeito dos pontos próprios e das entidades geométricas em geral, pois que tais entes *não existem* na realidade física, são apenas *idealizações, representações esquemáticas* dos objectos do mundo empírico. Ao matemático, o que interessa é apenas que os postulados ou convenções fundamentais, que relacionam esses entes, sejam compatíveis entre si, isto é, não conduzam a contradição. Como dizia Poincaré, «existir» em Matemática significa «ser isento de contradição».» (*Textos Didácticos*, vol. I, p. 213).

4. Demonstração de Smart, pág. 286.

5. Imagine na figura 2 um segmento em α intersectando a recta u (sendo a intersecção um ponto interior ao segmento). Nesse caso, o segmento transforma-se em duas semirectas, pois a imagem do ponto de intersecção com u é um ponto impróprio.

6. Sobre a noção de transformação geométrica pode ler a *Nota sobre o Ensino da Geometria* da autoria de Rita Bastos, intitulada *Transformações Geométricas*, no número 94 (Set/Out 2007).

7. No *site* da oficina sobre *Transformação Geométricas e Simetria* (endereço: `http://www.apm.pt/formacao/tgs_2008/`), encontrará muita informação organizada sobre isometrias e semelhanças, que por falta de espaço não podemos repetir aqui.

8. Sobre grupos de transformações geométricas, veja o *Texto de Apoio 11*, no *site* citado anteriormente.

9. I.M.Yaglom, *Geometric Transformations III*, pág. 52.

10 *Gazeta de Matemática* n° 35, p. 1.

11. idem

12. idem, pág. 5.

13. Dados quatro pontos A, B, C, e D, sobre uma recta projectiva, a razão dupla (AB,CD) é dada pela expressão $(AC/CB)/(AD/DB)$, em que os segmentos são orientados. É interessante notar que as isometrias preservam as distâncias, as semelhanças preservam as razões das distâncias e as transformações projectivas preservam as razões duplas (as razões das razões...). Mais um sintoma da unidade da matemática...

Bibliografia

Klein, Felix. *Le programme d'Erlangen*. Paris: Éditions Jacques Gabay, 1991.

Sebastião e Silva, J. *Textos didácticos, Vol. I*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1999.

Sebastião e Silva, J. Introdução ao estudo das geometrias baseado no conceito de transformação. *Gazeta de Matemática*, Ano VIII, n° 35, Fev. 1948.

Smart, James R. *Modern Geometries*. New York: Brooks/Cole Publishing Company, 1998.

Yaglom, I. M. *Geometric Transformations III*. Washington: Mathematical Association of America, 1973.

Eduardo Veloso

Recursos digitais para abordagens dinâmicas e interactivas de temas algébricos

Introdução

A investigação tem vindo a reconhecer que a tecnologia facilita abordagens dinâmicas aos principais conceitos da Álgebra e do Cálculo, permitindo ligar múltiplas representações, ricas em termos de interactividade, sendo que esta e a dinamicidade, constituem as duas características com mais potencial, chamando a atenção para a construção de significados, mais do que para os aspectos manipulativos (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006).

Hoje encontramos *software* que permite operar directamente sobre objectos matemáticos, com objectivos didácticos mais específicos e ver de imediato as mudanças e resultados que decorrem da acção sobre eles, oferecendo uma percepção imediata que pode apoiar a construção dos conceitos matemáticos.

Também os documentos de orientação curricular, como os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), reconhecem no *Princípio da Tecnologia*, que as tecnologias proporcionam imagens visuais das ideias matemáticas, sob múltiplas perspectivas, que possibilitam que os alunos explorem e analisem muitos exemplos e diferentes formas de representação. Isto pode constituir um desafio a colocarem e explorarem conjecturas, processos que não ocorrem tão facilmente em situações de trabalho tradicionais de lápis e papel. O mesmo documento refere que o trabalho com a tecnologia pode funcionar também como uma janela acerca das percepções dos alunos sobre a matemática, permitindo que o professor observe e recolha informação sobre os seus processos de raciocínio e os possa integrar na avaliação.

Outros estudos, chamam a atenção para a questão da mediação da ferramenta e das tarefas, como aspectos críticos a considerar no uso da tecnologia. Estas perspectivas, reconhecem no professor um papel de central importância nos desafios que lança e no balanço delicado que deve manter entre a actividade construtiva no computador e as reflexões sobre essa actividade (Hoyles & Noss, 2003), como partes essenciais e complementares da aprendizagem dos alunos.

Também nas orientações metodológicas gerais do novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, se reconhece que «os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas, e a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada. Antes das representações simbólicas, muitas vezes é apropriado usar representações icónicas»(Ponte *et al.*, 2007, p. 9).

Ora os *applets*, que aqui vou referir, enquadram-se no tipo de tecnologia dirigida a objectivos específicos do currículo, oferecendo normalmente representações intermédias, que podem ser manipuladas directamente pelo utilizador e que exigem dos professores conhecimentos técnicos mínimos para a sua exploração. A maior parte, assemelha-se a pequenos jogos didácticos, com um conjunto de regras simples que orientam o seu funcionamento.

Uma característica dos *applets* é desafiarem os alunos a tentarem qualquer acção, dando-lhes uma *resposta* imediata e permitindo-lhes corrigir essa tentativa, de modo a melhorarem a estratégia, superando o *medo* de errar, uma vez que a tecnologia não emite juízos de valor.

Tentando ilustrar estas ideias, apresento seguidamente alguns exemplos de recursos educativos digitais que se enquadram nesta perspectiva, embora centrados em tópicos algébricos, onde os alunos apresentam, normalmente, dificuldades: as expressões algébricas e as equações. No entanto, nesses mesmos *sites*, poderá encontrar outros recursos, para todos os temas de Matemática e para todos os níveis de ensino.

Recursos educativos digitais

Open University — Centre for Mathematics Education

(`http://cme.open.ac.uk/`)

Um *site* com apontadores para publicações, instituições de referência, projectos e recursos na área da Educação Matemática.

Se for a *Teaching Secondary Mathematics with ICT*, encontra um conjunto de pequenas aplicações interactivas dirigidas a tópicos específicos do currículo.

É o caso do *applet Mathbox*, em

`http://cme.open.ac.uk/applets/Matchbox.html.`

Esta aplicação permite a resolução de equações através do trabalho com *match boxes* (caixas de fósforos), com 5 níveis de dificuldade, conforme existe uma ou mais match box e apenas num ou nos dois membros da equação. Cada caixa contém um determinado número de fósforos que se determina operando em cada um dos membros da equação, servindo-se de operadores de adição/subtracção ou de divisão sobre os objectos ou sobre a expressão simbólica algébrica. A caixa de fósforos desempenha o papel da variável contendo um número ainda não conhecido (a incógnita) de fósforos. Permite alternar entre a representação icónica e algébrica na resolução das equações e rever os passos seguidos na resolução.

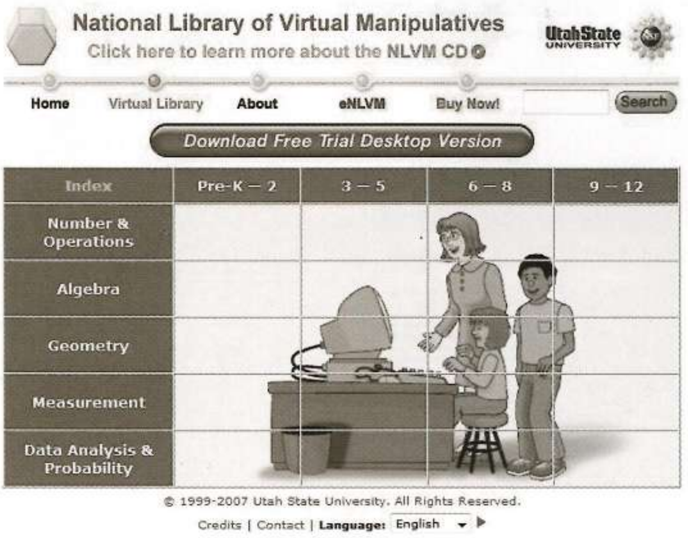


Figura 1

National Library of Virtual Manipulatives (Utah State University)

A NLVM (`http://nlvm.usu.edu/`) é um *site* de recursos educativos interactivos, associado à Universidade de Utah e organizado por tópicos específicos de Matemática (Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida, Análise de Dados e Probabilidades), desde o pré-escolar ao 12° ano (figura 1).

Um dos recursos, é o caso do *applet Algebra tile*, que se encontra entre o conjunto de *applets* de Álgebra, dirigido à faixa do 3° ao 5° ano, em

`http://nlvm.usu.edu/en/nav/category_g_2_t_2.html.`

Este *applet*, oferece um conjunto de pequenos rectângulos, representando monómios (x, y, $x.y$, 1, 5, ...) que podemos arrastar para uma área de trabalho, colocando-os na horizontal ou na vertical, ficando assim a constituir os factores de um produto. A área que representa o produto, aparece de imediato assinalada na área de trabalho e agora trata-se de arrastar os diferentes produtos parciais, até encher por completo a área referida. De forma inversa, podemos também partir da figura na área de trabalho e procurar os respectivos factores (factorização).

Nota: este *site* introduziu, recentemente, uma particularidade de grande interesse. Podemos ter acesso a uma versão dos *applets* que funcione no nosso computador, independente da ligação à Internet, o que pode ter muito interesse para usar em escolas e salas de aula, onde essa situação esteja dificultada. Uma versão grátis, para experimentação durante 7 dias, também está disponível.

Illuminations: um site associado ao NCTM

Illuminations é um *site* (`http://illuminations.nctm.org`) associado ao NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*), onde encontra uma diversidade de materiais, em particular, cerca de meio milhar de planos de aulas e uma centena *applets*, organizados por temas e níveis, para além de apontadores para um enorme conjunto de recursos *on-line*, noutros *sites* da rede (figura 2).

Em seguida, sugerem-se alguns exemplos em Álgebra, destinados a apoiar a resolução de equações, através do modelo das balanças:

Pan Balance Shapes: apresenta uma balança de dois pratos e um conjunto de 4 formas diferentes que podem ser deslocadas para cada um dos pratos, gerando (des)equilíbrios, de acordo com a relação entre os *pesos* de cada uma das formas que desconhecemos. Quando os pratos atingem o equilíbrio, a relação de equivalência surge registada na tabela. Se seleccionarmos o botão *Count Items*, ele agrupa as formas iguais, *modelando* a manipulação algébrica, no que respeita a agrupar os termos semelhantes.

Pan Balance Numbers: apresenta uma balança de dois pratos, em cada um dos quais podemos introduzir uma expressão numérica. Quando a balança se encontra em equilíbrio, estamos perante expressões equivalentes, que aparecem de imediato registadas na janela lateral *Balanced equations*.

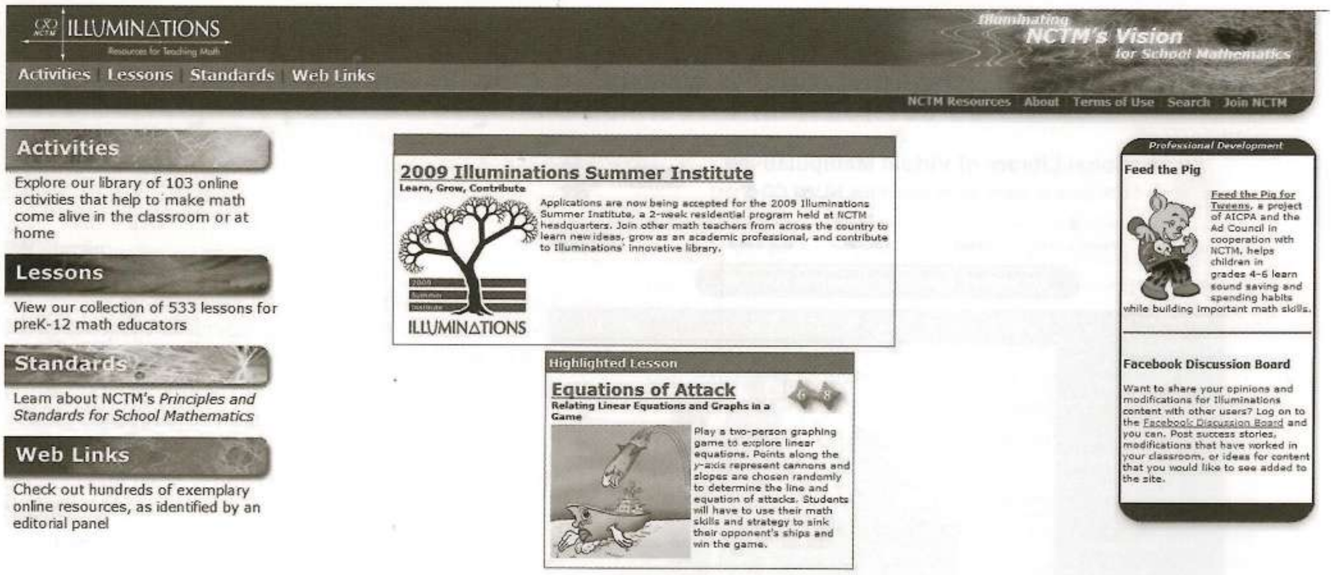


Figura 2

Pan Balance — Expressions: apresenta uma balança de pratos, em cada um dos quais podemos escrever expressões numéricas ou algébricas (onde figura uma incógnita — x). Ao mesmo tempo, temos acesso a um cursor que manipula directamente o valor da variável x e que o substitui na expressão, fazendo oscilar os pratos da balança para um e outro lado, de acordo com o seu *peso* (valor). Simultaneamente, visualizamos um gráfico representando as duas relações (funções) definidas pelas expressões em cada um dos pratos e que, ao manipular o referido cursor, deixam um rasto no écran, permitindo visualizar a solução como o ponto de intersecção dos 2 gráficos.

Nota: o trabalho com este conjunto de *applets* (*Balance*) é importante para *desfazer* a concepção errada de que o sinal de igual significa uma operação (ou que a sua presença implica a produção de um resultado), em vez de indicar a existência de uma relação que traduz uma equivalência. Nestes, como noutros, *applets*, as *instructions* e *explorations* sugerem indicações de funcionamento e abordagens que permitem aproveitar plenamente as potencialidades dos programas, com vista a perseguir os objectivos de aprendizagem com que foram desenvolvidos.

