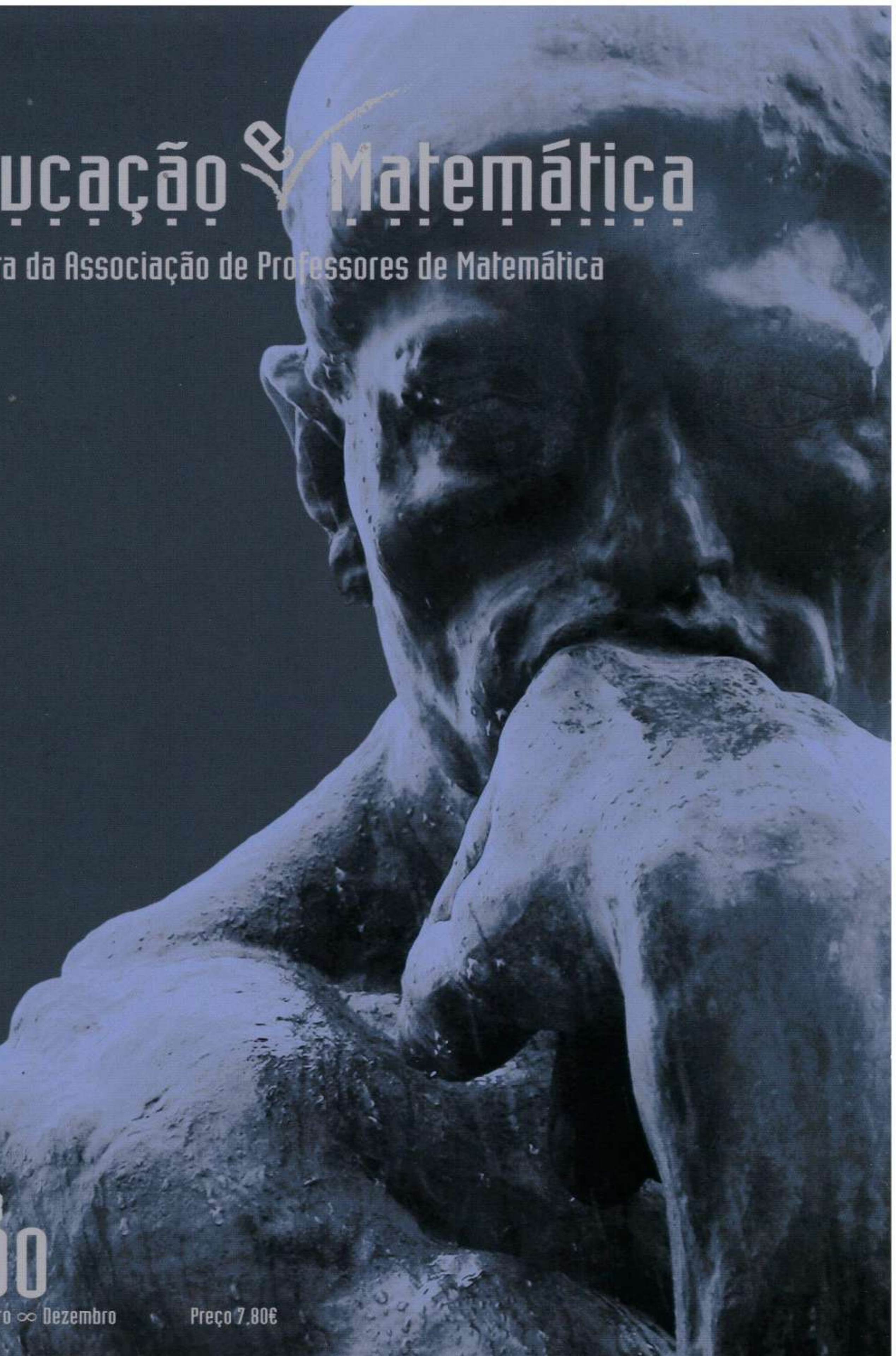
Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2008

100

Novembro ∞ Dezembro

Preço 7,80€

ficha técnica

EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

Directora Ana Paula Canavarro
Subdirectora Adelina Precatado
Redacção Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Fialho
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Dias

Colaboradores Permanentes
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

Capa António Marques Fernandes
Paginação Gabinete de Edição da APM

Entidade Proprietária
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

Data da publicação Dezembro 2008
Tiragem 4000 exemplares
Periodicidade
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

Impressão
Etigráfe, Artes Gráficas, Lda
Rua Major Rosa Bastos, 55 A–B, Montemor
2670–502 Loures

Depósito Legal n° 72011/93
Registo no ICS n° 124051
ISSN 0871-7222

Porte Pago

Sobre o número temático

Este número temático é dedicado ao tema *Raciocinar em Matemática*. O nome da Ana Maria Boavida surgiu de forma natural como editora a convidar. O seu interesse pelo tema, o seu trabalho de investigação sobre a argumentação em Matemática, a sua experiência e a colaboração que ao longo dos anos tem mantido com a APM, em várias actividades, justificaram a escolha.

Expressamos aqui o nosso agradecimento pela forma empenhada como se dedicou a todas as fases de elaboração deste número da *Educação e Matemática*.

Sobre a capa

«O pensador», Auguste Rodin, 1902. Museu Rodin, Paris.

António M. Fernandes

Neste número também colaboraram

Ana Matos, Anabela Gomes, Eduardo Veloso, Eduardo Vera-Cruz Pinto, Helena Estrada, Irene Segurado, Isabel Gorgulho, Joana Latas, João Barreiros, João Pedro da Ponte, José Carlos Godinho, Leonor Moreira, Leonor Santos, Luís Raposo, Manuel Joaquim Saraiva, Maria João Marcelo Curto, Mário Laginha, Neusa Branco, Nuno Pacheco, Paulo Correia, Paulo Oliveira, Rita Zurrapa, Rui Gonçalo Espadeiro, Sérgio Pinhão, Sílvia Semana, Sílvia Zuzarte Machado, Teresa Olga Duarte.

Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, N° 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

Nota

Editorial

Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar

Ana Maria Roque Boavida

Em termos históricos, epistemológicos e mesmo ao nível do senso comum, sempre houve uma forte associação entre Matemática e raciocínio. No entanto, quando consultamos diversas publicações focadas em *raciocínio matemático* ou *raciocinar em Matemática*, sobressai, por um lado, que há diversas interpretações destas noções. Por outro, destaca-se que embora estas sejam usadas amiúde, raramente são definidas ou mesmo caracterizadas com detalhe suficiente que permita compreender o que está, de facto, em jogo nesta actividade. Com efeito, "o termo *raciocínio*, tal como compreensão, é amplamente usado tendo subjacente a hipótese implícita de que há acordo universal sobre o seu significado" (Yakel e Hanna, 2003, p. 228) e, assim, a maior parte dos matemáticos e educadores matemáticos usam-no sem o clarificarem.

Há, no entanto, evidências que o raciocínio é, cada vez mais, considerado um aspecto central ao ensino da Matemática seja qual for o tema e ano de escolaridade: "Ser capaz de raciocinar é essencial para compreender matemática" (NCTM, 2000, p. 56). Esta centralidade não é certamente alheia a um maior entendimento sobre como se aprende e à ênfase na ideia de que a Matemática deve ser experienciada, pelos alunos, como uma actividade de construção de sentido.

Neste âmbito, torna-se importante, antes de mais, explicitar a interpretação de *Racionar em Matemática* adoptada como ponto de partida para delinear o conteúdo do centésimo número desta revista.

Etimologicamente, raciocinar remete para calcular, mas também para usar a razão para julgar, compreender, examinar, avaliar, justificar e concluir, o que conduz a que, em Matemática, não raciocinamos apenas quando provamos algo. Também raciocinamos ao apresentar razões que justificam afirmações ou posicionamentos, ao tentar convencermo-nos a nós próprios, ou a outros, da razoabilidade destas justificações ou ao procurar explicar a coerência entre o que se aceita como válido e as suas consequências.

Estas ideias têm ligações significativas com várias outras referidas em estudos ou documentos sobre raciocínio matemático, publicados, nos últimos anos, no âmbito da Educação Matemática. Se nos situarmos numa perspectiva social sobre a aprendizagem, "o raciocínio matemático é uma actividade partilhada em que quem aprende participa enquanto interage com outros para resolver problemas matemáticos" (Yakel & Hanna, 2003, p. 228). Assim, em salas de aula em que é valorizado o raciocínio, a explicação, a justificação e a argumentação são aspectos-chave da actividade dos alunos. Adoptar este significado de raciocínio conduz a que raciocinar em Matemática seja indissociável da resolução de problemas e da comunicação.

Criar condições para os alunos aprenderem a raciocinar matematicamente passa não apenas, nem sobretudo, por propor-lhes tarefas com determinadas características, mas por ajudá-los a desenvolver um hábito de pensamento que tem a ver com o "porquê das coisas". Tal como acontece com todos os hábitos, também este requer persistência, consistência e coerência, o que remete, em particular, para a importância de construir e manter uma cultura de sala de aula com determinadas características. É importante que os alunos se envolvam em actividades de formulação, teste e prova de conjecturas, o que traz para primeiro plano a necessidade de se sentirem confortáveis e seguros para assumir riscos e partilhar ideias emergentes e titubeantes. É, também, importante que expliquem e defendam os seus modos de pensar através da argumentação, que analisem criticamente contribuições dos colegas e que cheguem a consensos fundamentados e matematicamente relevantes sobre o significado de ideias matemáticas, o que requer capacidade de escuta, respeito, confiança e ajuda mútua.

Ensinar a raciocinar em Matemática é um empreendimento complexo, mas possível, que exige, muitas vezes, que o professor aja na urgência e decida na incerteza. No entanto, este é um desafio que não podemos evitar. Esperamos que este número da revista possa contribuir para nos ajudar a enfrentar este desafio.

Referências

NCTM (Ed.). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. VA: NCTM.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. Em J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227–236). VA: NCTM.

Ana Maria Roque Boavida
ESE de Setúbal

Grande Concurso
Educação e Matemática

À procura de 100

Usando os seguintes algarismos {9, 9, 8, 8, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2}, exactamente por esta ordem e as operações de multiplicação e divisão e raiz, obter o resultado mais próximo de 100.

A revista *Educação e Matemática*, agora para comemorar a publicação do seu número 100, lança desta vez um grande concurso entre os seus leitores com os objectivos de criar laços mais dinâmicos no interior da nossa Associação e de alargar o público leitor da revista.

O problema proposto pretende ser um desafio não só aos professores de Matemática mas também aos seus alunos. Todos poderão concorrer!

Regulamento

1. Podem concorrer todos os leitores da revista *Educação e Matemática*, divididos em duas categorias: *Categoria A* para alunos dos ensinos básico e secundário e *Categoria B* para os restantes concorrentes.
2. O concurso consiste na resolução do problema apresentado. A resposta deve indicar, obrigatoriamente e com toda a clareza, a sequência de operações, o resultado aproximado à milionésima (6 casas decimais) e a identificação do concorrente. Os concorrentes da *Categoria A* deverão indicar ainda o ano de escolaridade, a escola e o nome do respectivo professor de Matemática.
3. O vencedor em cada categoria será o concorrente que apresentar o resultado mais próximo de 100.
4. Os casos de empate serão resolvidos por sorteio, na presença da direcção da APM.
5. As respostas, deverão ser enviadas até 25 de Abril de 2009, por *e-mail* para `zepaulo@armail.pt` com indicação do assunto *Grande Concurso E&M* ou por carta para *Grande Concurso E&M*, Rua Dr. João Couto, 27-A, 1500-236 Lisboa.
6. Os vencedores de cada categoria serão divulgados no *site* da APM a partir de 12 de Maio de 2009. Os respectivos prémios serão entregues até ao final do ano lectivo 2008–2009.

O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft

Paulo Oliveira

Raciocínio matemático: De que falamos?

A expressão «raciocínio matemático» designa um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio). É frequente considerar-se que a obtenção dessas novas proposições se faz através do raciocínio dedutivo, esquematizável na forma «Se A então B» (simbolicamente, $A \Rightarrow B$). A uma sequência de deduções, do tipo $A \Rightarrow B \Rightarrow \ldots \Rightarrow Z$, chama-se demonstração[1]. A demonstração é, por isso, central ao raciocínio tipicamente matemático. Sobre isso, o matemático americano Melvyn Nathanson (2008) afirma: «Descobrir uma demonstração, ter a imaginação e o génio para conceber uma cadeia de raciocínio que vai de axiomas triviais a conclusões extraordinariamente belas — este é um talento raro e maravilhoso. Isto é matemática.»

Os raciocínios matemáticos organizados em demonstrações estão historicamente comprometidos e têm características distintivas de acordo com as diversas áreas da matemática. Ernest (1994), salienta que «a emergência da demonstração na matemática da Grécia antiga, reflectiu as circunstâncias sociais, políticas e culturais desse tempo» (p. 40). É sabido como, na antiguidade, os gregos valorizavam e promoviam a controvérsia, o cepticismo e a especulação em torno das mais variadas ideias. Ainda segundo Ernest, na origem do método axiomático, tão caro aos matemáticos, está o raciocínio dialéctico em que um ou mais disputantes discorriam sobre a plausibilidade lógica de certas hipóteses. Os axiomas constituíam um ponto de partida de aceitação comum nessa disputa dialéctica. Uma vez estabelecidos os axiomas, as conclusões, obtidas através de raciocínio dedutivo, seriam aceites pelos disputantes.

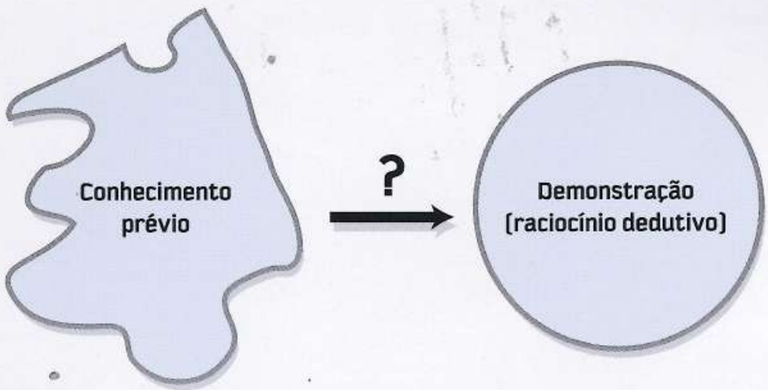


Figura 1.

Contudo, identificar a matemática com o raciocínio dedutivo deixa sem resposta uma questão fundamental: o que se passa antes de se chegar à demonstração? Por outras palavras, como se chega ao conhecimento novo que posteriormente é organizado dum modo dedutivo? (ver figura 1)

Pretender responder a esta questão significa valorizar a matemática não apenas como produto (conhecimento organizado dedutivamente) mas como processo (como se gera esse conhecimento). Há muitos autores (incluindo matemáticos) que têm defendido que a actividade matemática está muito para além do raciocínio dedutivo. Por exemplo, Sternberg (1999), salienta que o raciocínio matemático requer pensamento analítico, criativo e prático. Também Steen (1999) afirma que este raciocínio às vezes «denota a metodologia distintiva da matemática do raciocínio axiomático, dedução lógica e inferência formal. Outras vezes assinala uma habilidade quantitativa e geométrica muito mais abrangente que mistura análise e intuição com raciocínio e inferência, tanto rigorosas como sugestivas» (p. 270). A importância da intuição no processo de criação matemática é, igualmente, sublinhada por Henri Poincaré que defende, em *Science et méthode* (1909), que «a lógica não basta; (...) a ciência da demonstração não é a ciência inteira, (...) a intuição deve conservar o seu papel como complemento, quase se poderia dizer como contrapeso ou como antídoto da lógica» (p. 20). Noutra sua obra, *La valeur de la science* (1905), Poincaré sublinha que a dedução não é uma inferência amplificante, ou seja, por si só não gera nada de novo: «a lógica inteiramente pura só nos levaria sempre a tautologias; não poderia criar coisas novas; não é dela sozinha que se pode originar qualquer ciência» (p. 19).

Claro que não existe uma lógica da descoberta ou invenção em matemática, i.e., um conjunto de passos que garantidamente conduzem a descobertas ou invenções mais ou menos relevantes. No entanto, as palavras do matemático americano Paul Halmos podem contribuir para tornar inteligíveis aspectos do processo que conduz a conhecimento matemático novo. Caracterizando elementos incontornáveis da actividade matemática, afirma:

Quando o matemático trabalha faz conjecturas vagas, visualiza generalizações grosseiras, e salta para conclusões injustificadas. Ele arranja e re-arranja as suas ideias e torna-se convencido da sua verdade muito antes de poder escrever uma demonstração lógica. Não é provável que a convicção aconteça muito cedo — usualmente acontece depois de muitas tentativas, muitos falhanços, muito desânimo, muitas falsas partidas (...) é necessário trabalho experimental (...) experiências conceptuais [*thought experiments*]. Quando um matemático pretende demonstrar um teorema acerca de um espaço de Hilbert de dimensão infinita, examina o seu análogo de dimensão finita, vê em detalhe os casos a duas e três dimensões, frequentemente tenta um caso particular numérico, e, deste modo, espera ganhar um *insight* que a pura prestidigitação com a definição não produz. (Halmos, citado em Villiers, 1999, p. 21)

Destas observações de Halmos conclui-se que a análise de casos particulares, o estudo de analogias, o trabalho experimental, o pensamento vago (incluindo ideias pré-lógicas), o estabelecimento de conjecturas, as tentativas, os *insights* e a incerteza, muita incerteza, tipificam a actividade do matemático, no período que antecede a organização dedutiva do conhecimento. Halmos também assinala aspectos emotivos próprios dos processos investigativos, como o desânimo em razão de constantes fracassos e recuos, e a correspondente necessidade de perseverança.

A estimulação de *insights* pode ser feita, por exemplo, através de uma combinação de trabalho experimental, estudo de analogias, análise de casos particulares, tentativas, etc. Os matemáticos Bailey e Borwein (2001) reconhecem «que se podem usar analogias *quase-intuitivas* para ter *insight* em matemática (...) [e que] matemáticos honestos reconhecerão também o seu papel na descoberta» (p. 64).

Assim, as intuições e a construção de significado matemático são anteriores à sua organização dedutiva, como bem salienta Félix Klein:

De facto, o matemático não se apoia em demonstrações rigorosas no grau que normalmente se supõe. As suas criações têm um significado para ele que precede qualquer formalização, e este significado dá às criações uma existência ou realidade ipso fac-

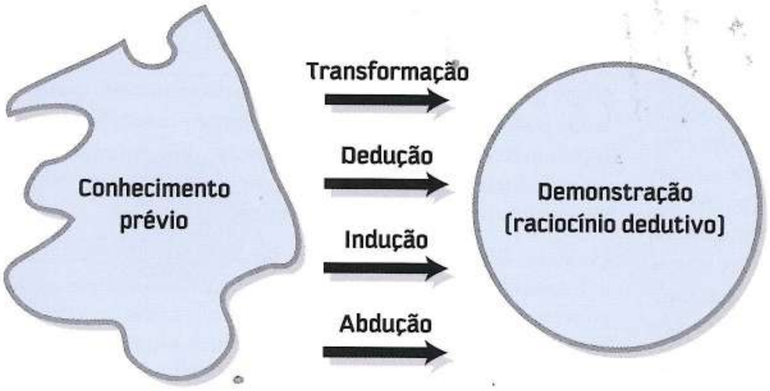


Figura 2.

to. (...) Grandes matemáticos sabem, antes de uma demonstração lógica ser alguma vez construída, que um teorema tem que ser verdadeiro. (citado em Villiers, 1999, p. 21)

A formalização das ideias matemáticas é um processo gradual e algo lento que surge em pleno quando se considera que essas ideias estão suficientemente maduras. Nesta actividade, os matemáticos preocupam-se em explicitar todos os axiomas, definições e outras ideias matemáticas em que se apoiam. No entanto, nem sempre há certeza de que tal aconteça: «Mas, pode sempre restar um aspecto da ideia que usamos implicitamente, que não formalizámos porque ainda não vimos o contra-exemplo que nos tornaria conscientes da possibilidade de duvidar dela». (Hersh, 1986, p. 19)

Esta é uma das razões pelas quais os matemáticos têm necessidade de revisitar, incessantemente, teorias passadas e «se afadigam com a estranha actividade de fornecer novas demonstrações de velhos teoremas» (Tasic', 2001, p. 148). Embora no caso de muitos teoremas os resultados sejam consideravelmente estáveis, as suas demonstrações não o são. Segundo Tasic', para Poincaré, os axiomas não asseguram a imutabilidade das ideias matemáticas, pelo que «os teoremas são (...) sempre reafirmados, reinventados, reinaugurados pelos matemáticos e pelas futuras gerações de matemáticos» (p. 148).

O raciocínio plausível também é matemático?

É verdade que na fase concludente do processo investigativo, o raciocínio dedutivo tem um papel predominante, quase exclusivo. Porém, na fase propriamente exploratória da investigação, em que há muitas interrogações e indefinições, o raciocínio matemático é eminentemente conjectural pelo que, as conclusões que produz, em geral têm uma validade plausível e não necessária. Nesta fase podemos distinguir vários tipos de raciocínio que produzem conclusões com diversos graus de plausibilidade: indutivo, abdutivo e transformativo (ou imagético) (figura 2). Através do raciocínio indutivo produzem-se conclusões gerais a partir da análise de alguns casos particulares (Pólya, 1990a); pelo raciocínio abdutivo, constroem-se hipóteses explicativas que dão sentido a um conjunto de dados (Ho, 1994); o raciocínio transformativo está associado à construção e *leitura* de imagens (esquemas) mentais (Simon, 1996). Estes tipos de raciocínio co-existem com a dedução e muito dificilmente se conseguem separar.

No segundo volume da sua obra clássica *Mathematics and plausible reasoning*, publicada inicialmente em 1954, Pólya (1990b) propõe-se organizar o raciocínio que produz conclusões plausíveis segundo padrões de inferência que fazem lembrar os silogismos. Eis dois exemplos referidos por Pólya:

$$\begin{array}{c} A \text{ é análogo a } B \\ B \text{ é verdadeiro} \\ \hline A \text{ é mais plausível} \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \text{ é implicado por } B \\ B \text{ é falso} \\ \hline A \text{ é menos plausível} \end{array}$$

Pólya (1990a) também releva a importância de raciocinar por analogia na produção de conclusões plausíveis: «A analogia parece ter a sua parte em todas as descobertas, mas em algumas tem a parte de leão» (p. 17).

Um exemplo de uma propriedade matemática sustentada por esta mistura de tipos de raciocínio é apresentado por Hillary Putnam (1986, p. 56): «existem infinitos números primos gémeos»[2]. Os matemáticos têm uma forte convicção de que esta propriedade é verdadeira, apesar de nunca ter sido demonstrada. Resumidamente, o argumento que é convincente para os matemáticos é o seguinte: parece plausível (e está de acordo com *dados* empíricos) admitir que os acontecimentos «p é primo» e «$p+2$ é primo» são independentes em termos estatísticos. Ora, a frequência de primos menores que p é, aproximadamente, $1/\log p$. Então, a frequência de primos gémeos menores que p é, assimptoticamente, $1/(\log p)^2$, o que implica a infinidade do número de primos gémeos.

A argumentação é de tipo abdutivo, uma vez que se dá uma explicação plausível, e por isso, convincente e credível, de um fenómeno observado experimentalmente (que existe uma infinidade de primos gémeos). Contudo, o argumento envolve, igualmente, a confirmação indutiva de uma asserção estatística (a independência dos *acontecimentos*) e, com base nessa *verdade assimptótica*, a dedução da propriedade. Putnam considera que esta dedução é «estável a menos de pequenas perturbações das suposições» (...) [e que] «há poucos matemáticos que não estejam convencidos por este argumento, apesar de não ser uma demonstração» (p. 56).

No decurso da história, têm sido dadas justificações de natureza quase-empírica que, não sendo formais, são, no entanto, inegavelmente plausíveis. Essa plausibilidade é, muitas vezes, satisfatória para a comunidade matemática. As discussões em torno da formalização de princípios que desempenham o papel de axiomas, ou da escolha do elenco dos axiomas numa determinada axiomática envolve, geralmente, argumentação de tipo quase-empírico. Um exemplo historicamente interessante é o do Axioma da Escolha [AE], na teoria de conjuntos. Este axioma foi usado, pela primeira vez, por Zermelo num artigo de 1904. Peano veio a terreiro criticar a inclusão do AE na demonstração de certos teoremas. Zermelo, num artigo de 1908, argumenta em defesa do AE:

> Em primeiro lugar, como é que Peano chega aos seus princípios fundamentais e como é que ele justifica a sua inclusão no *Formulaire*[3], uma vez que, apesar de tudo, também não pode demonstrá-los? Evidentemente, foi pela análise dos modos de inferência que no decurso da história vieram a ser reconhecidos como válidos, chamando a atenção para o facto de os princípios serem intuitivamente evidentes e necessários para a ciência — considerações que podem ser alegadas igualmente bem a favor do princípio em disputa. (Zermelo, citado em Putnam, 1986, p. 54)

O argumento da necessidade do AE não é irrelevante. De facto, numerosos teoremas, em diversas áreas da matemática, haviam sido demonstrados recorrendo a este axioma. Não o usar significaria prescindir desses resultados. Evidentemente, o que estava em causa era o facto do AE ser um princípio demasiado *forte*[4] e, portanto, deveria ser demonstrado, não utilizado na estruturação da teoria de conjuntos. Embora Zermelo reconhecesse que a adopção do AE era subjectiva, em virtude dos resultados que tinha permitido obter, isso era plausível. De resto, os matemáticos aceitam como plausíveis determinados princípios e ideias desde que sejam matematicamente produtivos.

As ferramentas tecnológicas tornam o raciocínio matemático mais poderoso?

A utilização de tecnologia permite apoiar o raciocínio matemático em todas as suas vertentes (abdutiva, indutiva e dedutiva). De facto, a investigação tradicional em matemática tem sido alargada pelas imensas possibilidades de representação gráfica e de cálculo do computador:

> A computação e os gráficos computacionais abriram novas fronteiras tanto à teoria como às aplicações que não poderiam ter sido exploradas pelas gerações anteriores de matemáticos. Esta fronteira revelou *insights* matemáticos surpreendentes. (...) para se alcançarem estes *insights* foram necessários métodos matemáticos inovadores não exclusivamente ligados à inferência formal. (Steen , 1999, p. 270–271)

Claro que os matemáticos sempre analisaram casos particulares, testaram conjecturas, generalizaram determinadas relações matemáticas, etc. Mas, o advento do computador torna esta dinâmica experimental mais atractiva e potente. O matemático tem assim a possibilidade de

> examinar na máquina uma colecção de casos particulares que é demasiadamente grande para os humanos lidarem por meios convencionais. O computador encoraja-nos a praticar sem vergonha e em plena luz do dia, certos hábitos a que nos entregamos apenas na privacidade dos nossos gabinetes, os quais nunca admitimos aos nossos alunos: a experimentação. A matemática é uma ciência experimental num grau que nunca aparece nos cursos que ministramos (...). O computador tem-se tornado o principal veículo do lado experimental da matemática. (Pollak, citado em Villiers, 1999, p. 21)

Ao permitirem explorar e resolver novas classes de problemas, os sistemas computacionais têm influenciado o desenvolvimento de várias áreas da matemática de que são exemplos a *Superfície de Costa*, bem como alguns resultados em Álgebra Linear e Equações Diferenciais Parciais (Lima, 2001). Além disso, têm proporcionado a criação de novas áreas matemáticas como a Complexidade Computacional (idem).

Tudo isto tem implicações epistemológicas. Uma vez que através de experiências computacionais, o matemático pode corroborar a plausibilidade de certas relações matemáticas assim como *excluir* a possibilidade de se verificarem relações matemáticas que havia considerado plausíveis, o computador permite introduzir uma nova dimensão epistemológica que pode designar-se como credibilidade experimental. A credibilidade do conhecimento matemático, tradicionalmente, obtém-se pela dedução formal. No entanto, como o computador possibilita a verificação de resultados para uma enormidade de casos particulares e singulares, aqueles podem considerar-se credíveis de um ponto de vista experimental. Bailey e Borwein (2001) perguntam mesmo o que é mais significativo,

> uma demonstração formal que na sua exposição completa requer centenas de difíceis páginas de argumentação, completamente compreendidas apenas por dois ou três colegas, ou a verificação numérica de uma conjectura com uma precisão de 100000 casas decimais, subsequentemente validada por numerosos cálculos subsidiários? (p. 53)

No seio da comunidade matemática internacional, não há consenso quanto ao papel do computador na investigação profissional. Existem matemáticos para quem os sistemas informáticos acrescentam novos níveis de complexidade à complexidade matemática propriamente dita. Sentem-se desconfortáveis pelo facto de não controlarem totalmente os *raciocínios* subjacentes aos processos computacionais. Por isso, vêem-nos como recursos auxiliares que podem estimular a imaginação criadora mas de modo algum como necessários para o desenvolvimento dos seus programas de investigação. Em contraste, a investigação assente em sistemas

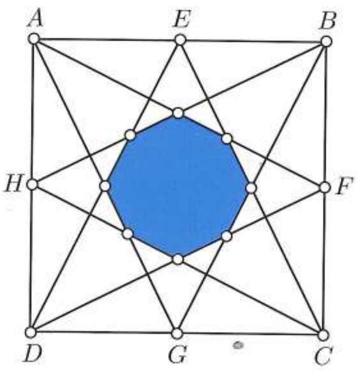


Figura 3.

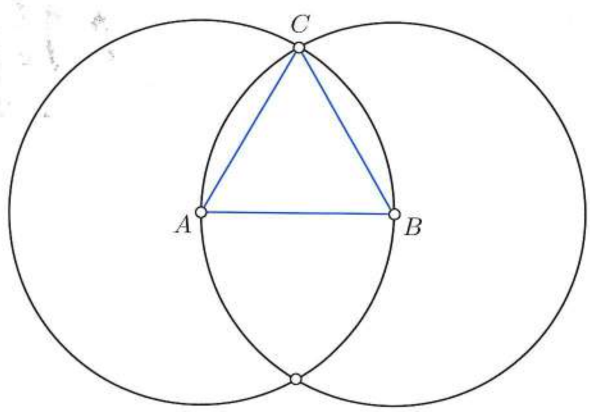


Figura 4.

computacionais é vista por alguns matemáticos como um sucedâneo legítimo da investigação matemática tradicional. Os mais optimistas defendem mesmo que toda a dinâmica investigativa, desde as primeiras intuições até à demonstração, pode e deve assentar em sistemas computacionais. Bailey e Borwein (2001) prevêem até que «daqui por dez anos, uma nova geração de matemáticos informaticamente versados, armados com *software* significativamente melhorado em sistemas computacionais prodigiosamente poderosos, forçosamente farão descobertas em matemática com que actualmente apenas sonhamos» (p. 63).

Esta prospectiva geração de matemáticos pressupõe a alfabetização informática das novas gerações, resultante da banalização do uso de tecnologias, nomeadamente computacionais, de *software's* variados, incluindo os matemáticos, e em contextos variados, incluindo o escolar. Tudo isto «forçosamente terá um profundo impacto em como se irá ensinar, aprender e fazer matemática no futuro» (Bailey e Borwein, 2001, p. 63). Sendo assim, as dinâmicas investigativas na aula de matemática, em ambientes computacionais, são uma mais-valia imprescindível para a formação dessa nova geração de matemáticos.

Como sabemos se um raciocínio matemático é válido?

O raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas, desde que, naturalmente, a cadeia de deduções $A \Rightarrow B \Rightarrow \ldots \Rightarrow Z$ esteja isenta de erros. Ora, diversos tipos de erros lógicos podem pôr em causa a validade de uma dedução. Dentre os erros mais conhecidos[5] podemos salientar:

i) assumir uma hipótese errada por má interpretação de um esquema;
ii) tirar conclusões que não derivam da hipótese (irrelevância ou raciocínio *non-sequitur*);
iii) tirar conclusões gerais a partir de casos particulares (erro de generalização);
iv) assumir uma hipótese não explicitada (hipótese escondida);
v) assumir implicitamente o que se pretende provar (raciocínio circular).

Vejamos alguns exemplos destes erros. Considere-se o quadrado $[ABCD]$ da figura 3 e os pontos médios dos seus lados (E, F, G e H). Construam-se os segmentos de recta que unem cada um destes pontos aos vértices opostos do quadrado. Nestas condições, qual é a área do octógono sombreado? As várias simetrias da figura sugerem que o octógono é regular. Peggy House (1999) refere que mesmo professores de Geometria fazem, erradamente, esta suposição! Quer dizer, foi assumida uma hipótese adicional, errada, associada a um esquema sugestivo, que torna a conclusão (o valor obtido para a área) inválida.

Consideremos agora a seguinte proposição: «Se um polígono é um pentágono então a soma dos seus ângulos externos é 360°». A conclusão é verdadeira mas a hipótese do polígono ter cinco lados é irrelevante. Erro de raciocínio *non-sequitur*.