Referências

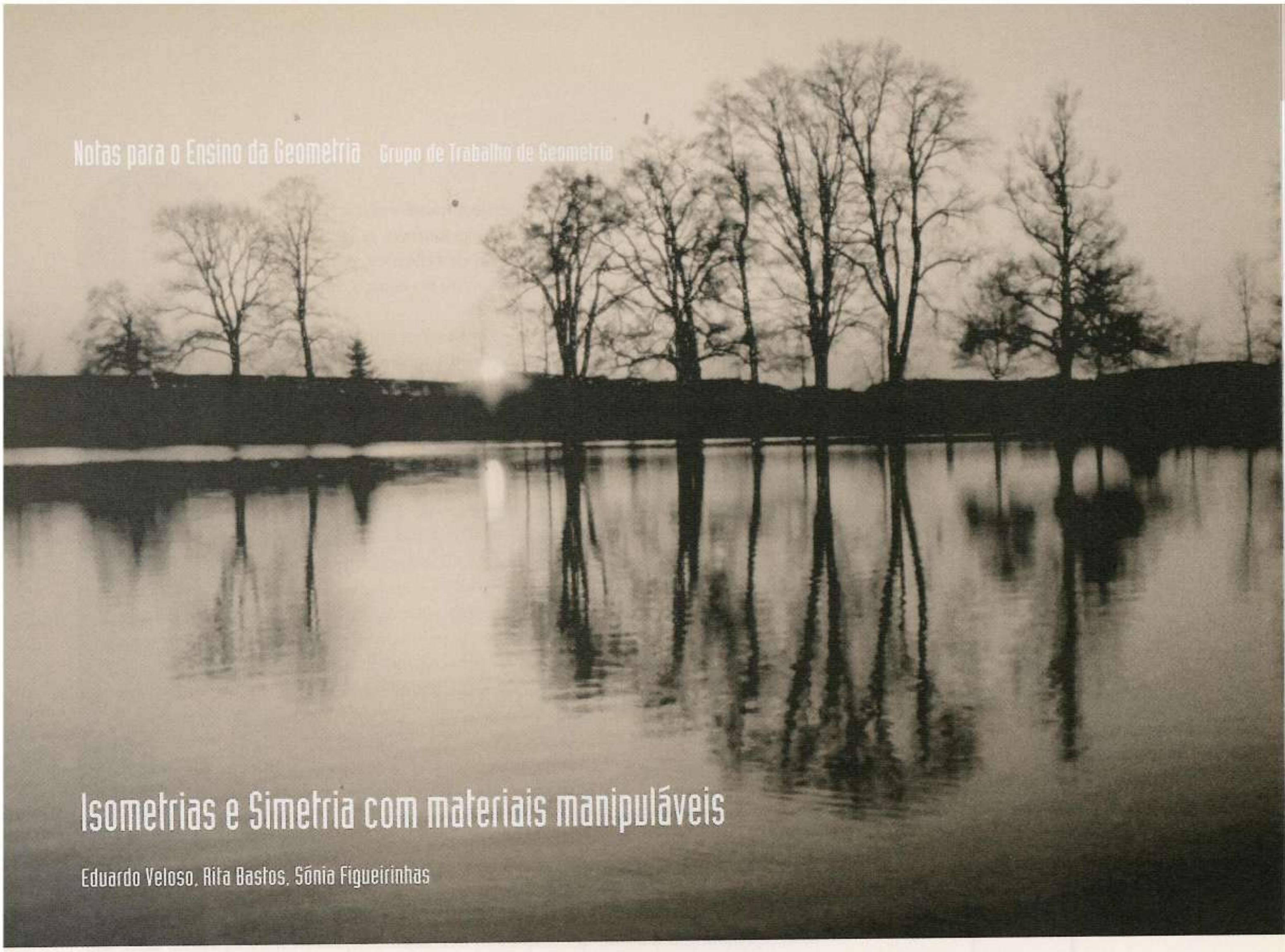
Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti O. (2006). The role and uses of Technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez & P. Boero (Orgs), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present and future* (pp. 237–273). Roterdão: Sense.

Hoyles, C. & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. J. Bishop et al. (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 323–349). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM. (Trabalho original publicado em 2000).

Ponte et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico* (consultado em 15 de Outubro de 2008, em `http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf`)

José Duarte



Isometrias e Simetria com materiais manipuláveis

Eduardo Veloso, Rita Bastos, Sónia Figueirinhas

Temos defendido nesta revista que os alunos dos ensinos básico e secundário devem ter experiências diversificadas que impliquem aprendizagens sobre a Geometria e sobre a natureza da própria Geometria e que as situações vividas sejam acompanhadas de actividade matemática de ordem superior. Para isso, podemos recorrer às ferramentas tecnológicas disponíveis, nomeadamente programas de geometria dinâmica e *applets*, que consideramos decisivos no sentido de proporcionar a todos — professores e alunos — imagens e manipulações a que, noutros tempos, só os grandes geómetras tinham acesso pelo grande poder da sua imaginação. Mas não só: é preciso proporcionar também algumas experiências com materiais manipuláveis.

Os recursos para o ensino da geometria, em geral, e das transformações geométricas e simetria em particular, devem ser adequados ao nível de escolaridade e à idade dos alunos. Por exemplo, nos primeiros anos pode não ser adequado que os alunos usem programas de geometria dinâmica, mas é de toda a conveniência que se habituem a visualizar e manipular imagens em *applets* como os que existem no sítio do Instituto Freudhental[1] ou no portal do NCTM[2]. Os materiais manipuláveis devem ser utilizados sempre, em complemento daqueles, mas cada vez com maior exigência. Há que ter alguns cuidados para que a experiência dos alunos não se limite a «brincadeiras» com os objectos, mas implique realmente actividade intelectual. Esses cuidados passam necessariamente pela comunicação entre professor e aluno — oral ou escrita — em que o professor se certifica que há raciocínios matemáticos envolvidos na experiência.

Todos os materiais têm potencialidades e limitações, de que o professor deve estar consciente. É sobre isso que nos vamos debruçar neste texto, relativamente a alguns materiais que temos experimentado.

Figura 1A. Reflexão.

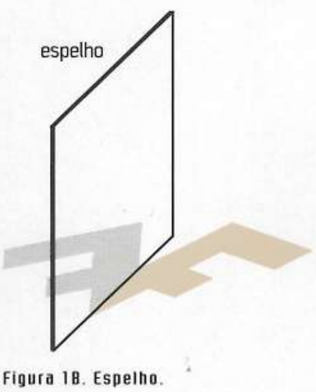


Figura 1B. Espelho.

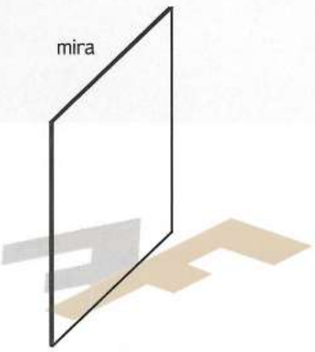


Figura 1C. Mira.

Espelhos e miras

Os espelhos planos modelam fisicamente a transformação reflexão, tal como as miras que são feitas de um material transparente que também reflecte a luz. Como todas as isometrias podem ser obtidas como compostas de reflexões, podemos, com os espelhos, trabalhar todos os tipos de isometria, no plano ou no espaço, muitas rosáceas, frisos e padrões e até as simetrias de alguns poliedros[3].

Os espelhos têm, no entanto, duas limitações importantes:

1 — A de transformar um semi-plano (ou semi-espaço) no semi-plano (ou semi-espaço) complementar, em vez de transformar todo o plano (espaço) nele próprio. As miras resolvem uma parte do problema, embora não seja possível visualizar sempre, de um único ponto de vista, a totalidade de uma figura e da sua transformada. Em muitas situações, temos que observar os dois lados da mira para «ver» as duas partes da figura transformada.

Note-se que, no espelho (figura 1B), parte do *F*, como está do lado de trás do espelho, não é reflectida, como acontece na verdadeira reflexão (figura 1A). Além disso, essa parte da figura fica ocultada pelo espelho. Na mira (figura 1C), esta segunda limitação não existe, porque sendo transparente, podemos ver através da mira a figura completa.

Nas figuras 2A e 2B, estamos a utilizar um espelho e uma mira (respectivamente) para detectar simetrias de reflexão num padrão. Como o espelho tapa parte do padrão, apenas vemos a reflexão e é impossível ver se coincide ou não com a parte escondida do padrão (embora possamos presumir que não, dado o aspecto da parte do padrão que é visível. Na figura 2B, com a mira, é perfeitamente visível a continuação do padrão para o lado de lá da mira, e a reflexão vista na mira, que na fotografia se vê com muita dificuldade, mostrará imediatamente que não estamos em presença de um eixo de simetria.

No caso da figura 3A, se colocarmos um espelho sobre o lado do quadrado a que é tangente a circunferência, no espelho vemos a imagem do quadrado mas fica escondida parte da figura, que não é sujeita à reflexão por causa do espelho ter apenas uma face espelhada, e assim não mostrar a reflexão correctamente. No caso da mira, embora a luz na fotografia não ajude muito, vemos o prolongamento da figura (a circunferência no caso da figura 3C, ou o quadrado no caso da figura 3D) e a reflexão, em qualquer caso o que se vê aproxima-se mais do que a reflexão é na realidade, como transformação de todo o plano.

2 — A segunda limitação é que embora seja sempre possível obter, com os espelhos, a transformada de uma figura pela composta de duas ou três reflexões, posicionando devidamente dois ou três espelhos, não é possível «eliminar do campo visual» a figura intermédia. Por exemplo, não é possível obter, com um livro de espelhos uma rosácea do tipo cn, isto é, só com simetrias de rotação; também não é possível obter, com três espelhos, a imagem de uma figura por uma reflexão deslizante, sem que se veja a imagem pela reflexão.

Figura 2A.

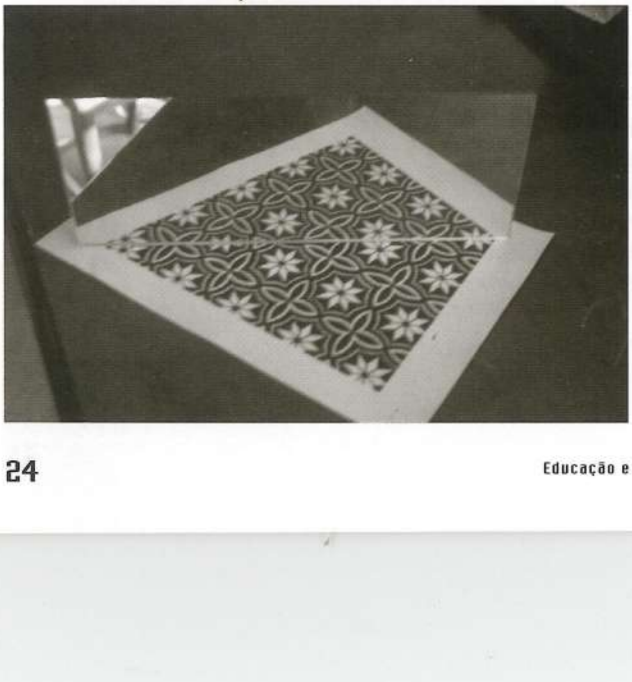
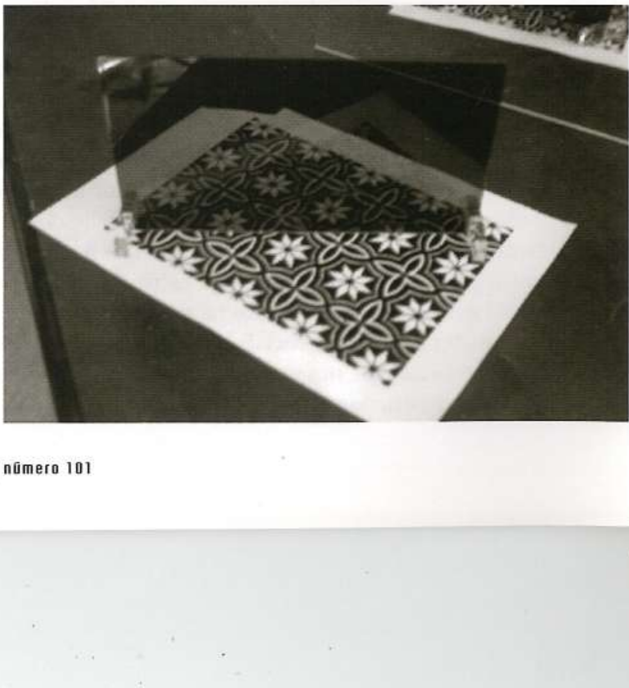


Figura 2B.



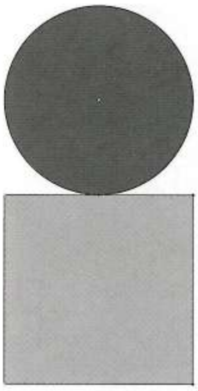


Figura 3A.

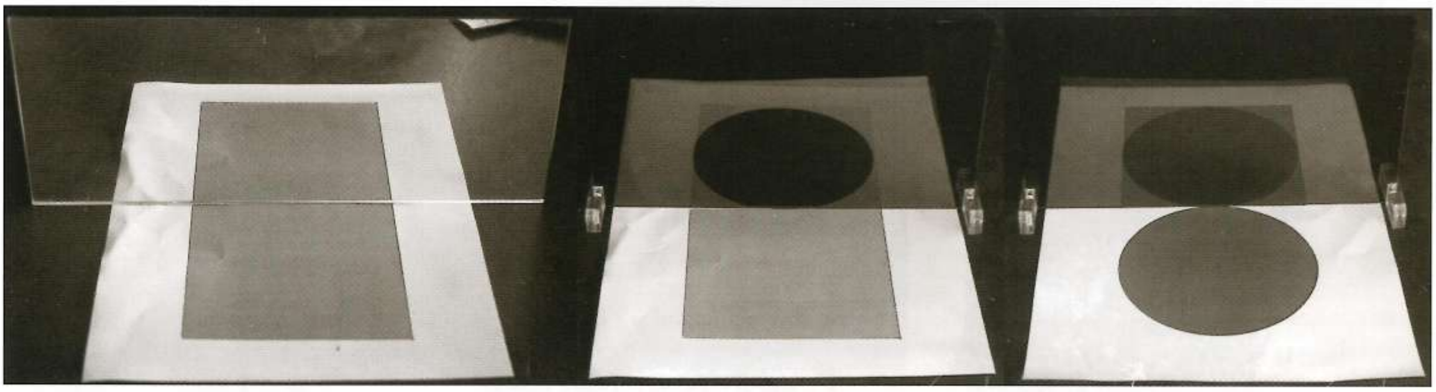


Figura 3B. Figura 3C. Figura 3D.

Na figura 4A temos dois espelhos fazendo um ângulo de 60°. Obtemos 5 imagens da figura que desenhámos entre os dois espelhos. Como se vê, obtemos, no conjunto, uma rosácea d3 (tem como simetrias três reflexões e três rotações) Para modelarmos um c3 teríamos que poder fazer desaparecer as figuras intermédias das rotações (como produtos de duas reflexões), ou seja as figuras 2, 4 e 6. Mas isso não é possível neste tipo de disposição dos espelhos, e portanto apenas podemos, com livros de espelhos e ângulos convenientes dos espelhos, obter rosáceas dn. As figuras 4B e 4C (em que as rectas são apenas indicação dos eixos de reflexão e não fazem parte da rosácea, vemos como com um programa de geometria dinâmica é possível modelar a rosácea d3 e a rosácea c3 (escondendo as figuras convenientes).

Figura 4A.

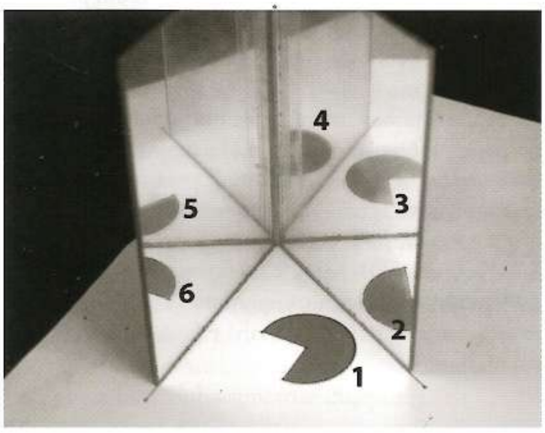


Figura 4B.

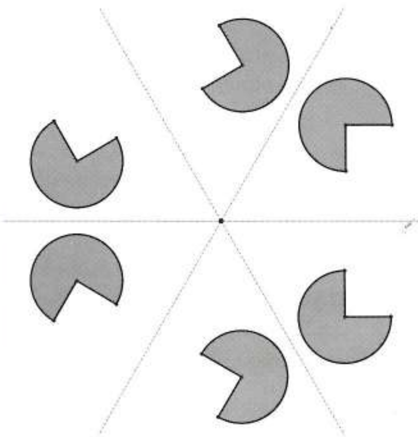


Figura 4C.

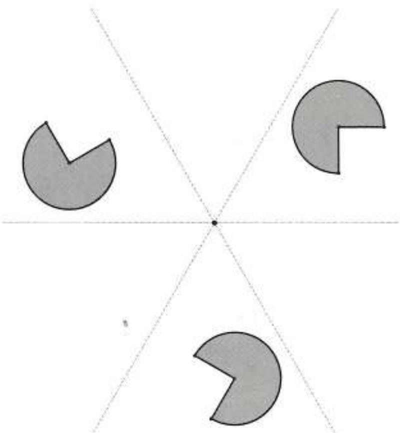



Figura 5A


Figura 5B


Figura 5C


Figura 5D

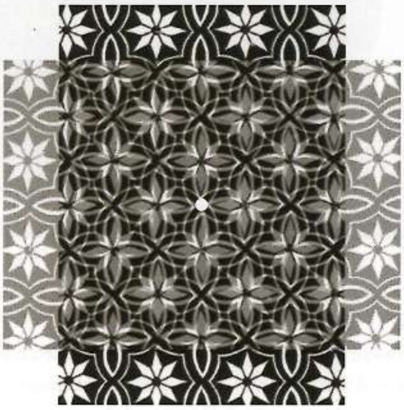


Figura 5E


Figura 5F


Figura 5G

Papel transparente

Com papel transparente, podemos decalcar figuras e «rodar» em torno de um centro, «deslizar» ao longo de um segmento, ou «virar o papel» fazendo coincidir uma determinada recta. São formas de modelar as rotações, translações e reflexões. É um processo muito sugestivo para construir figuras transformadas de outras, pelas isometrias, acessível a todos os alunos, e que proporciona a compreensão de alguns aspectos importantes como, por exemplo, a preservação da orientação.

A figura 5A é um exemplo de padrão, e estamos interessados em procurar simetrias de rotação. Fotocopiámos a figura em papel transparente, obtendo a figura 5B. Nas duas figuras sobrepostas (figura 5C), fixámos um ponto (círculo branco), para investigar se é um centro de simetria de rotação. Fixando o ponto com o bico de um lápis, por exemplo, vamos rodando lentamente o papel transparente, à procura de outra sobreposição perfeita das duas figuras, passando pelos 20° (figura 5D), pelos 90° (figura 5E) e pelos 160° (figura 5F), e ainda não encontrámos nenhuma sobreposição perfeita… mas eis que nos 180° (figura 5G) encontramos a primeira coincidência total…ah! é uma meia-volta!

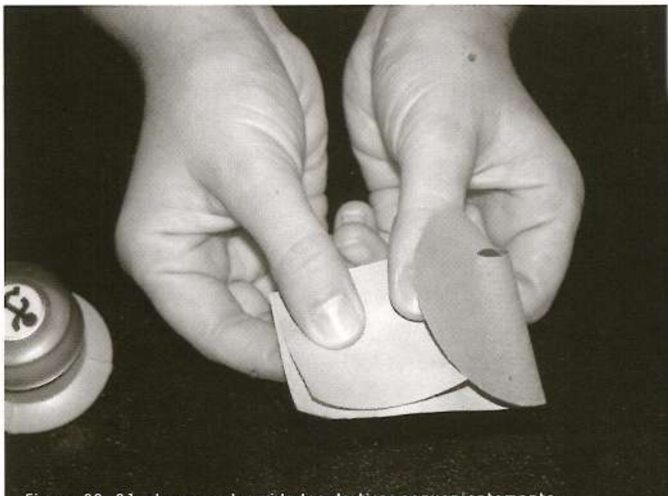


Figura 6A. AJustar as extremidades da tira, convenientemente.

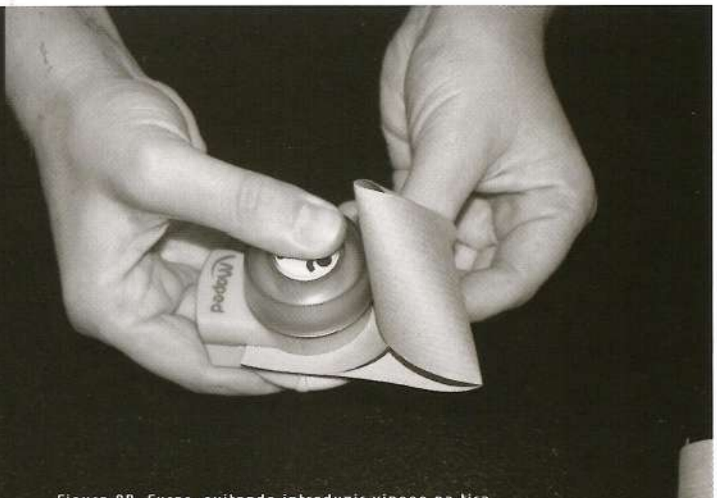


Figura 6B. Furar, evitando introduzir vincos na tira.

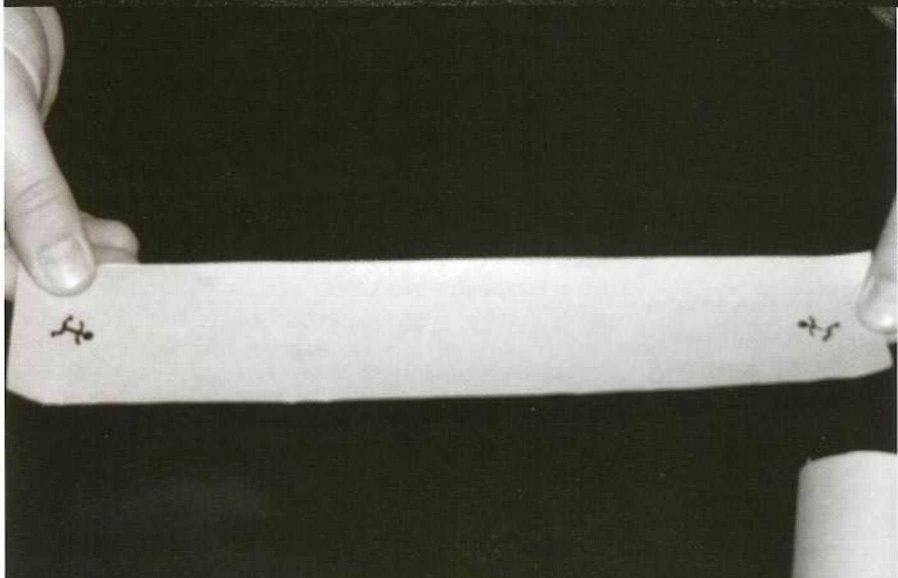


Figura 6C. «Desenrolar», para ver a meia-volta presente.

Dobragens e furos

As dobragens em papel simulam a reflexão, tal como os espelhos. Se utilizarmos furos para representar as figuras, obtemos imagens sugestivas destas e das suas transformadas por uma reflexão ou pela composta de várias reflexões, sem algumas das limitações dos espelhos: (1) podemos intervir dos dois lados do eixo (o vinco da dobra), modelando assim a transformação de todo o plano em todo o plano; (2) com alguns artifícios podemos furar de modo a evitar as imagens intermédias em composições de reflexões (ver figuras 6A, B e C).[4]

Reflectir sobre o número e posição das dobras feitas permite chegar a algumas conclusões sobre a composta de duas ou mais reflexões. Ao estabelecer paralelismos entre esta abordagem e outras, equivalentes, podem criar-se hábitos interessantes, quer de resolução de problemas quer de raciocínios matematicamente muito poderosos.

Nas primeiras tarefas, e enquanto este assunto não estiver bem dominado, desaconselha-se o uso de furos simétricos: a simetria do motivo pode ser confundida com a transformação presente e o facto de haver dobragens diferentes que conduzem ao mesmo resultado pode fazer levantar falsas hipóteses, sobretudo se não forem feitas muitas experiências, em que o furo tenha simetrias diferentes.

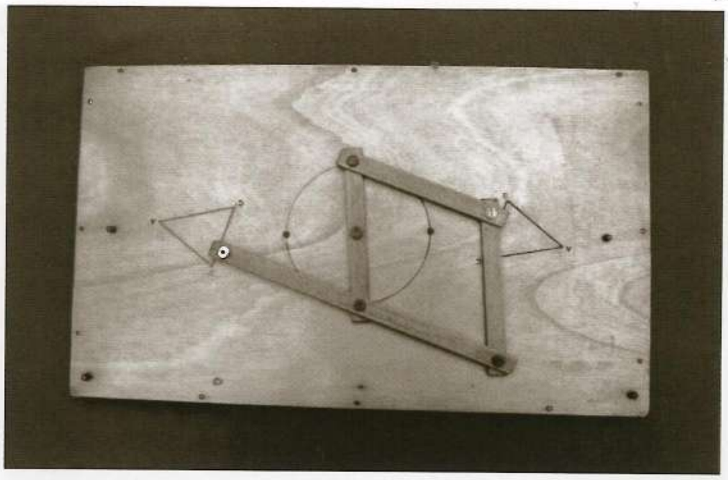


Figura 7A

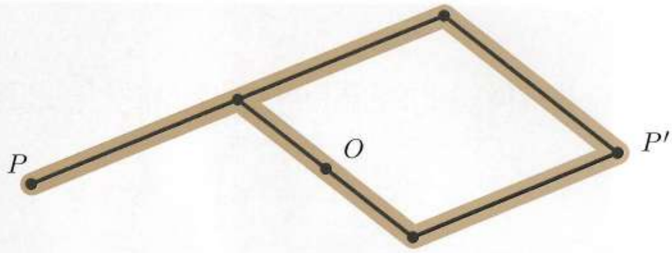


Figura 7B

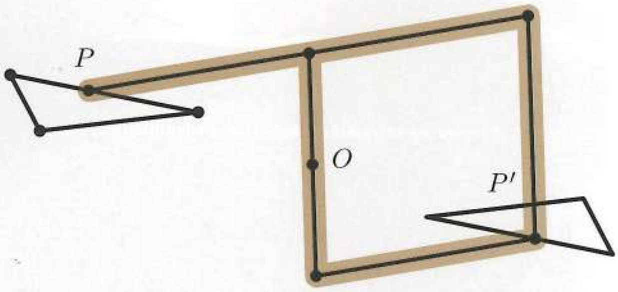


Figura 7C

Mecanismos

A utilização de mecanismos para construir representações de objectos geométricos faz parte da História da Geometria e fornece uma compreensão desses objectos de um ponto de vista diferente, ou seja, uma perspectiva que complementa outras interpretações através de outras formas de representação.

Também as transformações geométricas podem ser modeladas por mecanismos, embora com limitações ainda maiores que as dos materiais anteriores, na medida em que cada mecanismo transforma geralmente uma pequena porção de plano numa outra porção de plano, muitas vezes disjunta da primeira.

O exemplo mais conhecido de mecanismo para modelar uma transformação geométrica é, talvez, o pantógrafo, mas há mecanismos para simular todas as isometrias e outras transformações conhecidas. A tarefa de construir um mecanismo, física e virtualmente, é uma situação que dá origem à formulação e resolução de problemas, dos mais diversos, proporcionando assim óptimas experiências de aprendizagem.

A título de exemplo, apresentamos nas figuras 7A, 7B e 7C imagens de um mecanismo físico que modela a meia volta[5], ou seja uma rotação de 180°, e um modelo virtual construído em *Geometer's Sketchpad*. O ponto O é o centro da meia volta e está fixo. Quando o ponto P percorre uma linha — um triângulo, no exemplo — o ponto P', que tem um instrumento de escrita, regista o transformado dessa linha pela meia volta de centro em O.

Notas

1 `http://www.fi.uu.nl/en/`

2 `http://www.nctm.org/`

3 Sobre simetria dos poliedros ver exposição e brochura *Simetria — Jogos de Espelhos* no sítio da Associação Atractor:

`http://www.atractor.pt`

4 Ver *O ritmo das formas*, de Paolo Bellingeri, Maria Dedò, Simonetta di Sieno e Cristina Turrini, traduzido e editado em Portugal pela Associação Atractor; ver também o *kit* de actividades editado pela APM com o título *Visualização e Simetria*.

5 Esta fotografia e o mecanismo de meia volta pertencem à colecção organizada pelo *Laboratorio di Matematica del Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica* em colaboração com o CICAIA — *Centro Interdipartimentale di Calcolo Automatico e Informatica Applicata dell'Università degli studi di Modena e Reggio Emilia*, sob a coordenação de Maria G. Bartolini Bussi. Ver

`http://archivioweb.unimore.it/theatrum/macchine.`

Eduardo Veloso, Rita Bastos, Sónia Figueirinhas
Grupo de Trabalho de Geometria da APM

O professor e o desenvolvimento curricular

Os 13 artigos que compõem o livro *O professor e o desenvolvimento curricular* constituem um convite ao leitor interessado em conhecer e refletir sobre experiências e investigações realizadas em salas de aula de Matemática. Trata-se de uma obra que revela o trabalho colaborativo do GTI e que tem como eixo articulador o currículo de Matemática e a sua gestão em sala de aula.

Três dos artigos, produzidos por pesquisadores académicos, trazem os conceitos básicos que subsidiarão as investigações dos demais autores. O primeiro deles, de João Pedro da Ponte, *Gestão Curricular de Matemática* discute a criação de tarefas e a estratégia posta em prática pelo professor, bem como propõe a distinção entre «ensino direto» — que traz subjacente a ideia de transmissão — e o «ensino-aprendizagem exploratório», no qual o professor não explica tudo e deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem. No entender do autor, a gestão curricular exige experiência profissional e capacidade analítica e reflexiva do professor — elementos que podem ser potencializados com o trabalho colaborativo.

No segundo texto, *O currículo de Matemática do ensino básico sob o olhar da competência Matemática*, as autoras Lurdes Serrazina e Isolina Oliveira discutem alguns significados da literacia matemática, entendendo que ser literato em Matemática significa ser bem informado matematicamente. Nesse sentido, há uma aproximação desse conceito com o de competência matemática tal como consta no *Currículo Nacional* em Portugal. Defendem, ainda, a necessidade de que a escola se transforme em uma organização de aprendizagem como condição para que o professor possa ter um olhar mais amplo para o currículo de Matemática e desenvolver a competência matemática em seus alunos.

No terceiro texto, *O papel do professor no currículo de Matemática*, Ana Paula Canavarro e João Pedro da Ponte, partindo da análise de três relatos de experiência docente, promovem a discussão sobre currículo e o papel do professor como protagonista no desenvolvimento curricular. Defendem que, apesar de o currículo oficial ser prescrito, o professor tem uma certa margem de autonomia para adequá-lo às suas necessidades e às de seus alunos.

Os dez textos restantes são de professores-pesquisadores que investigam a própria prática — ora individualmente, ora contando com um colega para ser parceiro. Destacam-se, inicialmente, os textos de Ana Maria Jesus e Elvira Ferreira, que atuam nos primeiros anos e discutem o conceito de divisão. Ambas acompanharam seus alunos e investigaram — sem contar com parcerias — como esses alunos construíram o conceito de divisão. Enquanto Ana Maria Jesus, no texto *Construir o conceito de divisão, resolvendo problemas: um estudo de caso*, centra-se na análise do caso de Filipe, Elvira, no trabalho *Um percurso na aprendizagem do conceito de divisão no 1° ciclo*, acompanhou seus alunos ao longo dos quatro anos, analisando como estes se apropriaram do conceito de divisão e complementou sua investigação aplicando cinco problemas a esses alunos quando estavam no 5° ano. Seu relato aponta que, desde cedo, os alunos podem resolver divisão como medida.