A expressão $n^2 - 79n + 1601$ gera números primos para $n \in \{0, 1, \ldots, 79\}$. Contudo, afirmar que $n^2 - 79n + 1601$ é primo qualquer que seja n natural é um erro de generalização.

Ao dar uma organização axiomática à geometria elementar conhecida no seu tempo, Euclides pretendia garantir que a sua obra-prima *Elementos* fosse isenta de erros lógicos. Teve o cuidado de explicitar os seus pressupostos (postulados e noções comuns) e de deduzir teoremas a partir desses pressupostos e de teoremas previamente demonstrados, usando correctamente as regras da lógica. Contudo, logo na primeira proposição do primeiro livro, Euclides assume uma hipótese adicional *ad hoc* que não consta dos pressupostos que havia enunciado!! Nessa primeira proposição, Euclides propõe-se construir um triângulo equilátero sendo dado um segmento $[AB]$. Na sua construção (ver figura 4), Euclides admite tacitamente que duas circunferências se intersectam (hipótese escondida) embora nenhum dos seus pressupostos garanta isso. Este erro ocorreu inúmeras vezes no decurso da história.

Tampouco actualmente é possível garantir que os raciocínios matemáticos, mesmo dos matemáticos profissionais, estão isentos de erros. Nathanson (2008) confessa: «Quando leio um artigo numa revista científica frequentemente encontro erros. É irrelevante se consigo corrigi-los ou não. A literatura [matemática] é falível.» Por outro lado, acrescenta:

> Muitos teoremas importantes, mesmo notáveis, não têm, verdadeiramente, demonstrações. Têm esboços de demonstrações, linhas gerais de argumentação, sugestões e intuições que foram óbvias para o autor (pelo menos, na altura em que escreveu) e espera-se que uma parte da comunidade matemática as compreenda e acredite nelas.

A imensa produção de conhecimento matemático, sobretudo a partir de meados do século XX, também coloca problemas práticos quanto à sua verificabilidade. Segundo Bourguignon (2001), no fim do século XX foram produzidos cerca de 60000 artigos científicos em matemática por ano! Carleson (2001), ex-director de uma revista científica numa área da matemática, comentando as limitações do processo de revisão [*refereeing*], afirma:

> Qualquer pessoa que tenha estado nesta função [direcção de uma revista científica] sabe que isto [o processo de revisão] não fornece nenhuma garantia de que tudo esteja correcto. É completamente impossível encontrar revisores [*referees*] de alta qualidade que queiram verificar em detalhe todos estes artigos que são publicados. A revisão supostamente é como um selo de que o artigo está correcto mas eu penso que isso é muito ilusório. (p. 458)

Os matemáticos continuam a fazer um esforço de axiomatização das teorias matemáticas *maduras*, de modo a que estas possam ser deduzidas, pelo menos em princípio, de uma teoria estruturante que constitui uma espécie de alicerce robusto das restantes teorias. Frequentemente, a formalização da teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel [ZF] cumpre esse papel. A verdade é que, na prática, os matemáticos ficam satisfeitos com a mera possibilidade de uma teoria ser formalmente dedutível, por exemplo, de ZF. Essa possibilidade tácita decorre do facto de haver conceitos que estabelecem interfaces entre ZF e a teoria a formalizar. No entanto, Hersh (1986), recusa a possibilidade dessas deduções formais se concretizarem:

> Como é que sabemos que o nosso último teorema acerca da difusão em variedades é formalmente dedutível da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel? Nunca se escreveu tal dedução formal. Se o fosse, e se fosse verificada por um leitor humano, a possibilidade de erro seria maior do que na verificação de uma demonstração ordinária (não formalizada). (p. 18)

Conclui-se, assim, que, em última instância, é alguma autoridade no seio da comunidade matemática que tem a palavra final sobre a veracidade dos resultados produzidos. Como defende Nathanson (2008), «até em matemática a verdade pode ser política».

Que consequências para a educação matemática?

O raciocínio matemático envolve processos mentais complexos em que intervêm elementos, fortemente imbricados, de natureza lógica, matemática, epistemológica, biológica, psicológica e até emocional. Sendo assim, é possível ensinar os alunos a raciocinar matematicamente? Que tipo de tarefas promovem o raciocínio matemático? Que modos de trabalho estimulam mais o raciocínio matemático? A tecnologia (computador e calculadora) substitui o raciocínio dos alunos ou torna-o mais robusto?

Na verdade, em face desta imensa complexidade, não sabemos exactamente como é que o raciocínio matemático se desenvolve. O que se sabe da investigação é que o envolvimento dos alunos em discussões — nas quais elaboram e defendem argumentação matemática e analisam a argumentação matemática dos colegas e do professor — e projectos, bem como a interacção em grupos de trabalho, cria condições favoráveis à emergência do raciocínio matemático nas suas diversas formas, ao passo que a memorização sem compreensão, a resolução de exercícios rotineiros e a realização de tarefas padronizadas o inibem (Steen, 1999). Assim sendo, um ensino da matemática que estimule o raciocínio matemático também tem que incluir alguns processos metacognitivos como identificar a natureza de um problema, formular uma estratégia para o resolver, representá-lo, usar recursos adequados na sua resolução e monitorizar a solução encontrada (Sternberg, 1999).

A utilização adequada de tecnologia associada ao trabalho de grupo e de projecto, e a discussões motivadas por tarefas matematicamente ricas (problemas e investigações), em vez de substituir o raciocínio matemático torna-o mais potente. A tecnologia permite ao aluno suportar melhor o raciocínio conjectural e muitas vezes dá pistas para apoiar o raciocínio dedutivo. Em todo o caso, seja ou não usada tecnologia como suporte do raciocínio matemático, é importante não precipitar o fim do período experimental na resolução de uma tarefa no afã de chegar rapidamente à dedução.

Finalmente, a alta motivação e perseverança dos matemáticos não é comum nos alunos. A frustração e o desapontamento em razão dos falhanços podem ter um efeito devastador na sua auto-estima, inibindo a sua capacidade de raciocinar matematicamente ou o seu desejo de o fazer. Por isso, um ambiente de sala de aula em que se experimenta e se erra, e se volta a tentar, no fundo, um ambiente em que se replica o trabalho habitual do matemático, sem punições psicológicas, é um grande estímulo para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Nota

1 Este é um conceito de demonstração bastante redutor. Assumimo-lo apenas para simplificar o discurso.

2 Isto é, infinitos pares de números inteiros ímpares consecutivos, p, $p+2$, ambos primos.

3 Obra famosa de Peano.

4 De certo modo semelhante ao postulado das paralelas de Euclides.

5 Pirie (2006) faz um tratamento detalhado dos erros lógicos a um nível bastante acessível. Alguns desses erros de raciocínio são directamente transponíveis para o raciocínio matemático.

Referências

Bailey, D. e Borwein, J. (2001). Experimental mathematics: Recent developments and future outlook. In B. Engquist e W. Schmid (Eds.), *Mathematics unlimited — 2001 and beyond* (pp. 51–66). Berlim, Heidelberg: Springer-Verlag.

Bourguignon, J.-P. (2001). A basis for a new relationship between mathematics and society. In B. Engquist e W. Schmid (Eds.), *Mathematics unlimited — 2001 and beyond* (pp. 171–188). Berlim, Heidelberg: Springer-Verlag.

Ernest, P. (1994). The dialogical nature of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics, education and philosophy: an international perspective* (pp. 33–48). London: The Falmer Press.

Hersh, R. (1986). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 9–28). Boston: Birkhäuser.

Ho, Y. (1994). *Deduction? Abduction? Induction? Is there a logic of exploratory data analysis?* (Disponível no endereço `http://seamonkey.ed.asu.edu/~behren/asu/reports/Peirce/Logic_of_EDA.htm`)

House, P. (1999). Mathematical reasoning in the eye of the beholder. In Leo Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 175–187). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Lima, L. (2001). Diálogo em Janeiro com Elon Lages Lima. *Gazeta de Matemática, 140*, 5–16.

Nathanson, M. (2008). *Desperately seeking mathematical truth.* Disponível em `www.arxiv.org`.

Pirie, M (2006). *How to win every argument. The use and abuse of logic.* London: Continuum International Publishing Group.

Poincaré, H. (1909). *Science et méthode.* Paris: Flammarion.

Poincaré, H. (1905/1995). *O valor da ciência.* Rio de Janeiro: Contraponto.

Pólya, G. (1990a). *Mathematics and plausible reasoning. Induction and analogy in mathematics.* Vol. 1. Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1990b). *Mathematics and plausible reasoning. Patterns of plausible inference.* Vol. 2. Princeton: Princeton University Press.

Putnam, H. (1986). What is mathematical truth? In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 49–65). Boston: Birkhäuser.

Simon, M. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 197–210.

Steen, L. (1999). Twenty questions about mathematical reasoning. In Leo Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 270–285). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Sternberg, R. (1999). The nature of mathematical reasoning. In Leo Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 37–44). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Tasic', V. (2001). *Mathematics and the roots of postmodern thought.* New York: Oxford University Press.

Villiers, M. de (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad.* Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

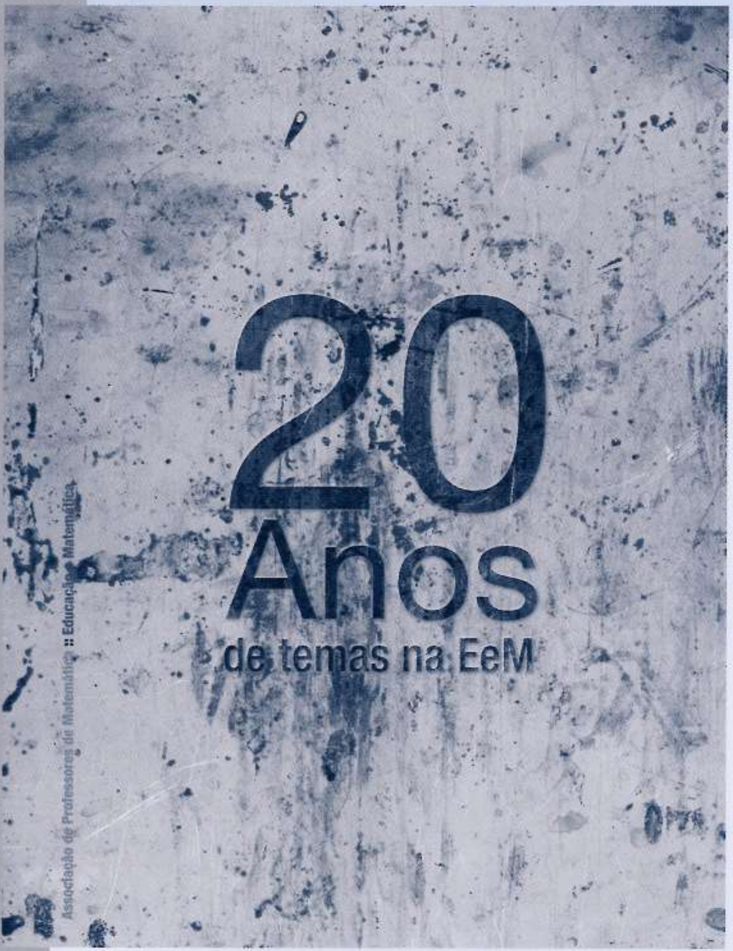
Paulo Oliveira
E. S. José Saramago

Raciocinar em ...

Durante muitos séculos prevaleceu a ideia de que, devido à natureza da Matemática, o estudo desta disciplina, em si mesmo, melhoraria, em geral, a capacidade de raciocinar. E assim, a associação entre matemática e raciocínio é algo a que estamos habituados. No entanto, o raciocínio é uma actividade da razão, ou seja prende-se com uma faculdade humana que permite conhecer, julgar e agir de acordo com determinados princípios.

Que pontos de contacto haverá entre raciocinar em Matemática e raciocinar noutras áreas? E que diferenças? Estas questões levaram-nos a considerar que seria interessante perceber como é que profissionais exteriores aos campos da Matemática e da Educação Matemática mobilizam o raciocínio nas suas actividades. Foi o que procurámos saber, propondo a pessoas de diferentes áreas que elaborassem um curto depoimento cujo mote foi Racionar em...

Agradecemos a todos a forma como gentilmente acederam ao nosso pedido, contribuindo, assim, para o nº 100 da Educação e Matemática.



Educação e Matemática: vinte anos de temas, vinte anos de pessoas

Edição APM, 2008 | PVP: 16,50€ Sócio: 11,00€

A *Educação e Matemática* celebrou vinte anos de existência em 2007. Ao longo deste tempo, foram vários os temas que mereceram atenção na revista. Estes vinte anos de revista são, por isso, vinte anos de muitos temas, mais de vinte certamente. Muitos deles estão retomados no livro que agora propomos:

1. *Aprender Matemática: Memorizar e mecanizar versus compreender e resolver problemas* — João Pedro da Ponte
2. *Literacia Matemática: Uma procura de contributos para formar cidadãos mais críticos e interventivos* — Cristina Loureiro
3. *A Matemática nos primeiros anos: Alguns desafios* — Lurdes Serrazina
4. *O professor de Matemática* — Isabel Rocha
5. *Avaliação das aprendizagens: Funções, forma, conteúdo* — Leonor Santos
6. *Matemática: Problemas antigos, uma perspectiva moderna* — António M. Fernandes
7. *O prazer dos problemas* — José Paulo Viana
8. *História e Ensino da Matemática* — Maria José Costa
9. *Geometria no ensino da Matemática: 20 anos da revista Educação e Matemática* — Nuno Candeias
10. *As funções: Um olhar sobre 20 anos de ensino e aprendizagem* — António Domingos
11. *Tecnologias na Escola* — Branca Silveira
12. *Cinco pontos fundamentais para transformar a educação matemática* — João Filipe Matos

Este livro reúne assim um conjunto de artigos originais que discutem e problematizam aspectos diversos da educação matemática no presente contexto educativo e curricular português, constituindo uma oportunidade para rever o passado recente e perspectivar os desafios do futuro próximo.

Mas estes vinte anos de revista são também vinte anos de pessoas, vinte anos de autores. Nos cem números que até hoje publicámos, existem cerca de 4 850 páginas, com cerca de 247 600 linhas, e aproximadamente 26 650 000 caracteres. Destes, quantos é que escreveu?

Pense nisto!

Ana Paula Canavarro,
Redacção da Revista Educação e Matemática

Resolvo problemas, logo penso

Leonor Moreira

O tema deste número da revista é o Raciocínio Matemático (RM) e supõe-se que eu discorra acerca do mesmo. Mas de que estamos a falar? Ao que parece, o RM não se deixa encaixar em nenhuma definição, isto é, não é possível atribuir-lhe significado, pelo menos de acordo com a ideia clássica de significado usado na teoria semântica. De facto, o RM não tem um conjunto de características definidoras necessárias e suficientes. Se, por um lado, tem semelhanças com outros tipos de raciocínio, por outro, há evidência de que, por exemplo, um bom solucionador de problemas de geometria pode ser um desastre na resolução de problemas de cálculo combinatório, não tanto porque os conteúdos são diferentes, mas, essencialmente, porque os processos subjacentes são completamente distintos[1].

Rodeemos então a dificuldade. Toda a gente sabe o que é resolver um problema: é o que se tem de fazer quando não se sabe o que se tem de fazer. Ou, de um modo mais académico, estamos perante uma situação problemática quando conhecemos um estádio da situação, pretendemos atingir um outro e não encontramos forma de o fazer. Duncker[2], em 1945, estabeleceu que se não conseguimos, por meio da acção, passar de uma situação dada para uma situação/objectivo, então temos de recorrer ao *raciocínio*. Logo, se a situação tiver um cariz matemático, teremos de recorrer ao *raciocínio matemático*, concluo eu. Portanto, falar de raciocínio matemático é falar de resolução de problemas matemáticos.

Parece haver consenso na ideia de que só se aprende a resolver problemas, resolvendo problemas (pelo menos, esta é a frase mais citada de George Pólya[3]) ou, como diz Seymour Papert, num âmbito mais alargado, aprende-se metendo as mãos na massa[4]. Aliás, uma ideia já anteriormente introduzida pelo médico e psicólogo suíço Édouard Claparède (1873–1940), um dos mais influentes europeus da escola da psicologia funcionalista que incentiva a atitude participante do educando.

Partindo destes pressupostos, e no sentido de propiciar aos alunos, mais oportunidades de desenvolverem o raciocínio matemático, a Escola Superior de Educação de Lisboa vem promovendo um concurso de problemas via internet, o Eureka, com duas vertentes: uma para o quarto ano de escolaridade e outra para o segundo ciclo[5]. É desse trabalho — e da experiência acumulada, ao longo dos anos — que resultam as observações e as reflexões que aqui vos deixo.

Na resolução de situações problemáticas, coexistem dois processos: a representação mental da situação e a resolução propriamente dita. Contudo, estes processos não são estanques nem se sucedem, inexoravelmente, um a seguir ao outro, antes se interpenetram e confundem[6]. O processo de resolução de um problema é como uma espiral em que cada volta representa uma representação mais rica, mais elaborada do que a anterior; cada volta corresponde a um passo em frente na compreensão da situação, mesmo que, por vezes, o suposto solucionador tenha de rejeitar a ideia, o procedimento, a conjectura que formulou, para recomeçar com algo diferente[7].

Quando confrontadas com um problema, as pessoas, têm dois tipos diferentes de comportamento. Umas tentam descobrir pistas, palavras como «mais», «menos», «vezes», «pobrezinhos»[8] porque pensam que estas as guiarão na selecção da operação ou operações a efectuar; de seguida, seleccionam números com os quais encetam as operações escolhidas. Isto é, calculam primeiro e pensam depois[9]. É o que alguns autores chamam de *estratégia da tradução directa*. A alternativa — *estratégia da construção de uma representação do problema* — consiste em dar sentido às diferentes asserções e combiná-las numa representação qualitativa do problema para, só depois, começar a seleccionar estratégias de resolução[10]. Neste tipo de estratégia, as pessoas averiguam da pertinência do que se pergunta em relação ao que sabe, identificam a informação relevante, dão sentido às relações entre as diferentes variáveis em presença, conjugam distintas condições do problema, em suma, constroem uma primeira representação mental do problema para, só depois, passarem à fase de resolução.

Larkin, citado por Silver (obra citada) contrastou as abordagens feitas por peritos e neófitos na resolução de problemas e notou que os primeiros, antes de tentarem qualquer estratégia de resolução, substituem o problema original por uma versão abstracta que retém a estrutura e as características do original e é esta versão que os guia na resolução do problema. Pelo contrário, os principiantes iniciam, imediatamente, uma análise quantitativa.

Para exemplificar o que acabo de afirmar, consideremos um dos problemas que os concorrentes do Eureka — 1.º ciclo tiveram de resolver em 2007:

Grande pescaria!

O João e a Rita foram pescar. E que tal foi a pescaria, apanharam 95 peixes! A Rita pescou quatro vezes mais peixes do que o João.

Quantos peixes pescou cada um?

Os alunos que usaram a estratégia de tradução «pescaram» o 4 *vezes* e dividiram o 95 por 4 (23,75), porque «quando diz vezes é para dividir». Os concorrentes que responderam desta forma, com ou sem justificação, nem sequer se aperceberam que não é normal pescar pedaços de peixes, sinal de que não construíram, nem *a posteriori*, uma representação da situação.

Muitos concorrentes resolveram o problema por tentativas, entre eles, o Pedro[11]:

(...) ou seja pegava num número e multiplicava por 4 e ao resultado somava-lhe o mesmo número até chegar ao total dos 95 peixes.

Exemplifico a partir do 15 (que foi onde comecei):

$15 \times 4 = 60; 60 + 15 = 75 \rightarrow$ Palpite errado
$17 \times 4 = 68; 68 + 17 = 85 \rightarrow$ Palpite errado
$18 \times 4 = 72; 72 + 18 = 90 \rightarrow$ Palpite errado
$19 \times 4 = 76; 76 + 19 = 95 \rightarrow$ Palpite certo

Isto é, este concorrente construiu uma representação mental da situação em que deu sentido às duas condições separadamente, impondo uma delas a partir de um número ao acaso, e verificando, em seguida, se a segunda condição do problema era, ou não, satisfeita. Um processo legítimo, mas que não assegura, por si só, se a solução é única. O concorrente deveria ter continuado a demanda da solução — o que lhe foi explicado — para ter a certeza de que não havia outra solução. De facto, na segunda resposta o concorrente justificou a não existência de mais nenhuma solução:

(...) à medida que os meus palpites aumentam, o valor da soma cresce cada vez mais e portanto vai-se afastando cada vez mais do 95.

Os concorrentes que construíram uma representação do problema mais refinada, conjugando as duas condições, precisaram de um suporte mais real, usando objectos do quotidiano para concretizarem a relação entre as partes e a relação destas com o todo. E, assim, começaram a construir o conceito de fracção. Vejamos uma dessas respostas, a do Paulo:

Para ficar mais fácil, pensei que se a Rita pescou 4 vezes mais peixes que o João, era como se ela tivesse 4 baldes cheios de peixe e o João, 1 balde. Assim, dividi o total por 5, o que dá o número de peixes por balde. Como o João só tem 1 balde, só tem 19 peixes. A Rita tem 4 baldes, ou seja, $4 \times 19 = 76$ peixes.

Ainda que a um nível elementar, esta atitude é consistente com os resultados de várias investigações em que se afirma que, no processo de resolução de problemas, as pessoas se envolvem em processos metafóricos para construírem representações mentais do problema, isto é, procuram analogias entre o problema e situações que lhes são familiares e usam essas analogias para construírem representações do problema[12].

Um problema com estrutura idêntica apareceu na final do Eureka — 2.º ciclo (2008)[13]:

Alguém anda a dormir pouco

Durante a noite, ouviu-se uma coruja a piar. O lobo Esfaimado dorme quando a coruja Sabichona está acordada e está acordado quando a Sabichona dorme. O Esfaimado dorme tanto numa semana quanto a Sabichona dorme num dia.

De acordo com estas informações, quantas horas por dia dorme cada um desses animais?

Este enunciado é mais elaborado, pois enquanto no problema anterior as condições estão explícitas, neste outro é necessário interpretar o enunciado para extrair as várias condições do problema: 1) a soma do número de horas dormidas por cada animal é 24; 2) o lobo dorme um sétimo do tempo que a coruja passa a dormir.

Vejamos, então, a resposta do mesmo Paulo, já com dois anos de experiência:

Se o Lobo só consegue dormir o que a coruja dorme ao fim de 7 dias então é porque num dia só dorme 1/7 do que dorme a coruja.

Para já, se utilizarmos a sétima parte vamos dividir o dia em 8 partes para ficarem 7 para a coruja e uma para o Lobo e, assim, a coruja fica a dormir 7× mas:

$$24 \div 8 = 3 \xleftrightarrow{3+3+3+3+3+3+3} +3$$

coruja lobo

R: A coruja dorme 21h por dia e o lobo 3h.

Verificação: 3 é a sétima parte de 21, como tal, o Lobo precisará de 7 dias (uma semana) para dormir tanto como a coruja num dia.

O concorrente, numa única frase, sintetiza as duas condições e não precisa de qualquer suporte para construir uma representação mental do problema, relacionando, imediatamente, as partes entre si e estas com o todo.

De notar, ainda, que o aluno termina com uma verificação, um dos aspectos que procurei incutir ao longo de todo o concurso.

No concurso Eureka, também não se aceitam respostas não explicadas. Pretendo com isso: 1) fomentar a reflexão sobre o que se faz e, assim, trazer a níveis superiores de consciência o que muitas vezes é feito quase inconscientemente; 2) aprender a convencer-se a si mesmo (e aos outros) da razoabilidade do que se faz e dos resultados a que se chega; 3) «fotografar» mentalmente estes momentos para que constituam uma reserva de experiência matemática. Esta actividade, de carácter metacognitivo — falar do que se pensou e fez — é, por ventura, uma das mais importantes para melhorar o raciocínio matemático.

Um outro problema da mesma final consistia em transformar uma mesa:

De rectângulo para quadrado?!

As refeições são servidas em mesas rectangulares cuja dimensão maior (comprimento) é o triplo da sua menor dimensão (largura).

Se a mesa tivesse menos 3 metros de comprimento e mais 3 metros de largura então o seu tampo teria a forma de um quadrado.

Quais são as dimensões da mesa?

Vejamos os dois tipos de resposta certa, completamente diferentes no estilo. Primeiro, a do Pedro, na tabela 1.

Na primeira tabela estão várias mesas rectangulares em que o comprimento é triplo da largura. Na segunda tabela estão as mesas que se obtêm tirando 3 metros ao comprimento e acrescentando 3 metros à largura. Olhando para as duas tabelas vi que a mesa inicial só podia ter 9 metros de comprimento e 3 metros de largura, pois só assim obtenho uma mesa quadrada.

Rectângulo

Comprimento	Largura
3	1
6	2
9	3
12	4
15	5

Quadrado

Comprimento	Largura
$3-3=0$	$1+3=4$
$6-3=3$	$2+3=5$
$9-3=6$	$3+3=6$
$12-3=9$	$4+3=7$
$15-3=12$	$5+3=8$

Tabela 1.

Também sei que não há mais nenhuma solução, porque a diferença entre o comprimento e a largura começou por ser 4, depois 2, depois obtive uma mesa quadrada e a seguir a diferença volta a ser 2 e a seguir 4 e vai aumentando.

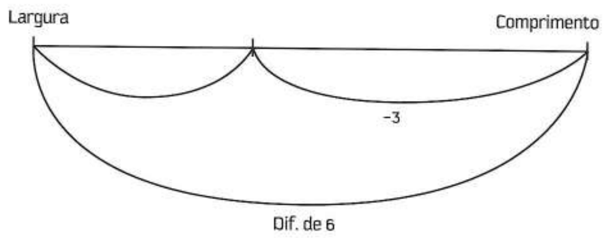
Passados dois anos, o Pedro já aprendeu que tem de mostrar que a solução que encontrou é única, mas continua a trabalhar as condições do problema separadamente.

Agora, prestem atenção à resposta do Paulo:

Para a segunda condição do problema é necessário que:

$$\text{Comprimento} - 3 \text{ metros} = \text{largura} + 3 \text{ metros}$$

Ora, se retirarmos 3 metros ao comprimento e ainda colocarmos 3 metros na largura, a diferença entre as duas medidas é 6 metros:



Agora, se o comprimento é o triplo da largura (1.ª condição), significa que a largura é 1 dos terços do comprimento:

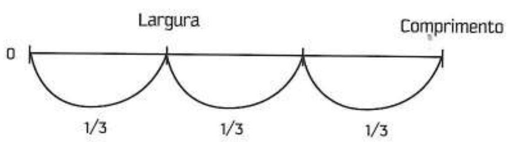


Figura 1

E também já sabemos que a diferença entre as duas dimensões é seis e acabamos de ver que a diferença entre as duas dimensões equivale a 2/3 do comprimento.

Então se 2/3 do comprimento é 6, 1/3 é 3 (o que equivale à largura) e o total é 9, que equivale ao comprimento.

R: O comprimento é 9 m e a largura é 3 m.

Verificação: 1.ª condição: 9 é o triplo de 3
2.ª condição: $9 - 3 = 6$ e $3 + 3 = 6$

Bom, o raciocínio deste miúdo e a capacidade de o explicar são impressionantes. Começa por combinar duas operações numa só: subtrair 3 a uma das variáveis e adicionar 3 à outra é o mesmo que adicionar 6 a esta última. Implicitamente, está a resolver uma equação. Depois, considerando o comprimento como a totalidade, não só relaciona a largura com aquele — invertendo a relação explícita no texto — como deduz a relação/diferença entre as duas medidas. E, finalmente, deduz, a partir do valor dos 2/3, o valor da totalidade. Tudo isto acompanhado de esquemas, não vá o professor/corrector não perceber o que ele está a dizer! Pode-se dizer que este aluno já desenvolveu uma compreensão de fracção a um nível conceptual e não, meramente, procedimental. Fiquei boquiaberta quando o chamei ao palco para receber o primeiro prémio, nunca o imaginei tão rapazinho, tal a qualidade das suas respostas! Afinal, ele acabava de completar o quinto ano de escolaridade e, no ano anterior, nem sequer tinha ficado colocado entre os cinco primeiros classificados!

No Eureka não descuramos os aspectos emocionais e psicológicos. Os concorrentes têm, sempre, uma segunda oportunidade de resposta — como já devem ter percebido — e recebem dicas para melhorarem as suas respostas ou ultrapassarem eventuais bloqueios.

Um dos problemas do Eureka (2.° ciclo) em 2008 era o seguinte.

Match Point

Um campeonato de ténis é disputado de acordo com o sistema *knock-out*, ou seja, o jogador fica fora do torneio quando perde uma partida.

Quantos jogadores participaram do campeonato se foram disputadas 31 partidas no total?

Quantas partidas serão disputadas num torneio se 55 jogadores estiverem inscritos?

Aos alunos que bloquearam apontei a seguinte pista: Por que não começas por pensar num problema mais simples?

Se fossem só dois jogadores, quantas partidas seriam precisas para apurar o vencedor?

E se fossem três? E no caso de quatro? E se fossem 5?

Esta sugestão ajuda a formular uma conjectura, isto é, a formular uma afirmação cuja veracidade parece razoável. Trata-se de particularizar, num primeiro momento, para depois generalizar. Averiguar da validade da generalização e, finalmente, aplicar ao caso concreto. Este processo completo constitui a essência do raciocínio matemático.

Atentemos numa resposta que usou a pista dada:

1. Ora, para chegar à resposta deste problema tem de se pensar em vários outros exemplos, os quais são:
   1 partida = 2 jogadores
   2 partidas = 3 jogadores
   3 partidas = 4 jogadores
   4 partidas = 5 jogadores
   Etc.
   Reparamos então que o número de jogadores é sempre igual ao número de partidas + 1.

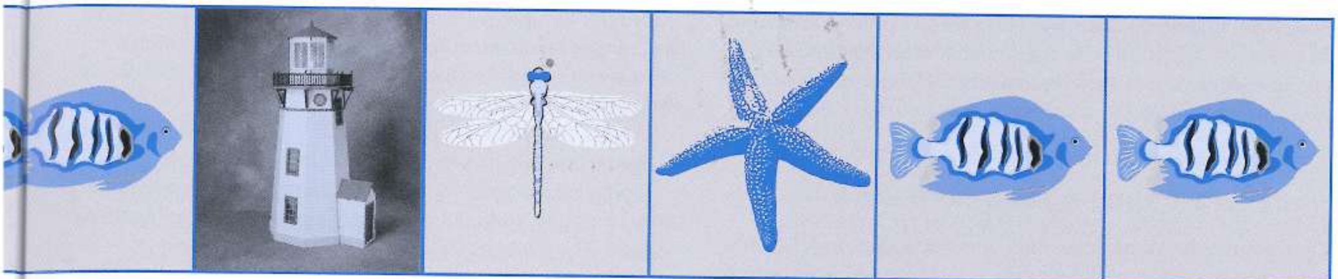
R: Participaram neste campeonato 32 jogadores.

2. A mesma coisa que o primeiro, só que desta vez:
   1 jogador = 0 partidas
   2 jogadores = 1 partida
   3 jogadores = 2 partidas
   4 jogadores = 3 partidas
   Etc.
   Concluímos que o número de partidas é sempre igual ao número de jogadores – 1.

R: Serão disputadas 54 partidas.

É claro que não foi provada, nesta resposta, a conjectura que o número de jogadores é igual ao número de partidas mais um. Talvez não tenha conseguido passar a ideia de que 4, 5, 30, 1000 casos que sejam, não são suficientes para se ter a certeza de que uma conjectura é válida e pode ser instituída como teorema.

Para confirmar a conjectura, a Sofia apresentou uma prova a que eu chamaria prática. Ela aproveitou uma suges-



tão já dada noutro momento e, por isso, começou o torneio do fim para o princípio:

Na final era só uma partida, por isso, participaram 2 jogadores.

Na 1\2 final, eram 2 partidas, logo 4 jogadores.
Nos 1\4 de final, havia 4 partidas, logo 8 jogadores.
Nos 1\8 de final, eram 8 partidas e por isso 16 jogadores.
Nos 1\16 de final, havia 16 partidas e 32 jogadores.

Ou seja, se somarmos o número total de partidas, vai dar 31 partidas, que era o número de partidas disputadas no campeonato, e, por isso, a resposta é 32 jogadores.

A Joana surpreendeu com uma resposta concisa que demonstra uma compreensão notável do problema e um raciocínio lógico inesperado, dada a idade dos concorrentes. Vejamos:

Se há 55 jogadores e só um ganha é porque perdem 54. Como só se pode perder uma vez, cada um dos 54 perde uma partida ou seja são necessárias 54 partidas para encontrar o vencedor.

Enquanto a resposta da Sofia usa uma estratégia de reconstrução, refaz o torneio fase a fase — ainda que do fim para o princípio — a Joana usa uma estratégia de redução, a concorrente pensa nos jogadores que saem e deduz o que teve de acontecer para saírem.

Concorrentes houve que não acharam possível haver 55 concorrentes, pelo facto do jogo se desenvolver em partidas entre dois jogadores. Foi-lhes, então, explicado que, embora os organizadores dos torneios comecem por inscrever um número par de jogadores, acontece, por vezes, alguns terem de faltar por lesão, ou abandonarem a competição, já com ela a decorrer. Isso não pode impedir os seus potenciais adversários de participarem. Depois, deste esclarecimento, a Inês organizou o torneio, segundo os cânones:

- Com 55 jogadores inscritos fazem-se 27 grupos de 2 jogadores (sobrando 1 jogador): realizam-se 27 partidas.

  Ficam seleccionados 27 jogadores + 1 jogador (que sobrou) = 28 jogadores.
- Com 28 jogadores fazem-se 14 grupos de 2 jogadores: realizam-se 14 partidas.

  Ficam seleccionados 14 jogadores.
- Com 14 jogadores fazem-se 7 grupos de 2 jogadores: realizam-se 7 partidas.

  Ficam seleccionados 7 jogadores.
- Com 7 jogadores fazem-se 3 grupos de 2 jogadores (sobrando 1 jogador): realizam-se 3 partidas.

  Ficam seleccionados 3 jogadores + 1 jogador (que sobrou) = 4 jogadores

  ... ...

E por aí fora até encontrar o vencedor, em 54 partidas.

Muitos matemáticos e investigadores pensam que «os padrões são a verdadeira essência da matemática»[14]. Goldin descreve, mesmo, a matemática como «a descrição e o estudo sistemáticos de padrões»[15]. Entre professores e investigadores em Educação Matemática, há uma forte convicção de que o trabalho com padrões — numéricos ou pictóricos — contribui para construir os alicerces do raciocínio algébrico[16]. No Eureka começámos por trabalhar com padrões pictóricos:

Um friso regular

O Sr. Joaquim, pedreiro, está a construir, em mosaicos, o friso de uma piscina (figura 1). Ora vê como está a ficar bonito.

Se o Sr. Joaquim mantiver sempre a mesma sequência, qual será o ladrilho que colocará a seguir?

Se o friso levar 130 ladrilhos, quantos peixes serão necessários? Se friso levar 134 ladrilhos, quantos ladrilhos com a libelinha serão necessários?

Também aqui houve vários tipos de resposta que correspondem a diferentes estádios cognitivos. Alguns concorrentes descobrem o padrão, a sequência que se repete, mas precisam de desenhar a totalidade do friso para descobrirem o número de peixes e de libelinhas necessários. Não conseguiram (ou não quiseram) trabalhar a um nível mais abstracto.

Entre os outros concorrentes, a resposta às duas primeiras questões não levantou problemas. Já a terceira pergunta tem vários tipos de resposta. Segue-se uma em que o concorrente parte do resultado obtido na questão anterior e concentra-se, apenas, nos quatro ladrilhos a mais:

A resposta é 27 libelinhas. Aproveita-se o mesmo cálculo da resposta acima dada: 130 : 5 = 26. Se em 130 ladrilhos 26 serão libelinhas, se colocarmos a seguir mais quatro ladrilhos, pela ordem, haverá mais uma libelinha, pois precisamente o quarto e último ladrilho corresponde ao lugar que a libelinha ocupa na sequência.

Alguns alunos, na terceira pergunta, recorrem, novamente à divisão:

Seguindo o mesmo raciocínio, dividimos 134 por 5 e obtivemos 26 e resto 4. Como em cada sequência de 5 há uma libelinha, e esta se encontra em quarto lugar na sequência, temos mais uma libelinha e assim $26 + 1 = 27$ libelinhas.

E que dizer da seguinte resposta?

São precisas 26,8 libelinhas, porque $134 : 5 = 26,8$.

O concorrente identificou bem a sequência e tudo correu bem com os peixes pelo facto do quociente ser um número inteiro. Se a divisão por 5 funcionou no primeiro caso, por que não voltar a fazê-la? O concorrente calculou antes de pensar e isso levou-o a esquecer-se que havia 134 ladrilhos inteiros e não bocados deles. Nesta situação, há três realidades: a totalidade dos ladrilhos, a sequência que se repete e os ladrilhos enquanto objectos individuais. Na resposta parece haver uma assimilação do objecto individual ao grupo/sequência — se este não é completo, o ladrilho só contribui com um bocado. Aparentemente, na sua experiência com a divisão como formação de grupos, nunca se confrontou com grupos incompletos em que tivesse de interpretar o que se passava ao nível dos elementos do grupo. Para este concorrente, a divisão inteira (ou euclidiana) não existe.

Uma convicção das crianças deste nível etário — que vem naturalmente das suas experiências anteriores — é que um problema tem sempre solução e esta é única. Convencê-los (e aos pais) de que a resposta está incompleta, quando apresentam uma só solução e o problema tem mais, é um caso bicudo. Mas não é sempre assim! No Eureka — 1.° ciclo (2007), o nono problema tinha uma infinidade de soluções:

No poupar é que está o ganho

No seu aniversário, deram ao Francisco um mealheiro e ele decidiu retirar da sua semanada, todos os dias, três moedas: uma de 5 cêntimos, outra de 10 cêntimos e ainda outra de 20 cêntimos.

Quando o mealheiro ficou cheio, o Francisco abriu-o e verificou que tinha um número exacto de euros, nem um cêntimo a mais, nem um cêntimo a menos.

Quantos dias demorou o Francisco a encher o mealheiro e quanto conseguiu economizar?

Depois de receber as primeiras respostas, a maioria com uma solução apenas — 7 euros, o menor número que satisfaz as condições do problema — enviei a seguinte mensagem: Tens a certeza de que o Francisco só economizou isso? Tão pouco?!

Foi um alerta e alguns concorrentes perceberam, então, que havia mais soluções, mas o tamanho dos mealheiros é limitado e a certa altura — aí pelas 120 moedas — achavam que era impossível o Francisco ter poupado mais dinheiro. A questão prática colidia com o modelo teórico: de facto não há informação para optar por esta ou aquela solução; teoricamente todas as soluções são boas.

O Gonçalo percebeu o que estava em causa e escreveu:

O Francisco retira todos os dias uma moeda de 5 cêntimos, outra de 10 cêntimos e outra de 20 cêntimos, o que dá 35 cêntimos por dia.

No dia em que o Francisco abriu o mealheiro este estava cheio e tinha uma quantia certa em euros.

Somando todos os dias 35 cêntimos, apenas no 20° dia dá conta certa, 7 euros.

Ao dia 40 dá 14 euros, ao dia 60 dá 21 euros, etc. De 20 em 20 dias reparei que dá sempre euros certos.

Como não sabemos a dimensão do mealheiro, pode haver várias respostas, pode ser 20 dias e 7 euros, 40 dias e 14 euros, 60 dias e 21 euros, etc.

Para dar conta certa somamos sempre 20 dias e somamos sempre 7 euros.

Mas havia quem resistisse em aceitar o modelo teórico... E houve um pai que teve uma atitude muito pedagógica:

(...) Punha-se, agora, outro problema — Qual a capacidade do mealheiro? Quantas moedas nele caberiam? E isso não nos é dito no enunciado.

Assim, com a ajuda do meu pai e de uma proveta graduada em cm^3, medimos o volume aproximado das três moedas (0,20 €; 0,10 €; 0,05 €).

Para isso, deitámos água na proveta até à marca de 5 cm^3 e depois depositámos as 3 moedas e verificámos que a proveta ficou a marcar 7 cm^3, pelo que as 3 moedas ocupam um volume igual a 2 cm^3 $(7 - 5)$.

Resolvemos fazer uma tabela em que se pode verificar que o mealheiro podia ficar cheio ao 20.° dia (7 euros) e a todos os seus múltiplos, tudo dependendo do número de moedas que lá coubessem, isto é, da sua capacidade.

E seguia-se a tabela que, por falta de espaço, não se reproduz aqui.

Na final do Eureka (2008), naturalmente satisfeito com o lugar alcançado na final, um concorrente não deixou de manifestar a sua perplexidade:

«Uma coisa que me deixa confuso é que, na escola, a minha colega M tem sempre melhores notas a matemática do que eu, mas, nas duas finais do Eureka, eu fiquei sempre muitos lugares acima dela!».

Os programas do Ensino Básico são bem explícitos. Ao elegerem, como capacidades transversais, a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação, expressam uma concepção da matemática mais como um processo do que como um produto, mais como um conjunto de ideias de que como um conjunto de regras e resultados. Os programas recomendam que os novos conceitos sejam introduzidos e trabalhados a propósito da resolução de problemas, mas muitos professores não acreditam no óbvio: as crianças são capazes de inventar procedimentos correctos para resolver muitas situações problemáticas, estão aptas para desenvolverem estratégias aritméticas ou outras, sem ensino formal, são capazes de adicionar e subtrair para resolverem problemas, antes de aprenderem, formalmente, aquelas operações, porque atendem ao conteúdo semântico da situação para construírem uma eficaz representação mental.

Vamos então deixar que as crianças desenvolvam atitudes e convicções que espelhem uma visão de uma matemática desafiante, criativa e interessante, uma matemática que faz raciocinar!

Notas

1 Sternberg, R. J. (1996). What is mathematical thinking? In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.) *The nature of mathematical thinking* (pp.303–318). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

2 Citado em Mayer, R & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.) *The nature of mathematical thinking* (pp. 29–53). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

3 Polya, G. (2003; 1945). *Como resolver problemas.* Lisboa: Gradiva.

4 Papert, S. (199). O computador, torta de barro. In *Educação e Matemática*, n.° 2, pp. 19–20.

5 Para mais pormenores, consulte, `http:/www.eselx.ipl/eureka` e ..../eureka1 e ... /eureka2

6 Silver, E. (1987) . Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction. In Alan Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and mathematics education* (pp. 33–60). Hilsdalle, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

7 Mason, J., Burton, L.& Stacey Kaye (1992; 1982). *Pensar matematicamente.* Madrid: M.E.C.

8 Lembrei-me que a professora do ensino primário do Eduardo Veloso, terá industriado os seus alunos para efectuarem uma divisão se no enunciado de algum dos problemas do exame aparecesse a palavra «pobrezinhos».

9 Ver, também: Moreira, L. (1987). A resolução de problemas. *Educação e Matemática*, n.°1, pp. 10–12.

Costa, L. B. (1990). A resolução de problemas: qual o estado das coisas? *Educação e Matemática*, n.°14, pp. 7–8 e 32.

10 Mayer, R & Hegarty, M. (1996). Obra citada.

11 Respeitei, sempre, nas transcrições, a grafia e a pontuação originais. Os nomes nem sempre são os verdadeiros, por motivos que se entendem.

12 Ver: Clement, J. (1983). *Analogical problem solving in science and mathematics*. Montreal: A.E.R.A.

Carreira, S. (1998). *Significado e aprendizagem da matemática — dos problemas de aplicação à produção de metáforas conceptuais.* DEFCUL: tese de doutoramento (policopiada).

13 De notar que 90% dos alunos presentes na final deste ano já tinham concorrido no ano anterior (2007) e, portanto, já tinham a experiência da pescaria.

14 Sandfurd and Camp citados por Samsom, D. (2007). Patterns of visualization. *Learning & Teaching Mathematics*, n.° 5, pp. 4–9.

15 Citado por Samsom, D. & Shafer, M. (2007). An analysis of the influence of question design on learners' approaches to number pattern generalisation tasks. Pythagoras, n.° 66, pp. 43–51.

16 Moreira, L. (1990). Os alicerces do pensamento algébrico. *Educação e Matemática*, n.° 16, pp. 17–18.

Leonor Moreira

Raciocinar em ... Arquitectura

Em arquitectura o raciocínio analítico conjuga-se com a imaginação formal. É necessário interpretar correctamente o programa, nas suas várias vertentes — funcional, construtiva, técnica — mas ao mesmo tempo visualizar as formas, os espaços, a sua organização, o modo como serão utilizados.

Esta imaginação tem que ser condutora, o mero tratamento dos aspectos funcionais é estéril como Arquitectura. Antes da análise detalhada do programa, o arquitecto observa e estuda outros aspectos — o lugar e a envolvente do futuro edifício, sistemas de vistas e orientação solar, relação com as vias de acesso... Dessa observação nasce a primeira ideia, embrião da forma que o edifício quer ter. Depois, começa a luta pela conquista da forma final, cruzamento da primeira ideia com as necessidades do programa, da forma-função, dos custos e métodos de construção, do diálogo com as engenharias, etc.

Nesse processo, o arquitecto raciocina pelo desenho — rigoroso ou esboçado à mão livre, em apontamentos de perspectiva, com ou sem régua, medidas ou auxiliares geométricos. Pensa graficamente — num processo inteiramente intuitivo e interiorizado, «under my skin», que permite pensar e ver, ver e pensar, e que não é, de todo, separável do exercício do seu mister — um arquitecto pensa com e pelo desenho.

Sérgio Pinhão **[Arquitecto]**

Raciocínio no novo programa de matemática

O Programa de Matemática do Ensino Básico, recentemente homologado, tem a particularidade de apresentar, pela primeira vez, «três grandes capacidades transversais» a par com os temas matemáticos em vez de a propósito dos temas matemáticos como tem sido regra até aqui nos documentos curriculares oficiais portugueses. Entre estas três capacidades a que é dado um lugar de destaque, está o raciocínio matemático.

Dado o tema desta revista, pediu-se a alguns colegas que, de forma mais formal, já começaram a trabalhar com este programa, uns como formadores outros como experimentadores, que dessem o seu contributo para este número escrevendo sobre: Como é que os novos programas do Ensino Básico contemplam a questão do raciocínio matemático? Apresentam-se aqui os textos com que cada um dos colegas respondeu ao nosso desafio.

Depoimento 01

Discutindo tarefas tendo por horizonte o raciocínio matemático

Teresa Olga Duarte

O raciocínio matemático é uma capacidade que todos os alunos, em todos os ciclos de ensino, têm que ter oportunidade de desenvolver. A ideia de que esta capacidade só está ao alcance de alguns alunos, *com maior aptidão* para a Matemática, tem que ser combatida, bem assim como aquela que a associa a um nível etário mais alto, por se pensar que os alunos dos primeiros anos não têm maturidade matemática para se envolverem neste tipo de trabalho.

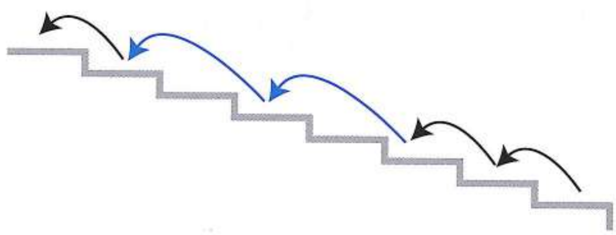
Uma leitura do Programa de Matemática do Ensino Básico deixa bem claro que esta capacidade, bem como as outras duas lá explicitadas, a resolução de problemas e a comunicação matemática, deve ser desenvolvida nos alunos desde a sua entrada no primeiro ano e constitui ao mesmo tempo um objectivo de aprendizagem e uma orientação metodológica para o trabalho a realizar na sala de aula.

> Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e promover o raciocínio e a comunicação matemáticos, para além de constituirem objectivos centrais neste programa, constituem também importantes orientações metodológicas para estruturar as actividades a realizar em aula. (...) o professor deve dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas.
>
> *Programa de Matemática do Ensino Básico*, p. 9

Subindo escadas

A casa do João tem uma escadaria com 10 degraus. O João sobe-a de diversas maneiras, dando passos de um degrau ou saltando por cima de um degrau.

De quantos modos diferentes pode o João subir as escadas nestas circunstâncias?



Adaptado por Ana Boavida, Hélia Oliveira, Leonor Santos e Susana Carreira de uma tarefa do *site:*

`http://nrich.maths.org`

Uma estratégia possível é começar por considerar uma escada mais pequena, com um degrau, com dois degraus e, por diante, até se conseguir estabelecer uma conjectura.
Em seguida, o objectivo é validar a conjectura, apresentando argumentos que justifiquem a sua veracidade sem qualquer dúvida.
Este processo é muitas vezes utilizado na resolução de problemas e nas investigações, pelo que os alunos devem ser confrontados com ele, em diferentes situações.

Tarefa 1

A concretização do que atrás está preconizado não é fácil, principalmente quando os professores trabalham sozinhos com os seus alunos, não discutindo ideias, não confrontando pontos de vista, nem partilhando experiências. Uma virtude indiscutível que pode ser atribuída ao Plano da Matemática é, exactamente, o facto de ter proporcionado, em muitas escolas, uma nova dinâmica de trabalho entre os professores, começando a reunir semanalmente, a realizarem planificações em conjunto e a partilharem a sala de aula.

Este é o caminho que poderá levar a uma alteração efectiva do insucesso em Matemática, pois o facto de os professores trabalharem uns com os outros em cada escola e manifestarem a vontade de melhorar as suas práticas a partir das experiências e das discussões que vão conhecendo e fazendo, é o principal meio para criar uma nova motivação dos alunos e dar resposta aos seus interesses e dificuldades.

O desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos é um objectivo que exije a convicção dos professores sobre a sua importância e a troca de ideias sobre a forma de o concretizar. Esta concretização inclui a definição clara do tipo de trabalho que se deve desenvolver em cada ciclo e que é adequado ao nível etário e de conhecimentos dos alunos, sem que isso signifique uma subvalorização das suas capacidades, como muitas vezes acontece.

Considerando, agora mais especificamente, o 3° ciclo, pode ler-se no Programa o que se entende por raciocínio matemático:

> Ao realizarem explorações e investigações, os alunos raciocinam indutivamente quando procuram generalizar propriedades encontradas num determinado conjunto de dados. As suas experiências matemáticas devem permitir-lhes identificar exemplos, contra-exemplos, definições, convenções, propriedades deduzidas e demonstrações. Neste ciclo de ensino, os alunos realizam cadeias curtas de deduções quando resolvem problemas e quando fazem demonstrações simples, tanto de resultados clássicos (como o teorema de Pitágoras) como de resultados das suas investigações.
>
> Prevê-se uma aprendizagem progressiva dos métodos de demonstração. Para tal, devem ser criadas oportunidades para os alunos elaborarem raciocínios dedutivos do tipo *Se … então …* Em todos os temas, o professor deve decidir da oportunidade de demonstrar certos resultados e de organizar as etapas de investigação e demonstração. Um outro aspecto do raciocínio matemático é a capacidade de argumentação apoiada em procedimentos, propriedades e conceitos matemáticos. Para o desenvolvimento desta capacidade é essencial estimular os alunos a fundamentarem matematicamente as suas afirmações, em todas as actividades matemáticas que realizarem. (p. 63)

Segmentos no geoplano

Considere geoplanos de diferentes áreas (1×1, 2×2, 3×3, ...) e segmentos obtidos a partir da união de dois pregos. Para cada um dos geoplanos, quantos segmentos com diferentes comprimentos se podem identificar?

Adaptado por Ana Boavida, Hélia Oliveira, Leonor Santos e Susana Carreira de *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, 2007, p. 314.

O principal interesse desta tarefa está no facto de ela proporcionar uma experiência aos alunos, bastante diferente da anterior, pois se, por exemplo, se construir uma tabela em que aos diferentes geoplanos estejam associados o número de comprimentos diferentes que se podem contar, surge também uma conjectura. No entanto, quando se vai proceder à sua validação verifica-se que ela não é válida e que se consegue encontrar um contra-exemplo que mostra a sua falsidade.

Tarefa 2

Para concretizar as ideias apresentadas neste excerto do Programa é necessário diversificar o trabalho que se propõe aos alunos, e torná-lo continuado ao longo do ciclo. As duas tarefas que se seguem valem apenas como dois exemplos dos muitos que se poderão analisar e discutir, neste âmbito.

Numa reunião de Acompanhamento do Plano da Matemática, a discussão da primeira tarefa revelou-se bastante interessante, pois de início os professores só apresentavam, como estratégia de resolução, o recurso ao cálculo combinatório, o que não era acessível aos alunos do 3° ciclo. A descoberta de outras estratégias, o resultado inesperado, à partida, a que chegaram e a sua justificação deram origem a uma discussão extremamente rica, observando-se um grande entusiasmo quer na resolução quer na discussão. Os professores presentes aperceberam-se que terão eles próprios que desenvolver uma actividade matemática mais activa do que a que usualmente realizam e que é muito colada a questões de aplicação directa de conteúdos, não obrigando à definição de estratégias de resolução, pois estas são previamente conhecidas. A importância da definição de estratégias foi muito discutida, sendo os professores unânimes em concordar que os alunos são pouco sujeitos a este tipo de trabalho e que esta discussão os fez aperceberem-se de como eles próprios estão «programados» para uma ou duas resoluções «tipo». Foi visível que esta tarefa levou os professores a reflectirem sobre o trabalho que desenvolvem com os seus alunos e sobre a necessidade de introduzir situações que contribuam para o desenvolvimento do seu raciocínio matemático. Nesta discussão foi ainda referido que o modo como o professor resolveu a tarefa que está a propor aos seus alunos pode determinar a orientação que ele lhes dá na sala de aula, pelo que se revela de extrema importância a preparação deste tipo de aulas, tentando o professor previamente encontrar diferentes estratégias de resolução para poder apoiar as diferentes abordagens à situação que os alunos possam fazer.

Quanto à 2ª tarefa é importante que os alunos percebam que, apesar de ser importante partir da experimentação de alguns casos, em muitas situações que se colocam, é necessário validar com segurança as generalizações que se fazem a partir destas observações. Os alunos devem ser habituados a serem saudavelmente desconfiados, não confundindo conjecturas com afirmações verdadeiras e, como é referido nas Normas de 2007:

> Com alguma frequência, os alunos deverão discutir o seu raciocínio com o professor e os colegas, explicando em que se basearam para formular as suas conjecturas e a lógica das suas afirmações matemáticas. Através desta prática, os alunos deverão tornar-se mais competentes na utilização adequada do raciocínio indutivo e dedutivo. (p. 310)

Teresa Olga Duarte
Escola Secundária c/ 2º e 3º Ciclos Alfredo da Silva

Depoimento 02

As actividades de investigação... um contributo para o desenvolvimento do raciocínio

Isabel Gorgulho

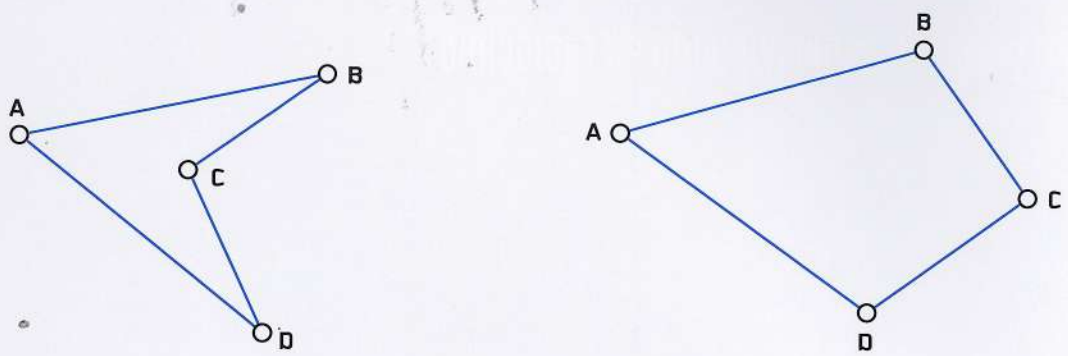
A ideia de que aprender Matemática é fazer Matemática reúne hoje uma grande unanimidade entre os educadores matemáticos. Pressupondo uma identificação entre aprender Matemática e compreender a sua natureza, esta ideia traduz as perspectivas actuais de que aprender é sempre produto de uma actividade. Na actividade Matemática dos alunos, as investigações devem merecer um lugar destacado.

Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes (1999, p. 71)

Ao analisar o Programa actualmente em vigor e o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico, verifica-se que em ambos são feitas referências ao Raciocínio Matemático como uma das capacidades a desenvolver.

No documento Programa de Matemática para o 3.° ciclo (1991) o desenvolvimento do raciocínio surge somente no início do documento como um objectivo Geral e como uma *capacidade/aptidão*. Já no Programa de Matemática do Ensino Básico que agora se propõe e que cuja experimentação já teve início com algumas turmas piloto, o raciocínio apresenta-se como uma capacidade transversal a desenvolver ao longo dos três ciclos e que deverá estar presente em todos os temas. De facto, analisando com maior detalhe o programa destinado ao 3.° ciclo, verifica-se que em todos os temas são sugeridas tarefas essenciais ao desenvolvimento do raciocínio, nomeadamente: (i) resolução de problemas, (ii) tarefas de investigação e exploração e (iii) formulação de conjecturas. Também os recursos sugeridos trazem um contributo importante para a concretização das tarefas de natureza *não rotineira*.

Recorda:



Polígono côncavo
O prolongamento de dois lados atravessa o polígono.

Polígono convexo
O prolongamento de qualquer lado não atravessa o polígono.

Figura 1.

No final da secção destinada ao 3.º ciclo o raciocínio matemático é referido como sendo (i) uma capacidade transversal, (ii) um propósito principal de ensino e (iii) um objectivo geral de aprendizagem. Mas a importância e o peso que é dado ao desenvolvimento do raciocínio torna-se ainda mais evidente na página 64 onde são apresentados os objectivos específicos do *Tópico: Raciocínio matemático*, que consiste entre outros em (i) formular, testar e demonstrar conjecturas, (ii) identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo e (iii) seleccionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração.

Em paralelo com os objectivos são também apresentadas sugestões para a sua concretização, nomeadamente:

> Proporciona situações em que os alunos raciocinem indutivamente (formulando conjecturas a partir de dados obtidos na exploração de regularidades) e dedutivamente (demonstrando essas conjecturas).

Quando se apela à capacidade de investigar e descobrir propriedades e conceitos matemáticos, os recursos e as tarefas que se disponibilizam aos alunos deverão ser potenciadores do desenvolvimento dessas capacidades, nomeadamente e como refere o documento *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), *as tecnologias são um contributo fundamental no ensino da Matemática, ao facilitarem a visualização de ideias matemáticas, a organização e análise de dados*.

Vejamos então um exemplo de uma tarefa de Geometria aplicada a uma turma de 7.º ano, com o recurso a um ambiente de geometria dinâmica, cujo objectivo se prende com a exploração de polígonos convexos e a descoberta de processos para encontrar a soma dos seus ângulos internos. As duas primeiras questões sugerem, aos alunos, que desenhem um quadrilátero, um pentágono e um hexágono, convexos, e que para cada um deles calculem a soma dos seus ângulos internos. A noção de polígono convexo e polígono côncavo foi apresentada (figura 1) no início do enunciado da tarefa.

O João e o Daniel desenharam os polígonos que eram pedidos, sempre com a preocupação de verificar se estes se mantinham convexos. No entanto, quiseram verificar o que acontecia quando o polígono era côncavo.

> *Daniel* — Deixa-me medir João.
> *João* — Agora, temos de somá-los.
> *Daniel* — Sim, eu somo.
> *João* — E agora? Temos de mover um dos vértices.
> *Daniel* (movendo o rato) — O valor da soma também se mantém.
> *João* — Só se mantém se tu fizeres convexo, tenta lá fazer sem ser convexo. Vês, isso muda logo.
> *Daniel* — O que se conclui é que basta ser convexo e o valor da soma mantém-se. Stôra, já detectámos um erro nesta coisa, é que sendo convexo o valor da soma mantém-se sempre.

O João e o Daniel construíram um contra-exemplo. Através da manipulação com o *Geometer´s Sketchpad*, transformaram polígonos convexos em côncavos para, segundo eles, verem o que é que acontecia. Assim, verificaram que o valor da soma dos ângulos internos não se mantinha.

Nas questões seguintes, era pedido que relacionassem a decomposição dos polígonos em triângulos e a soma dos seus ângulos internos. Para tal, apresentou-se um quadrilátero já decomposto (figura 2) e pedia-se que os alunos justificassem esta decomposição.

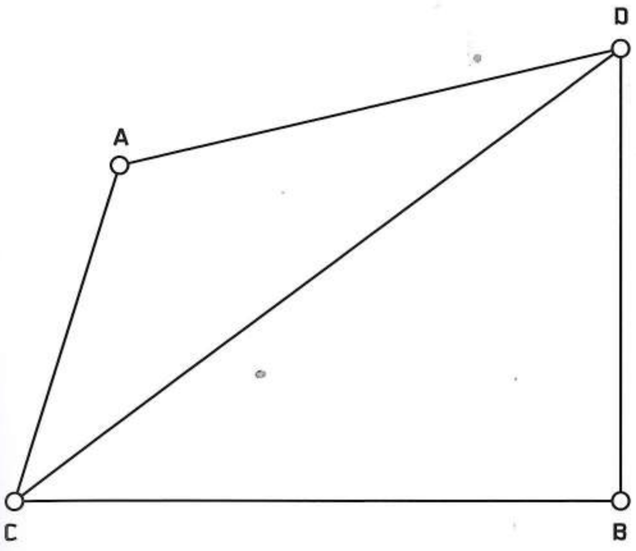


Figura 2.

Resolveram desenhá-lo com o auxílio do *Geometer's Sketchpad*.

João — É convexo, mas não tem quatro lados, isto aqui conta como lado não é?

Daniel — Isso foi ele que decompôs.

João (pegando no rato) — Agora vamos ver os ângulos. É melhor. Dá 360°. "Completa tu essa justificação" Stôra, o que é que nós temos de fazer aqui?

Professora (aproximando-se) — O Rui descobriu que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero era 360° e resolveu tentar perceber porquê, então decompôs o quadrilátero. Sabem o que é decompor?

Daniel — Sim.

Professora — Depois dessa decomposição foi justificar porque é que dava 360°.

Daniel — Ah! É por causa da soma dos lados do triângulo dá sempre 180° e dois triângulos 180 + 180 dá 360. Estás a ver João?

Professora — Dos ângulos, a soma dos ângulos.

Procederam da mesma forma para o pentágono e no relatório registaram:

A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180°. Então o Rui uniu dois triângulos formando um quadrado. Então 180° mais 180°, que é a soma dos dois triângulos dá 360°.

Nós decompusemos o pentágono e transformámo-lo em três triângulos.

180° × 3 = 540° que é o valor dum pentágono convexo.

Quando estão a utilizar um programa de geometria dinâmica os alunos validam as suas descobertas normalmente através da manipulação. Parece ser, talvez, necessário um trabalho mais longo no tempo, para que a validação e a demonstração de conjecturas entre de forma natural nos processos de investigação utilizados pelos alunos.

Referências

Silva, A., Veloso, E., Porfírio, J. e Abrantes, P. (1999). O Currículo de Matemática e as Actividades de Investigação em Abrantes, P., Ponte, J.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Teston, VA: NCTM.

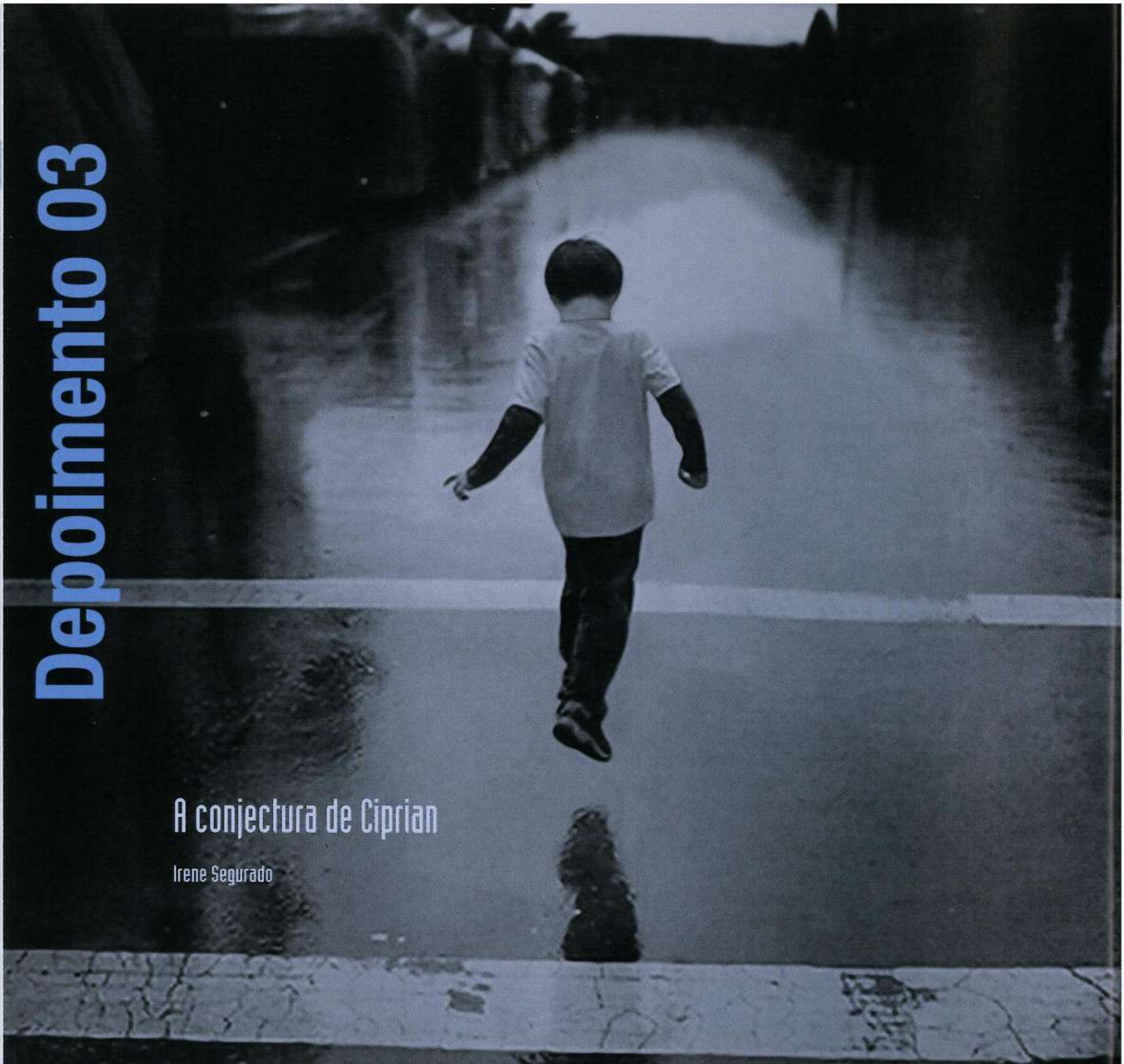
Ministério da Educação. Reforma Educativa e Direcção Geral dos Ensinos Básicos e Secundário. (1991b). *Organização curricular e programas: Ensino Básico 3° Ciclo* (II). INCAM EP: Lisboa.