Outra autora que também atuou sozinha foi Isabel Paula. Em seu texto *Utilização de portefólios como processo integrador da aprendizagem e da avaliação em Matemática*, ela relata sua pesquisa desenvolvida em sua turma de 5° ano, analisando as interações sociais desenvolvidas na elaboração, reflexão e comunicação dos *portefólios*.

Os demais autores contaram com um colega parceiro para as suas investigações. No entanto, essa parceria foi diversificada. Em algumas duplas, a atividade foi preparada em parceria e cada docente a aplicou em sua turma, procedendo, posteriormente, à análise conjunta. Esse foi o caso de Irene Segurado e Olívia Sousa que, no texto *Estatística no ensino básico*, analisam a investigação que realizaram em suas respectivas turmas de 5° ano, numa tarefa (sopro de clipes) que possibilitou uma riquíssima discussão sobre conceitos básicos de estatística. Como um dos resultados, destacam o envolvimento e a aprendizagem dos alunos com a experiência realizada. Outra dupla que procedeu de forma análoga foi Cláudia Costa Nunes e Maria Sofia Tomaz Alves, cujo trabalho é relatado no texto *Desenvolvendo o pensamento algébrico com actividades de investigação*. Chama-nos a atenção a forma como elas deram retorno aos alunos dos relatórios produzidos: o seu desempenho diante da tarefa de investigação foi avaliado por meio da construção de uma grade de descritores.

Outra forma de parceria foi experimentada por três duplas que realizaram um trabalho colaborativo, de forma que um docente participava da aula do outro. Numa turma de 8° ano, Fernanda Perez trabalhou como professora e Manuela Diogo como observadora, explorando o tema funções, mas com vistas aos processos reflexivos dos alunos sobre suas aprendizagens matemáticas. O trabalho final consta do texto *Aprender Matemática reflectindo*. Outra dupla foi a de Alexandra Rocha e Cristina Natália Fonseca, autoras do texto *Dis-*

cutir Matemática: um contributo para a aprendizagem*. Atuaram numa turma de 10° ano, sob responsabilidade de Cristina. A ênfase do trabalho foi nos processos de justificação/prova com atividades de investigação sobre geometria e funções. E, finalmente, Helena Rocha e Manuela Pires, no texto *Programação e aprendizagens matemáticas*, relatam seu trabalho numa turma de 11° ano, da qual Manuela era a docente, na realização de um projeto que previa a criação ou adaptação de um programa para calculadora gráfica.

Presente em dois trabalhos, um outro tipo de parceria, embora contando com parceiros, determinou apenas um docente como responsável pela produção do texto final de investigação. O primeiro deles é o de Renata Carvalho, *Educação para a autonomia na aprendizagem da Matemática*, no qual a autora revela como atuou de forma colaborativa com Mafalda, uma colega da escola, na seleção de tarefas com vistas ao desenvolvimento da autonomia do aluno, mas realizou sozinha a investigação de sua prática. E, finalmente, o trabalho *Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática*, de João Almiro, trata de uma investigação para a qual o autor contou com dois colegas que observaram suas aulas num 8° ano, durante a exploração do conceito de semelhança, com o uso de materiais didáticos; os três compartilharam reflexões sobre as aulas, mas a sistematização do trabalho final ficou a cargo de João.

Ao longo do livro evidenciam-se os contributos do trabalho colaborativo e a riqueza da investigação sobre a própria prática.

O livro, sem dúvida, constitui fonte de referência para pesquisadores, formadores de professores e docentes que atuam no ensino básico.

Adair Mendes Nacarato
Universidade São Francisco (USF). Itatiba/SP.

O professor e o desenvolvimento curricular

Editora: Associação de Professores de Matemática, 2005, 392 pp.
ISBN 972-8768-16-8
Preço PVP: 21,00 €

Quadrados sobrepostos

Se pegarmos em dois quadrados iguais, é possível, sobrepondo-os, fazer uma figura onde estão três quadrados: os dois iniciais e mais outro.

Qual é o máximo de quadrados que se pode obter a partir de três quadrados iguais?

E com quatro quadrados iguais?

E...?

(Respostas até 25 de Abril para zepaulo@armail.pt)

O máximo do mínimo, e vice-versa

O problema proposto no número 99 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

— *Desenhem um triângulo com um lado a medir 53 cm, outro 28 cm e o terceiro à vossa escolha – pediu o professor.*

— *Vou construir o meu triângulo de modo que o menor ângulo seja o máximo possível — disse a Helena.*

— *Pois eu – acrescentou o Ricardo, — vou fazer ao contrário: o maior ângulo vai ter o menor valor que se consegue.*

Quanto medem os terceiros lados dos triângulos da Helena e do Ricardo?

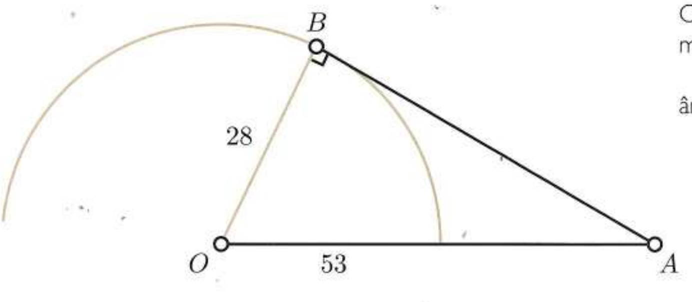
Este problema não entusiasmou os nossos leitores, nem mesmo os que gostam de trabalhar com programas de geometria dinâmica. Provavelmente foi considerado muito difícil. É que só nos chegaram duas respostas, enviadas por Graça Braga da Cruz (Ovar) e Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

A Graça aplicando o Teorema de Carnot, definiu as funções que dão os cosenos de cada um dos ângulos do triângulo em função das medidas dos lados ($28, 53$ e x). A seguir, chegou à solução por métodos gráficos, acrescentando finalmente uma impecável (mas complexa) resolução analítica.

O Pedrosa Santos, no entanto encontrou as soluções fazendo apenas considerações geométricas bastante simples. Vejamos como.

Triângulo da Helena

Sabemos que, num triângulo, ao menor lado opõe-se o menor ângulo. Sejam $[AO]$ o lado que mede 53 cm e $[OB]$ o de 28. Se admitirmos que o lado $[AO]$ está fixo, o ponto B terá de ficar numa circunferência de centro em O e raio 28 cm.



Excepto quando B está muito perto do lado $[OA]$, o menor lado é $[OB]$ e portanto o menor ângulo é o de vértice em A. Ora ele terá o seu valor máximo quando $[AB]$ for tangente à circunferência descrita pelo ponto B, ou seja, será máximo quando o triângulo for rectângulo em B.

O terceiro lado medirá:

$$\overline{AB} = \sqrt{53^2 - 28^2} = 45 \text{ cm}.$$

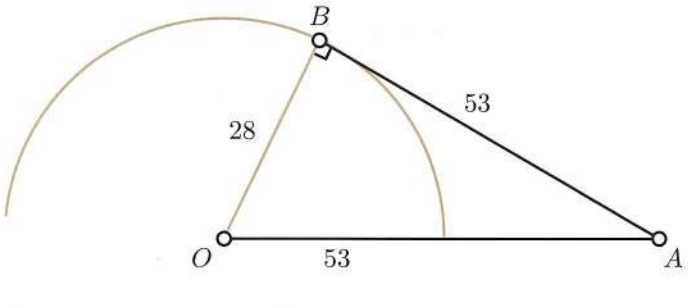
Por curiosidade, podemos determinar o valor máximo do menor ângulo.

$$A = \frac{28}{45}, \text{ logo } A \approx 31°53'27''.$$

Triângulo do Ricardo

Sabemos que, num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

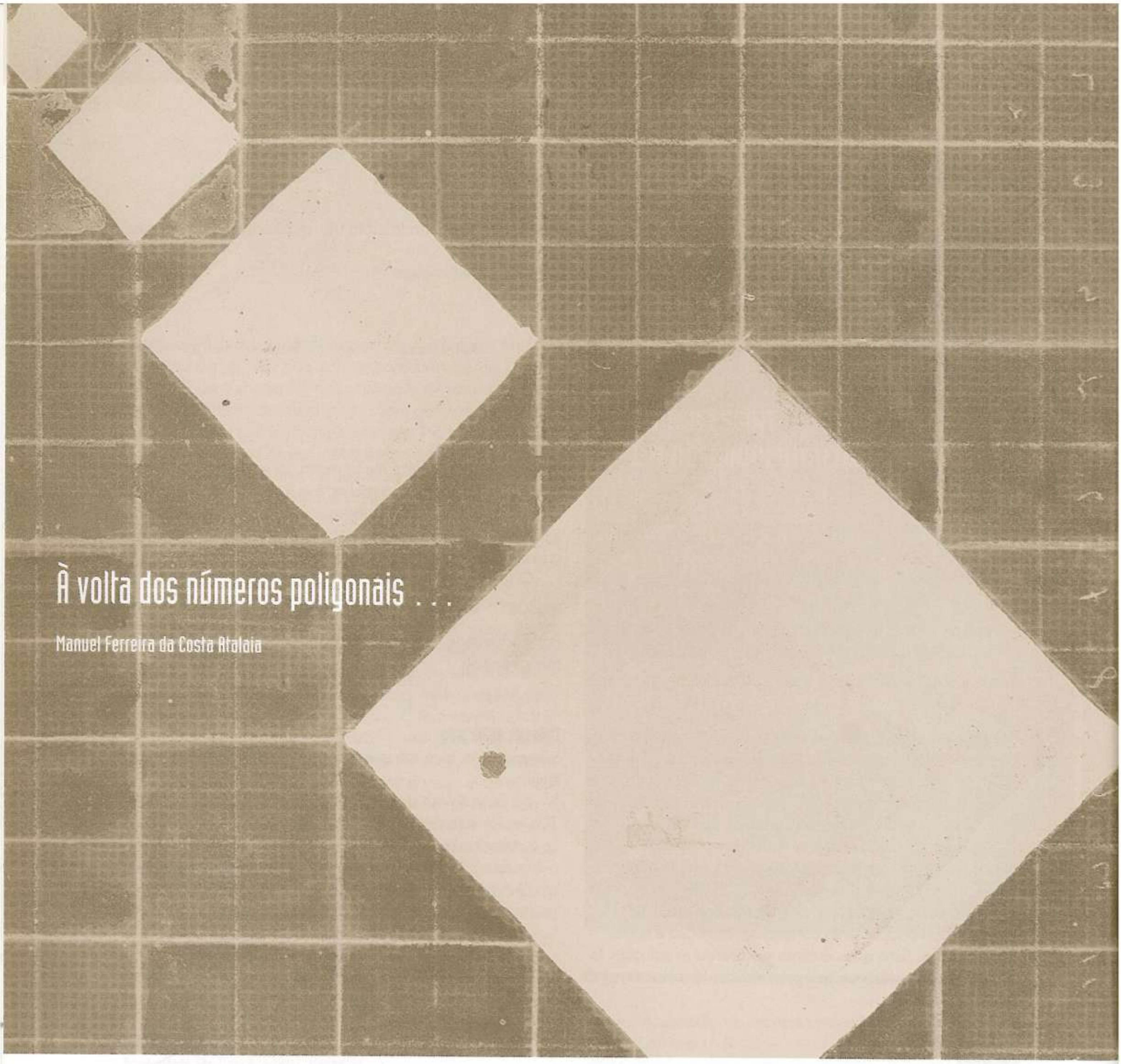
Na posição em que, no triângulo anterior, ficou o ponto B, o maior lado é $[OA]$ e o maior ângulo é de vértice em B. Se B rodar no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, o ângulo em B vai diminuindo até se tornar igual ao ângulo em O. A partir daí, o maior ângulo passa a ser o O, que começa a aumentar.



Conclusão, o maior ângulo (que são dois...) tem o seu valor mínimo quando o triângulo é isósceles e $[AB]$ mede 53 cm.

Podemos também determinar o valor mínimo do maior ângulo.

$$B = \frac{53}{14}, \text{ logo } B \approx 75°12'12''.$$



À volta dos números poligonais . . .

Manuel Ferreira da Costa Atalaia

Os números poligonais são uma matéria atraente e acessível para alunos do Ensino Secundário. Como tal, podem ser úteis como motivação ao estudo do tema sucessões (em especial progressões aritméticas) permitindo, também, uma boa aproximação a conceitos e técnicas importantes na matemática, como por exemplo, o método recursivo, o método da indução finita e o método das diferenças finitas.

Os números poligonais surpreendem não só pela simplicidade inicial, regularidades e vastas propriedades como também pela carga histórica. Fazem-nos recuar dois milénios e meio, à célebre Escola Pitagórica, (daí também se chamarem números pitagóricos) onde os Gregos, privilegiando a Geometria e a Lógica, associaram formas geométricas a números obtendo representações visuais de sequências numéricas, propriedades e relações entre elas. Basicamente os números poligonais baseiam-se na consideração de uma sequência de pontos sobre os lados de um polígono regular, do seguinte modo:

- o primeiro termo da sequência é sempre igual a 1 (um ponto);
- o segundo termo é igual a k pontos, sendo k o número de vértices do polígono em causa;
- o termo de ordem n é igual ao termo anterior com o acréscimo de um ponto nos dois lados comuns aos vários polígonos e colocação doutros pontos nos restantes lados de modo que todos os lados do polígono fiquem sempre com o mesmo número de pontos.

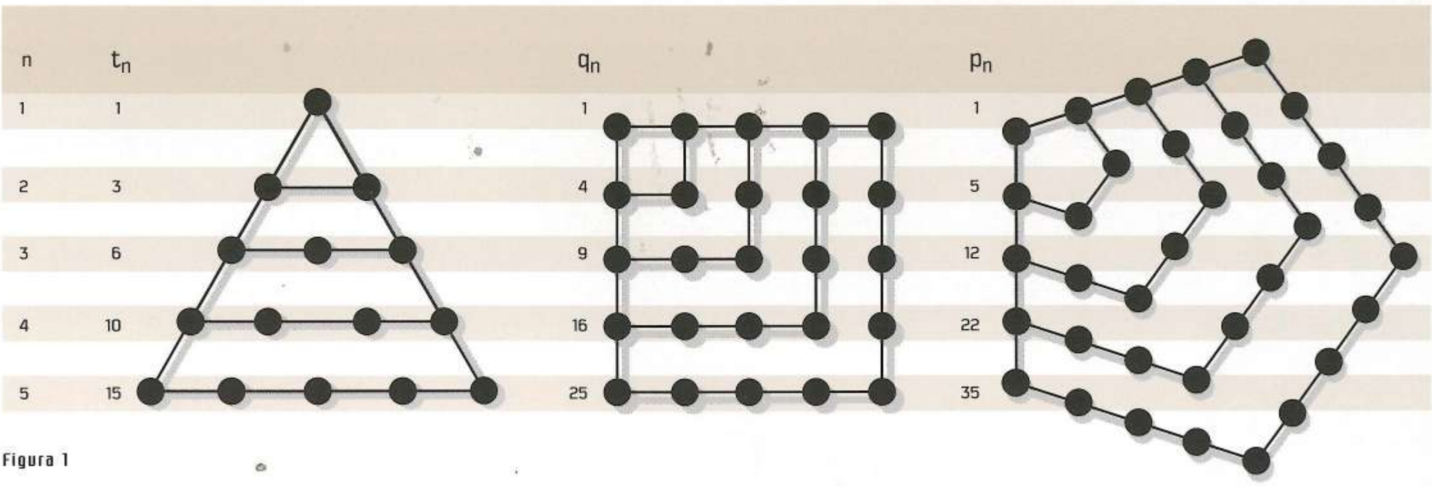


Figura 1

Na figura 1 exemplificam-se os casos correspondentes aos números triangulares, quadrados e pentagonais.