Gorgulho, I. (2005). *Actividades de carácter investigativo em ambientes de geometria dinâmica — Um estudo com alunos de 6.° e 7.° anos*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Ponte, J. *et al* (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. DGIDC: Lisboa

Isabel Maria Aleixo dos Reis Gorgulho

Escola Básica dos 2.° e 3.° Ciclos de Aranguez



Depoimento 03

A conjectura de Ciprian

Irene Segurado

Do novo Programa de Matemática, que me encontro a leccionar numa turma piloto de 5° ano, para além dos critérios de divisibilidade por 2, 5 e 10 passaram a fazer parte também os critérios de divisibilidade por 4, 3 e 9. A aula que dei, sobre os referidos critérios, foi planificada de modo a que estes não fossem simplesmente transmitidos e posteriormente treinados, mas que houvesse algum envolvimento por parte dos alunos. Estava ciente que os critérios de divisibilidade por 4, 3 e por 9 dificilmente seriam descobertos e que teria de ter neste caso um papel mais interveniente. Da tarefa criada para o efeito consta uma grelha (figura 1) que foi analisada e discutida primeiramente (parte não sombreada) e depois completada pelos alunos (parte sombreada). Era esperado que estes descobrissem:

- os números pares são divisíveis por 2
- os números que têm 0 ou 5 nas unidades são divisíveis por 5
- os números que são divisíveis por 10, também são divisíveis por 5
- os números que são divisíveis por 9 também são divisíveis por 3
- os números que são divisíveis por 4 também são divisíveis por 2

para depois os conduzir aos critérios de divisibilidade. Contudo, sem interferência da minha parte, provavelmente porque já o sabiam, os alunos, enunciaram o critério de divisibilidade por dois «todos os números terminados em 0, 2, 4, 6

Figura 1.

Número	:2	:4	:5	:10	:3	:9
116	X	X				
69					X	
126	X				X	X
1028	X	X				
2012	X	X				
125			X			
71						
250	X		X	X		
1764	X					
1740						
3267						
6123						
8256						
	X		X	X	X	

ou 8 são divisíveis por dois» ou «todos os números pares são divisíveis por 2». Também os critérios de divisibilidade por 5 e por 10, respectivamente: «todos os números terminados em 5 ou 0 são divisíveis por 5» e «todos os números terminados em 0 são divisíveis por 10», foram referidos por parte de alguns alunos. Paralelamente foram também surgindo justificações: «basta ver a tabuada dos 5 é sempre 0, 5, 0, 5», «a do 10 termina sempre em 0», «...um número divisível por 10 também é por 5...». E assim rapidamente se chegou às conclusões pretendidas e foram registados os critérios de divisibilidade para 2, 5 e 10. Embalada por estas «cantilenas» que há anos me venho habituando a ouvir, fui deixando a aula avançar sem grande preocupação de justificações um pouco mais elaboradas.

Chegada a altura de introduzir o critério de divisibilidade por 4, pedi aos alunos que observassem com atenção os números que na tabela eram divisíveis por 4. Estes, seguindo a mesma lógica das afirmações que haviam feito para os números divisíveis por 2, 5 e 10 referiram: «são os números pares», «são os números terminados em 6, 8, 2, 0, 4». Fui contrapondo, procurando contra-exemplos na própria tabela. A Maria bastante perspicaz, afirmou «pois é, todos os que são divisíveis por 4 são pares mas nem todos os pares são divisíveis por 4». Pedi-lhes então que observassem não só o último dígito mas os dois últimos dígitos. Depois de algum silêncio ouvi «já sei tem de ser um número da tabuada dos quatro» o que alguns colegas corrigiram «múltiplo de quatro». Depois de se verificarem mais alguns exemplos avancei com o critério: «um número é divisível por 4 se o número formado pelos dois últimos algarismos desse número for múltiplo de 4». Neste momento, o Ciprian referiu: «também podemos ver se tirarmos quarenta aos dois últimos números». Ainda estava a pensar no que o Ciprian havia dito já a Maria afirmava: «não podes tirar quarenta quando o número é menor que quarenta». Aproveitando a silêncio do Ciprian, referi que este tinha alguma razão mas avancei. Era meu objectivo terminar os critérios naquela aula. Contudo, senti de imediato que havia feito uma opção errada.

Assim, iniciei a aula seguinte colocando aos alunos, de novo, a conjectura apresentada pelo Ciprian. Pedi-lhes que pensassem um pouco mais sobre o que o colega havia conjecturado na última aula. Depois de testarem alguns exemplos aceitaram que o Ciprian tinha razão, nos casos em que era possível tirar quarenta. Solicitei então à turma que procurasse uma justificação para o facto de, ao tirarmos quarenta, a um número divisível por quatro, este se manter divisível por quatro. Em virtude de não obter nenhuma resposta, nem do próprio Ciprian, questionei os alunos se o número 40 era divisível por 4. A resposta foi imediata: «sim». Neste momento houve algum burburinho na aula. Os alunos falavam com os seus colegas do lado havendo várias intervenções da qual registei apenas uma: «se tirarmos um múltiplo de 4 ficamos com um múltiplo de 4». A discussão tornou-se neste momento pouco organizada, os alunos iam falando sem esperar pela sua vez referindo-se a outros números, múltiplos de quatro que também se poderiam retirar. Para terminar com a confusão gerada, pedi à Adriana para resumir o que tinham descoberto. E mais uma vez fui surpreendida: «estivemos a ver que o que o Ciprian descobriu é útil pois o maior número em que termina um múltiplo de quatro é no 96, se a 96 tirarmos 40 ficamos com um número nosso conhecido da tabuada».

Este episódio levou-me a reflectir sobre como, por vezes, deixamos «fugir» nas nossas aulas oportunidades de levar os alunos a desenvolver a sua capacidade de raciocínio. Apesar da aula ter sido pensada numa perspectiva de formulação e testagem de conjecturas, momentos como estes, que partem da intervenção dos alunos, são uma mais valia significativa do processo de ensino-aprendizagem. Toda a discussão que se desenvolveu em torno da conjectura do Ciprian conferiu, de certo, maior significado às aprendizagens efectuadas pelos alunos.

Irene Segurado
Escola Básica 2,3 de Montelavar

Raciocinar em ... Ciência

Os princípios científicos são estabelecidos através do método hipotético-dedutivo, que difere da lógica pura. O conhecimento é obtido por recolha de dados através de observação e experimentação, por formulação de hipóteses explicativas de fenómenos, concepção de estudos experimentais para confirmar ou infirmar essas hipóteses, num processo iterativo de tentativa e erro, susceptível de avaliação pelos pares. Neste processo, para além da familiarização com a natureza da ciência e com o método experimental, aptidões de raciocínio dedutivo, flexibilidade intelectual, perseverança, e fluência na utilização da Matemática, é crucial o raciocínio crítico, ou seja, o processo intelectual disciplinado através do qual, de uma forma activa, se conceptualiza, aplica, analisa, sintetiza e/ou avalia informação oriunda da observação, experimentação, reflexão, dedução ou comunicação.

A todo este tipo de raciocínio mais ou menos estruturado há que acrescentar aquela centelha que muitas vezes permite abrir portas não imaginadas: a capacidade de identificar o significado mais profundo de uma ocorrência ocasional ou de uma observação fortuita.

Maria João Marcelo Curto **[Química]**
Directora do Departamento de Tecnologias de Indústrias Químicas — INETI

Materiais para a aula de Matemática

O Preço da TV

O material de sala de aula que aqui se apresenta foi adaptado, de uma das subcomponentes da parte oral de um exame de Matemática do 9° ano da Suécia.[1]

Nesta prova oral os alunos suecos são avaliados pela compreensão, pela linguagem oral e pelo seu grau de participação.

O que aqui se propõe é que cada aluno receba o enunciado de um problema — *O Preço da TV* — que não precisa de resolver. Os alunos dispõem de alguns minutos para compreender o problema e se familiarizar com a situação. De seguida, recebem um conjunto de resoluções para o problema. O professor atribui a cada um dos alunos uma das resoluções e estabelece a ordem pela qual cada um irá intervir. É pedido a cada aluno que apresente a que lhe coube, e que justifique porque a considera correcta ou incorrecta. Depois de cada apresentação o resto da turma pode comentar, apoiar ou contestar cada apresentação.

A realização desta tarefa promove nos alunos a compreensão dos conceitos envolvidos e a comunicação matemática com recurso a linguagem matemática.

Uma extensão da tarefa tal como está apresentada, poderá ser pedir aos alunos que comparem as resoluções n°s 3, 4 ,5 e 7: Quais as semelhanças? Quais as diferenças? Haverá, de entre estas resoluções, umas "melhores" que outras?

Podem ainda ser colocadas questões como:

— e se a percentagem fosse 20% de aumento e 20% de redução?

— e se fosse 20% de aumento e 10% de redução?

Ana Luísa Paiva
Esc. Sec. com 3° Ciclo Padre António Vieira

[1] Mathematics Test, Year 9, Spring 2004 — Part A — Oral Part, Stockholm Institute of Education, Skolverket. Outras informações sobre os testes nacionais na Suécia podem ser encontradas em Ponte *et al.* (2006). *Programas de Matemática no 3° Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: CIE-FCUL/APM.

O Preço da TV

O preço de uma TV aumentou 25%.
Qual a percentagem de redução que o novo preço precisa de ter para que o televisor volte a ter o preço inicial?

Lê atentamente o problema. Não precisas de o resolver apenas de o compreender.

Irás receber um conjunto de resoluções deste problema feitas por outros alunos.
Dá especial atenção à resolução que te coube.

- Parece-te uma boa solução? Explica porquê.
- Como achas que o aluno que resolveu o problema raciocinou.

Quando os teus colegas terminarem de apresentar as resoluções que lhes couberam, poderás manifestar-te sobre elas, por exemplo, comentando-as, colocando questões ou pedindo explicações e justificações.

Resoluções:

1.

A TV custa inicialmente 500 €

$\frac{500}{2} = 250 \qquad \frac{250}{2} = 125$

$500 + 125 = 625$

$625 - 500 = 125$

125 é 25% de 500

Resposta: O preço tem que ser reduzido 25%

2.

Depende do custo da TV porque 25% de 1000 € é mais do que 25% de 200 €

Resposta: Depende do custo da TV

3.

Supondo que a TV custa 1000 €

25% de 1000 é 250

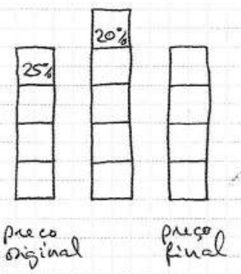
Então a TV custa 1250 €

25% de 1250 é 312,5 €

20% de 1250 é 250

Resposta: O preço tem que ser reduzido 20%

4.



preço original   preço final

Resposta: O preço tem que ser reduzido 20%

5.

Assumindo que a TV custa 1000 €, para simplificar,

$25\% = \frac{1}{4}$ $\frac{1000}{4} = 250$ €

1000 € + 250 € = 1250 € 1250 € = 100%

$\frac{1250€}{100\%} = 12{,}50$ € = 1% $\frac{1000€}{12{,}5€} = 20\%$

Resposta: O preço tem que ser reduzido 20%

6.

Preço inicial a€

Aumento 25% factor 1,25

Novo preço 1,25a

Redução factor x

Equação para o preço inicial $1{,}25a \times x = a$

$x = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$

Uma redução de $1 - 0{,}8 = 0{,}2 = 20\%$

Resposta: Uma redução de preço de 20%

7.

Primeiro o preço foi aumentado de 800€ para 1000 €

Depois o preço foi reduzido x%

$\frac{x \times 1000}{100} = 200$

$10x = 200$

$x = 20$

Resposta: o preço deve ser reduzido 20%

8.

Digamos que a TV custa 1000 €

$1000 \times 1{,}25 = 1250$

$1250 - 1000 = 250$

$\frac{250}{125} = 0{,}2$

Resposta: O preço deve ser reduzido 20%

Raciocinar em Matemática com imagens visuais vagas e com intuição

Manuel Joaquim Saraiva

A interpretação do que é o raciocínio matemático varia bastante. Ela depende da perspectiva que cada um tem sobre o que é a Matemática. Para uns, o raciocínio matemático é o raciocínio axiomático: da dedução lógica e da inferência formal. Para outros, o raciocínio matemático assinala uma vasta capacidade geométrica e quantitativa que mistura análise e intuição com raciocínio e inferência, ambos rigorosos e sugestivos (Steen, 1999).

Temos a perspectiva da Matemática como uma ciência onde as afirmações têm significado, que deve ser encontrado no conhecimento partilhado pelos seres humanos e não numa realidade externa, não humana. Tal como afirmam Hersh e Davis (1995), a Matemática trabalha com significados humanos e é inteligível apenas no contexto da cultura — é uma actividade humana e é encontrada na prática dos matemáticos. Assim, para falar sobre o raciocínio matemático, nada melhor do que ter em conta aquilo que dizem os matemáticos sobre o seu próprio raciocínio quando estão a trabalhar e a criar Matemática.

Como pensam os matemáticos

Hadamard (1996), à pergunta *Como pensam os matemáticos ao longo do seu processo de trabalho?* afirmou que, em geral, todos aqueles com quem contactou evitam quer o uso de palavras mentais, quer a utilização mental de sinais claros ou algébricos. Com base na sua experiência, afirma que as palavras ou a linguagem, tal como são escritas ou faladas, não parecem desempenhar qualquer papel no seu mecanismo de pensamento. As entidades físicas que parecem servir de elementos do pensamento são certos sinais e imagens, mais ou menos claros, que podem ser reproduzidos e combinados «voluntariamente». Os elementos atrás mencionados são, no seu caso, de tipo visual e, por vezes, muscular. As palavras convencionais ou outros sinais têm de ser procurados com grande esforço só numa segunda fase.

Vão, também, neste sentido, as palavras de Feferman (citado em Davis & Hersh, 1995), para quem o matemático, no seu trabalho, confia em intuições surpreendentemente vagas e avança em passos atabalhoados e intermitentes, com recuos frequentes.

No processo de criação matemática, e para Hadamard (1996), há quatro etapas cronológicas: 1ª. Preparação; 2ª. Incubação; 3ª. Iluminação e 4ª. Verificação. Na sua perspectiva, os caminhos da criatividade residem não no consciente mas no longo trabalho do inconsciente de incubação e na selecção estética inconsciente de ideias que depois passam para o consciente. Defende, ainda, que emoções poderosas podem favorecer tipos diferentes da criação mental. Concorda com Poincaré (1996), para quem, na criação matemática, há uma intervenção do acaso mas também um trabalho do inconsciente, que não implica nem contradiz o primeiro — a invenção toma lugar pela combinação de ideias; criar consiste em não fazer combinações inúteis e em examinar apenas aquelas que são úteis, e que são apenas uma minoria. A invenção é discernimento, é escolha que, para Poincaré, é governada imperativamente pelo sentimento de beleza científica. Ao inconsciente pertence não apenas a complicada tarefa de construção do volume das várias combinações de ideias, mas também a tarefa mais delicada e essencial de seleccionar aquelas que satisfazem o nosso sentido de beleza e que, consequentemente, poderão ser úteis. Hadamard, também, defende que a invenção depende necessariamente de uma acção preliminar e mais ou menos intensa do consciente. No entanto, este não está subordinado ao inconsciente, antes pelo contrário, ele começa a sua acção e define, numa maior ou menor extensão, a direcção geral na qual o inconsciente deve trabalhar — o que implica elementos afectivos, onde a escolha é direccionada pelo sentido de beleza.

Muitos outros autores testemunharam o apelo estético da Matemática tanto na contemplação passiva como na própria actividade de investigação. Para Flato (1994), em Matemática estamos sempre a inovar e a generalizar e o processo de criação matemática apresenta semelhanças com o da criação artística.

Há, assim, e como resultado da informação recolhida sobre a prática dos matemáticos, uma associação clara da invenção matemática a uma componente estética e a imagens visuais vagas e imprecisas, onde o inconsciente desempenha um papel fundamental — a par e direccionado pelo consciente.

Representações concretas e sinais pessoais no pensamento matemático

Relativamente à ajuda que é oferecida ao pensamento através das representações matemáticas concretas, Hadamard (1996) afirma:

> Acontece-me muitas vezes que depois de ter trabalhado duramente e ter chegado a resultados que estão perfeitamente claros e são satisfatórios para mim, quando tento colocá-los em linguagem sinto que tenho de me colocar num outro plano intelectual. Tenho de traduzir os meus pensamentos numa linguagem que não corre equilibradamente com eles. Por isso passo um vasto período de tempo a encontrar as palavras e as frases apropriadas.

Para este matemático, uma transição do pensamento para a linguagem exige sempre da sua parte uma maior ou menor dificuldade e esforço. O pensamento pode ser acompanhado por representações concretas para além das palavras, e as palavras estão ausentes da sua mente quando ele pensa; e, mesmo depois de ler e ouvir uma questão, toda a palavra desaparece no instante em que ele começa a pensar no assunto — as palavras não reaparecem no seu consciente antes de ter dado por terminada a investigação. Os pensamentos morrem no momento em que eles são embebidos por palavras. Hadamard afirma, ainda, que é essencial realçar que ele se comporta desta forma não apenas com as palavras mas também com os sinais (símbolos) algébricos: utiliza-os em cálculos fáceis; mas, quando o assunto parece mais difícil, os cálculos tornam-se demasiado pesados para si. Usa representações concretas, mas de uma natureza completamente diferente.

Este matemático dá o seu exemplo na demonstração do teorema de que a sequência dos números primos é ilimitada. Para ele, as figuras mentais são «uma massa confusa»; «um ponto muito remoto da massa confusa»; «um segundo ponto um pouco por baixo do primeiro»; «um local algures entre a massa confusa e o primeiro ponto». Afirma, ainda, que toda a investigação matemática o compele para a construção de um tal esquema, que é sempre, e que deve ser, de carácter vago, de modo a não ser enganador.

Hadamard apresenta, ainda, um outro exemplo da sua investigação — o da sua tese, em que ele tinha de considerar a soma de uma infinidade de termos para calcular a sua ordem de grandeza. Afirma que não viu a fórmula em si mesma, mas o local onde ela estaria se fosse escrita: uma espécie de fita, que é mais estreita ou mais escura no local correspondente aos termos possivelmente importantes; noutros momentos, viu alguma coisa parecida com uma fórmula, mas não através de alguma legibilidade (sendo fortemente longa e luminosa), como se ele não tivesse óculos, com letras parecendo mais notórias (embora ainda não legíveis) no local onde é suposto ser importante.

Porém, Hadamard faz referência a algumas excepções. Birkhoff estava acostumado a visualizar símbolos algébricos e a trabalhar com eles mentalmente. Pólya afirma que a ideia decisiva que traz a solução de um problema está, muitas vezes, ligada a uma palavra ou afirmação que ilumina a situação; ela pode vir antes de uma pequena ideia decisiva ou a seguir a ela ou talvez nasça ao mesmo tempo; a palavra certa ajuda-nos a recordar a ideia matemática, talvez menos completamente e menos objectivamente do que um diagrama ou uma notação matemática, mas, de uma forma análoga, pode contribuir para fixá-la na mente. Segundo Hadamard, Pólya não usa as palavras como equivalentes a ideias, uma vez que utiliza uma palavra ou duas letras para simbolizar uma linha completa de pensamento.

Apesar de todas estas excepções, para Hadamard as imagens mentais que os matemáticos usam são frequentemente visuais, podendo também ser de outro tipo, por exemplo, cinéticas e auditivas. Dreyfus (1991) defende, também, que a visualização desempenha um papel essencial no trabalho de muitos matemáticos.

Ainda sobre o papel dos símbolos no pensamento, Hadamard socorre-se das palavras de um especialista em linguística, Prof. Roman Jakobson. Para este autor, os sinais são um suporte necessário para o pensamento. Para o pensamento socializado (etapa da comunicação) e para o pensamento que está a ser socializado (etapa da formulação), o sistema mais usual de sinais é a linguagem propriamente dita; mas, o pensamento interno, especialmente quando criativo, usa de bom grado outros sistemas de sinais que são mais flexíveis, menos padronizados do que a linguagem e deixam mais liberdade e mais dinamismo ao pensamento criativo. De entre estes sinais ou símbolos, podemos distinguir entre os sinais convencionais, pedidos emprestados à convenção social, e, por outro lado, sinais pessoais, pertencentes aos hábitos gerais, ao modelo individual da pessoa considerada e em símbolos episódicos, que são estabelecidos *ad hoc* e só participam num acto criativo simples.

Vão muito neste sentido as afirmações de Dreyfus (1991) para quem as representações simbólicas das entidades matemáticas desempenham um papel essencial em Matemática. As representações recorrem a sinais que apenas podem ser usados quando ligados a um conhecimento pessoal implícito, isto é, a um significado. Quando falamos de qualquer objecto matemático cada um de nós relaciona-o com uma representação mental do mesmo. Embora se espere que os matemáticos produzam definições mais ou menos semelhantes para o mesmo conceito, as suas representações mentais desse conceito podem variar bastante. Uma representação simbólica é escrita ou falada normalmente com a finalidade de facilitar a comunicação sobre o conceito. Uma representação mental refere-se a esquemas internos que uma pessoa usa para interagir com o mundo exterior (e consigo próprio, muito essencialmente). Também Matos e Serrazina (1996) afirmam que uma capacidade matemática produtiva está associada a representações mentais ricas, ou seja, que contêm muitos aspectos relacionados com cada conceito.

Há, deste modo, que realçar a importância das representações concretas no pensamento matemático. No entanto, é necessário distinguir claramente o papel dos sinais e dos símbolos. Eles assumem uma forte relevância ao nível das etapas da comunicação e da formalização, mas ao nível do pensamento interno, particularmente na fase de criação, são os sinais pessoais que permitem a ligação a um conhecimento pessoal com sentido.

Raciocinar em Matemática: intuir, generalizar, justificar

A Matemática é uma disciplina que trata com entidades abstractas e o raciocínio é a ferramenta para compreender a abstracção (NCTM, 1999). É o que usamos para pensar sobre as propriedades dos objectos matemáticos e desenvolver generalizações que aplicamos a todas as classes de objectos — números, operações, objectos geométricos, ou conjuntos de dados. O raciocínio matemático é essencialmente sobre o desenvolvimento, a justificação e o uso de generalizações matemáticas. Dreyfus (1991), por sua vez, ao referir-se à abstracção, faz a distinção de dois processos que, conjuntamente com a representação, formam a sua base: a generalização e a síntese. Para aquele autor, generalizar é derivar ou induzir a partir de especificidades, identificar características comuns ou expandir domínios de validade; sintetizar é combinar ou compor partes de modo que formem um todo, uma entidade que muitas vezes é mais do que a soma das partes. Concordante com estas afirmações, Fischbein (1987) afirma que a actividade matemática envolve três componentes: a formal, a algorítmica e a intuitiva. A primeira envolve os axiomas, as definições, os teoremas e as demonstrações. A segunda é composta de competências que podem ser adquiridas através de uma prática e de um treino sistemático. O recurso a algoritmos é fundamental no raciocínio matemático. São eles que nos permitem uma economia de pensamento adaptando um conjunto de procedimentos-tipo a situações problemáticas. A terceira envolve cognições que nos aparecem como evidentes por si próprias. Para este autor, embora possa parecer surpreendente falar-se de uma componente intuitiva no pensamento matemático, o modo como o raciocínio matemático faz uso da imaginação, da visualização, de todas as nossas vivências, e mesmo das nossas características biológicas, têm vindo a ser referido cada vez com mais frequência.

Esta componente intuitiva é referida por muitos autores. Para Malcolm (2007), a intuição é a apreensão imediata pela mente, sem o raciocínio. A intuição, por definição, é diferente da razão: acontece sem raciocinar; é imediata, holística, estética, reveladora, inspirada; é sentir, é conhecer tudo de uma vez; ela pode ir aonde a razão não pode. No entanto, a seu ver, na prática, a intuição e a razão trabalham em conjunto numa constante acção combinada. A intuição produz uma ideia, e a razão esforça-se para a testar ou desenvolver. A intuição é sobre a criatividade, a imaginação, a inspiração e a revelação. Ela está ligada à razão, mas não é a razão. Segundo Malcolm, no ocidente olha-se para a intuição como sendo um processo de geração de conhecimento e assegura-se que o conhecimento é testado através da razão. Isto faz com que a razão seja o árbitro final merecedor do conhecimento e, nesse sentido, superior à intuição, o que dá à Matemática um papel especial, como um modelo de raciocínio e como uma representação abstracta e elegante da verdade. Porém, acrescenta que a razão sem a intuição tem pouco trabalho e não encontrará uma orientação.

Poincaré (1987) foi um dos matemáticos que escreveu sobre a ligação entre a intuição e a lógica em Matemática. Para ele, as duas tinham o seu papel na criação matemática, pois a produção da Aritmética, da Geometria, ou de qualquer outra ciência, necessita *algo mais* do que a Lógica Pura. A este *algo mais*, Poincaré designou por Intuição.

Para Davis e Hersh (1995), os aspectos não verbais, espaciais e holísticos do pensamento são importantes naquilo que a maior parte dos bons matemáticos fazem na realidade, embora não o sejam tanto naquilo que dizem que fazem. Para estes autores, é razoável pensar que uma cultura matemática que despreza explicitamente os aspectos espaciais, visuais cinestésicos e não verbais do pensamento não utiliza totalmente as capacidades do cérebro. Não dar importância aos elementos analógicos da Matemática representa o fecho de um canal da consciência e experiência matemática. Seria decerto melhor desenvolver e usar todos os talentos e capacidades especiais dos nossos cérebros, em vez de suprimir alguns pela educação e preconceitos profissionais. Davis e Hersh sugerem que, em Matemática, seria melhor que as duas metades do cérebro cooperassem, se completassem e se desenvolvessem uma à outra, em vez de interferirem e estarem em conflito. Há, da parte destes autores, e de maneira clara e frontal, um apelo para que se viva a Matemática de forma total e não parcial.

Porém, e dentro da actividade matemática, o caminho estreito e delicado do cálculo formal leva-nos muitas vezes directamente contra um muro de mistério (Davis & Hersh, 1995). Por exemplo, em 1545, Cardano indica a seguinte solução para a equação

$$x^3 + mx = n : x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}.$$

Este resultado origina uma enorme dúvida e inquietação — que significado atribuir a $\sqrt{-121}$ (naquela época, as raízes quadradas de números negativos não tinham qualquer legitimidade; a teoria dos números complexos não existia; como interpretar este símbolo sem sentido?). Para Davis e Hersh (1995), o que se tem aqui é incompletude e enigma. As necessidades internas da Matemática criam pressões para que se procurem explicações. Somos curiosos. Queremos compreender. A nossa metodologia conduziu-nos a um novo problema.

Em Matemática cruzam-se, assim, duas actividades fundamentais — o uso e a criação de novas ideias. A utilização de conceitos, de resultados e de técnicas para resolver um problema concreto envolve normalmente um ciclo de matematização (identificação dos aspectos matemáticos da situação), manipulação (transformação das relações matemáticas anteriores noutras mais adequadas ao fim em vista) e interpretação (estudo dos resultados obtidos com vista a obter uma solução para o problema inicial). A transformação dos conceitos e representações matemáticas — a partir de problemas e questões não resolvidas — dá origem a novos conceitos, relações e procedimentos que podem tomar o seu lugar no corpo do conhecimento matemático (Ponte e Serrazina, 2000). Tal como estes autores afirmam, o raciocínio matemático tem uma dupla natureza — por um lado apoia-se na intuição e, por outro, visa uma progressiva formalização.

A concluir

Os matemáticos quando falam sobre a sua actividade de investigação fazem referência, com frequência, ao seu sentido estético. Associam fortemente à invenção matemática um conjunto de imagens visuais vagas e imprecisas, reconhecendo, também, o papel muito importante que nela tem o trabalho do inconsciente. Para além da importância das representações concretas no pensamento matemático, é realçada a relevância dos sinais pessoais ao nível do pensamento interno de cada um — são estes sinais que dão significado ao conhecimento matemático.

Em Matemática identificam-se duas actividades fundamentais — o uso das ideias matemáticas e a sua criação apresentando-se o raciocínio matemático com duas vertentes essenciais: a intuição e a formalização. A prática dos matemáticos leva-nos, assim, a interpretar o raciocínio matemático como aquele que contempla uma vasta componente geométrica e quantitativa que mistura intuição e análise com inferência e dedução.

A Matemática escolar deve, por tudo isto, promover o uso do raciocínio para fazer conjecturas e aplicar o raciocínio intuitivo e dedutivo. O ensino da Matemática escolar deve também ter em conta os aspectos não verbais, espaciais e holísticos do pensamento, para além dos aspectos mais analíticos e formais, pois é isso que os matemáticos fazem, de facto.

Referências

Davis, P. J. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Dordrecht: Kluwer.

Flato, M. (1994). *O poder da Matemática*. Lisboa: Terramar.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. An educational approach. Dordrecht: D. Reidel.

Hadamard, J. (1996). *The Mathematician's Mind*. New Jersey: Princeton University Press.

Malcolm, C. (2007). Dividing the kingdom. Em Gellert, U & Jablonka, E. (Eds.), *Mathematisation and Demathematisation — Social, Philosophical and Educational Ramifications*. pp. 107–122. Roterdão: Sense Publishers.

Matos, J. M. & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

National Council of Teachers of Mathematics (1999). *Developing mathematical reasoning in grades K–12*. NCTM.

Poincaré, H. (1987). Intuição e Lógica em Matemática. Em APM (ed,), *Cadernos de Educação Matemática 1*, pp. 7–16. Lisboa: APM.

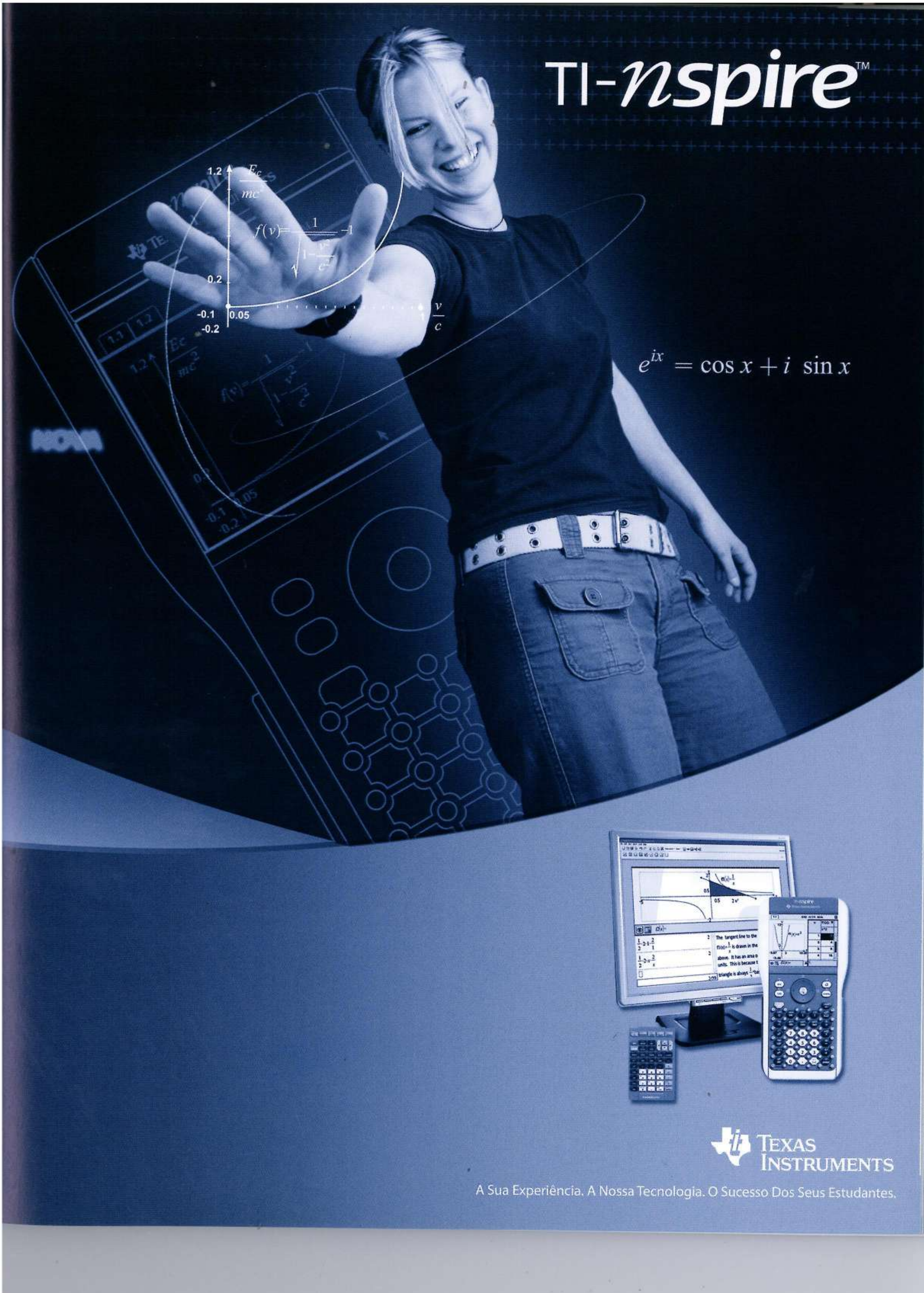
Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. Em APM (Ed.), *Investigar para aprender matemática*, pp. 7–13. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Steen, L. A. (1999). Twenty Questions about Mathematical Reasoning. Em NCTM (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K–12*, pp. 270–285. NCTM.