Dedução das fórmulas de recorrência e do termo geral

Para os *números triangulares* constatamos que a fórmula de recorrência é $t_1 = 1 \wedge t_n = t_{n-1} + n$, (para $n > 1$).

Nesta sucessão cada termo de ordem n é a soma de todos os naturais até n (inclusive). Portanto $t_n = S_n$, em que S_n é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética de razão 1 e primeiro termo igual a 1.

Assim:

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{1+n}{2} \times n = \frac{n^2+n}{2},$$

é o termo geral dos números triangulares.

Para os *números quadrados* é óbvio que o termo geral é $q_n = n^2$.

Como

$$q_n - q_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = \\ = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1,$$

podemos escrever a correspondente fórmula de recorrência para os números quadrados:

$$q_1 = 1 \wedge q_n = q_{n-1} + 2n - 1, \quad (n > 1).$$

A partir deste momento podemos lançar a conjectura de que o termo geral de uma sucessão de números poligonais é dado por um polinómio de segundo grau em n. Um trabalho mais aprofundado confirmaria que esta conjectura é verdadeira. (De facto as segundas diferenças entre termos consecutivos da sucessão de quaisquer números poligonais têm sempre um valor constante: nos números triangulares igual a 1, nos números quadrados igual a 2, nos números pentagonais igual a 3 e assim sucessivamente).

Vejamos, por exemplo, como seria o termo geral para os números pentagonais. De acordo com a nossa conjectura, qualquer termo geral de números poligonais será da forma $f(n) = an^2 + bn + c$.

Facilmente determinamos os coeficientes a, b e c, pois sabemos que $p(1) = 1$, $p(2) = 5$ e $p(3) = 12$.

Assim, obtemos o sistema :

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 5 = 4a + 2b + c \\ 12 = 9a + 3b + c \end{cases}$$

que, resolvido, fornece a solução $a = 3/2$, $b = -1/2$ e $c = 0$. Deste modo, o termo geral da sucessão dos *números pentagonais* é

$$p_n = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

Podemos, agora, tentar generalizar o anterior resultado para uma qualquer sucessão de números poligonais (de polígonos de k lados, sendo $k \geq 3$). Por observação das figuras anteriores somos induzidos a escrever:

$$u_n - u_{n-1} = k(n-1)\text{-}[2(n-1) - 1],$$

em que $k(n-1)$ representa o total de pontos no polígono de k lados, de ordem n; e a expressão $2(n-1) - 1$ representa o número de pontos nos dois lados iniciais no polígono de k lados da ordem anterior $(n-1)$, em que se subtrai 1 porque esses dois lados têm um ponto comum.

Vem então:

$$u_n - u_{n-1} = k(n-1)\text{-}[2(n-) - 1] = \\ = k_n - k\text{-}(2n - 2 - 1) = kn - k\text{-}2n + 3 = \\ = (k-2)n - k + 3$$

Voltando à conjectura formulada, $f(n) = an^2 + bn + c$ é o termo geral duma sucessão de números poligonais, e, o termo antecedente a n será

$$f(n-1) = a(n-1)^2 + b(n-1) + c = \\ = an^2 + (b - 2a)n + a - b + c.$$

Vem então,

$$f(n)\text{-}f(n-1) = an^2 + bn + c\text{-}[an^2 + (b-2a)n + \\ + a - b + c] = 2an - a + b.$$

Identificando agora esta expressão com a de $u_n - u_{n-1}$ vem $2an - a + b = (k-2)n - k + 3$, donde $2a = (k-2)$ e $-a + b = -k + 3$, resultando $a = (k-2)/2$ e,

$$b = -k + 3 + a = -k + 3 + \frac{k-2}{2} = -\frac{k+4}{2}.$$

Finalmente, substituindo atrás, obtemos a fórmula geral de qualquer número poligonal de k lados:

$$f(k,n) = \frac{(k-2)n^2 + (4-k)n}{2} \quad (k \geq 3, n \in \mathbb{N}).$$

Manuel Ferreira da Costa Atalaia

Escola Secundária de Jácome Ratton

DESCOBRE O TEU UNIVERSO

ANO INTERNACIONAL DA ASTRONOMIA 2009

Ano Internacional da Astronomia 2009: «Descobre o teu Universo» como Galileu descobriu.

João Fernandes

SIDEREVS
NVNCIVS
MAGNA, LONGEQVE ADMIRABILIA
Spectacula pandens, suspiciendaque proponens
vnicuique, præsertim verò
PHILOSOPHIS, atq; ASTRONOMIS, quæ à
GALILEO GALILEO
PATRITIO FLORENTINO
Patauini Gymnasij Publico Mathematico
PERSPICILLI
Nuper à se reperti beneficio sunt obseruata in LVNÆ FACIE, FIXIS INNVMERIS, LACTEO CIRCVLO, STELLIS NEBVLOSIS,
Apprime verò in
QVATVOR PLANETIS
Circa IOVIS Stellam disparibus interuallis, atque periodis, celeritate mirabili circumuolutis; quos, nemini in hanc vsque diem cognitos, nouissimè Author deprehendit primus; atque
MEDICEA SIDERA
NVNCVPANDOS DECREVIT.

VENETIIS, Apud Thomam Baglionum. M D C X.
Superiorum Permissu, & Priuilegio.

Matemática e Astronomia no AIA2009

A APM associou-se às celebrações do Ano Internacional da Astronomia 2009 [AIA2009] decretado pela ONU em 2007, decidindo que 2009 seria também o ano de Matemática e Astronomia.

A redacção da revista Educação e Matemática decidiu criar uma secção dedicada ao tema. Deixamos o desafio aos leitores para que nos enviem artigos, notícias, relatos de experiências, que possam ser incluídos nesta secção.

Em Março de 1610, o matemático, físico e astrónomo italiano Galileu Galilei, publicou um livro denominado «Mensageiro Celeste» — *Sidereus Nuncius* (abaixo o frontispício)

Nessa obra, de pouco mais de seis dezenas de páginas, Galileu explica o funcionamento do telescópio e dá conta das observações que com ele conseguiu fazer, nomeadamente, as montanhas e crateras na Lua, as estrelas da Via Láctea e os quatro (maiores) satélites de Júpiter. Continuando as observações telescópicas já após a publicação do livro, Galileu pode ainda observar os anéis de Saturno (bem que não os tenha reconhecido como tal), as fases de Vénus e as manchas solares. O conjunto destas observações, com auxílio de um artefacto — o telescópio — então apenas usado para observações terrestres, veio alterar completamente a visão do Universo. Antes de mais porque a ampliação permitiu a observação de astros até então desconhecidos. E, por outro lado, algumas das observações vieram colocar em causa a visão aristotélica do mesmo Universo. Afinal, a Lua não era uma esfera perfeita, estando carregada de «irregularidades» e «imperfeições» (com as suas montanhas e crateras); a Terra não era o único planeta dotado de satélites naturais, já que Júpiter tinha (pelo menos) quatro; e talvez mais importante de tudo, a observação das fases de Vénus permitiu concluir que este planeta orbitava em torno do Sol e não da Terra. O procedimento usado pelo Galileu — observação, análise das observações e conclusões — é também o procedimento do astrónomo de hoje, bem que usando presentemente meios técnicos incomparavelmente melhores do que o telescópio galileano, que tinha uma ampliação de poucas dezenas de vezes. Eis herança de Galileu para as gerações que o sucederam: o telescópio e a capacidade de análise das observações.

É esta herança que se pretende homenagear e celebrar este ano. Assim, a União Astronómica Internacional (UAI) e a UNESCO promovem a organização, em 2009, do Ano Internacional da Astronomia (AIA2009). Esta iniciativa teve como base uma proposta do governo italiano apresentada à UNESCO e que foi aprovada na sua XXXIII Sessão da *General Conference* que decorreu em Paris, em Outubro de 2005. Em 2006, a UAI propôs à Organização das Nações Unidas a declaração do ano de 2009 como Ano Internacional da Astronomia, facto que se veio a confirmar a 20 de Dezembro de 2007 na 62ª Assembleia Geral da ONU (abaixo o logotipo do AIA2009, traduzido em Português).

O Ano Internacional da Astronomia 2009, sobre o lema «Descobre o teu Universo», é uma celebração global da astronomia e da sua contribuição para a sociedade e para a cultura, estimulando o interesse a nível mundial não só na astronomia, mas na ciência em geral, com particular incidência nos jovens.

Movidos por esta celebração da astronomia, estão envolvidos no AIA2009 mais de 230 países na organização das mais variadas actividades. Uma comissão internacional, liderada pelo português Pedro Russo, coordena este esforço à escala planetária desenvolvendo projectos globais tais como «A preservação do céu nocturno» (um projecto que visa chamar a atenção para o problema da poluição luminosa nas cidades) o «Galileoscope» (um grandioso projecto que pretende distribuir 10 milhões de réplicas do telescópio de Galileu por todo o Mundo) ou as «100 horas de Astronomia» (uma sessão de astronomia em contínuo que decorrerá entre 2 e 5 de Abril próximos). Todas as informações relativas à organização internacional podem ser encontradas em `www.astronomy2009.org`.

Em Portugal, a organização do AIA2009 foi assumida pela Sociedade Portuguesa de Astronomia, contando com o apoio da Fundação para a Ciência e Tecnologia, da Agência Nacional Ciência Viva e da Fundação Calouste Gulbenkian. Uma comissão nacional, com sede no Museu da Ciência da Universidade de Coimbra, preparou, durante mais de dois anos, um plano de actividades que está agora em desenvolvimento.

Entre os objectivos traçados para a programação nacional, incluem-se os determinados pela comissão internacional, bem como o propósito de dar a conhecer ao público em geral a astronomia que, também, se faz em Portugal. Entre as actividades previstas destacam-se, entre outras, as palestras e sessões de observação (particularmente em escolas), a realização de exposições e as acções de formação para professores. Será ainda publicada uma tradução em português do livro de Galileu e emitido uma série de selos, num conjunto de muitas outras iniciativas a decorrer em mais de 250 instituições nacionais já associadas ao AIA2009. Todo os detalhes da programação nacional podem ser consultados no sítio oficial `www.astronomia2009.org`.

O Ano Internacional da Astronomia é um convite a todos. Repetindo o lema do AIA2009 ... Descobre o Teu Universo!

João Fernandes
Coordenador para o AIA2009 em Portugal

Um outro olhar sobre definições «equivalentes»

Alguns professores definem o *quadrado* como sendo o quadrilátero que tem quatro *lados congruentes* e quatro *ângulos congruentes* enquanto outros o definem como sendo o quadrilátero que tem quatro *lados congruentes* e quatro *ângulos retos*.

Há alguma diferença entre essas duas definições?

A geometria euclidiana pode ser caracterizada de diversas maneiras. Uma delas é por meio da axiomática de Hilbert que foi apresentada pela primeira vez num curso dado por ele em 1898 e publicado em 1899 no seu livro *Fundamentos da geometria*. Hilbert baseou a sua exposição em três conceitos primitivos (ponto, reta e plano), em três relações fundamentais (incidente, estar entre e congruente) e em cinco grupos de axiomas (axiomas da incidência, axiomas da ordem, axiomas da congruência, axiomas da continuidade e o axioma do paralelismo). Os axiomas estabelecem as ligações entre os conceitos primitivos e as relações fundamentais. Castrucci no seu livro *Fundamentos da geometria, estudo axiomático do plano euclidiano* constrói a geometria euclidiana plana passo a passo, partindo dos axiomas de incidência de Hilbert até chegar nos axiomas da geometria euclidiana. A organização proposta por ele coloca em evidência diferentes tipos de geometria: a *geometria da incidência* que resulta dos axiomas do primeiro grupo de Hilbert e das conseqüências deles decorrentes; a *geometria ordenada* que decorre dos dois primeiros grupos de axiomas de Hilbert e de suas conseqüências; a *geometria absoluta* constituída pelos quatro primeiros grupos de axiomas de Hilbert e de suas conseqüências; e a *geometria euclidiana* que decorre dos cinco grupos de axiomas de Hilbert. O quinto grupo é constituído apenas pelo axioma das paralelas com o seguinte enunciado «por um ponto fora de uma reta passa no *máximo* uma reta paralela à reta dada». Há uma pequena sutileza nesse postulado. Enquanto Euclides estabelece a unicidade da paralela, Hilbert ao usar a palavra «máximo» permite também que não exista a reta paralela por um ponto. A negação do axioma de Hilbert apresenta a seguinte forma «por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada». Esse axioma recebeu o nome de axioma de Bolyai-Lobatchevsky. A geometria que resulta dos 4 primeiros grupos de axiomas de Hilbert e do axioma de Boyai-Lobatchevsky recebe o nome de *geometria hiperbólica*. (Figura 1)

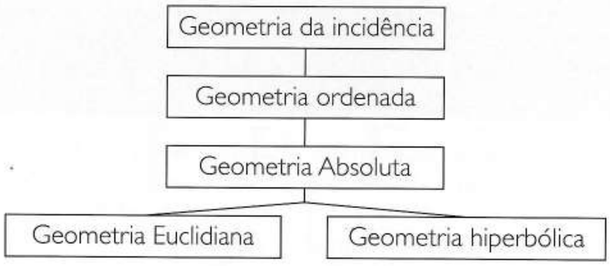


Figura 1.

Na geometria hiperbólica, pode-se provar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° e conseqüentemente que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é menor que 360°. Resulta que, um quadrilátero, na geometria hiperbólica, não pode ter 4 ângulos retos.

Voltando ao início do artigo, a primeira definição de quadrado apresentada é uma definição que não incorpora o postulado das paralelas. Portanto é uma definição válida tanto na geometria euclidiana como na geometria hiperbólica. A segunda definição utiliza o axioma das paralelas sendo um caso particular da primeira definição. Ela se situa apenas no nível da geometria euclidiana. Portanto cada uma das duas definições está inserida num nível diferente de conceitualização[1] da geometria. A primeira se situa na geometria absoluta e a segunda na geometria euclidiana. Da mesma maneira há diferentes definições para o paralelogramo. Podemos definir um paralelogramo como um quadrilátero cujas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios ou como um quadrilátero que tem dois pares de lados paralelos. A primeira definição se situa na geometria absoluta sendo portanto aplicável tanto à geometria euclidiana quanto à geometria hiperbólica e a segunda é uma definição restrita apenas à geometria euclidiana.