Manuel Joaquim Saraiva

Departamento de Matemática da UBI e CIEFCUL


TI-nspire™
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$
Texas Instruments
A Sua Experiência. A Nossa Tecnologia. O Sucesso Dos Seus Estudantes.

Raciocínio matemático na aula: Uma questão de confiança?

Licínio participou no Programa de Formação Contínua em Matemática para professores de 1° ciclo da Universidade de Évora. Na primeira sessão manifestou interesse em trabalhar em resolução de problemas com os seus alunos do 3° ano, pois sentia ser essa uma das suas dificuldades. Numa visita minha à sua aula, na qualidade de formadora, Licínio propôs-se a explorar com os alunos o problema *Cálcio para os meninos*[1], que havia sido resolvido e discutido numa sessão de formação no âmbito do tema Números e operações.

Cálcio para os meninos

O Manuel contou à Carolina que no dia anterior foi ao médico e que este lhe receitou cálcio. Deverá tomar um comprimido de seis em seis horas. A Carolina riu-se. Há uma semana também foi ao médico e começou a tomar um comprimido de cálcio de oito em oito horas.

O médico receitou a cada um deles duas caixas com duas placas com 24 comprimidos cada.

— Tomo mais do que tu! — disse o Manuel.

A Carolina pensou e respondeu hesitante:

— Sim... mas... mas como comecei antes de ti, se calhar... parece-me que vamos terminar os comprimidos ao mesmo tempo....

Será que é mesmo assim?

Licínio entregou aos alunos o enunciado do problema escrito numa folha A4, mas tinha-lhe alterado o título e acrescentado uma introdução, bem como reduzido os valores relativos à quantidade dos comprimidos. Antes do enunciado propriamente dito, podia agora ler-se:

Um problema complicado...

Para pensar!...

Lê o problema com muita atenção!

— Antes de resolveres tenta compreender...

— Podes fazer esquemas, desenhos, contas, tabelas.

— Responde à pergunta que é colocada

Licínio incentivou os alunos a resolver o problema, explicando que poderiam usar estratégias diferentes para além dos cálculos habituais e pedindo extrema atenção na leitura, que foi feita oralmente. De seguida, os alunos retomaram individualmente o enunciado e alguns começavam a esboçar hipóteses no papel quando, ao fim de exactamente três minutos, Licínio interrompe, afirmando:

Professor: "Estão a achar complicado, não é? Este problema é muito complicado... Ai que ainda ficam bloqueados sem saber o que fazer... Mas olhem, eu trouxe uma ficha para vos ajudar a resolver o problema, vamos lá ver! Eu vou-vos dar esta ficha e vocês vão responder a isto aqui, está bem? Vão responder aqui, eu vou dar uma ajudinha..."

Distribuiu rapidamente uma nova folha por cada aluno e pediu a atenção da turma, chamando à vez os alunos ao quadro para fazer a correcção colectiva das diversas questões da ficha que preparara antes:

Como resolver...

Pensando de forma organizada, vamos responder às seguintes perguntas:

1. Será verdade que o Manuel toma mais comprimidos que a Carolina? Porquê?
2. O Manuel toma quantos comprimidos por dia?
3. E a Carolina quantos toma?
4. Então o Manuel durante quantos dias toma comprimidos?
5. E a Carolina, durante quantos dias toma comprimidos?
6. Quem começou primeiro o tratamento?
7. Completa:

   ... . começou a tomar comprimidos ..... dias primeiro que ....
8. Preenche o seguinte calendário deste mês de Novembro (supõe que o Manuel foi ao médico no dia 9), registando na linha de cima os dias em que a Carolina tomou o cálcio e na linha de baixo os dias em que o Manuel tomou o cálcio (ver Tabela 1).

Tabela 1

1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
D	S	T	Q	Q	S	S	D	**S**	T	Q	Q	S	S	D	S	T	Q	Q	S	S	D

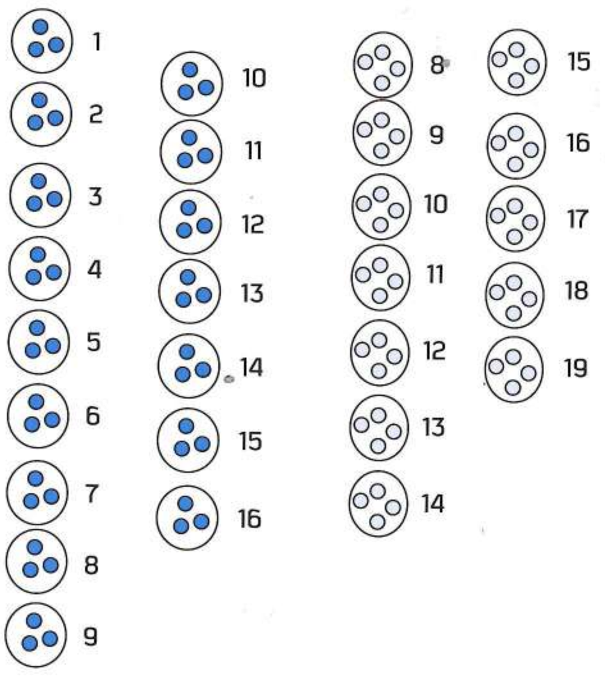


Figura 1

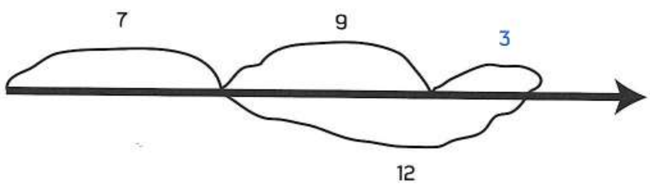


Figura 2

9. Agora já és capaz de dizer, conscientemente, se terminaram de tomar os comprimidos de cálcio ao mesmo tempo?

10. Assinala a frase verdadeira e completa-a:
    - Terminaram ao mesmo tempo
    - Terminou primeiro a Carolina ...... dias
    - Terminou primeiro o Manuel ...... dias

Os alunos foram respondendo às questões sem aparentar dificuldades de maior. Apenas o preenchimento do calendário lhes causou alguma perplexidade: por um lado, pareciam não compreender a sua necessidade ou papel e, por outro, aperceberam-se que a situação descrita permitia mais do que uma hipótese, pois não sabiam exactamente em que dias os meninos haviam iniciado os tratamentos. O professor decidiu então uniformizar a situação:

Professor: "Vão todos pensar que eles começaram a tomar os comprimidos à terça-feira... normalmente começa-se a tomar os medicamentos no dia a seguir a ir ao médico... como ele foi ao médico na passada segunda-feira, dia 9 de Novembro, então começou os comprimidos na terça-feira!"

A realização colectiva da ficha demorou cerca de cinquenta minutos. Licínio estava visivelmente satisfeito com o trabalho realizado e deu os parabéns aos alunos, dizendo:

Professor: "Muito bem! Hoje fartaram-se de pensar, de raciocinar! Tiveram de pensar muito para resolver este problema, não foi? Muito raciocínio matemático..."

A turma não reagia até que um aluno retorquiu:

Aluno: "Não foi assim tanto... na ficha dizia tudo o que era para fazer... eu até achei fácil..."

Licínio pareceu ficar suspenso com o comentário do aluno. Criou-se um silêncio na aula e eu aproveitei para pedir autorização para que os dois alunos da carteira que eu acompanhara apresentassem as resoluções que entretanto tinham feito enquanto os colegas seguiam a correcção colectiva. O professor acedeu prontamente, chamando primeiro Maria, uma aluna sossegada, muito concentrada, que tinha optado por um esquema que foi reproduzir ao quadro, explicando:

Maria: "Primeiro fiz prá Carolina... tomou 3 comprimidos em cada dia... fui desenhando cada dia e contando os comprimidos até dar 48... depois contei os dias, demorou 16 dias a tomar os comprimidos todos. Depois fiz pró Manel... tomava quatro comprimidos por dia, também fui desenhando e contando, demorou 12 dias... mas só começou a tomar os comprimidos uma semana depois da Carolina, por isso para contar os dias do Manel comecei no dia oito... E foi até ao dia 19. Por isso a Carolina acabou três dias mais cedo que o Manuel — porque ela tomou em 16 dias." (Figura 1).

A turma e o professor ouviram a aluna expor o seu raciocínio com atenção e mostraram-se admirados com a clareza do seu esquema e explicação. Licínio felicitou Maria, que voltou a sentar-se muito vaidosa, cedendo lugar ao outro colega. Diogo, com um estilo muito diferente, aproximou-se do quadro e escreveu calado (ver figura 2).

O professor observou atentamente o esquema, coçando o queixo, e perguntou:

Professor: "Mas o que é isso? Explica lá isso que eu não estou a perceber nada e os teus colegas com certeza também não!"

Diogo fez um esforço grande para verbalizar mas lá foi dizendo:

Diogo: "A Carolina está em cima... demora 16 dias..."

O professor interrompe:

Professor: "Mas como sabes que são 16?!"

Diogo: "16 x 3 ... fiz mentalmente..."

Licínio sorriu e anuiu acenando com a cabeça, dizendo:

Professor: "Continua!"

Diogo: "Sete dias está só ela a tomar..." — apontando para o primeiro arco.

Professor: "Sim, e depois?"

Diogo: "O Manuel é em baixo... demora 12 dias a tomar mas só começa no sétimo dia. Acabam com diferença de três dias" — apontando para o arco por baixo do 3. "Para acabarem no mesmo dia, o Manuel tinha de começar três dias mais cedo."

O professor fez novamente uma expressão de espanto, perguntou à turma se tinha percebido, sorriu e comentou:

Professor: "Estou admirado. Tenho de confessar que estou admirado. Andei eu a preparar uma ficha para tornar isto mais simples... com medo que vocês não percebessem e afinal... e afinal... Parece que o problema era complicado mas é para mim..."

Este episódio de sala de aula deu origem a uma interessante reflexão posterior. Entre outras coisas, discutimos questões como:

Até que ponto a vontade de o professor ajudar os alunos perante situações que antecipa como mais difíceis não os priva da possibilidade de se confrontarem com oportunidades de desenvolver o raciocínio matemático?

Até que ponto o receio do professor propor aos alunos situações que envolvam raciocínio matemático para além das rotinas habituais não espelha uma falta de confiança em si mesmo para lidar com possíveis resoluções dos alunos que eventualmente poderá na aula não decifrar imediatamente?

Até que ponto as baixas expectativas do professor sobre as capacidades matemáticas dos alunos não acabam por se reflectir de forma negativa nas tarefas que lhes propõe, acabando por as condicionar e limitar, e contribuindo ainda para reproduzir baixas expectativas dos alunos em relação à Matemática?

"Os professores transmitem expectativas nas suas interacções com os alunos durante as aulas (...) [que] vão determinar as suas oportunidades de aprendizagem e influenciar a sua crença acerca das suas próprias capacidades de ter sucesso em Matemática." (NCTM, 2007, p.13)

Pense nisto!

Nota

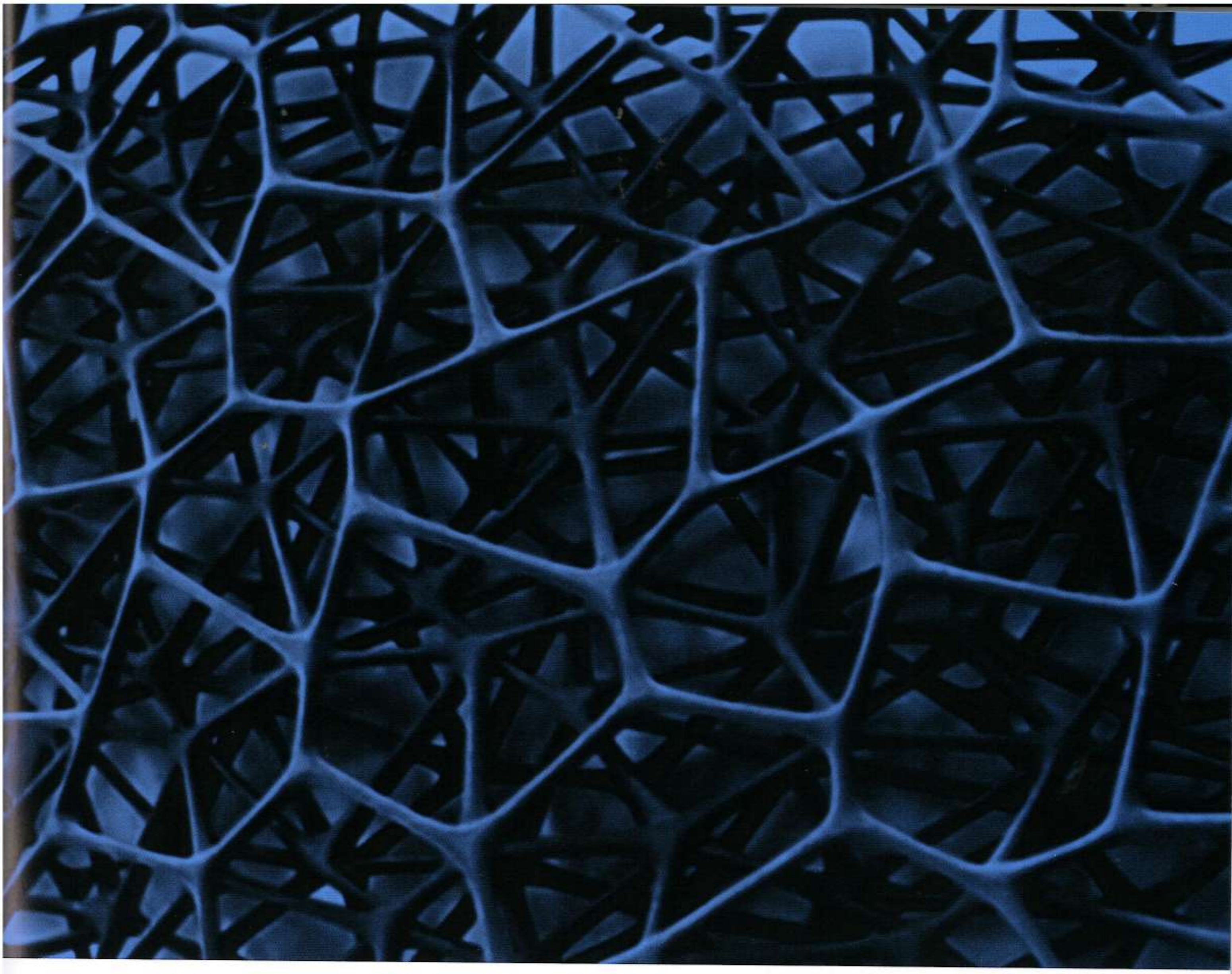
1 Adaptado de *Desenvolvendo o sentido de número* (Vol II, p. 43), edição APM.

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora e CIEFCUL

Raciocinar em ... Música [i]

Quando crio música, o meu cérebro avalia cada som, cada impulso rítmico, cada gesto melódico ou harmónico nas interacções simultâneas e sequenciais. Nem sempre há certos e errados, mas procuro sentidos e lógicas nestas combinações e uma consistência na obra desde que começa até que acaba. **Quando toco**, instalam-se no meu cérebro padrões de activação resultantes da negociação entre os sons e os meus gestos, a música e a minha interpretação. No palco, assumo o corpo da música e regulo a sua projecção com a resposta do público. **Quando ouço** música, os sons e os meus dedos passeiam em teclados mentais. A música ganha contornos humanos na minha mente e contemplo os seus gestos expressivos como se de alguém ou de mim se tratasse. A partir dos primeiros sons, teço conjecturas sobre o seu desenvolvimento e vejo-me recompensado na satisfação de expectativas ou surpreendido por algum devaneio mais inesperado. Por vezes, é só uma curiosidade intelectual. Outras vezes, a emoção é tal que se torna pungente, capaz de eriçar a pele ou de fazer chorar. É que **o raciocínio em música** faz-se com sons na mente mas também com sentimentos que ali se misturam com imagens do corpo, do passado e da vida.

José Carlos Godinho **[Professor do Departamento de Música]**
ESE de Setúbal



Construir, experimentar, descobrir, provar...

Adelina Precatado

Raciocinar em Matemática: como é que um professor interpreta esta questão tendo em conta os programas do secundário? Foi mais ou menos esta a proposta que a equipa desta revista temática me colocou. Não respondendo certamente à questão colocada, vou tentar, ao longo deste artigo deixar algum testemunho, algumas ideias, algumas interrogações sobre o assunto. O artigo está dividido em três partes, na primeira farei um resumo rápido do que, na minha perspectiva, refere o programa do ensino secundário no que respeita ao *raciocínio em Matemática*. Na segunda, mostro um exemplo recente da minha prática lectiva e na terceira debruçar-me-ei sobre as condições necessárias para o desenvolvimento do trabalho que proponho.

O que referem os programas do ensino secundário

Lógica e Raciocínio Matemático é um dos temas transversais do programa do ensino secundário (ME, 2001). Neste tema, refere-se nomeadamente que "na aprendizagem da matemática são absolutamente necessárias as demonstrações Matemáticas, mas estas não podem confundir-se com demonstrações formalizadas (...)" (p. 19). Nas indicações metodológicas diz-se, no que respeita aos métodos de demonstração, que "eles devem ser referidos à medida que vão sendo usados ou após os estudantes terem já utilizado os vários métodos em pequenas demonstrações informais" (p. 21) e ainda que "o hábito de pensar correctamente, que é afinal o que está em causa, deve ser acompanhado do hábito de argumentar oralmente e por escrito" (p. 21).

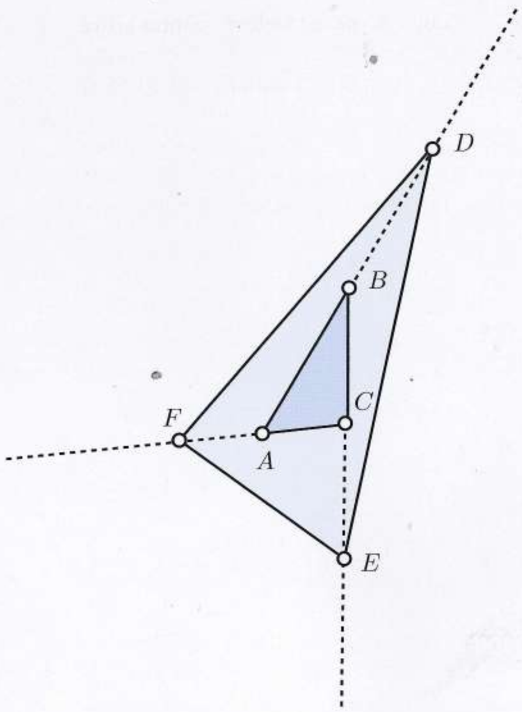


Figura 1. Problema Triângulo Duplicado

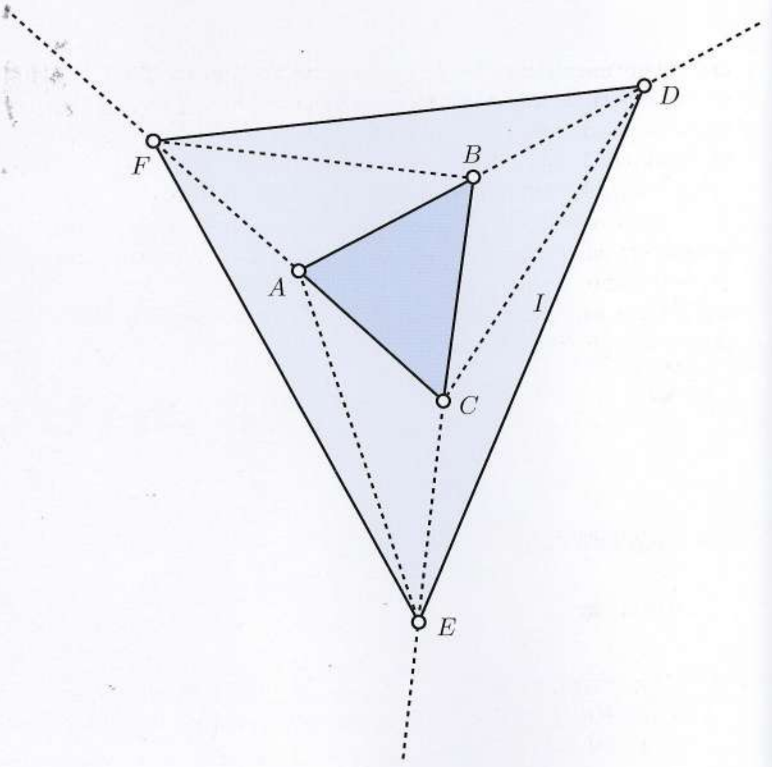


Figura 2. Sugestão para iniciar a prova

Mas as referências ao raciocínio/demonstração aparecem em outros locais do programa. No quadro resumo de objectivos e competências gerais pode ler-se na coluna das capacidades/aptidões: "formular hipóteses e prever resultados; descobrir relações entre conceitos de Matemática; formular generalizações a partir de experiências; validar conjecturas; fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados" (p. 4) e, nas sugestões metodológicas gerais, com o subtítulo Raciocínio dedutivo, refere-se que "o estudante deverá ser solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjecturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas" (p. 11), na avaliação recomenda-se que em cada período "mais do que um dos elementos de avaliação seja obrigatoriamente uma redacção matemática sob a forma de resolução de problemas, demonstrações " (p. 13).

Sem esquecer que a resolução de problemas é apontada como "a contribuição fundamental para desenvolver a capacidade dos alunos de raciocinar matematicamente" (p. 7).

Construir, experimentar, descobrir, provar... uma experiência recente

A experiência que vou relatar desenvolveu-se, talvez, porque eu estava envolvida num projecto com computadores portáteis, tinha uma turma do 10° ano de Matemática A e gostava de experimentar o uso mais regular de um programa de geometria dinâmica na sala de aula para resolver problemas.

Parti de alguns pressupostos facilitadores do trabalho:

1. os alunos em geral motivam-se mais com problemas que lhes suscitam curiosidade ou em saber o resultado ou naqueles em que o resultado parecendo evidente afinal não é o que parecia;
2. tinha disponível um conjunto de computadores portáteis e o facto de estar integrada num projecto *Desafios Sem Fios* permitia-me ir discutindo com algumas colegas de grupo o assunto;
3. era Directora desta turma a que me vou referir, o que me facilitava o esclarecimento dos pais relativamente ao trabalho que estávamos a fazer;
4. tinha um bloco de 90 minutos (componente não lectiva) atribuído para apoio a esta turma, com alguma liberdade para gerir como entendesse.

Por isso, resolvi fazer a proposta aos alunos e aos pais, o apoio seria encarado de uma forma preventiva e para todos. O trabalho seria desenvolvido com computadores e com um programa de Geometria Dinâmica. A turma, de 28 alunos, foi dividida em dois grupos de 14, que teriam aula de apoio de 15 em 15 dias. A ideia era partir de problemas geométricos, relativamente simples do ponto de vista da utilização da tecnologia, de modo que todos os alunos se fossem sentindo à vontade com o programa usado. Os problemas foram escolhidos de forma a que não intimidassem os alunos mais fracos e que, de preferência, desafiassem a intuição ajudando a criar a vontade de perceber porque é que determinada solução era adequada. Havia também a intenção, explicita desde o início, de que pretendíamos, por um lado resolver o problema através de uma construção e experimentação e por outro, provar/demonstrar o que se tinha descoberto.

Houve ainda a preocupação de estabelecer pontes entre o que ia acontecendo neste espaço e a aula de Matemática. Este era um espaço complementar mas associado às aulas da componente lectiva.

Alguns dos problemas que resolvemos são bem conhecidos, outros talvez um pouco menos. Apresento de seguida alguns dos problemas propostos aos alunos, para clarificar melhor o trabalho feito.

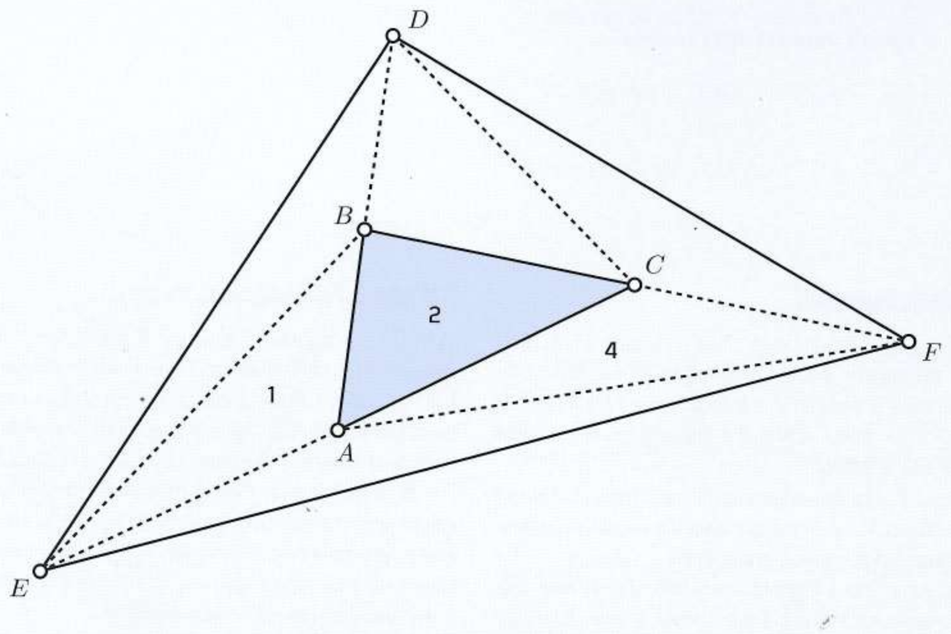
Triângulo Duplicado

Demonstração

Pela construção inicial, os triângulos 1 e 2 têm bases iguais $\overline{EA} = \overline{AC}$ e, a sua altura relativa a estas bases parte do mesmo vértice (ponto B), o que significa que é comum aos dois triângulos. Assim se prova que os triângulos 1 e 2 têm a mesma área.

Pela construção inicial, os triângulos 2 e 4 têm bases iguais $\overline{BC} = \overline{CF}$ e, a sua altura relativa a estas bases parte do mesmo vértice (ponto A), o que significa que é comum aos dois triângulos. Assim se prova que os triângulos 2 e 4 têm a mesma área.

Se a área do triângulo 1 é igual à área do triângulo 2 e se a área do triângulo 2 é igual à área do triângulo 4, logo, a área do triângulo 1 é igual à área do triângulo 4.



Da mesma forma se prova que as áreas dos restantes triângulos são iguais às áreas dos triângulos 1, 2 e 4. Portanto a área do triângulo $[EFD]$ é sete vezes a área do triângulo $[ABC]$.

Quadro 1. Prova apresentada pela aluna A

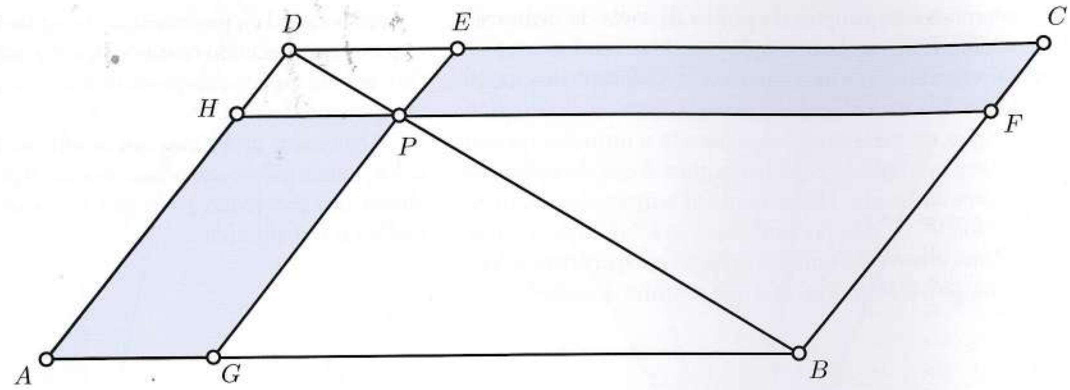


Figura 3. Problema paralelogramos surpresa

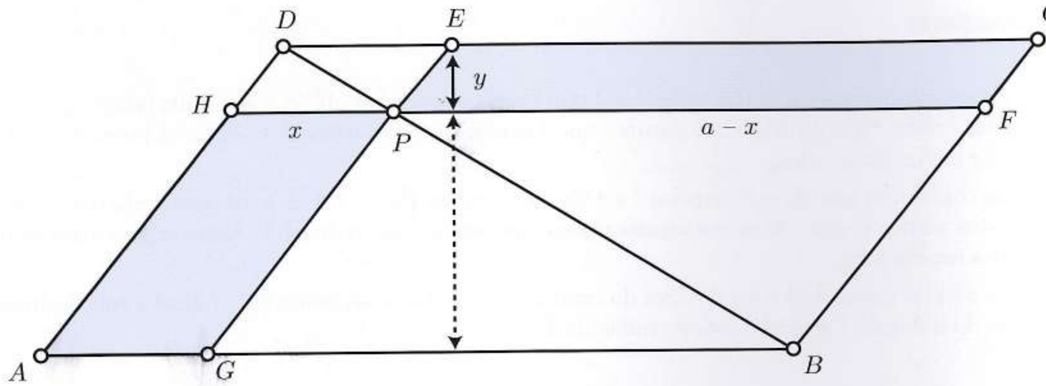


Figura 4. Paralelogramos surpresa

Problema 1: Triângulo Duplicado?

Considera um triângulo qualquer ABC (figura 1). Constrói um novo triângulo FDE prolongando os lados de ABC, como mostra a figura, e sabendo que $\overline{DA} = 2\overline{BA}$, $\overline{EB} = 2\overline{CB}$ e $\overline{FC} = 2\overline{AC}$. Qual é a relação entre as áreas dos triângulos FDE e ABC?

No início, começávamos sempre por ler e interpretar em conjunto o problema e escrever no quadro o que imaginavam ser a solução (4,5 foram as propostas).

Depois da construção e experimentação não sobram dúvidas: a área do triângulo DEF é sete vezes a área do triângulo ABC, mas a prova não se apresentou muito fácil. A sugestão: experimentem dividir o triângulo DEF como indica a figura 2 permitiu que, com mais ou menos tempo, muitos alunos conseguissem organizar o raciocínio que prova o que descobriram. Afinal os sete triângulos têm a mesma área. No quadro 1 está a prova apresentada por uma aluna.

Problema 2: Paralelogramos surpresa

$ABCD$ é um paralelogramo. P é um ponto qualquer sobre o segmento DB, diagonal do paralelogramo. $HF \ // \ AB$ e $GE \ // \ AD$. Observa os vários paralelogramos em que a figura ficou dividida. Tenta descobrir relações entre características de alguns dos paralelogramos (figura 3).

A generalidade dos alunos não teve dificuldade em verificar que o paralelogramo ficou dividido em quatro paralelogramos mais pequenos, que os paralelogramos sombreados têm a mesma área e que os paralelogramos brancos não têm a mesma área, mas são semelhantes.