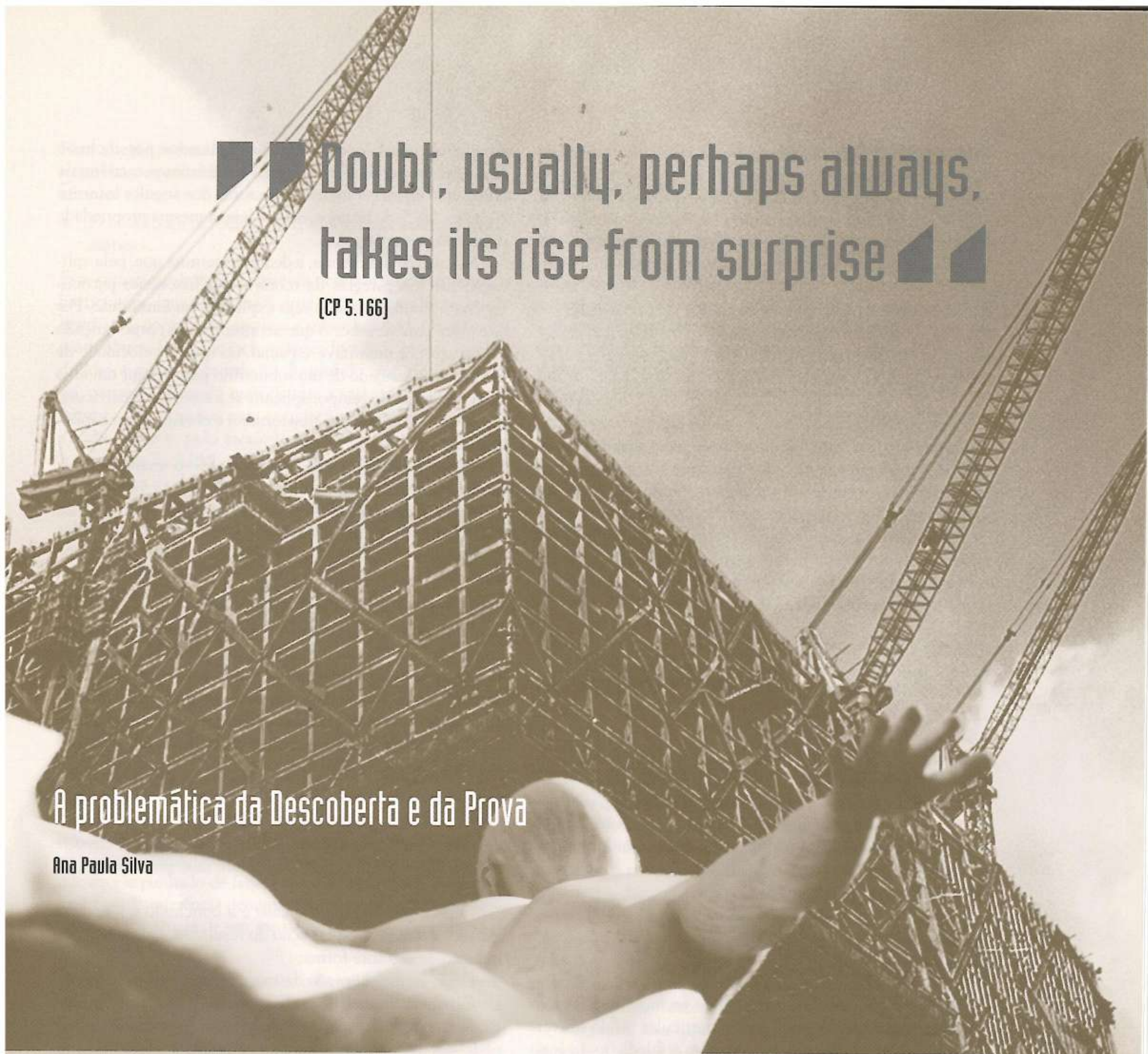
Olhar diferentes definições de um mesmo objeto matemático em geometria é um convite a uma reflexão sobre diferentes níveis de conceitualização em que estão inseridas. Além disso, enxergar a geometria euclidiana ou outras geometrias (geometria afim, geometria projetiva) como uma construção passo a passo a partir da geometria da incidência ou da geometria ordenada contribui na organização dos conhecimentos geométricos do professor.

Nota

1 A palavra conceitualização é referida aos campos conceituais de Vergnaud.

Vincenzo Bongiovanni PUC-SP

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.



"Doubt, usually, perhaps always, takes its rise from surprise"

(CP 5.166)

A problemática da Descoberta e da Prova

Ana Paula Silva

Breves Elementos Biográficos sobre Peirce

Charles Sanders Peirce nasceu em Cambridge, Massachusetts, e tem sido considerado por alguns como o maior filósofo norte-americano[1]. O seu pai, Benjamin Peirce, foi matemático, físico e astrónomo. Peirce deu continuidade ao trabalho de seu pai, sendo matemático, astrónomo, cartógrafo, formou-se, separadamente, em física e em química, em Harvard, em cujo observatório astronómico trabalhou. Desenvolveu algumas pesquisas científicas originais e dedicou-se intensamente à filosofia. Enquanto filósofo, Peirce ocupa uma posição de realce como lógico, filósofo da ciência e da linguagem e como um dos fundadores do pragmatismo.

A obra de Peirce não foi valorizada durante várias décadas. Só foram publicados, em vida, alguns artigos em revistas, nomeadamente na *Popular Science Monthly* e na *Monist*, sendo que a maior parte dos seus trabalhos ficou inédita. Reunidos nos *Collected Papers*, (referidos neste texto por CP) os seus textos apenas começaram a ser publicados em 1931, cerca de dezassete anos após a sua morte e só em 1958 a edição foi concluída. Assim se explica que muitas das teorias mais interessantes de Peirce, nomeadamente no âmbito da Semiótica e da Lógica, tenham sido mal conhecidas, ou mesmo desconhecidas, até há relativamente pouco tempo.

No entanto, à medida que as obras de Peirce foram sendo *descobertas* e estudadas, Peirce foi ganhando uma importância crescente no campo da Semiótica, da Lógica, da Epistemologia e da Filosofia em geral. Do mesmo modo, a Teoria Peirceana da Abdução tem merecido uma atenção cada vez maior por parte da crítica especializada, apesar de, entre os que a têm estudado, essa teoria levantar objecções paradoxais, cuja questão de fundo diz respeito à possibilidade mesmo de uma lógica da descoberta.

Três espécies de Argumentos

Segundo Peirce, há três espécies de argumentos: Abdução, Indução e Dedução:

«As três espécies de raciocínio são Abdução, Indução e Dedução. O único raciocínio necessário é a Dedução. É o da matemática. Parte de uma hipótese, cuja verdade ou falsidade nada tem a ver com o raciocínio, e cujas conclusões são igualmente ideais... A Indução é fazer o teste experimental de uma teoria. ... A Indução... não poderá nunca dar origem a uma nova ideia. Nem a Dedução. Todas as ideias da ciência vêm através da Abdução. A Abdução consiste em estudar factos e inventar uma teoria para os explicar». (CP 5.145)

Peirce utiliza, ao longo de toda a sua vida, diversas designações para o terceiro tipo de inferência: «hipótese», «presumpção», «retrodução» e «abdução». Neste artigo não me debruçarei sobre as distinções entre todos esses termos e usarei, sem perda de generalidade, o termo abdução, que, por sinal, era o que Peirce menos gostava e pelo qual ficou conhecida a sua «terceira inferência». Analisemos então, brevemente, estas três espécies de raciocínio.

Dedução

É costume representar a dedução pela seguinte fórmula:

Todos os x são y (definição ou teoria geral);
A é x (caso particular);
Portanto, A é y (conclusão).

Podemos concretizar esta forma de inferência com o seguinte exemplo:

- A — «Todos os sócios da APM são professores de matemática». Premissa maior (regra que inclui muitos casos).
- B — «X é sócio da APM». Premissa menor (um caso que se acomoda à regra).
- C — «X é professor de matemática». A conclusão aplica a regra ao caso e enuncia o resultado.

Toda a dedução envolve este tipo de raciocínio silogístico analítico, que vai do geral para o particular ou do universal ao individual. Ele é o mais simples e fidedigno, pois ao estarmos certos da validade de A e B, (independentemente do seu valor lógico) também estamos seguros da veracidade de C.

Se é verdade que «Todos os sócios da APM são professores de Matemática», então, ao encontrarmos um sócio da APM segue-se, inevitavelmente, que é professor de Matemática. Não pode haver qualquer tipo de erro nesta última afirmação, desde que, evidentemente, as duas anteriores sejam verdadeiras. A dedução consiste, assim, em partir de uma verdade que se conhece e que funciona como um princípio geral ao qual se subordinam todos os casos que serão demonstrados a partir dela, isto é, na dedução parte-se de uma verdade já conhecida para demonstrar que ela se aplica a todos os casos particulares nela contidos.

Assim, a dedução é um processo de inferência através do qual um determinado facto ou um caso particular se tornam conhecidos, entendidos ou explicados por inclusão numa teoria geral. Por exemplo, se definimos o triângulo como uma figura geométrica cuja soma dos ângulos internos é igual a 180°, deduzimos, desta ideia, a mesma propriedade para qualquer triângulo.

No caso de uma teoria, a dedução permite que, pela aplicação das leis e regras da teoria a um fenómeno particular encontrado, o mesmo seja explicado ou entendido. Por exemplo, para se saber o que acontece a um corpo lançado no espaço por uma nave espacial, ou qual a velocidade de um projéctil lançado de um submarino para atingir um alvo num determinado tempo, aplicam-se a esses casos particulares as leis gerais da física newtoniana e obtém-se um conhecimento verdadeiro.

Peirce ilustrava a dedução mediante o exemplo, hoje muito conhecido, do pacote de feijões:

Regra: Todos os feijões deste saco são brancos.
Caso: Estes feijões são deste saco.
Resultado: Estes feijões são brancos.

Por muito útil que seja para aplicar regras gerais a casos particulares, este tipo de raciocínio não possui qualquer tipo de criatividade, não possui qualquer inovação na sua conclusão, pois, de facto, não transmite, não produz qualquer tipo de conhecimento que não esteja necessariamente incluído nas suas premissas. Não é assim, contrariamente à indução e à abdução, um raciocínio ampliativo, pois não adiciona coisa alguma ao que já é sabido.

Indução

Segundo Peirce o raciocínio indutivo, ou sintético, envolve «a aplicação de uma regra geral a um caso particular» (CP 2.620).

O ponto de partida é o caso e a conclusão é a regra, a qual se obtém pela observação do resultado. Peirce ilustra a indução da seguinte forma:

Caso: Estes feijões são deste saco.
Resultado: Estes feijões são brancos.
Regra: Todos os feijões deste saco são brancos.

Assim, «a indução é a inferência de uma regra a partir do caso e do resultado» (CP 2.622). A indução percorre o caminho contrário ao da dedução. Parte-se das premissas menores de modo que o raciocínio avança do particular para o geral.

Podemos concretizar esta forma de raciocínio indutivo ou sintético com o seguinte exemplo:

- A — «O sócio A da APM é professor de matemática» — observação de um caso específico, perfeitamente constatável.
- B — «O sócio B da APM é professor de matemática» — premissa menor, perfeitamente constatável.
- C — «Os sócios C, D, E, ... da APM são professores de matemática» - outra premissa menor, perfeitamente constatável.

Para chegar à conclusão e enunciar a regra geral baseada nestes casos particulares, é necessário realizar um salto para afirmar:

- D — «Todos os sócios da APM são professores de matemática».

Este raciocínio indutivo parte da observação de fenómenos particulares, iguais ou semelhantes, e procura a lei ou teoria geral, que, por sua vez, explica e subordina todos esses casos particulares. É um raciocínio baseado não somente nas leis da lógica mas na observação do mundo empírico. É criativo, porque D é muito mais do que a soma de A, B e C. No entanto, não fornece uma convicção segura de que D seja verídico, isto é, pelo facto de conhecermos um, dois, três, ..., n sócios da APM, que são professores de matemática, tal não implica a certeza ou a garantia de que não exista um sócio da APM que não seja professor de Matemática. A generalização dos casos particulares para uma lei geral pode trazer erros, isto é, nem sempre essa generalização se traduz em verdades absolutas. No entanto, é certo que é, pela indução, que o conhecimento científico tem evoluído.

Hipótese ou Abdução

Peirce defende que a indução «não é a única maneira de inverter um silogismo dedutivo de modo a produzir uma inferência sintética» (CP 2.623) e apresenta o seguinte exemplo:

> «Suponhamos que entro numa sala e aí encontro alguns sacos que contêm diferentes espécies de feijões. Em cima da mesa está um punhado de feijões brancos e, após procurar, encontro um saco que só contém feijões brancos. De imediato, infiro, como probabilidade ou como suposição bem fundamentada, que aquele punhado de feijões brancos foi retirado desse saco. Este tipo de inferência denomina-se formulação de uma hipótese. É a inferência de um caso a partir de regra e resultado.» (CP 2.623)

Como anteriormente referimos, o termo hipótese aqui apresentado por Peirce será posteriormente reformulado por ele, ao introduzir a palavra «abdução». Então, através das palavras de Peirce, acima descritas, podemos concluir que abduzir significa, pois, levantar hipóteses, hipóteses estas que são propostas de explicação para os fenómenos surpreendentes que se observam. A abdução torna-se, assim, um processo de inferência que parte de um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência. Essa explicação torna o facto perfeitamente compreensível e retira-lhe o elemento de surpresa que estava na base do seu carácter inesperado: «A abdução é o processo de formação de uma hipótese explicativa.» (CP 5.712); «A abdução, ao fim e ao cabo, não é senão conjectura... é o processo de escolher uma hipótese» (CP 7.219).

Torna-se assim facilmente compreensível um outro exemplo de hipótese, ou abdução, dado por Peirce: ao desembarcar, certo dia, no porto de uma província turca, cruzou-se com um homem a cavalo rodeado por quatro cavaleiros que sustentavam um palio sobre a sua cabeça. Como o governador da província era a única personagem que Peirce podia imaginar ser merecedor de tal honra, inferiu que se tratava do governador (CP 2.625). Um outro exemplo de abdução, também de Peirce: encontram-se fósseis semelhantes a peixes em regiões do interior de um país. Para explicar o fenómeno supõe-se que o mar outrora cobria essa terra.

Quando nos confrontamos com uma circunstância invulgar, capaz de ser explicada pela suposição de que se trata de um caso particular de certa regra geral, e adoptamos, em função disso, essa suposição, estamos perante uma hipótese ou abdução.

Novamente, podemos concretizar esta forma de inferência com o seguinte exemplo:

- A — «Este X é sócio da Associação dos Professores de Matemática».
- B — «Se este X for professor de Matemática, é natural que seja sócio da APM».
- C — «Então, infiro que este X é professor de matemática».

É certo que nada garante que pelo facto de X ser sócio da APM, tenha que ser um professor de Matemática. Podem existir sócios da APM que não sejam professores de Matemática. Mas para explicar o fenómeno de «X ser sócio da APM», isto é, para perceber porque é que X é sócio da APM, podemos encontrar uma «explicação» para esse facto: X é sócio da APM porque é professor de Matemática.

Mas que garantia temos de que X é sócio da APM porque é professor de Matemática?

Não pode ser ele sócio porque é professor de Física mas quer estar a par das investigações que se fazem na APM?

Ou não haverá outra qualquer razão para que X seja sócio da APM e que desconhecemos?

É verdade que a resposta a qualquer destas duas últimas questões pode ser afirmativa mas inclinamo-nos a pensar que é mais provável que X seja sócio da APM porque é apenas professor de Matemática.

Portanto, esta hipótese, esta inferência que relaciona o facto de X ser sócio da APM porque é professor de Matemática, pode ser olhada como um passo «ousado e arriscado» (CP 2:632). Ousado, porque tomamos a liberdade de concluir que X é professor de Matemática. Arriscado porque corremos o risco de nos enganarmos. Mas apesar de ser um passo ousado e arriscado, a concepção da hipótese é um momento de génese, um momento de criação, o princípio da descoberta e da possibilidade de decifração do mundo.

Em muitos aspectos da nossa vida quotidiana fazemos constantes abduções, propomos explicações para fenómenos dos quais não sabemos, de imediato, as razões para a sua ocorrência. No entanto, as explicações para eles surgem na nossa mente e permitem-nos inferir determinados factos, que, em geral, não se afastam da verdade. Sem a abdução não se avançaria nem no conhecimento quotidiano nem no conhecimento científico.

Em resumo, os três tipos de inferência são, pois, classificados, por Peirce, do seguinte modo:

— raciocínio analítico, ou dedução, «demonstra que algo deve ser»;
— raciocínio sintético, ou indução, «demonstra que algo é realmente operativo»;
— e abdução que «se limita a sugerir que algo pode ser».

Vejamos então como Peirce os distingue:

Dedução

Regra: Todos os feijões deste pacote são brancos
Caso: Estes feijões são deste pacote
Resultado: Estes feijões são brancos

Indução

Caso: Estes feijões são deste pacote
Resultado: Estes feijões são brancos
Regra: Todos os feijões deste pacote são brancos

Hipótese [Abdução]

Regra: Todos os feijões deste pacote são brancos
Resultado: Estes feijões são brancos
Caso: Estes feijões são deste pacote (CP 2.623)

No caso da dedução, a premissa maior é uma regra, a premissa menor é um caso e a conclusão é um resultado. No caso da indução, a premissa maior é um caso, a premissa menor é um resultado e a conclusão é uma regra. No caso da abdução, a premissa maior é uma regra, a premissa menor é um resultado e a conclusão é um caso.

Peirce classifica as inferências da seguinte maneira (CP 2.623):

$$\text{Inferência}\begin{cases}\text{Dedutiva ou analítica}\\ \text{Sintética}\begin{cases}\text{Indução}\\ \text{Hipótese}\end{cases}\end{cases}$$

Características da Abdução

Segundo Peirce, a abdução possui duas características: um carácter inovador e um carácter lógico. A abdução é o processo pelo qual se inova: «Uma abdução ... é o único tipo de raciocínio que inicia uma ideia nova» (CP 2.96).

Peirce concebe a abdução como uma inferência que nos leva a pensar o que ainda não tinha sido pensado, pois é isso mesmo que, antes de mais, é, exactamente, uma hipótese. É um momento de descoberta que nos possibilita decifrar o que nos rodeia. A grande diferença entre a indução e a hipótese está em que a primeira infere a existência de fenómenos semelhantes aos observados em casos similares, ao passo que a hipótese supõe algo diferente do que directamente observamos e, com frequência, algo que nos seria impossível observar directamente (CP 2.640). O primeiro procedimento corresponde a raciocinar a partir de casos particulares, no sentido de uma lei geral; o segundo corresponde a raciocinar do efeito para a causa. O primeiro classifica, o segundo explica (CP 2.636).

«A abdução inicia-se com os factos sem, em princípio, ter qualquer particular teoria em vista, embora ela seja motivada pelo sentimento de que é necessária uma teoria para explicar os factos surpreendentes. A indução busca uma teoria, a abdução busca factos» (CP 7.217-218)

Peirce define a abdução como:

«um raciocínio que apresenta nas premissas factos que manifestam uma similaridade com o facto afirmado na conclusão, mas que poderiam perfeitamente ser verdadeiros sem a última o ser, e muito mais sem que fosse reconhecida como tal; desse modo não se é conduzido a afirmar a conclusão positivamente, mas apenas inclinado a admiti-la.» (CP 2.96)

A abdução *inclina* levemente o nosso juízo para a conclusão visando propor uma hipótese, uma teoria problemática que tem a seguinte forma:

«Um fato surpreendente C é observado:
Mas se A fosse verdadeiro, C seria natural;
Donde há razão para suspeitar-se que A é verdadeiro.» (CP 5.189)

O argumento abdutivo é a fórmula pela qual se chega a esse A, a nossa hipótese explicativa. E para ser boa hipótese, isto é, para ser admitida, mesmo enquanto hipótese, deve dar uma explicação plausível dos factos já conhecidos e, posteriormente, ser verificada experimentalmente.

Para Peirce, sem abdução não haveria ciência, isto é, o progresso do conhecimento científico seria impossível. No entanto, o papel da abdução, como processo de formação de novas hipóteses explicativas, desaparece quando se selecciona uma hipótese:

«Claro que, como se compreende facilmente, no processo de submissão aos testes já não se tem necessidade de tal suposição na existência de misteriosos poderes de adivinhar. É apenas na selecção das hipóteses a testar que devemos ser guiados por essa suposição.» (CP 6.530)

Peirce distingue dois momentos na fase abdutiva: o primeiro momento é o momento do *insight*, origem de todas as conjecturas que compõem uma lista de possíveis explicações para um determinado fenómeno. Parece ser pouco mais que simples adivinhação. Trata-se de um momento heurístico, no qual certas ideias se associam na mente de maneira incontrolável (CP 6.302) e que pode ser visto como habilidade natural instintiva. «A inspiração abdutiva acontece em nós num lampejo. É um ato de insight, (introvisão), embora extremamente falível.» (CP 5.181).

O segundo momento prende-se com o processo de selecção das hipóteses, processo esse, que, diferentemente do primeiro, é consciente, controlado, voluntário, deliberado, sujeito à crítica e auto-crítica. Mas pelo facto de que podem surgir inúmeras hipóteses para explicar os factos, é pertinente colocar uma questão sobre a interacção que existe entre a mente humana e o objecto investigado, que faz com que o homem levante algumas hipóteses alternativas das quais apenas uma se mostra aproximadamente verdadeira.

Ora, da mesma forma que, no primeiro momento da abdução, há necessidade de um instinto natural, no segundo momento também o instinto é necessário para se fazer a escolha certa. Tal é bem expresso nas palavras de Peirce:

«Considere-se o grande número de teorias que poderiam ter sido lembradas e sugeridas. Um físico defronta-se no laboratório com um fenómeno novo. Como é que ele sabe se o facto tem relação com a conjunção dos planetas? Por que não a presença de algum espírito? Ou uma palavra mágica pronunciada há um ano atrás à mesma hora pela imperatriz viúva da China? Pensemos nos trilhões e trilhões de hipóteses que poderiam ter sido feitas — e uma só verdadeira; e, no entanto, após duas ou três conjecturas, no máximo uma dúzia de conjecturas, o físico encontra, com bastante aproximação a hipótese correcta.» (CP 6.530)

Imaginemos que estamos perante um fenómeno surpreendente, que nos deixa perplexos e sobre o qual não temos qualquer explicação. Como conseguiríamos obter um conhecimento científico sobre o mesmo se não houvesse nada que orientasse a nossa escolha de uma hipótese entre todas as hipóteses possíveis? Nesse caso a ciência seria impossível. Damos a palavra a Peirce:

«Valeria mais abandonar todo o nosso esforço para conhecer a verdade, por urgente que possa ser a nossa necessidade de a estabelecer, se não podemos estar certos que o espírito possui um tal poder de conjecturar acertadamente, que, antes de experimentar um grande número de hipóteses, se poderá esperar que a suposição inteligente nos conduz à hipótese que resistirá melhor a todos os testes, deixando de lado, sem exame, a maior parte delas.» (CP 6.530)

Nota

1 George Steiner (2003:26) considera Peirce o mais importante filósofo que o Novo Mundo produziu até ao momento. De modo paralelo, Ketner (1976:56) considera que a qualidade filosófica dos trabalhos de Peirce pertence ao mais elevado *ranking* da história humana. Ketner não hesita em considerar que, quando o trabalho de Peirce, em termos de edições, colecções e bibliografias estiver cuidadosamente tratado, Peirce será internacionalmente considerado um filósofo a par de Platão ou Kant.

Referências Bibliográficas

Peirce, C.S. (1931–1958) *Collected Papers*, 8 vols., C. Hartshorne, P. Weiss and A. Burks (Eds.), Cambridge, MA: Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1877) The Fixation of Belief, in J.Buchler (Ed), *Philosophical Writings of Peirce*, 1955, New York: Dover Publications.

Peirce, C.S. (1839–1914) Textos de Charles Sanders Peirce in Mota, O. Silveira (Eds.) (1975), *Semiótica e Filosofia*, Introdução, selecção e tradução de Octanny Silveira da Mota e Leonidas Hegenberg, 2ª Edição, São Paulo: Cultrix.

Peirce, C.S. (1839–1914) Escritos Coligidos/Charles Sanders Peirce in Mora d'Oliveira, e Henrique dos Santos, L, (Eds). (1980), *Escritos Coligidos Charles Sanders Peirce e Gotlob Frege*, Selecção e Tradução de Armando Mora d'Oliveira, Sérgio Pomerangblum e L.H. dos Santos, S. Paulo: Abril Cultural, Colecção Os Pensadores.

Peirce C.S. *Writings of C.S.Peirce : A Chronological Edition*, Volume I — (1857–1866), Volume II (1867–1871), Volume III (1872 – 1878), Volume IV (1879–1884) Volume V (1884–1886). Edited by the Peirce Edition Project (Indiana University Press, Bloomington, Indiana, 1982, 1984, 1986, 1989, 1993).

Ana Paula Silva

Escola Secundária da Moita

Revista temática de 2009 — O novo Programa de Matemática do Ensino Básico

Este ano a *Educação e Matemática* dedica o seu número temático, a ser publicado em Novembro/Dezembro de 2009, ao novo programa de Matemática do Ensino Básico. Este programa foi homologado em Dezembro de 2007, está actualmente em fase de experimentação, e a sua implementação terá início no próximo ano lectivo de 2009/10. Tal como aconteceu nos outros números temáticos, apelamos à colaboração dos leitores para esta revista. Envie-nos a sua proposta de artigo sobre o tema para `revista@apm.pt` até dia 30 de Junho.

A Redacção da Educação e Matemática

XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática

Números e Estatística: reflectindo no presente, perspectivando o futuro

Este encontro, promovido pela Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, realiza-se de 16 a 17 de Maio de 2009, em Vila Real, tendo como principal propósito reflectir sobre o ensino e a aprendizagem e discutir resultados de investigações realizadas nos temas Números e Estatística nos diversos níveis de ensino e, ainda, perspectivar e promover o desenvolvimento de investigações sobre estes temas.

Nele serão discutidos e analisados trabalhos de investigação, prevendo-se a constituição de três Grupos de Discussão em que o tema será abordado ao nível das seguintes vertentes:

- Ensino e Aprendizagem
- Orientações e desenvolvimento curriculares
- Tecnologias

O XIX EIEM destina-se a todos os investigadores, formadores, professores e outros agentes educativos que se interessam pelo trabalho de investigação na aprendizagem, na formação e na prática profissional no âmbito dos Números e Estatística.

Para mais informações consulte:

`http://www.home.utad.pt/~eiem09/`

ICTMT 9 — International Conference on Technology in Mathematics Teaching

Realiza-se de 6 a 9 de Julho de 2009, no campus da universidade de Metz (França), o ICTMT 9. Com foco nas tecnologias no ensino da Matemática, este encontro abordará entre outros aspectos: o impacto das tecnologias de informação e comunicação no currículo de Matemática; o contributo das tecnologias de informação e comunicação para o estabelecimento de conexões entre a Matemática e outras disciplinas; novos desenvolvimentos na tecnologia para ensinar e aprender Matemática; novas abordagens ao desenvolvimento profissional dos professores de Matemática; novas possibilidades de avaliação em Matemática; motivação dos alunos para a Matemática; estatística, tecnologia e sociedade.

Mais informações sobre este encontro poderão ser consultadas em:

`http://www.ictmt9.org/`

Que geração será a das crianças que vão passar doze horas na escola?

Que geração será a das crianças que vão passar doze horas na escola?

Adolescentes como os do filme *Paranoid Park*, quase delinquentes. Ou como os outros, sem mais dramas. Mas o tempo a mais na escola deve ser para brincar

Natália Faria

In Público. 7 de Fevereiro de 2009

A notícia resulta da proposta de «possibilidade de as escolas do primeiro ciclo do ensino básico funcionarem doze horas por dia, entre as sete da manhã e as sete da tarde» apresentada pela Confederação Nacional das Associações de Pais — CONFAP na primeira semana de Fevereiro. «A filosofia é adequar o horário das escolas públicas às jornadas de trabalho dos pais, libertando-os da necessidade de recorrer aos ATL.»

De acordo com a notícia, e segundo a CONFAP «este processo está a ser negociado há um ano com o Ministério e está em fase avançada», apesar de o artigo do Jornal Público de 7 de Fevereiro de 2009 referir também que o Ministério da Educação garante que nada está decidido ainda.

Como é natural este assunto é polémico. Apesar de ser consensual que o ideal seria os pais terem o tempo necessário para os filhos, as circunstâncias da actualidade exigem soluções alternativas, destacamos aqui algumas das opiniões descritas neste artigo:

Daniel Sampaio refere que «o que é preciso é modificar os horários dos pais e não aumentar o tempo de permanência das crianças na escola» e ainda que «se persistirmos neste modelo, estamos a criar uma geração de adolescentes como a do *Paranoid Park*, de Gus Van Sant, ou seja, jovens a arriscar a fronteira da delinquência», ainda segundo Daniel Sampaio, «a equação está posta ao contrário, a escola não é feita para substituir a família», «se persistirmos neste modelo, ou seja, na legitimação da ideia de que os pais não têm tempo para cuidar dos filhos, estaremos a contribuir para que as crianças se transformem em adolescentes sem regras». Para Nuno Lobo Antunes «o alargamento do horário das escolas é uma medida que resulta das necessidades e das circunstâncias do tempo actual», «nada que ameace traumatizar as crianças, a verdade é que imensa gente frequentou colégios internos, portanto muito mais longe da família e não me parece que isso lhes tenha tirado a capacidade de imaginação ou autonomia» e «em muitos lares a escola ainda é o espaço mais saudável a que as crianças têm acesso».

Para Lucília Salgado, da ESE de Coimbra «o ideal era que os pais estivessem com as crianças, mas isso é uma utopia no cenário actual, em que os pais têm de trabalhar o máximo de tempo possível para conseguirem sobreviver, ou as escolas se adaptam ou muitas crianças ficam ao deus-dará». Defende que este alargamento não pode significar mais trabalho para as crianças e enfatiza a ideia de que este tempo deve «obedecer à regra dos 3 Ds: descansar, divertir e desenvolver», tem que ser «um tempo de aprendizagem mas com características lúdicas e sem stress escolar».

Manuel Sarmento do Instituto de Estudos da Criança também impõe condições ao aumento de permanência na escola, propõe articulação escolas — autarquia e comunidade e refere como «crucial que as crianças tenham autonomia para decidir o que querem fazer e que a supervisão a que ficam sujeitas não esmague as suas possibilidades de desenvolvimento, enquanto seres sociais».

Perguntamos nós: Até onde vai a escola?

Claro que não somos alheias às dificuldades das famílias em conciliar os horários de trabalho com os da escola, mas que reivindicações devem ser feitas? Será *escola a tempo inteiro* ou será antes aproveitar o edifício da escola para resolver um problema social?

Dentro desta organização, da *escola a tempo inteiro*, qual é o papel das actuais Actividades de Enriquecimento Curricular? O que é efectivamente currículo e o que é extra? O Inglês deve ou não ser incluído no Currículo formal? O Currículo formal precisa contemplar novas valências? Como devem ser organizadas as actividades de Enriquecimento? E as actividades de ocupação de tempos que deveriam ser livres?

Tendo de permanecer mais tempo no edifício da escola, as actividades a proporcionar às crianças deverão ter características diferentes das do currículo formal, mas, não podem ser encaradas com menor importância, pelo contrário, têm de ser pensadas de modo a não as sobrecarregar com tempos exagerados de concentração que nem os adultos aguentariam. Elas têm de decorrer em ambiente tranquilo e serem desempenhadas por pessoas com formação, capacidade e energia para lidar com estes níveis etários. Por exemplo, a música é uma área com muitas potencialidades para ser trabalhada nas actividades de enriquecimento curricular, mas exige conhecimento específico profundo e instrumentos musicais nas escolas.