Menos evidente foi a propriedade: o produto das áreas dos paralelogramos sombreados é igual ao produto das áreas dos paralelogramos brancos. Mesmo assim, porque este não foi um dos primeiros problemas e na altura em que foi proposto já havia quem experimentasse muito, um grupo de alunos descobriu esta propriedade no final da primeira aula de 90 minutos em que trabalharam este problema (figura 4). Partindo da figura pode justificar-se que os paralelogramos brancos são semelhantes a partir da semelhança dos triângulos que os compõem. Daí resulta que

$$\frac{x}{y} = \frac{a-x}{h-y}, x(h-y) = y(a-x),$$

ou seja as áreas dos paralelogramos sombreados são iguais.

Outra demonstração pode ser feita a partir da igualdade dos triângulos ADB e BDC. A diagonal divide o paralelogramo em dois triângulos iguais ADB e BDC. Como os dois triângulos brancos, dentro de ADB são iguais, respectivamente, aos triângulos brancos dentro de BDC, logo as áreas dos paralelogramos sombreados também são iguais. A partir daqui é quase trivial a prova de que o produto das áreas dos paralelogramos brancos é igual ao produto das áreas dos sombreados.

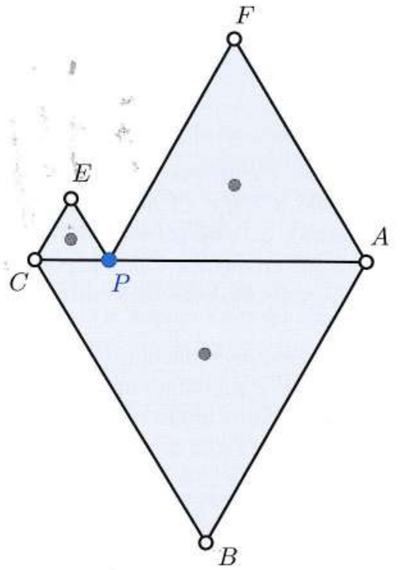
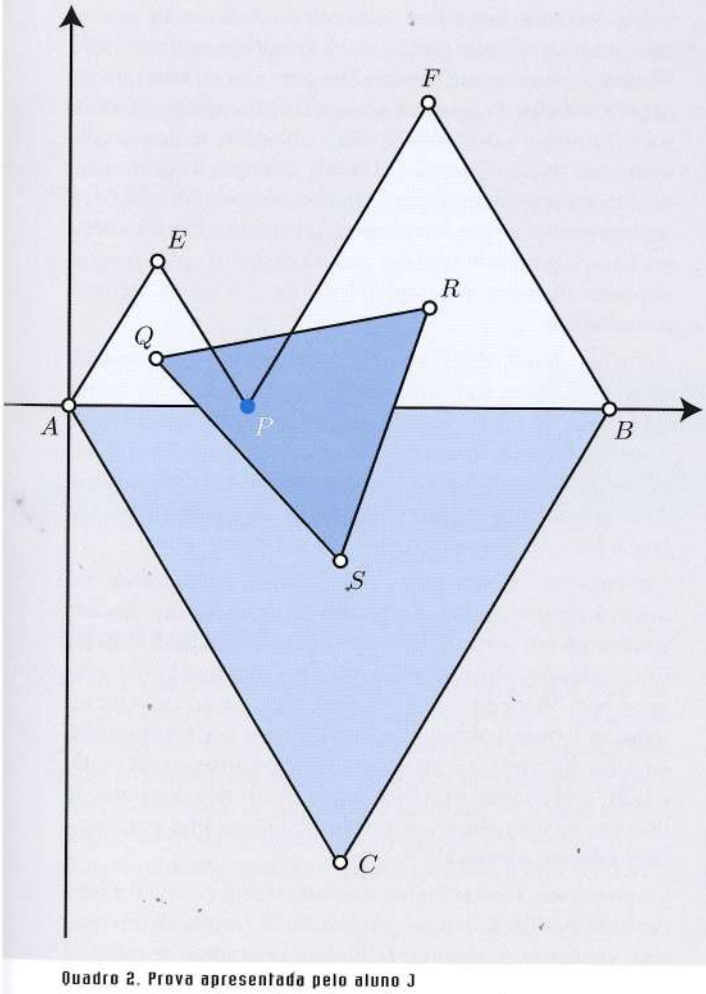


Figura 5. Problema Chapéu de Napoleão

4 Triângulos Equiláteros — Caso Geral



Considero o referencial com origem em A.

$A(0,0)$ $P(x,0)$ $B(x+y,0)$.

Nota: o baricentro encontra-se a 1/3 da altura do triângulo, a partir da sua base.

Altura (h) de $[APE]$: $h^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

Altura (h) de $[PBF]$: $h^2 = y^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}y$

Altura (h) de $[ABC]$: $h^2 = (x+y)^2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$

Então $Q\left(\frac{x}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}x\right)$, $R\left(x+\frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}y\right)$ e $S\left(\frac{x+y}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}(x+y)\right)$.

Defino os vectores $QR\left(\frac{x+y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}(y-x)\right)$;

$QS\left(\frac{y}{2}, \frac{2\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{6}\right)$ e $RS\left(\frac{-x}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{6}(x+2y)\right)$.

$$\| \overrightarrow{QR} \| = \| \overrightarrow{QS} \| = \| \overrightarrow{RS} \| = \sqrt{\frac{x^2+y^2+xy}{3}}$$

(Cálculos feitos à parte)

Assim é possível dizer que o triângulo $[QRS]$ é também equilátero.

Quadro 2. Prova apresentada pelo aluno J

Problema 3: Chapéu de Napoleão

ABC é um triângulo equilátero. P é um ponto qualquer sobre um dos lados do triângulo. CEP e PFA são também triângulos equiláteros. Constrói os baricentros (ponto de encontro das medianas) dos três triângulos. Que características tem o triângulo cujos vértices são estes baricentros?

Feita a construção, nenhum aluno teve dificuldade em perceber que o triângulo encontrado é equilátero independentemente da posição do ponto P. Nesta altura tínhamos tratado o tema Geometria analítica na sala de aula, por isso, alguns lembraram-se rapidamente de usar um referencial. Um aluno lembrou-se da propriedade "o baricentro divide a mediana na razão de 1/3 por 2/3", os outros foram informados e alguns provaram também esta propriedade. Os cálculos não foram muito fáceis para alguns. No quadro 2 está uma prova apresentada por um aluno.

Problema 4: A ilha Triangular

Considera uma ilha com a forma de um triângulo equilátero. Onde deve ser construída uma casa (C) de modo que a soma das distâncias aos três lados do triângulo (três praias) seja a menor possível?

Este é um velho problema apresentado por Margarida Junqueira e Sérgio Valente na *Educação e Matemática* n° 45. É velho mas sempre interessante, foi um dos primeiros que coloquei aos alunos e ainda muitos se lembram dele, mais tarde voltámos a abordá-lo, numa perspectiva um pouco diferente: será que é possível generalizar a conclusão a que chegámos para a ilha triangular? Ou seja, se a ilha tivesse a forma quadrada? E, se fosse um hexágono regular? E um octógono regular? ... um polígono qualquer com um n° par de lados? E com um n° ímpar de lados? E, em que região, no interior do polígono, é possível colocar o ponto (*C*asa) de modo que seja possível deslocar-se, na perpendicular, a todos os lados (ou seja sem sair da ilha)?

Fica o desafio, experimentem e provem... No entanto, se quiserem podem consultar o livro *Geometria — Temas Actuais*, de Eduardo Veloso, (p. 60) onde encontram várias perspectivas para a resolução da primeira parte deste problema e, para a segunda, podem consultar

```
http://illuminations.nctm.org/Activities.
aspx?grade=all&srchstr=triangula%20Island
```

Estes foram alguns dos problemas que trabalhei com esta turma do 10° ano na aula de apoio — um bloco de 90 minutos de componente não lectiva, de 15 em 15 dias com cada turno. Tal como referi no início, em diversos momentos foram estabelecidas pontes entre os problemas e os temas tratados nas aulas, por exemplo, foi possível aprofundar um pouco mais as cónicas enquanto lugares geométricos, recorrendo ao Geogebra, quando este tema (lugares geométricos) foi tratado na aula.

Como era evidente a aula não podia ser obrigatória, tratava-se de uma aula de apoio, no entanto, no final do primeiro período só uma aluna nunca tinha comparecido e os restantes praticamente não faltaram. Esta aluna a partir do 2° período passou, também, a ir sempre. Fomos em cada período fazendo o balanço do trabalho realizado e comunicando-o aos pais nas reuniões de pais. As condições que descrevi, no início do artigo, foram fundamentais para o desenvolvimento do trabalho e as características da turma também.

A palavra de ordem foi percebida por todos: era resolver o problema em primeiro lugar, todos deviam ser capazes... depois a prova, a justificação porque é que a conclusão era sempre aquela a que tinham chegado, não era obrigatória mas desejável. Cada vez mais alunos foram conseguindo fazer. É evidente que alguns tomam a dianteira, mas a verdade é que a maioria tentou escrever o raciocínio que fez, mesmo quando foi ajudado no processo pelo vizinho do lado.

Aos poucos quiseram aperfeiçoar-se, uns na forma de apresentar as construções com o Geogebra, outros no modo como escreviam. Tentei que os alunos, ao lado do computador, tivessem também um papel e um lápis para apoiar o raciocínio que iam fazendo, mas esta é a minha batalha perdida, será que têm razão?

As condições

Tempo. Quando trabalhamos na sala de aula, com computador, deixando que sejam os alunos a construir, a perceber por eles próprios que para que um quadrado seja quadrado não basta parecer tem mesmo que ser, ou seja, tem que ter as propriedades do quadrado, caso contrário chega o professor e "estraga-o", demoramos tempo, bastante tempo... pelo menos no início. Quando deixamos que após a construção, os alunos experimentem, investiguem, descubram relações e tentem provar o que descobriram precisamos dar-lhes tempo. Mas, o professor também precisa de tempo para pesquisar, para organizar, para aprender e usar os novos recursos tecnológicos.

Apoio aos alunos. Alguns alunos, ultrapassada a fase inicial, quase trabalham sozinhos, mas esses são poucos. A maioria precisa de apoio. Precisa que os ajudemos a colocar-se questões, que sem lhes resolvermos os problemas não os deixemos ficar inactivos e convencidos que não são capazes ou simplesmente a copiar pelo vizinho. É quase impossível apoiar bem 28 alunos, eu pelo menos não sou capaz.

Computadores. Como referi, trabalhámos com portáteis, no início aos pares, a partir de meados do segundo período cada aluno com um portátil. Esta é a situação ideal, pois quando há um aluno a construir e outro a ver o resultado nem sempre é bom. A escolha do Geogebra deveu-se ao facto de ser *software* livre e portanto todos os alunos podiam também em casa descarregar o programa. Gostava mais de ter usado o GSP, que conhecia melhor, mas a escola não dispunha de licenças para os alunos. É preciso computadores mas também *software* adequado.

Os problemas. Existem muitos locais onde é possível ir buscar bons problemas, os próprios manuais trazem alguns que, com vantagem, podem ser resolvidos com apoio de *software* de Geometria Dinâmica. Para além da Educação e Matemática, indico dois locais na internet onde podem encontrar problemas bastante interessantes e de onde tirei alguns dos que resolvi com os alunos, `http://illuminations.nctm.org` e `http://nrich.maths.org`. Digamos que esta condição é a mais garantida à partida.

Conclusão

Esta não é, evidentemente, a única nem a principal forma de dar cumprimento ao programa de Matemática A, no que respeita ao raciocínio. Aliás esta forma de trabalho não devia sequer existir, porque afinal usei um bloco de componente não lectiva como sendo praticamente lectiva. Mas não há dúvida que os programas de Geometria Dinâmica facilitam a resolução de muitos problemas, a descoberta de regularidades, a verificação de conjecturas, logo não há hoje razões para que não sejam usados na sala de aula, de forma mais ou menos sistemática, foi isso que tentei experimentar e é apenas a este tipo de trabalho com uma parte "meio clandestina" que aqui me estou a referir. Em segundo lugar, associar a prova a um desafio que consiste em justificar, com argumentos matemáticos, porque é que o que se descobriu antes é válido para todos os casos, é para muitos alunos mais motivador do que provar por provar. Se voltarmos ao problema *Triângulo Duplicado*, será completamente diferente deixarmos que o aluno descubra, contra a sua intuição, que a área do triângulo maior é sete vezes a do mais pequeno e só depois tente provar porque é que isto acontece do que apresentar-lhe a questão: prova que a área do triângulo EDF é sete vezes a do triângulo ABC.

Mas a utilização de computadores, principalmente a realização de actividades matemáticas em que o aluno tenha oportunidade de construir, experimentar, recolher dados, estabelecer conjecturas, provar, ... exige algumas condições. Há uns tempos diríamos que não tínhamos computadores, mas eles começam a aparecer, o problema é que não basta distribuir computadores ou quadros interactivos, é preciso equacionar o mínimo de condições para que determinado tipo de trabalho seja possível em sala de aula e isso passa também pela capacidade/possibilidade real de interacção do professor com cada aluno, passa também por deixar ao professor algum tempo de componente não lectiva ou individual verdadeiras, para pensar, preparar, tirar partido das novas ferramentas (*Moodle*, por exemplo) que começam a estar disponíveis. Por tudo isto eu, também até hoje, não percebo porque é que ao contrário do que acontece com a Física e Química ou com a Biologia e Geologia em Matemática acabou a aula desdobrada, enquanto o número de alunos por turma não pára de aumentar.

Referências

Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática — A.* `http://sitio.dgidc.min-edu.pt/`.

Veloso, E. (2000). *Geometria: temas actuais.* IIE.

Adelina Precatado
Escola Secundária de Camões

Materiais para a aula de Matemática

Triângulo duplicado?!

O material aqui proposto é um dos problemas que foco no artigo *Construir, experimentar, descobrir, provar...* publicado nesta revista. Foi aplicado a uma turma do 10° ano e é um bom problema para ser resolvido com um *software* de geometria dinâmica. A surpresa do resultado — a área do triângulo FDE é sete vezes a do triângulo ABC — motiva os alunos a interrogarem-se porque é que isso acontece, fazendo sentido pedir-lhes que provem o que descobriram. A sugestão referida no artigo da divisão do triângulo em sete triângulos pode ser indispensável para que os alunos cheguem a uma prova.

Adelina Precatado
Escola Secundária de Camões

Triângulo Duplicado?!

Considera um triângulo qualquer ABC. Constrói um novo triângulo FDE prolongando os lados de ABC, como mostra a figura 1, e sabendo que $\overline{DA} = 2\overline{BA}$, $\overline{EB} = 2\overline{CB}$ e $\overline{FC} = 2\overline{AC}$.

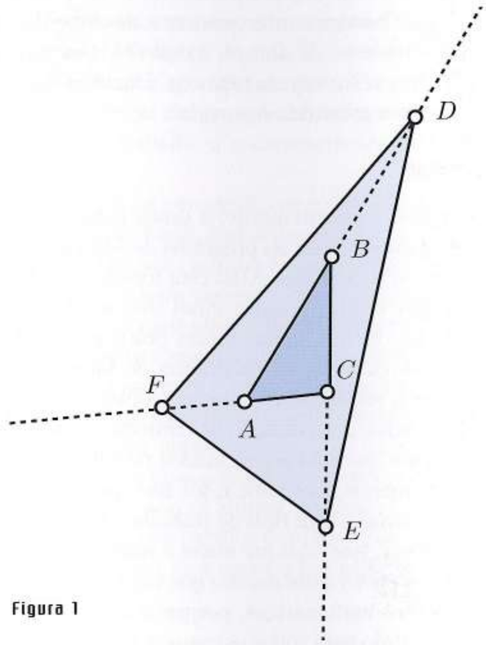


Figura 1

1. Com auxílio de um programa de geometria dinâmica descobre qual é a relação entre as áreas dos triângulos FDE e ABC.

2. Tenta provar porque é que a relação entre as áreas é aquela que descobriste.

Sugestão para a demonstração

Pode ser útil dividir o triângulo, como indica a figura 2:

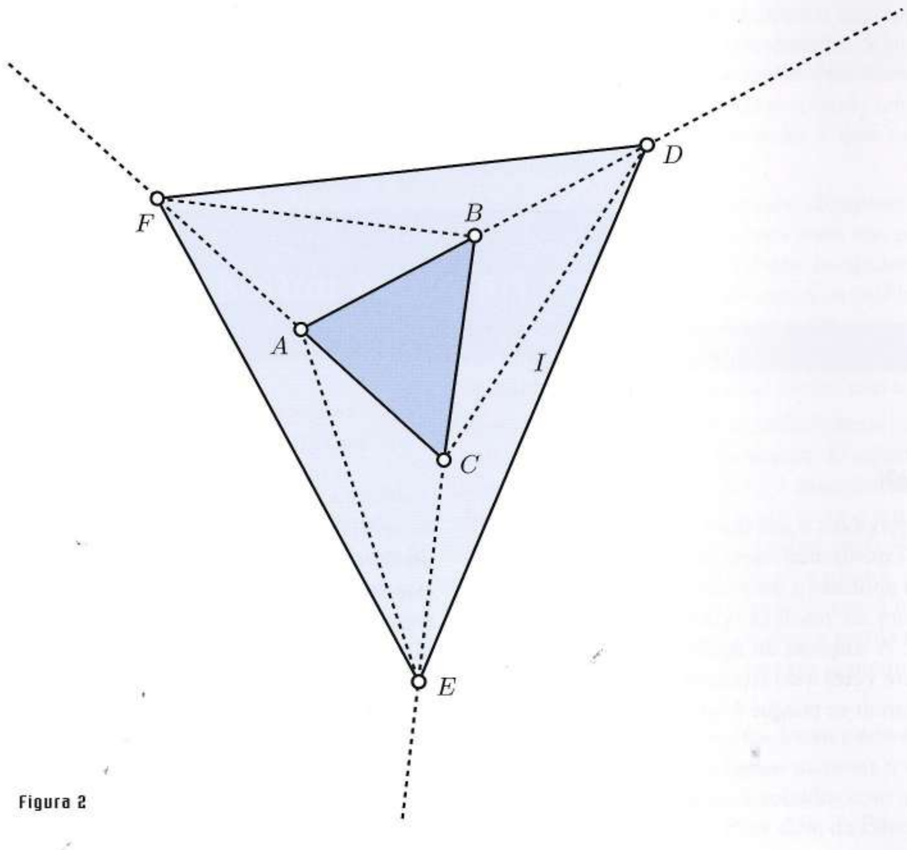


Figura 2

Medindo a incerteza...

Paulo Correia

"Pão de pobre quando cai, cai com a manteiga voltada para baixo". A sabedoria popular esconde, por vezes, verdadeira sabedoria... haverá nesta constatação verdadeira sabedoria? Será superstição?

O lançamento de uma moeda ilustra o nosso imaginário como retrato da sorte, do imprevisível ou da incerteza. A experiência validou esta percepção como sendo um fenómeno *aleatório* no sentido de que é impossível prever qual é a face da moeda que ocorrerá num dado lançamento. De forma complementar, a capacidade de fazer previsões sobre a globalidade de um conjunto de lançamentos, *suficientemente* grande, contribui favoravelmente para um conceito de probabilidade em que a incerteza e o conhecimento se complementam em escalas de observação diferentes.

Historicamente, em várias civilizações, o recurso ao lançamento de dados e moedas, ou a realização de outras experiências aleatórias para a tomada de decisões, era tido como a hipótese de que a divindade manifestasse um veredicto. Ainda hoje, a decisão da posição das equipas no campo, num jogo de futebol, é decidida com recurso ao lançamento de uma moeda. A maioria das pessoas não verá aqui a manifestação da vontade divina, mas sim um processo eficaz de decisão isenta, assente no conceito de probabilidade do domínio do senso comum.

Dificuldades com convicções espontâneas

O senso comum é uma boa ferramenta para a análise de alguns fenómenos aleatórios — é consensual que as hipóteses de chover no Verão (em Portugal) são relativamente reduzidas, embora não seja um acontecimento impossível. Formulações como esta são sustentadas por um grande número de observações — a maioria das pessoas já viveu um número significativo de dias de Verão, e mesmo sem registos explícitos, sabe que apenas numa pequena parte desses dias choveu. Contudo, a tentativa de raciocinar por processos semelhantes, por exemplo, ver um jogo da selecção de futebol na casa de um amigo, como aconteceu anteriormente, só porque a selecção ganhou nestas condições, — gera superstições sem validade matemática. Tirar conclusões a partir da análise da experiência é um procedimento formalmente correcto, mas as falhas neste tipo de análise consistem essencialmente em serem sustentadas num número de experiências insuficientemente grande ou em fenómenos de memória selectiva em que se ignoram (de forma inconsciente) as experiências que não contribuíram para o resultado esperado.

A investigação tem apontado outras concepções erróneas, mal-entendidos, concepções *primitivas*, falácias ou raciocínios incorrectos sobre algumas designações relacionadas com o pensamento probabilístico:

i) A denominada heurística da representatividade sustenta que as pessoas estimam a probabilidade de um acontecimento com base na análise de quão bem esse acontecimento representa a população que lhe está associada. Por exemplo, numa caixa com 50% de bolas brancas e 50% de bolas pretas, a probabilidade de retirar 7 bolas brancas em dez extracções é estimada como sendo igual à probabilidade de retirar 70 bolas brancas em 100 extracções; ou ainda, acreditam que numa sequência de lançamentos de uma moeda em que ocorreram muitas faces do mesmo tipo, a probabilidade de ocorrer a outra face aumenta (Shaughnessy, 1992).

ii) Outro raciocínio incorrecto típico é designado por heurística da disponibilidade e consiste em estimar probabilidades de acontecimentos com base no grau de facilidade de trazerem à sua memória aspectos particulares do acontecimento, como podemos constatar nos dois exemplos seguintes: se vários amigos de um indivíduo se divorciaram recentemente, ele acreditará que a taxa de divórcios local está a aumentar quando, de facto, permanece inalterada; se questionarmos indivíduos, sem aprendizagem de técnicas de contagem, sobre o número de comissões que se podem fazer num grupo de 10 pessoas, se existem mais comissões de 2 pessoas ou de 8 pessoas, a resposta é maioritariamente de 2 pessoas, por ser mais fácil fazer a representação mental de grupos de 2 do que de 8 (Shaughnessy, 1992).

iii) A falácia da conjunção sustenta que pessoas com e sem aprendizagem em probabilidades tendem a considerar mais provável a conjunção de dois acontecimentos do que um deles isoladamente. Por exemplo, os alunos consideraram maior a percentagem de pessoas com 55 anos e que tinham tido um ataque cardíaco do que a percentagem de pessoas que tinham tido um ataque cardíaco (Shaughnessy, 1992).

iv) A confusão entre conjunção e condicionamento pode surgir também por dificuldades relacionadas com a linguagem ou o contexto dos problemas que envolvem condicionamento. As dificuldades com a compreensão da probabilidade condicionada podem ainda resultar da dificuldade em identificar o acontecimento que condiciona. Será a confusão entre os acontecimentos condicionante e condicionado em virtude da crença de que a ordem cronológica impede o condicionamento de um acontecimento anterior por outro posterior. Por exemplo, considere-se o seguinte problema: uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas; retira-se uma bola ao acaso e omite-se a sua cor, retirando-se uma segunda bola — sem repor a primeira — que se verifica ser branca; muitas pessoas tem dificuldade em aceitar que a probabilidade da primeira bola ser branca diminui pelo facto de se saber que a segunda bola também o é — ver caixa.

Konold, citado por Shaughnessy, 1992, conseguiu evidências de que apesar de parecer que os alunos estão a raciocinar numa base de independência, se aprofundarmos, podemos descobrir que são inconsistentes nas suas respostas. Segundo este investigador, muitas pessoas tomam decisões em tarefas de probabilidades baseadas no que ele denomina por *abordagem superveniente* (*outcome approach*); algumas respostas de indivíduos a tarefas de estimação de probabilidades não são facilmente categorizáveis como concepções erróneas baseadas em heurísticas. A *abordagem superveniente* é a forma como alguns indivíduos encaram um acontecimento, como sendo um fenómeno isolado, não como uma amostra de um todo de acontecimentos semelhantes. Konold concluiu que os indivíduos que recorrem à *abordagem superveniente* fazem-no quando os acontecimentos possíveis não são equiprováveis e se trata de uma experiência que não é repetível.

Os alunos não esperam passivamente uma teoria de probabilidade fornecida pelo professor. Constroem as suas próprias heurísticas, critérios e crenças sobre probabilidades de forma espontânea, mesmo antes de as aprender. Cabe à escola a validação dos bons raciocínios e a explicitação das falácias dos outros.

A importância do desenvolvimento do pensamento probabilístico reside no facto de todas as pessoas o usarem — talvez mais do que em qualquer outra área da Matemática — independentemente do facto de lhe ter sido ensinado ou não (Shaughnessy, 1992).

Simulações e o método frequencista

Em 1991, num programa de divulgação científica inglês tentou-se perceber se o pão cairia sempre com a manteiga virada para baixo. Foram atiradas ao ar 300 torradas e o resultado observado foi semelhante ao lançamento de uma moeda. O método frequencista para a determinação de probabili-

O Concurso da TV

No final de um concurso de televisão, o concorrente tem perante si três portas fechadas. Atrás de uma delas está o «fabuloso» prémio, o automóvel. O concorrente escolhe uma das portas. Antes de a abrir, diz-lhe o apresentador:

— Eu sei onde está o carro e, tal como prevê o regulamento, vou abrir uma porta que não tem prémio.

Abre uma das portas, que está efectivamente vazia, e pergunta:

— Quer manter a sua aposta ou trocar de porta?

Qual a atitude que pode dar maior vantagem ao concorrente:
Manter a porta escolhida inicialmente?
Mudar para a outra porta ainda fechada?
É indiferente (e atira-se uma moeda ao ar para que o acaso decida).

Figura 1. O concurso da TV (Veloso e Viana, 1992).

dades — ou para a confirmação de resultados obtidos experimentalmente — tem tido um papel secundário no desenvolvimento do raciocínio probabilístico. A modelação de problemas de probabilidades com recurso a simulações é uma técnica promissora para ultrapassar concepções erróneas. O reconhecimento de que um raciocínio não é o correcto pode ser difícil de aceitar. No pólo oposto da análise deste método está a argumentação de que esta estratégia pode revestir-se de uma técnica para a procura de um número sem dar indicações para a justificação do valor encontrado, ou que a técnica pode consistir numa tarefa mecânica desprovida de raciocínio. Assim, importa garantir que o processo de simulação constitui uma forma de apropriação da experiência aleatória pelo aluno (ou professor), permitindo que possa depois modelá-la melhor.

A utilização de computadores para modelar uma experiência aleatória, quando se procura a determinação de probabilidades, tem sido usada por matemáticos para decidir sobre o valor da probabilidade, quando a razão não se revelou suficiente. Por exemplo, muitos matemáticos, entre os quais o célebre Paul Erdös, recusaram a solução correcta do problema de Monty Hall até observarem uma simulação computacional do problema. Este problema, conhecido entre nós por *O concurso da TV* (figura 1) tem três etapas. Numa primeira fase um concorrente escolhe uma de três portas com o objectivo de conseguir um prémio; na segunda o apresentador abre uma das portas restantes que não contém o prémio; e na terceira fase é dado ao concorrente uma oportunidade para alterar a sua escolha inicial.

Não é evidente para um número significativo de pessoas se alterar a escolha ou não é relevante e as implicações que a alteração tem na probabilidade de ganhar o prémio. No entanto, hoje, os meios computacionais colocam ao nosso dispor muitas possibilidades de, num reduzido intervalo de tempo, obter um número elevado de experiências.

Na Internet existem várias simulações computacionais deste problema. Por exemplo no endereço

`http://www.shodor.org/interactivate/activities/SimpleMontyHall/`

podem seleccionar-se as portas com um clique do rato e observar o que acontece. A programação do computador, recorrendo a linguagens de programação para simular um problema é outra possibilidade. Esta tarefa pode, no entanto, estar fora do alcance dos alunos porque é necessário o domínio de ferramentas informáticas mas a utilização de geradores de números aleatórios em calculadoras gráficas ou folhas de cálculo (por exemplo) é acessível a indivíduos sem competências especiais de programação e constituem uma forma eficaz de fazer simulações computacionais. Na figura 2 apresenta-se a ilustração de uma simulação do problema *Concurso da TV* obtida a partir de uma folha de cálculo.

Este tipo de abordagem permite a análise de problemas de probabilidades inacessíveis ou demasiados complicados para um tratamento analítico. Também em outras ciências, quando a incerteza ou o acaso têm um papel relevante, e a análise teórica não consegue dar respostas suficientes, esta forma de realizar experiências aleatórias com recurso a simulações reveste-se de grande importância, tendo a designação genérica de métodos de Monte Carlo.

O desenvolvimento de uma cultura de dúvida razoável ou de questionamento de intuições e de preconcepções não faz parte da nossa tradição de ensino, mas é uma parte essencial do raciocínio probabilístico. A formação dos professores (e as concepções erróneas destes) foi também já apontada com parcialmente responsável por algumas fragilidades das aprendizagens dos alunos. Seria importante uma intervenção de fundo, relembrando a importância da renovação do ensino e aprendizagem das probabilidades (como tem acontecido em outras áreas da Matemática), uma vez que um

	B–E	F	H	I	J	K	L	M	N
1									
2		O CONCURSO DA TV - Desafios 2, Problema 59							
3									
4	Paulo Correia 2005 mat.absolutamente.net	Nº de Experiências	Porta escolhida	Porta do Prémio	Porta Aberta	Não muda	Muda P/ Porta	Muda	Moeda ao ar
5		20	1	3	2	perde	3	GANHA	GANHA
6			2	2	1	GANHA	3	perde	GANHA
7	NÃO MUDA	Ganhos se N/Muda	3	2	1	perde	2	GANHA	GANHA
8		8	1	3	2	perde	3	GANHA	perde
9	p= 8		1	1	2	GANHA	3	perde	GANHA
10	20		1	2	3	perde	2	GANHA	GANHA
11			2	1	3	perde	1	GANHA	GANHA
12	= 0,4		1	2	3	perde	2	GANHA	perde
13			3	3	2	GANHA	1	perde	GANHA
14			3	2	1	perde	2	GANHA	GANHA
15	MUDA	Ganhos se Muda	2	2	1	GANHA	3	perde	perde
16		12	1	2	3	perde	2	GANHA	perde
17	p= 12		3	2	1	perde	2	GANHA	perde
18	20		1	1	2	GANHA	3	perde	GANHA
19			2	1	3	perde	1	GANHA	GANHA
20	= 0,6		1	1	2	GANHA	3	perde	perde
21			1	2	3	perde	2	GANHA	GANHA
22			1	1	2	GANHA	3	perde	GANHA
23			3	3	2	GANHA	1	perde	GANHA
24			2	3	1	perde	3	GANHA	perde
25									

Figura 2. Simulação do Problema Concurso da TV feita numa folha de cálculo [http://mat.absolutamente.net/recursos/problem/excel/portas.xls]

currículo adequado não é suficiente para uma aprendizagem eficaz e as necessidades adicionais são difíceis de definir e de colmatar.

Incertezas incomensuráveis

Existem, ainda, experiências aleatórias relativamente às quais não é possível determinar ou calcular a probabilidade de cada um dos acontecimentos. Num jogo de futebol não se pode quantificar a probabilidade de um empate (embora seja defendido por alguns que este valor existe — apenas não o sabemos calcular). A impossibilidade de levar em consideração todos os elementos que influenciam o resultado, por um lado, e a impossibilidade de repetir muitas vezes a experiência nas mesmas condições, por outro, tornam esta experiência imune a uma quantificação objectiva das probabilidades dos acontecimentos associados.

O papel da escola torna-se ainda mais difícil quando alargamos a esfera do pensamento probabilístico a tomadas de decisão e reacções de todos os dias que mobilizam raciocínios probabilísticos e que se misturam, de forma subtil, com experiências e outras convicções de níveis conscientes e inconscientes, impossibilitando desta forma teses abrangentes e análises consistentes. Também a multiplicidade de experiências que envolvem incerteza ou o acaso, e as diferentes naturezas da incerteza trazem o raciocínio probabilístico para uma esfera diferente daquela em que moedas ou dados permitem uma medição da incerteza. A conjugação de um universo probabilístico povoado por experiências aleatórias bem estudadas e definidas, com um outro mundo onde a incerteza advém de emoções humanas e processos sociais ou ainda da singularidade de cada situação, torna difícil a definição do raciocínio que usamos para processar informações em que a incerteza ou o aleatório têm relevância. Felizmente, nada disto é tão simples como analisar o lançamento de uma moeda ao ar...

Em 1995, Robert Matthews voltou a pensar sobre o pão com manteiga... verificou que quando o pão cai, não é lançado ao ar como uma moeda, cai de um intervalo de alturas razoavelmente definido, e nunca tem a manteiga voltada para baixo antes de cair (a bem da limpeza das toalhas de mesa). Com estas condicionantes e recorrendo a argumentos da física, foi possível verificar que a probabilidade de uma torrada cair com a manteiga voltada para baixo é substancialmente grande. Também as simulações podem falhar...

Bibliografia

Buescu, J. (2001). O Mistério do Bilhete de Identidade e Outras Histórias. Lisboa: Gradiva.

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflexions and directions. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan Publishing Company.

Veloso, E., Viana, J., (1992), Desafio 2, Porto: Edições Afrontamento.

Sítios na Internet

http://www.shodor.org/interactivate/activities/SimpleMontyHall/

http://mat.absolutamente.net/
(página do autor deste artigo)

Paulo Correia
Escola Secundária de Alcácer do Sal

Os quatro filhos da família Canelas

O casal Canelas tem quatro filhos, nenhum deles gémeo de outro. Fui visitá-los e, a certa altura, disse-me a mais velha, a Ana:

— *Já reparou que o produto da minha idade pela da minha irmã Carla é seis vezes maior agora do que era há seis anos atrás?*

O Bruno, o segundo dos irmãos, estava ao lado e reparou:

— *Olha, é curioso, o mesmo acontece com a minha idade e a do meu irmão Daniel.*

Que idades têm os quatro filhos da família Canelas?

(Respostas até 19 de Fevereiro para zepaulo@armail.pt)

Múltiplos de 9 em quadrado mágico

O problema proposto no número 98 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Num quadrado de 3 por 3, colocar os algarismos de 1 a 9, um em cada casa, de tal modo que os três números lidos na horizontal, os três números lidos na vertical e os dois números lidos nas diagonais principais sejam todos eles múltiplos de 9.

Pelos vistos, são muitos os entusiastas dos quadrados mágicos. É que, desta vez, o número de leitores a responder ao problema excedeu largamente o que é habitual. Foram 21: Alberto Canelas (Queluz), Alice Bárrios (Odivelas), Ana Paulino, Armando Fernandes (Aveiro), Catarina Ferreira (Pontinha), Cristina Ortins (Angra do Heroísmo), Fátima Cardoso (Moimenta da Beira), Francisco Estorninho (Lisboa), Joana Sobreira (Madeira), João Barata (Castelo Branco), Patrícia Marques (Lisboa), Patrícia Sampaio (Guimarães), Paula Portela (V. F. Xira), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Regina Veríssimo, Ricardo Poças (Viseu), Rute Cipriano (Lisboa), Sónia Abrantes (Portalegre), Susana Anacleto (Arrouquelas), Teresa Quinta (Cantanhede) e a resposta colectiva de Daniel Meneses, Diogo Castanheira, Gabriel Lomba, Laura Soares, Luís Figueiredo e Nuno Soares (alunos do 9° ano da EBI de Oliveira de Frades).

Nove das respostas limitam-se a apresentar simplesmente uma solução, que deve ter sido obtida por tentativas, sem explicar qualquer metodologia seguida. No entanto, a maioria dos *solucionistas* vai mais longe, alguns começando por fazer a lista dos múltiplos de 9 com algarismos diferentes e sem usar o 0, enquanto outros simplificam o trabalho, fazendo apenas a lista do conjunto de três algarismos que somam 9 ou 18 (condição para formarem um múltiplo de 9). Temos então:

Com algarismos a somar 9:

126 135 234

Com algarismos a somar 18:

189 279 369 378 459 468 567

O Francisco chama a atenção para o facto de haver "algarismos incompatíveis", isto é, que não podem fazer parte do mesmo número: 1 e 4; 1 e 7; 4 e 7; 2 e 5; 2 e 8; 5 e 8.

É agora que é preciso dar um passo importante para quem quiser encontrar todas as soluções sem ter de tentar

1	2	6
8	3	7
9	4	5

9	8	1
4	3	2
5	7	6

5	4	9
7	3	8
6	2	1

6	7	5
2	3	4
1	8	9

9	4	5
8	3	7
1	2	6

1	8	9
2	3	4
6	7	5

6	2	1
7	3	8
5	4	9

5	7	6
4	3	2
9	8	1

um enorme número de casos. Foi o que fizeram o Ricardo, o João, a Cristina, a Catarina, a Alice e o Alberto:

— Na lista anterior, cada algarismo aparece três vezes, excepto o 3, o 6 e o 9, que aparecem quatro. Ora, no quadrado, o algarismo central terá de fazer parte de quatro números (uma linha, uma coluna e duas diagonais). Logo, a casa central só pode ser ocupada por 3, 6 ou 9.

Vejamos com o 3 na casa central. Escolhemos um número para uma das diagonais, por exemplo 135. Não é difícil encontrar uma solução. A partir dela, obtemos mais três por rotações sucessivas de 90°. Trocando a linha de cima com a de baixo e fazendo novas rotações, encontramos mais quatro soluções (ver figura).

Partimos agora da diagonal 234 e, pelo mesmo processo, obtemos mais oito soluções.

O mesmo acontece com a diagonal 378: oito soluções mais.

Em todos estes 24 casos a outra diagonal é 639, pelo que estão esgotadas as soluções em que o 3 está na casa central.

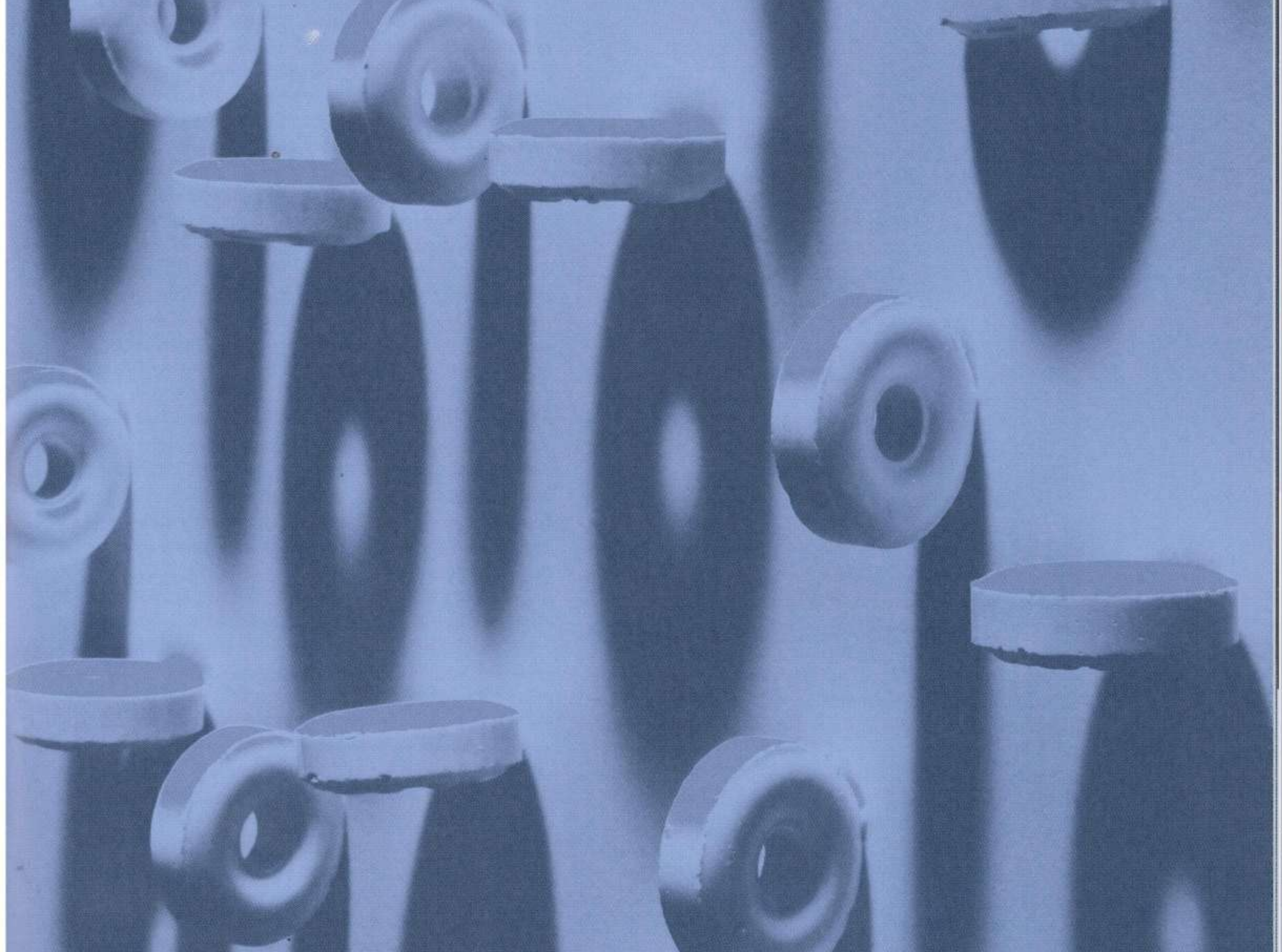
Se escolhermos o 6 para casa do meio, iremos obter também 24 casos, 8 para cada diagonal possível (162, 468 ou 567).

O mesmo acontece com o 9 no centro e respectivas diagonais possíveis: 198, 297 e 495.

Há então, como muito bem concluiram o Francisco e o Alberto, 72 soluções. No entanto, podemos talvez dizer que o número de soluções é 9, cada uma delas desdobrando-se em 8 por rotações e simetrias.

A Avaliação e o Raciocínio Matemático

Sílvia Semana
Leonor Santos



A capacidade de raciocinar matematicamente é apontada, desde há muito, como um objectivo central do ensino e da aprendizagem da Matemática. É através do raciocínio que acedemos à compreensão de situações matemáticas, que examinamos um problema sob vários ângulos e que, analisando e estabelecendo relações, transformamos as ideias iniciais em hipóteses que dão origem à formulação de conjecturas (Dewey, 1910/1997). Assim, o raciocínio matemático envolve mais do que a compreensão de importantes ideias matemáticas e a aplicação de métodos e procedimentos úteis (Cuoco, 2003). A ele estão associadas diversas formas de pensamento igualmente importantes para todos aqueles que fazem Matemática, como seja: prever resultados, muitas vezes essencial para a formulação de conjecturas; questionar soluções, mesmo as correctas; procurar padrões; fazer recurso a representações alternativas; analisar; sintetizar.

É igualmente reconhecida a importância do desenvolvimento, no processo de ensino e aprendizagem, de uma avaliação que tenha por principal objectivo contribuir para a regulação das aprendizagens dos alunos. Faz, portanto, todo o sentido questionarmo-nos sobre como podemos avaliar o raciocínio matemático dos alunos de modo a promovermos o desenvolvimento dessa capacidade.

O Raciocínio Matemático

Os actuais documentos curriculares de Matemática um pouco por todo o mundo, e inclusivamente em Portugal, apontam o desenvolvimento do raciocínio matemático como um objectivo central do ensino da Matemática e alertam para a necessidade de desenvolver essa capacidade nos alunos de forma consistente, recorrendo-se à sua utilização sistemática numa diversidade de contextos (NCTM, 2007; Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007). Efectivamente, o documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (2007) destaca a importância de todos os alunos reconhecerem o raciocínio e a demonstração como aspectos fundamentais da Matemática; formularem e investigarem conjecturas matemáticas; desenvolverem e avaliarem argumentos e provas matemáticos; bem como seleccionarem e usarem diversos tipos de raciocínios e métodos de demonstração. Também o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) destaca a importância dos alunos raciocinarem matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Nesse documento, o raciocínio matemático, além de ser concebido como um objectivo de aprendizagem central, constitui-se como uma orientação metodológica importante para o professor estruturar as actividades a desenvolver em sala de aula.

Ambos os documentos apontam o raciocínio matemático como uma capacidade fundamental, que envolve a explicação e a justificação de ideias, a formulação e o teste de conjecturas e, numa fase mais avançada, a demonstração. Os alunos devem começar, no início da escolaridade, pela justificação de passos e operações na resolução das tarefas e evoluir gradualmente para argumentações mais complexas, acabando por distinguir e apresentar generalizações, casos particulares e contra-exemplos e por reconhecer e usar diferentes métodos de demonstração (NCTM, 2007; Ponte *et. al.*, 2007).

Naturalmente, o professor desempenha um papel importante no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Em particular, deve propor, frequentemente, a realização de actividades que exijam reflectir e raciocinar, com o intuito de ajudar os alunos a valorizar e a usar o poder do raciocínio matemático. O professor deve ainda dar atenção aos raciocínios dos alunos e procurar que eles os explicitem com clareza. Através da discussão oral na aula, os alunos podem confrontar as suas estratégias de resolução das tarefas, assim como identificar e discutir os raciocínios elaborados pelos seus colegas. Já através da escrita de textos, os alunos têm oportunidade de clarificar e elaborar de modo mais aprofundado as suas estratégias e os seus argumentos, reconhecendo a importância do rigor no uso da linguagem matemática.

Na mesma linha, a brochura A *Experiência Matemática no Ensino Básico* (2008) defende que, desde os primeiros anos de escolaridade e desde que sejam proporcionadas condições adequadas, os alunos são capazes de raciocinar matematicamente, isto é, em ambientes apropriados os alunos são "capazes de explicar e de justificar os raciocínios usados durante o processo de resolução de uma tarefa matemática, de fazer generalizações a partir da análise de casos particulares, de compreender o que significa um contra-exemplo, de reflectir sobre o que constitui um argumento aceitável e adequado quando se trabalha em Matemática e de aplicar resultados gerais a exemplos específicos" (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p. 81). Para caminhar nesse sentido é fundamental proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem em que estes tenham oportunidade para explicar e justificar as suas ideias e resoluções e para formular, testar e, eventualmente, provar conjecturas. Os problemas e as investigações apresentam-se como contextos privilegiados para esse trabalho, mas meros exercícios ou acontecimentos do quotidiano da aula podem constituir-se como pretextos para o professor desafiar os alunos a argumentarem, a confrontarem e a discutirem as suas ideias. O importante é que o raciocínio matemático e, em particular a argumentação, esteja presente, de forma consistente, em qualquer tópico matemático e não fique limitado a situações esporádicas ou a determinado tema matemático (Boavida *et. al.*, 2008).

Avaliação Reguladora das Aprendizagens

As mais recentes orientações curriculares preconizam uma avaliação ao serviço das aprendizagens dos alunos, em que as formas de avaliação constituem, simultaneamente, situações de aprendizagem e as componentes reguladora e auto-reguladora ganham relevo, permitindo a implicação do aluno no processo de avaliação (Ponte *et. al*, 2007; NCTM, 2007). Neste contexto, a regulação das aprendizagens pode ser entendida como "todo o acto intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribua directamente para a progressão e/ou redireccionamento dessa aprendizagem" (Santos, 2002, p. 77). Vários estudos mostram que a implementação de uma avaliação reguladora das aprendizagens pode, de facto, melhorar o desempenho escolar dos alunos. Em particular, Black e William (1998), partindo de um trabalho de revisão de 250 estudos de todo o mundo, publicados entre 1987 e 1998, encontraram evidências de que o foco numa avaliação para a aprendizagem, por oposição a uma avaliação das aprendizagens, produz melhorias substanciais nos desempenhos dos alunos.

São vários os processos de regulação que podem ser accionados e que divergem, essencialmente, pelo papel atribuído aos alunos e ao professor no acto de regulação (Perrenoud, 1999; Santos, 2008). Santos (2002) destaca: a avaliação formativa, da responsabilidade do professor; a co-avaliação entre pares, da responsabilidade do aluno e dos seus pares; e a auto-avaliação, da responsabilidade do aluno. A avaliação formativa e a auto-avaliação merecem aqui a nossa especial atenção.

Enquanto a avaliação sumativa é exterior ao processo de ensino e aprendizagem, baseia-se nos produtos dos alunos e está associada à prestação de contas, à certificação e à selecção, a avaliação formativa debruça-se sobre os processos e a actividade dos alunos e visa a melhoria e a regulação do ensino e das aprendizagens. A legislação portuguesa[1] vi-gente perspectiva uma avaliação formativa com as seguintes características: (a) apresenta um carácter sistemático e contínuo; (b) recorre a diversos instrumentos de recolha de informação, dependendo da natureza e dos contextos de aprendizagem; (c) fornece informação sobre o desenvolvimento das aprendizagens e competências, permitindo melhorar os processos de trabalho. Neste contexto, a avaliação é considerada como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, pelo que as tarefas de avaliação propostas aos alunos são também tarefas de aprendizagem.

Já a auto-avaliação é um processo interno ao próprio sujeito e apresenta-se, por isso, como uma forma de regulação privilegiada (Santos, 2002). Alguns estudos sobre auto-avaliação indicam, mesmo, que o recurso a esta forma de avaliação pode conduzir a melhorias significativas no desempenho dos alunos (NCTM, 2003). No contexto escolar, o professor desempenha um papel central neste processo, competindo-lhe implementar estratégias adequadas e propor contextos favoráveis ao desenvolvimento da capacidade de auto-avaliação dos alunos. Uma abordagem positiva do erro; o questionamento oral; o *feedback* escrito; a explicitação/negociação dos critérios de avaliação; e o recurso a instrumentos alternativos de avaliação são exemplos de mecanismos que podem ser implementados pelo professor, na prática de uma avaliação formativa, com potencialidades ao nível da auto-avaliação dos alunos e, mais abrangentemente, da auto-regulação das aprendizagens (Santos, 2002).

O erro, enquanto fenómeno inerente à aprendizagem, apresenta-se como uma fonte rica de informação, cabendo ao professor compreender a sua natureza, formular hipóteses explicativas do raciocínio do aluno e orientá-lo adequadamente, para que este seja capaz de o identificar e corrigir. A orientação dada pelo professor não deve, por isso, incluir a identificação nem a correcção do erro, mas antes questionar e apontar pistas de acção futura, de modo a que seja o aluno a consegui-lo (Santos, 2002). Santos (2003) reforça algumas destas ideias, considerando que um *feedback* com funções reguladoras deve: (a) ser claro, para que possa ser compreendido, autonomamente, pelo aluno; (b) apontar pistas de acção futura, que levem o aluno a prosseguir; (c) incentivar o aluno a reanalisar a sua resposta; (d) não incluir a correcção do erro, permitindo que o aluno o identifique e corrija e, assim, aconteça uma aprendizagem mais duradoura; e (e) identificar o que está bem feito, para que esse saber seja conscientemente reconhecido e a autoconfiança do aluno seja promovida.

A orientação dada pelo professor pode ser oral ou escrita e apresentar-se sob a forma de comentários com sugestões ou questões reflexivas, mas para que estas intervenções contribuam para o desenvolvimento da capacidade de auto-avaliação dos alunos, devem acontecer de forma continuada, promover uma postura de reflexão e auto-questionamento nos alunos e não incluir juízos de valor sobre o seu desempenho. "A estratégia que escolheste é adequada, mas deves procurar usar uma linguagem menos confusa. Porque não escreves ... em vez de ...?"; "Experimenta com outros valores e analisa os resultados obtidos. O que concluis?"; "Porque pensaste assim?"; "Donde te surgiu esta ideia?" ou "Em que outras situações é que este processo se poderia aplicar?" são exemplos de intervenções que cumprem esses requisitos (Santos, 2002).

Os critérios de avaliação, por sua vez, desempenham um papel central no processo de auto-avaliação, uma vez que esta se desenvolve mediante um determinado referencial de padrões, valores ou critérios. Os critérios de realização de uma tarefa permitem que o sujeito compare a sua acção com o que é pretendido e, se necessário, implemente estratégias de correcção dessa acção, para obter sucesso na realização da tarefa (Silva, 2004). A apropriação dos critérios de avaliação é, portanto, essencial ao processo de auto-avaliação e de auto-regulação das aprendizagens e cabe ao professor facilitar essa apropriação pelos alunos. De acordo com Santos (2002), o professor deve começar por definir e explicitar, para si próprio, que critérios considera na avaliação da tarefa em causa e, posteriormente, partilhar esses critérios com os alunos. Esta partilha deve, preferencialmente, envolver os alunos no aperfeiçoamento e/ou completude dos critérios, através de um processo de negociação, e deve ser feita recorrendo a uma linguagem acessível aos alunos, para que possam compreender o que é esperado deles. No sentido de promover o desenvolvimento da capacidade de auto-avaliação dos alunos, o professor deve ainda recorrer a instrumentos de avaliação alternativos aos testes tradicionais (Santos, 2002). Concretamente, os testes em duas fases, os relatórios escritos e os portefólios são exemplos de instrumentos com potencialidades no desenvolvimento da auto-avaliação dos alunos (Pinto & Santos, 2006).

Avaliar para promover o raciocínio matemático

Conforme já referimos, o desenvolvimento do raciocínio matemático não é um processo isento de dificuldades, cabendo ao professor proporcionar contextos favoráveis ao seu desenvolvimento. Para além disso, a capacidade do aluno raciocinar matematicamente deve ser avaliada, não só para o professor gerir o seu ensino de modo a facilitar a aprendizagem do aluno, mas também para o próprio aluno tomar consciência e regular o seu processo de aprendizagem. Neste contexto é legítimo questionarmo-nos como poderemos, enquanto professores, avaliar e simultaneamente promover o desenvolvimento da capacidade de raciocínio matemático dos alunos.

De acordo com o que foi atrás referido, as investigações e os problemas constituem contextos favoráveis à promoção do raciocínio matemático. Um instrumento geralmente associado à avaliação de actividades de aprendizagem dessa natureza é o relatório escrito[2]. Ao fazer apelo à articulação de ideias, à explicação de procedimentos, à fundamentação e à análise crítica dos processos utilizados e dos resultados obtidos, o relatório escrito privilegia aspectos relacionados, não só, com o conhecimento e compreensão de conceitos e processos, mas também com o desenvolvimento de capacidades como a comunicação e o raciocínio matemáticos, a reflexão, o espírito crítico e, ainda, o sentido de responsabilidade e a perseverança (Leal, 1992; Abrantes, Leal, Teixeira & Veloso, 1997; Menino, 2004; Nunes, 2004; Dias, 2005).

Apresentamos, de seguida, um exemplo de implementação do relatório escrito, enquanto instrumento de avaliação reguladora das aprendizagens e, em particular, como promotor do raciocínio matemático dos alunos. Este foi um trabalho desenvolvido numa turma do 8.º ano de escolaridade, no ano lectivo 2007/2008, no âmbito do Projecto AREA[3]. Ao longo do ano lectivo, foi proposta aos alunos a realização de vários relatórios a partir de tarefas de natureza diversa. Os relatórios a elaborar deviam estar organizados em três partes: introdução, desenvolvimento e conclusão. As duas primeiras partes foram realizadas em grupo, tal como as tarefas que deram origem aos relatórios, e a última parte foi realizada individualmente, incluindo a auto-avaliação do aluno. Com o intuito de potenciar a componente reguladora da avaliação, os relatórios foram elaborados em duas "fases", isto é, uma primeira versão do relatório foi sujeita à leitura e ao comentário do professor e posteriormente os alunos elaboraram uma nova versão, a versão final, tendo em conta o *feedback* escrito recebido. De notar ainda que durante a actividade de elaboração de ambas as fases do relatório foi fornecido *feedback* oral aos alunos.

Dado que a modalidade de trabalho adoptada na realização do relatório constituiu uma novidade para a turma, foi fundamental a produção de um guião do relatório e a definição dos critérios de avaliação, através de indicadores. No sentido de promover a apropriação dos critérios de avaliação pelos alunos, os dois documentos (indicados respectivamente nos Anexos 1 e 2) foram discutidos com os alunos no início do ano lectivo. Mais do que isso, os critérios de avaliação foram negociados, envolvendo-se os alunos no seu aperfeiçoamento.

Ao longo do ano verificou-se uma evolução nos relatórios elaborados. Os alunos passaram progressivamente a melhor descrever e explicar as estratégias utilizadas na realização de cada tarefa e a fundamentar os resultados obtidos. A esse nível, nos relatórios, foram visíveis melhorias significativas da primeira versão para a segunda. Apresentamos de seguida dois exemplos que ajudam a perceber esta evolução, nomeadamente da primeira para a segunda fase. Ambos os exemplos dizem respeito a um grupo de quatro alunos que trabalhou em conjunto na elaboração dos relatórios.

Na primeira tarefa (que deu origem ao primeiro relatório) foi proposta aos alunos uma investigação de possíveis generalizações do Teorema de Pitágoras, sendo-lhes pedido que relembrassem a relação existente entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo rectângulo e que investigassem o que acontece se construíssem outras figuras geométricas sobre os lados de um triângulo rectângulo. Devido à natureza da tarefa, o grupo foi chamado a formular e testar conjecturas e a justificar ideias, relativamente à relação estudada, apelando-se, assim, à sua capacidade de raciocinar matematicamente.

No relatório, o grupo explicou como procedeu na exploração da primeira situação proposta na tarefa, relativa a triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo rectângulo. Na versão inicial, o grupo descreveu como fez para construir os triângulos equiláteros e referiu que determinou as áreas desses triângulos:

Realizámos a primeira tarefa proposta, começámos por fazer um triângulo rectângulo, com ajuda do compasso fizemos à volta (nas extremidades do triângulo rectângulo) três triângulos equiláteros, porque com a régua não obtínhamos triângulos equiláteros nem uma boa apresentação gráfica. Determinámos a área dos triângulos.

A justificação do recurso ao compasso surgiu na sequência de algum *feedback* oral fornecido durante a elaboração do relatório, o que sugere que esse *feedback* ajudou os alunos a fundamentar as suas opções:

Rute—Nós pusemos assim: com a ajuda do compasso, fizemos à volta três triângulos equiláteros. Depois podemos pôr... ah...

Professor—Porque é que pegaram no compasso?

Rute—Porque não conseguíamos realizar a tarefa só com a régua.

Professor—Então, não conseguias desenhar um triângulo só com a régua?

Rute—Sim, mas para o triângulo ser equilátero tinha que ter os lados todos iguais.

Numa folha anexa, o grupo apresentou ainda a construção referente aos triângulos equiláteros, bem como os valores da base e da altura considerados em cada triângulo equilátero, para determinar a área correspondente. Apresentou, também, os cálculos a efectuar para determinar as áreas pretendidas (ver figura 1).

Porém, os alunos não explicaram, em parte alguma do relatório, como procederam para encontrar os comprimentos das bases e das alturas respectivas, nem que conclusões obtiveram a partir das áreas apresentadas. Para a segunda fase, foi, então, fornecido algum *feedback* escrito. Relativamente à descrição apresentada, foram feitos dois comentários distintos. Por um lado, foram elogiados o recurso ao compasso e a justificação dessa opção: "Fizeram uma excelente opção. Boa forma de responderem a um problema que tiveram de ultrapassar". Através desta intervenção foram, assim, identificados aspectos positivos no relatório, para que esse saber fosse conscientemente reconhecido e a autoconfiança dos alunos fosse promovida (Santos, 2003). Por outro lado, o grupo foi questionado relativamente ao que concluiu através da determinação da área dos triângulos considerados: "E o que concluíram?". Foram, ainda, colocadas algumas questões junto da construção dos triângulos, que procuraram orientar o trabalho dos alunos no sentido de incluírem no relatório a informação em falta: "Como chegaram a estes

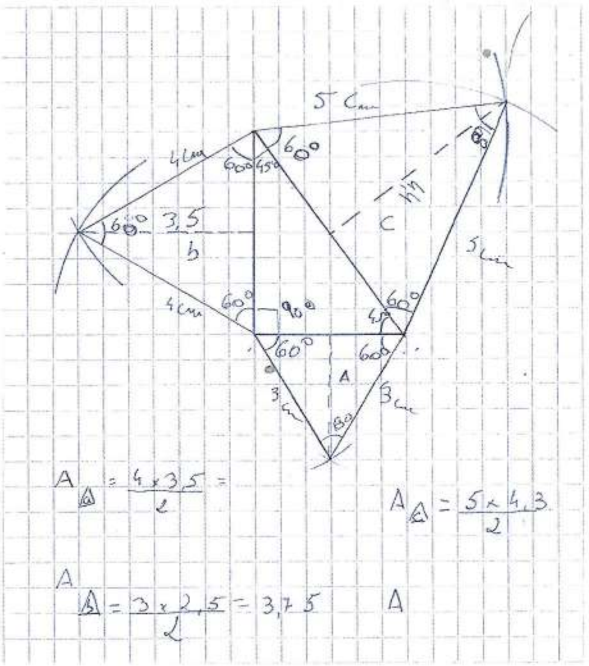


Figura 1

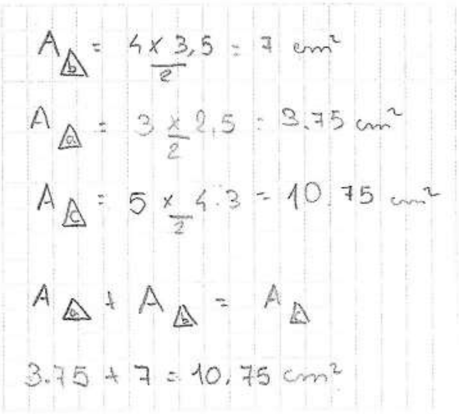


Figura 2

valores? O que concluíram com as áreas apresentadas? Que relação tiraram?".

Na segunda fase, os alunos mantiveram a descrição que fora elogiada e procuraram dar resposta às questões colocadas, explicando com mais pormenor como procederam, nomeadamente para encontrar os valores da base e da altura e determinar a área correspondente em cada um dos triângulos equiláteros, e que conclusões obtiveram para a primeira situação explorada:

Determinámos a área dos triângulos, sabemos que para achar a área dum triângulo: (base × alt)/2, medimos a altura e a base, multiplicámos e de seguida dividimos por 2 (e assim para os três triângulos). Concluímos que a soma da área A e área B é igual à área C.

Na folha anexa, na versão final, os alunos, baseando-se na figura da primeira fase, determinaram e identificaram correctamente o valor da área de cada um dos triângulos considerados (ver figura 2) e explicitaram a relação encontrada entre as áreas dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo rectângulo: "A soma da área A e área B é equivalente à área C". Além disso, acrescentam uma observação, onde identificam os aspectos negativos da primeira versão, que são então melhorados. São os próprios alunos a identificar e a corrigir os erros cometidos: Observação (da 1ª fase): "Não apresentámos o valor das áreas, trocámos as contas e não apresentámos conclusões".

Na segunda tarefa (que deu origem ao segundo relatório) foi proposta aos alunos a resolução de um problema, envolvendo a aplicação do Teorema de Pitágoras, no espaço. Concretamente, foi-lhes pedido que construíssem um cone a partir de um dos três sectores iguais de um círculo, com um raio de seis centímetros, e de seguida determinassem a altura do cone assim construído. Foi, ainda, pedido que explicassem como procederiam para determinar a altura do cone obtido, partindo de um círculo com um raio r qualquer. Devido à natureza da tarefa, apelou-se, maioritariamente, às capacidades de resolução de problemas e de raciocínio matemático, além da aplicação e compreensão de alguns conceitos, procedimentos e resultados matemáticos.

No relatório, os alunos explicaram como procederam para construírem os cones e procuraram fundamentar as suas acções. Em particular, explicaram como determinaram o ângulo de cada um dos três sectores circulares:

Começámos por ler a tarefa e responder ao que nos foi questionado. Desenhámos um círculo, com raio de 6 cm. Para dividirmos o ângulo em três partes iguais sabemos que o seu ângulo mede 360° (logo 360°/3=120°).

Com ajuda do transferidor medimos sobre o raio 120° três vezes e unimos os pontos e obtivemos 3 partes iguais. De seguida cortámos as três partes, com ajuda da fita-cola formámos três cones.

De seguida, os alunos apresentaram a estratégia implementada para determinar a altura dos cones. Antes de passarem à resolução propriamente dita, fizeram uma breve descrição de como o grupo abordou o problema, referindo que os vários elementos trocaram ideias entre si e que surgiram algu-

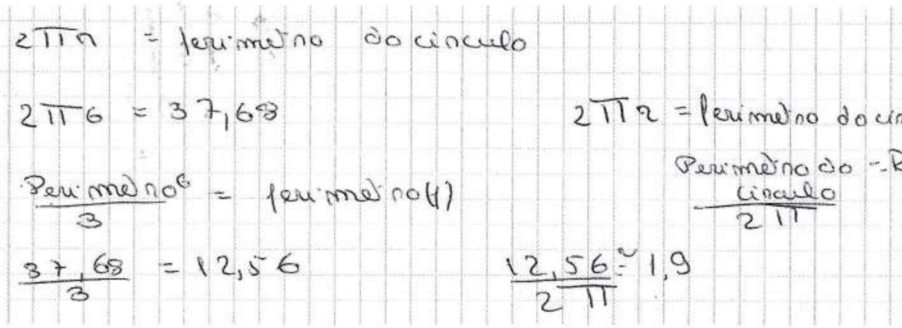


Figura 3

mas dificuldades, que procuraram ultrapassar com a ajuda de um dos professores. Depois, determinaram o perímetro do círculo original, o perímetro da base do cone e, por fim, o raio da base do cone, apresentando os cálculos necessários (ver figura 3).

Porém, não explicaram ou fundamentaram os cálculos apresentados, não distinguiram os dois círculos referenciados (o original e a base do cone), nem apresentaram unidades de medida. Foi, portanto, fornecido *feedback* escrito com o intuito de alertar os alunos para esses aspectos: "Para que fizeram estes cálculos? Referem o perímetro do círculo várias vezes. Talvez fosse melhor distinguirem em cada situação de que círculo estão a falar. Atenção à falta de unidades de medida". A importância dos alunos explicarem e fundamentarem os cálculos foi ainda reforçada através do *feedback* oral:

Professor—"(...) devem procurar explicar melhor os cálculos apresentados e para que os fizeram". Apresentaram estes cálculos, não foi? Porquê? Para quê? Quando? Como?