Uma especial atenção tem de ser dada às escolas inseridas em meios desfavorecidos. As crianças destas zonas são aquelas que, à partida, têm menos oportunidades e são precisamente algumas destas crianças cujas famílias têm também menos capacidade de intervenção e reivindicação.

Como se garante a diferenciação e a qualidade dos diversos momentos/espaços a funcionar no mesmo edifício: Escola Currículo Formal — Enriquecimento Curricular — Ocupação de tempos que deviam ser Livres?

Estas são algumas questões que nos parecem essenciais discutir a par com a ocupação do edifício escolar 12 horas por dia.

Adelina Precatado

Alice Carvalho

Matemática...

Nenhuma História da Matemática, por muito condensada que seja, pode contornar a figura de John von Neumann (1903–1957). Se o fizer, deixará de lado, aspectos fundamentais da Matemática da primeira metade do século XX, em campos tão variados como a Lógica e os Fundamentos da Matemática, a Álgebra, a Teoria dos Jogos, Teoria da Computação ou a Física Matemática, campos para os quais von Neumann fez contribuições decisivas.

Ele possuía uma forte convicção acerca do papel das construções racionais na «explicação» da Natureza. Em particular, essas convicções, abarcam o modo como o matemático se posiciona perante a Matemática ou, se se quiser generalizar um pouco, o modo como a mente racional se posiciona perante esta disciplina.

Eis o seu pensamento:

Em Matemática não entendemos coisas...
Habituamo-nos a elas!

Pense nisto!

António M. Fernandes [Dep. Matemática—IST]

Estatística, do ensino à aprendizagem — um panorama sobre a actualidade

Na era da informação, quando tudo acontece em directo de e para qualquer ponto do planeta e quando por todo o lado somos confrontados com dados e gráficos nas mais variadas formas, sabermos lidar com a informação que nos chega é cada vez mais importante. E foi precisamente como um instrumento para promover a literacia estatística, mais especificamente com o propósito de proporcionar instrumentos relacionados com a compreensão, a utilização e o ensino da Estatística que, numa iniciativa da Escola Secundária Tomaz Pelayo, em colaboração com o Instituto Nacional de Estatística, a que mais tarde se associou a Direcção Regional de Educação do Norte, surgiu o projecto Acção Local de Estatística Aplicada, mais conhecido por ALEA. Dez anos depois, a equipa deste projecto mantém uma energia admirável e uma vontade crescente de ir mais além. Disso mesmo deram conta aos cerca de 160 professores que, no passado dia 30 de Janeiro, se deslocaram ao auditório da Escola Básica Integrada / Jardim de Infância Vasco da Gama para assistir ao *Fórum e-Estatística — Numeracia e Cidadania*.

Os trabalhos iniciaram-se com uma conferência proferida por João Mata, do GEPE–ME, que nos falou de alguns aspectos do Plano Tecnológico e surpreendeu os presentes ao informar que até ao próximo dia 15 de Julho todas as salas de aula dos 2° e 3° ciclos do ensino básico, assim como as do ensino secundário, estariam equipadas com um projector. Seguiu-se uma comunicação proferida por Eugénia Graça Martins, da FCUL e consultora científica do projecto ALEA, que nos proporcionou uma visão histórica sobre a estatística no ensino, numa perspectiva internacional, e realçou os contornos específicos deste conhecimento que, na sua opinião, é distinto da Matemática.

Luísa Castro Loura, da FCUL e membro da Sociedade Portuguesa de Estatística, procurou dar-nos uma ideia de *sites* onde podemos encontrar dados estatísticos interessantes para trabalhar com os nossos alunos, mas, acima de tudo, referiu-se à dificuldade de tal tarefa, em virtude de considerar que os dados disponíveis se encontram numa forma que não permite a utilização directa por parte dos alunos, exigindo um grande esforço organizativo ao professor.

Como se comportam os nossos alunos em provas de avaliação externa, relativamente à estatística, foi o tema da comunicação de Maria João Lagarto, do GAVE-ME. E, segundo a sua análise, os nossos alunos alcançam resultados bastante bons (perto dos 80% e por vezes mesmo 90%) sempre que lhes é pedido que identifiquem ou seleccionem determinada informação num gráfico ou que efectuem cálculos elementares, no entanto, a prestação torna-se significativamente inferior (por volta dos 30%) quando lhes é pedido que obtenham informação proveniente de várias fontes, que efectuem cálculos um pouco mais complexos ou que lidem com percentagens. Depois de uma pausa nos trabalhos para um lanche e uns agradáveis momentos de convívio, tivemos ocasião de ouvir Isabel Catalão, professora da Escola Básica Integrada Quinta de Marrocos, que nos deu conta da forma como tem utilizado os materiais do Projecto ALEA, tanto nas suas aulas de Matemática e de Área de Projecto, como noutro tipo de actividades (clubes, semanas culturais, etc.).

Seguiu-se a comunicação proferida por José Paulo Viana, da Escola Secundária Virgílio Ferreira, que começou por nos apresentar os seis princípios orientadores do ensino da estatística, segundo Richard Scheaffer, à luz dos quais analisou um conjunto de situações bem interessantes. Acima de tudo destacou especificidades da estatística, face a outros temas da disciplina de Matemática, e frisou a importância de não nos podermos esquecer que verdadeiramente importante é o domínio das noções e não a execução de cálculos.

E o Fórum terminou pela mão de Emília Oliveira, a criadora do projecto ALEA, e de Pedro Campos, pertencente à equipa do projecto, que, num tom leve e bem disposto, fizeram um balanço do seu trabalho ao longo destes dez anos no seio do projecto e, com o seu entusiasmo, nos fizeram crer que o ALEA ainda tem muito para nos oferecer.

Helena Rocha

Estatuto Editorial da Educação e Matemática

A *Educação e Matemática* (EM) é uma publicação da Associação de Professores de Matemática (APM). É uma publicação periódica, sai cinco vezes por ano e um dos seus números anuais é temático. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. Dirige-se aos professores de Matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro.

Os principais objectivos da *Educação e Matemática* são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas actuais e importantes da educação; matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

A *Educação e Matemática* publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, recensões de livros, resolução de problemas, notícias ... . A EM tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com carácter permanente.

A revista tem uma equipa redactorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de recepção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista.

À semelhança das outras revistas informativas, a *Educação e Matemática* assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A Directora da Educação e Matemática

Materiais para a aula de Matemática

Eu vou ganhar!

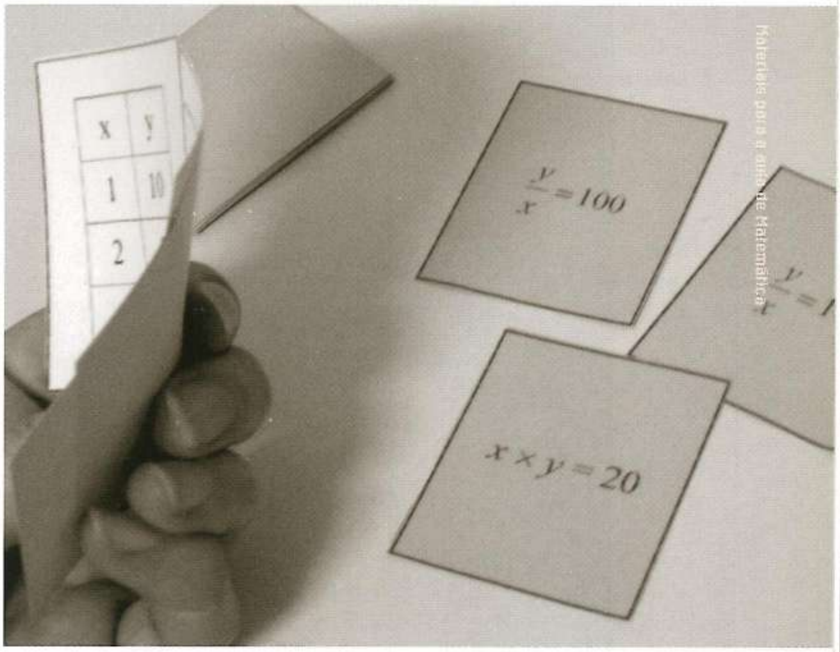
A tarefa que aqui se apresenta destina-se a explorar o jogo *DirectInv* que é publicado na secção *Vamos Jogar* deste número da revista. Tratando-se de um jogo que pode ser utilizado para introduzir a noção de proporcionalidade inversa, o objectivo desta tarefa não passa pela noção em si, embora esta esteja obviamente envolvida. O que se pretende é consciencializar os alunos que, mais do que jogar, o importante é a reflexão que se faz sobre o jogo, pois é esta que nos poderá ajudar a perceber melhor o seu funcionamento e a conseguir maximizar as nossas hipóteses de ser bem sucedidos.

Esta proposta de trabalho tem ainda uma componente ao nível da Língua Portuguesa, uma vez que são apresentados pequenos textos, e até um curto diálogo, que os alunos têm que ler e interpretar.

A tarefa foi pensada para ser realizada por grupos de quatro alunos, depois de estes terem tido ocasião de jogar algumas vezes. A realização da tarefa requer ainda que os alunos tenham acesso ao material do jogo, ou seja, cada grupo de alunos precisa de ter à sua disposição os dois baralhos de cartas (o das cartas com tabelas e o das cartas da mesa).

Helena Rocha

Eu vou ganhar!



A Laura esteve a jogar ao *DirectInv* na aula de Matemática e, depois de perder o primeiro jogo, começou a lamentar a sua falta de sorte por lhe saírem cartas que «não prestavam». Os colegas riram-se, achando que era ela que não sabia jogar, mas quando ela perdeu mais um jogo começaram a achar estranho e decidiram investigar. Pegaram então no baralho das tabelas e foram à procura das cartas que «não prestavam».

Que cartas são essas? E por que é que «não prestam»?

Ao ajudar a procurar as cartas que «não prestavam», o David descobriu que havia duas cartas no baralho para as quais era mais fácil conseguir formar o par com uma carta da mesa.

Que cartas são essas? Explica a tua escolha.

Satisfeito com a sua descoberta, e a pensar em ganhar os próximos jogos, o David fez uma proposta aos colegas:

— Olhem, e se acrescentássemos ao baralho quatro cartas novas com tabelas em branco, que o jogador preenchia como quisesse, assim tipo *Jokers*.

— Nem penses! — responderam logo dois colegas em coro. — Tu queres é ganhar sempre.

— Então, e se em vez disso fossem cartas com metade dos valores da tabela preenchidos e a outra metade por preencher? — perguntou a Laura.

— Quem ficar com uma tabela em branco preenche três valores da tabela antes de começar o jogo e os outros três quando quiser jogar a carta. Concordam?

Preenche a teu gosto três valores das tabelas das quatro cartas que se seguem.

x	y

Faz par com ____ cartas

x	y

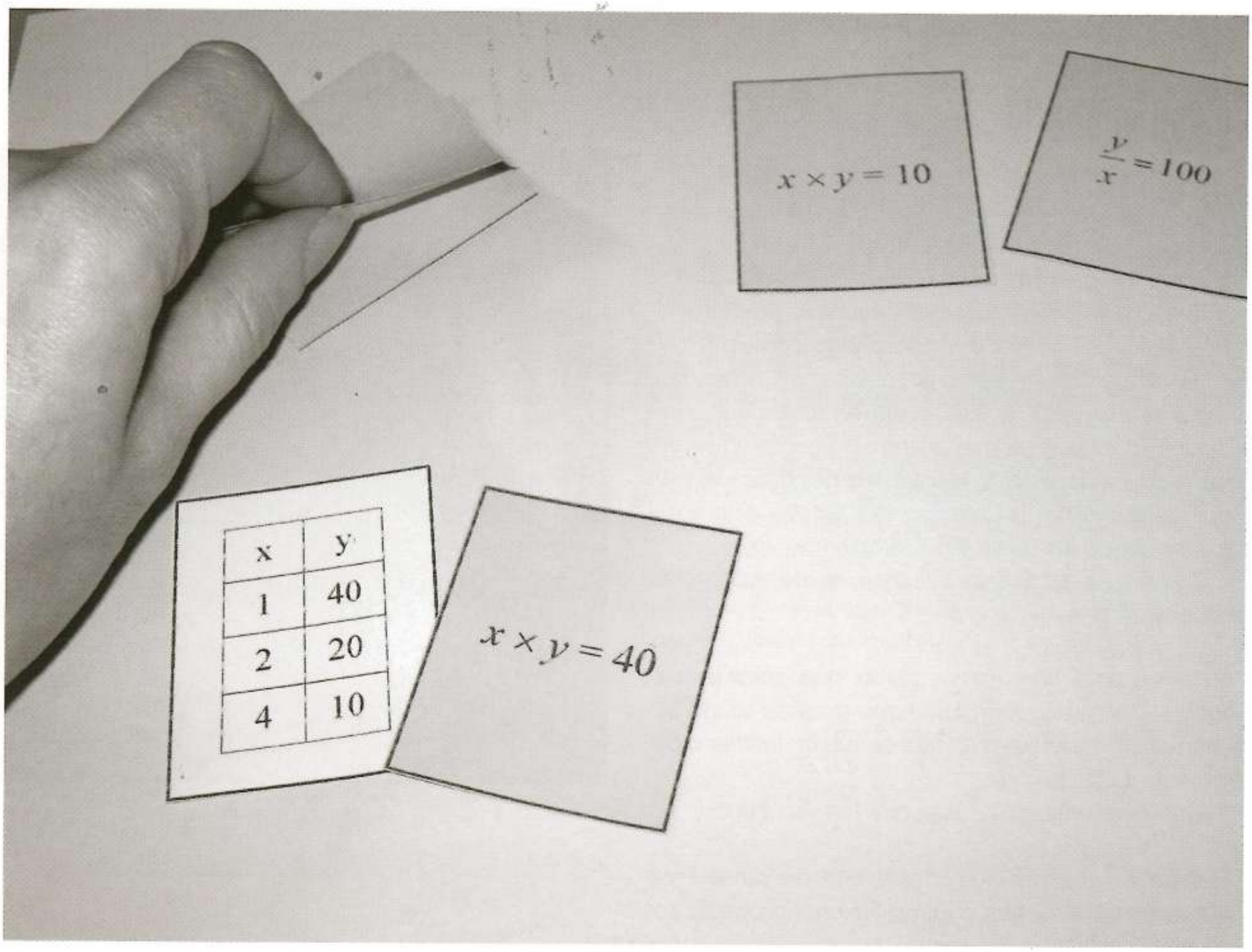
Faz par com ____ cartas

x	y

Faz par com ____ cartas

x	y

Faz par com ____ cartas



E agora completa o preenchimento das tabelas. Usa cores diferentes para diferentes hipóteses de completar a tabela.

Cada uma das tuas cartas pode ser completada para ser jogada com quantas cartas do baralho da mesa?

Será possível fazer melhor? Preenche uma nova tabela se precisares, mas procura encontrar uma tabela que possa formar par com o maior número de cartas do baralho da mesa.

A Laura e o David passaram a ganhar todos os jogos alternadamente. As tabelas que eles preenchiam serviam sempre para uma das cartas na mesa, o que já não acontecia com as dos seus colegas. Vendo que eles preenchiam sempre os três números da coluna do x ou os três números da coluna do y, os colegas resolveram impor como nova regra que tinha que se preencher pelo menos um número na coluna do x e um na do y.

Será que esta nova regra vai impedir a Laura e o David de construírem uma tabela que sirva sempre? Explica porquê.

APM — 2009

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2009

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `http://www.apm.pt`

Assinaturas das revistas para 2009

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

Artigos

Secções