Rute—O store também quer saber tudo!

Professor—Quero saber tudo, não... Imagine que eu estou a dar a aula e escrevo uma coisa qualquer no quadro e pergunta-me "oh store, o que é aquilo" e eu digo-lhe "Também quer saber tudo", não é?

Rute—Oh store, mas aqui nós já sabemos que isto é o perímetro...

Professor—Já sabem, mas têm que escrever o que quer dizer, eu não vou levar a Rute lá para casa para me explicar, não é?

Também se mostrou necessário complementar o *feedback* escrito, com novas pistas, de modo a que os alunos distinguissem os círculos considerados na resolução:

Rute—Stora, como é que vamos distinguir os círculos?

Professora—Com que círculos é que trabalharam?

Rute—Com o que tinha raio seis.

Professora—Sim. E não trabalharam com mais nenhum?

Rute—Com a base.

Professora—A base?

Rute—Sim, do cone.

Professora—Então, no relatório, só têm que dizer a qual é que se estão a referir quando explicam o que fizeram.

Os alunos levaram em consideração o *feedback* recebido, quer oral quer escrito, e na versão final do relatório, além de acrescentarem as unidades de medida, descreveram como procederam para determinar o raio da base do cone, clarificando o contexto e com que objectivo foram realizados os cálculos apresentados e ainda identificando a que círculo se referem em cada caso:

Primeiro descobrimos o perímetro do círculo do problema. De seguida, dividimos o perímetro do círculo do problema, em três partes iguais, e obtivemos o perímetro da base de um cone. Sabendo que para descobrir o perímetro do círculo é $2\pi r$, portanto para saber o raio é ao contrário, $P \div 2\pi = r$. E obtivemos 1,9 cm.

Ainda na primeira versão do relatório, os alunos procuraram descrever com detalhe o triângulo rectângulo considerado para determinar a altura do cone (ver figura 4) e explicaram como descobriram o comprimento da hipotenusa (que eles designam por diagonal) desse triângulo:

Se desenharmos a altura do cone, ela vai coincidir com o raio formando um ângulo de 90°. Se nas extremidades das rectas desenharmos um segmento de recta irá formar um triângulo rectângulo e para o nosso bem era a diagonal que sabíamos quanto media.

Nós sabemos que a diagonal mede 6 cm porque a diagonal é o raio da circunferência se abrirmos o cone e como o raio da circunferência é 6 cm, então ficámos a saber a diagonal.

Por fim, os alunos apresentaram os cálculos necessários para determinar a altura pretendida, mas não referiram de onde resulta a primeira igualdade usada (altura do cone^2 = diagonal^2 – raio^2). Foram, então, alertados para essa omissão através do *feedback* escrito: "Como chegaram a esta igualdade?". Na versão final do relatório, os alunos tiveram em consideração o *feedback* recebido e referiram que utilizaram o Teorema de Pitágoras para determinar a altura do cone.

Os exemplos dados mostram as potencialidades do relatório escrito na avaliação do raciocínio matemático dos alu-

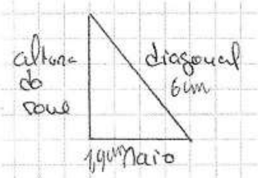


Figura 4

nos e, ainda mais importante, na promoção do desenvolvimento dessa capacidade nos alunos, com especial destaque para a explicação e a argumentação matemáticas. Para este trabalho, mostrou-se essencial o *feedback* fornecido, quer oral, quer escrito.

A Concluir

Na situação concreta apresentada, utilizou-se uma modalidade de relatório realizada maioritariamente em grupo e em contexto de sala de aula, mas outras modalidades podem ser adoptadas: o relatório pode ser feito individualmente ou em grupo, na sala de aula ou fora dela, durante um período de tempo mais ou menos longo, a partir de tarefas variadas desenvolvidas de forma diversa. Qualquer que seja a modalidade adoptada é importante ter em conta dois aspectos centrais para que a actividade desenvolvida pelos alunos contribua para a sua aprendizagem e, em particular, para o desenvolvimento do seu raciocínio matemático: (i) os critérios de avaliação e o investimento na sua apropriação pelos alunos e (ii) o *feedback*, tanto oral como escrito, a fornecer durante o processo (Pinto & Santos, 2006; Santos & Gomes, 2006).

Se a elaboração de relatórios constitui uma experiência pouco familiar para o aluno, o professor deve promover uma discussão prévia sobre as suas expectativas face ao trabalho proposto e quais as razões que justificam tal proposta. Além disso, pode elaborar documentos de apoio para que o aluno melhor compreenda o que se entende por um relatório de qualidade. Como exemplos de documentos com essas funções, destacam-se documentos escritos que explicitem qual deve ser a estrutura do relatório ou quais os critérios que serão utilizados na avaliação do mesmo ou ainda relatórios produzidos por outros alunos (Pinto & Santos, 2006). O recurso ao guião e aos critérios de avaliação parece facilitar a tomada de consciência, pelos alunos, dos objectivos a atingir e das exigências inerentes à elaboração do relatório, caminhando-se, assim, em direcção à apropriação dos critérios de avaliação. Por sua vez, essa tomada de consciência gradual permitirá que os alunos ajam de forma a melhorar o seu desempenho na redacção dos relatórios (Semana, 2008). Além disso, se as indicações do professor e os critérios de avaliação definidos forem dados no sentido de incluir no relatório, explicações e justificações matemáticas para as opções tomadas, potenciar-se-á desse modo o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

A definição dos critérios de avaliação prende-se ainda com a própria avaliação dos relatórios. No contexto de uma avaliação reguladora das aprendizagens, o importante não é a classificação atribuída às produções dos alunos, mas antes a adequação dos critérios utilizados e a sua apropriação pelos alunos. Esses critérios servirão também para que os alunos auto-avaliem o seu trabalho e definam estratégias de melhoria.

O *feedback* escrito e o *feedback* oral desempenham também um papel fundamental no processo de avaliação reguladora implementado através dos relatórios, já que, numa acção combinada, podem contribuir para que os alunos tomem consciência dos aspectos positivos e dos aspectos passíveis de ser melhorados na primeira versão dos relatórios e, em função disso e de algumas orientações recebidas, desenvolvam a sua actividade no sentido de aperfeiçoar a versão inicial. Para isso, parece essencial que o *feedback* não assinale os erros, mas coloque antes questões e comentários orientadores, fornecendo pistas relativamente àquilo que os alunos poderão fazer para melhorar a primeira produção, conforme ilustrado através dos dois exemplos apresentados. O recurso aos indicadores pode facilitar o processo de dar *feedback*, processo que, por norma, acarreta dificuldades para o professor, quer ao nível dos comentários a tecer, quer devido ao tempo que consome.

Além dos relatórios escritos, o professor tem à sua disposição uma variedade de formas e instrumentos de avaliação que pode utilizar nos contextos mais diversificados, não perdendo de vista a sua finalidade principal: potenciar a aprendizagem dos alunos e, neste caso específico, promover o desenvolvimento do raciocínio matemático. A discussão oral e a observação informais no quotidiano da sala de aula, as apresentações orais, os portefólios são apenas alguns exemplos de instrumentos que podem ser usados com o mesmo objectivo, desde que devidamente trabalhados e associados a tarefas que apelem ao raciocínio matemático dos alunos. Qualquer que seja o instrumento utilizado é importante acompanhá-lo de estratégias com funções reguladoras, como é o caso de uma abordagem positiva do erro, do questionamento oral, do *feedback* escrito e da negociação dos critérios de avaliação. Não defendemos aqui a necessidade de criação de momentos específicos de avaliação do raciocínio matemático. É através de tarefas adequadas, especialmente pensadas para desenvolver o raciocínio matemático, que podemos contribuir para o crescimento desta capacidade nos alunos e, em simultâneo, ajudá-los nesse processo, através de práticas avaliativas como as descritas. Para além disso, estes momentos permitem ao professor aceder e compreender o raciocínio matemático dos seus alunos, as evoluções que se vão operando, as dificuldades com que se confrontam e o modo como as procuram ultrapassar, aspectos possíveis de serem inferidos a partir da observação dos alunos em trabalho e da análise das suas produções (Perrenoud, 2004).

Notas

1 Despacho normativo n.º 1/2005

2 Um relatório escrito pode ser entendido como uma produção que descreve, analisa e/ou critica uma dada situação ou tarefa realizada.

3 O Projecto AREA é um projecto de investigação, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (nº PTDC/CED/64970/2006), que procura desenvolver, implementar e avaliar formas de concretização de práticas avaliativas ao serviço da aprendizagem, assim como construir um banco de bibliografia relativa à avaliação reguladora. Para mais informações pode ser consultado o site `http://area.fc.ul.pt/`.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P.; Leal, L.; Teixeira, P. & Veloso, E. (1997). *Mat789, Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Boavida, A. M.; Paiva, A. L.; Cebola, G.; Vale, I.; Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico. Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos*. Lisboa: Ministério da Educação — DGIDC.

Cuoco, A. (2003). Mathematical habits of mind. In H. Schoen (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: grades 6–12* (pp. 27–37). Reston, VA: NCTM.

Dewey, J. (1910/1997). *How we think*. New York: Dover Publications, Inc.

Dias, P. (2005). *Avaliação reguladora no Ensino Secundário. Processos usados pelos alunos em investigações matemáticas*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Leal, Mª. L. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Menino, H. (2004). *O relatório escrito, o teste em duas fases e o portefólio como instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática: um estudo no 2º ciclo do ensino básico* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

NCTM (1999). *Normas para a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM (publicado originalmente em inglês em 1995).

NCTM (2003). *A research companion to principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM (publicado originalmente em inglês em 2000).

Nunes, C. (2004). *A avaliação como regulação do processo de ensino-aprendizagem da Matemática*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Perrenoud, P. (1999). *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Perrenoud, Ph. (2004). Évaluer des competences. *l'Éducateur*, nº spécial, Março, 8–11.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação — DGIDC.

Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes & F. Araújo (Coord.) *Avaliação das aprendizagens: das concepções às práticas* (pp. 75–84). Lisboa: ME e DEB.

Santos, L. (2003). Avaliar competências: uma tarefa impossível? *Educação e Matemática*, 74, 16–21.

Santos, L. & Gomes, A. (2006). Apropriação de critérios de avaliação: um estudo com alunos do 7º ano de escolaridade. *Revista portuguesa de pedagogia*, 40(3), 11–48.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11–35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Semana, S. (2008). *Os relatórios escritos como instrumentos de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos do 8.º ano de escolaridade em Matemática*. (Tese de mestrado em preparação, Universidade de Lisboa).

Silva, A. L. (2004). A auto-regulação na aprendizagem. In A. L. Silva; A. M. Duarte; I. Sá & A. M. V. Simão (Ed.) *Aprendizagem Auto-Regulada pelo Estudante* (pp.17–39). Porto: Porto Editora.

Sílvia Semana
Escola E.B. 2,3 de Jovim
Projecto AREA[3]

Leonor Santos
DEFCUL
Projecto AREA[3]

Anexo 1 — Guião de elaboração do relatório

Um relatório é um trabalho escrito que descreve e critica toda a actividade desenvolvida na exploração de uma tarefa.

Um relatório para quê?

Desenvolver a tua capacidade de comunicar matematicamente, por escrito.
Desenvolver o teu pensamento crítico sobre o trabalho feito.
Contribuir para aprofundar a tua compreensão sobre os vários assuntos estudados.

Pistas para elaborares um relatório:

— tira apontamentos durante a realização da tarefa;

— descreve o que fizeste de uma forma limpa, clara e organizada;

— não te esqueças de apresentar os teus raciocínios e descobertas e descrever todas as tentativas que realizaste até chegar às conclusões finais, não deves pensar "o professor já sabe isto, por isso não vale a pena eu escrever";

— identifica devidamente o teu relatório;

— estrutura o relatório em introdução, desenvolvimento e conclusão.

Neste ano lectivo, as tarefas vão ser exploradas em grupo e o relatório vai ser dividido em duas partes: a primeira será feita em grupo e deve incluir a introdução e o desenvolvimento do relatório e a outra será feita individualmente e deve compreender a conclusão.

- *Introdução* (realizada em grupo)

  Apresentem a tarefa proposta e indiquem qual o seu objectivo, usando as vossas próprias palavras. Indiquem os materiais utilizados.

- *Desenvolvimento* (realizada em grupo)

  Relatem os passos do trabalho realizado, explicando como pensaram e as estratégias usadas.
  Descrevam as dificuldades sentidas e como as ultrapassaram.
  Apresentem as conclusões obtidas, devidamente fundamentadas.
  Podem recorrer a tabelas, representações gráficas ou esquemas.

- *Conclusão* (realizada individualmente)

  Faz um comentário global sobre o trabalho desenvolvido.
  Auto-avalia o teu trabalho.
  Resume o que aprendeste.
  Comenta o interesse da tarefa.

Para a elaboração do relatório deves recorrer aos critérios de avaliação, para que possas perceber melhor o que é esperado que faças neste trabalho.

Anexo 2 — Critérios de avaliação / auto-avaliação do relatório

O grupo...

Apresentação do relatório

0	1	2	3
...não respeita a estrutura proposta.	...não respeita grande parte da estrutura proposta.	...respeita em grande parte a estrutura proposta.	...respeita completamente a estrutura proposta.
...comete muitos erros ortográficos e/ou apresenta uma construção frásica muito deficiente, dificultando a compreensão do que está escrito.	...comete erros ortográficos e, por vezes, apresenta uma construção frásica incorrecta, mas a compreensão do que está escrito não é dificultada.	...utiliza correctamente a língua portuguesa, de uma maneira geral.	...utiliza correctamente a língua portuguesa, de uma maneira geral.
...apresenta o relatório muito rasurado e sujo.	...apresenta o relatório limpo e sem muitas rasuras.	...apresenta o relatório limpo e sem muitas rasuras.	...apresenta o relatório limpo e sem rasuras.

Recurso a Estratégias e Processo de Exploração

0	1	2	3
...não apresenta estratégias apropriadas. ...não apresenta um processo de exploração ou apresenta um processo de exploração totalmente desadequado.	...apresenta estratégias apropriadas. ...apresenta um processo de exploração pouco organizado e muito incompleto.	...apresenta estratégias apropriadas. ...apresenta um processo de exploração organizado e quase completo.	...apresenta estratégias apropriadas. ...apresenta um processo de exploração metódico e completo.

Mobilização de informação/ conhecimentos

0	1	2	3
...não recorre a informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa.	...reconhece informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa, mas não os aplica adequadamente.	...reconhece informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa e aplica-os correctamente, em grande parte.	...reconhece e aplica adequadamente informações/ conhecimentos essenciais à exploração da tarefa.

Descrição e Explicação da Actividade Desenvolvida (Comunicação)

0	1	2	3
...não descreve os passos do trabalho realizado nem a forma como os seus elementos pensaram. ...não descreve nem explica as conclusões obtidas.	...descreve parcialmente os passos do trabalho realizado e a forma como os seus elementos pensaram. ...descreve as conclusões obtidas, mas não as explica na totalidade.	...descreve e explica todos os passos do trabalho e a forma como os seus elementos pensaram, incluindo as tentativas feitas e as conclusões obtidas. ...descreve as conclusões obtidas, mas não as explica na totalidade.	...descreve e explica todos os passos do trabalho e a forma como os seus elementos pensaram, incluindo as tentativas feitas e as conclusões obtidas. ...descreve as conclusões obtidas, e explica-as na totalidade.

Linguagem Matemática Escrita

0	1	2	3
...não utiliza linguagem matemática.	...utiliza linguagem matemática com imprecisões.	...utiliza linguagem matemática, com pequenas imprecisões.	...utiliza linguagem matemática revelando um bom conhecimento sobre as relações entre os termos e conhecimentos usados.

Eu, individualmente,...

Reflexão Crítica Sobre a Actividade Desenvolvida

0	1	2	3
...não saliento as ideias centrais da actividade e/ou referi ideias não relacionadas com a actividade. ...não dou uma opinião sobre a actividade desenvolvida. ...não avalio o meu trabalho.	...apresento ideias relacionadas com a actividade, mas não destaco as essenciais. ...dou uma opinião sobre a actividade desenvolvida, mas não a justifico. ...não avalio o meu trabalho.	...apresento as ideias centrais da actividade. ...comento a actividade desenvolvida. ...avalio o meu trabalho, fazendo uma reflexão crítica sobre o meu desempenho no grupo e explicando as principais dificuldades que senti.	...resumo as ideias centrais da actividade, de forma clara. ...comento a actividade desenvolvida. ...avalio o meu trabalho, fazendo uma reflexão crítica sobre o meu desempenho no grupo, explicando as principais dificuldades que senti e identificando aspectos a melhorar.

Arsélio e Tomás são o melhor da escola

Desta vez foi o aluno a fazer as perguntas difíceis

Este ano lectivo as notícias sobre professores, alunos e escolas têm sido diárias. De entre elas escolhemos para as actualidades da *Educação Matemática* nº 100 a entrevista, capa da Pública do último domingo de Setembro, que junta o professor Arsélio Martins e o aluno Tomás Fidélis na escola, a sua escola. A escolha prende-se com o facto de o Arsélio, presidente da nossa Associação, homem de ideias e convicções fortes, nos levar, através das respostas dadas ao aluno, a relembrar o passado e a projectar o futuro na Educação e na Matemática, pacificando-nos com a nossa profissão.

Vários temas fluíram ao longo da entrevista. De entre eles destacamos a retenção, recentemente alvo de um parecer do Conselho Nacional de Educação em que se recomenda que o Ministério da Educação estude soluções adoptadas noutros países que encontraram alternativas às repetições, obtendo bons desempenhos por parte dos alunos e resolvendo os problemas do insucesso.

Os alunos e os professores estiveram no centro desta conversa, pelo que se transcrevem duas das perguntas que a eles se referem.

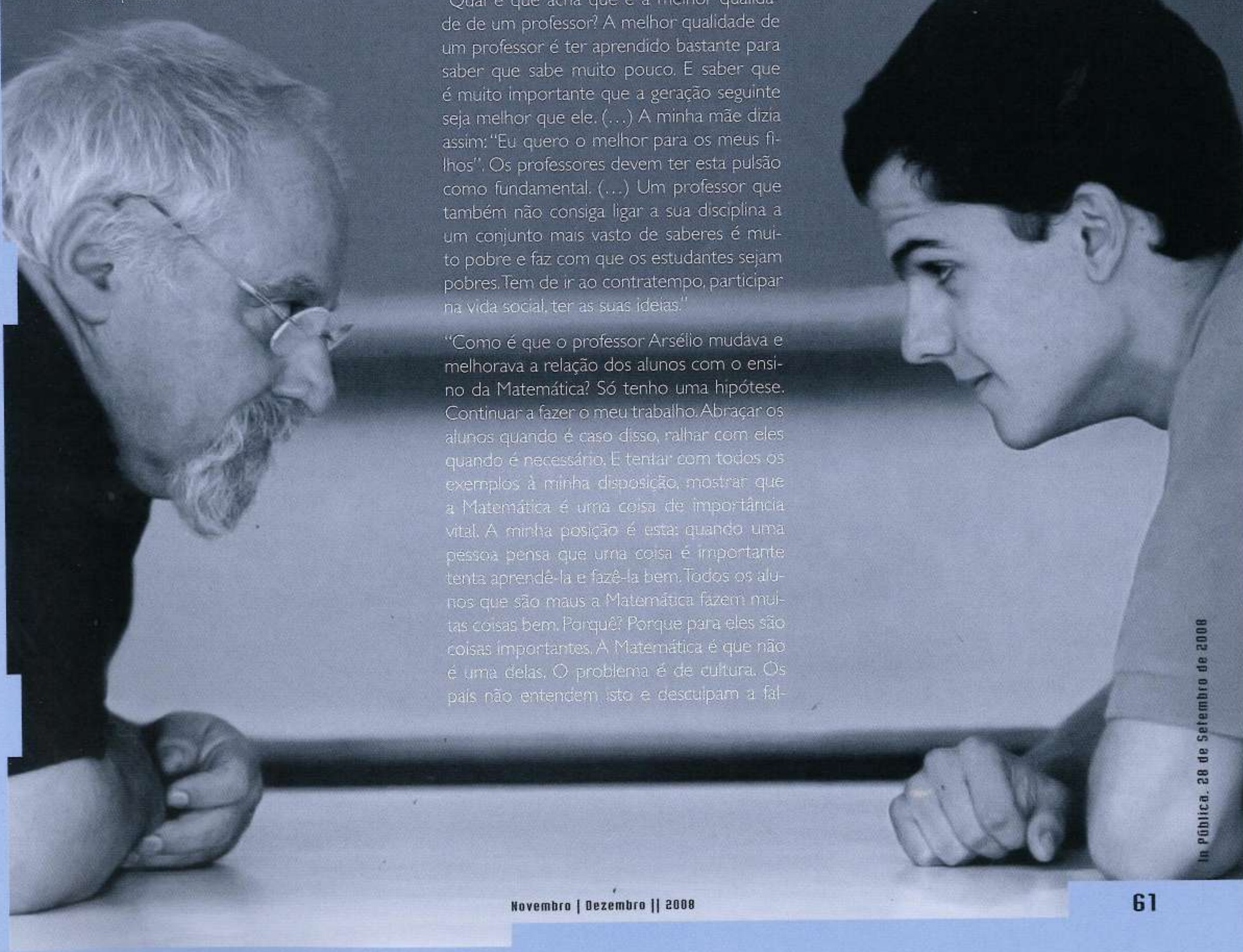
"Qual é que acha que é a melhor qualidade de um professor? A melhor qualidade de um professor é ter aprendido bastante para saber que sabe muito pouco. E saber que é muito importante que a geração seguinte seja melhor que ele. (…) A minha mãe dizia assim: "Eu quero o melhor para os meus filhos". Os professores devem ter esta pulsão como fundamental. (…) Um professor que também não consiga ligar a sua disciplina a um conjunto mais vasto de saberes é muito pobre e faz com que os estudantes sejam pobres. Tem de ir ao contratempo, participar na vida social, ter as suas ideias."

"Como é que o professor Arsélio mudava e melhorava a relação dos alunos com o ensino da Matemática? Só tenho uma hipótese. Continuar a fazer o meu trabalho. Abraçar os alunos quando é caso disso, ralhar com eles quando é necessário. E tentar com todos os exemplos à minha disposição, mostrar que a Matemática é uma coisa de importância vital. A minha posição é esta: quando uma pessoa pensa que uma coisa é importante tenta aprendê-la e fazê-la bem. Todos os alunos que são maus a Matemática fazem muitas coisas bem. Porquê? Porque para eles são coisas importantes. A Matemática é que não é uma delas. O problema é de cultura. Os pais não entendem isto e desculpam a falta de cultura científica. Quando perceberem que é vital, vão aprendê-la. Não pode ser feito de outra maneira."

Esperamos que a entrevista tenha sido tão significativa para os leitores da Pública, quanto o foi para nós, professores de Matemática, sócios da APM.

(http://www.prof2000.pt/users/jpmath//publico/PUBLICO2008_edicaodia_28-09_Publica.pdf),

Manuela Pires
Nuno Candeias



In Pública, 28 de Setembro de 2008

A discutir também se desenvolve o raciocínio

Organizar uma discussão na sala de aula não é tarefa fácil, mesmo numa turma dita sem problemas de indisciplina, pelo menos dignos de registo. Ensinar a raciocinar é algo que não é nem simples nem linear. Parece-me ser consensual que em Matemática se deve desenvolver o raciocínio, porém julgo não ser consensual a forma como tal deve ser feito. A minha experiência, que venho aqui partilhar, é que tal pode ser feito através de discussões colectivas, ou seja, discussões com toda a turma. Vou contar um episódio que se passou com uma turma de 8° ano, a propósito de uma tarefa que se inspirou nas orientações metodológicas do Programa de Matemática (1) para o capítulo Semelhança de Triângulos do 8° ano "provar que a figura que se obtém unindo os pontos médios dos lados de qualquer quadrilátero convexo é sempre um paralelogramo" (p. 39). Os alunos realizaram, no *GSP* (em 45 minutos), uma tarefa que consistia em investigar o que observavam quando uniam os pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero qualquer. Durante a realização desta tarefa, formularam diversas conjecturas, além da sugerida no Programa de Matemática. Estas conjecturas foram discutidas no grupo turma na aula seguinte (90 minutos). No seguinte extracto (2) está em discussão o facto de em Matemática só se poder considerar um resultado demonstrado se os resultados que usamos nessa demonstração já tiverem sido demonstrados:

Lara — Se dividirmos o quadrilátero maior pelo interior e der dois. Então, quer dizer que as áreas dos outros triângulos vai ter de ser obrigatoriamente igual à do quadrilátero interior.

Professora — Escutem lá o que a Lara está a dizer que é importante.

Joana — Oh stôra, mas para isso tínhamos de demonstrar a conjectura, a' primeira que ela disse. Ainda não está demonstrada.

Professora — Ouviram o que a Joana disse?

Madalena — É verdade Joana.

Vários alunos ao mesmo tempo — É verdade Joana.

Aluna — Eu concordo com o que a Joana disse.

Aluna — Eu também.

Lara — Oh stôra. Mas...

Professora — Um de cada vez. Mas o que a Lara disse foi extremamente importante e o que a Joana disse também.

Aluna — Eu não ouvi o que a Lara disse.

Professora — Diz lá Lara, outra vez, para eles ouvirem.

Joana — Mas tens que conseguir demonstrar a outra.

Lara — Se a área do quadrilátero maior a dividir pela do quadrilátero menor é dois. Se conseguirmos demonstrar essa conjectura, então obrigatoriamente a área dos triângulos somada vai ter de ser igual à do quadrilátero interior.

Joana — Isso se demonstrares a outra.

Lara — Mas se demonstrarmos uma conseguimos demonstrar as duas.

Madalena — Mas primeiro tens de demonstrar aquela.

Joana — Exactamente.

Este episódio ilustra como as discussões colectivas podem desempenhar um papel importante no desenvolvimento do raciocínio. É aqui nítido que a Joana percebeu que a partir do momento em que demonstra uma conjectura já a pode usar para demonstrar outras e faz questão que os seus colegas também o percebam, o que parece ter acontecido. A professora interveio para chamar à atenção dos outros alunos para a posição destas alunas, reforçando a importância do que diziam. Está aqui presente uma das principais características do raciocínio dedutivo: todos os resultados que são deduzidos têm de o ser a partir de resultados já aceites como verdadeiros. Além disso, estas alunas admitem poder considerar um resultado verdadeiro, se conseguirem demonstrar outro, como ocorre com os matemáticos. A seguinte afirmação (3) de Andrew Wiles, a propósito de como começou seriamente a tentar demonstrar o Último Teorema de Fermat ilustra como tal acontece: "(...) ele contou-me que Ken Ribet tinha provado a ligação entre Taniyama-Shimura e o Último Teorema de Fermat. Fiquei electrizado. Sabia, nesse instante, que o curso da minha vida mudara, e que tudo o que tinha de fazer era provar a conjectura de Tanyama–Shimura." (p.223).

Notas

1. DGEBS (1991). *Programa de Matemática — Plano de organização do ensino-aprendizagem, Ensino Básico. 3°ciclo* (II). Lisboa: Ministério da Educação.
2. Retirado de Machado, S. (2005). *A demonstração matemática no 8° ano no contexto de utilização do Geometer's Sketchpad* (tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).
3. Retirada de Singh, S. (1998). *A solução do último teorema de Fermat.* Lisboa: Relógio d'Água.

Sílvia Zuzarte Machado
Escola Secundária de Casquilhos

Avaliar a capacidade de raciocinar matematicamente em questões de escolha múltipla, é possível?

Os alunos devem ser capazes de *raciocinar matematicamente* usando os conceitos, as representações e os procedimentos matemáticos. Isto é, no ensino básico devem ser capazes de: seleccionar e usar fórmulas e métodos matemáticos para processar informação; reconhecer e apresentar generalizações matemáticas bem como exemplos e contra-exemplos de uma afirmação; justificar os raciocínios que elaboram e as conclusões a que chegam; compreender o que constitui uma justificação e uma demonstração em Matemática e, também, usar vários tipos de raciocínio e formas de demonstração; desenvolver e discutir argumentos matemáticos; e formular e investigar conjecturas matemáticas (DGIDC, 2007). No ensino secundário, devem ser capazes de justificar processos de resolução, encadear raciocínios, confirmar conjecturas e demonstrar fórmulas e alguns teoremas (ME, 2001). Será possível avaliar estas capacidades através de questões de escolha múltipla?

A capacidade de raciocinar matematicamente desenvolve-se através de experiências que proporcionem aos alunos oportunidades que incentivem a reflexão sobre o seu próprio pensamento. Assim, devem ser confrontados com questões do tipo: *Porquê? Porque será que isso acontece? O que acontece se...? A resposta está bem justificada? Haveria outras justificações?* Estas questões têm por objectivo levantar dúvidas e criar incertezas para que os alunos clarifiquem, desenvolvam e organizem os seus raciocínios. Será possível proporcionar estas oportunidades quando nos limitamos a solicitar a indicação da letra identificativa da alternativa correcta, como acontece, por exemplo, no exame nacional do ensino secundário, 12° ano, Prova Escrita de Matemática A? Ou quando se pede aos alunos para colocarem o símbolo "X" em questões do tipo *Qual das quatro igualdades...* ou *Qual dos seguintes gráficos...*, como podemos encontrar no exame nacional de Matemática do 3° ciclo? Analisemos estas questões a partir de dois exemplos:

i) Na 1ª chamada de 2008 do exame do 3° ciclo, a partir da leitura de um gráfico era solicitada a indicação de *qual das quatro igualdades que se seguem permite calcular a diagonal do ecrã de um televisor, em centímetros (c), dado o seu comprimento em polegadas (p)?*
$+ c = 1{,}27p$; $+ c = 2{,}54\,p$;
$+ c = (1 \div 1{,}27)p$; $+ c = (1 \div 2{,}54)p$.

ii) Na 2ª fase (versão 1) de 2008 da Prova de Matemática A pedia-se aos alunos para escolherem uma das quatro opções, apresentadas em seguida, para a tarefa: *uma caixa A contém duas bolas verdes e uma bola amarela. Outra caixa B contém uma bola verde e três bolas amarelas. As bolas colocadas nas caixas A e B são indistinguíveis ao tacto. Lança-se um dado cúbico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 6. Se sair o número 5, tira-se uma bola da caixa A; caso contrário, tira-se uma bola da caixa B. Qual é a probabilidade de a bola retirada ser verde, sabendo que saiu o número 5 no lançamento do dado?* (A) 1/3; (B) 1/4; (C) 3/7; (D) 2/3.

Em qualquer uma destas tarefas poderíamos ir para além do pedido de indicação do resultado correcto. Quando o aluno se limita a indicar uma resposta que considera ser a certa, não ficamos a saber se a correcção da resposta se deve a uma escolha feita ao acaso ou se se baseou na aplicação dos conhecimentos que adquiriu. Ao limitarmo-nos à observação da resposta, não acedemos aos processos de raciocínio do aluno, à forma de organização do seu pensamento. É sabido que avaliar para classificar, para seleccionar ou para certificar são os objectivos dos exames nacionais e que as questões de escolha múltipla pretendem a diminuição da influência do corrector no resultado final da prova. No entanto, o suposto aumento de fidelidade do resultado levanta algumas dúvidas ao nível da validade destas questões.

Como devem ser entendíveis da mesma forma por todos os alunos, ao nível da interpretação e da resolução, este tipo de questões não fomenta a conexão de conteúdos e inclui conhecimentos fragmentados; limita-se a recair sobre pormenores e sobre fórmulas ou propriedades elementares; faz muitas vezes apelo à memória, muito mais do que à lógica, o que induz o aluno a desenvolver estratégias de preparação de acordo com o solicitado. Mas, outro problema se levanta. O trabalho que o aluno realiza para dar resposta a uma questão de escolha múltipla não é o *trabalho de produção* (Noizet & Caverni, 1985). A resposta acertada do aluno não significa que detém determinado conhecimento. Para responder, o aluno desenvolve estratégias que podem passar ou pela mobilização das ferramentas correctas para obtenção da resposta, se as dominar, ou pela selecção aleatória de uma opção, quando não consegue mobilizar os conhecimentos solicitados. O objectivo primordial é fazer a escolha certa.

Uma vez que os exames afectam as práticas da sala de aula (Stiggins, 2004), e que o suposto aumento de fidelidade do resultado da prova é questionável, é de equacionar a reformulação do tipo de itens que se colocam em provas nacionais. Uma possibilidade é solicitar a justificação da resposta correcta, ou a justificação das alternativas que não estão correctas. Por esta via, poder-se-á aceder a informações múltiplas acerca dos conhecimentos e capacidades do aluno, assim como classificar as provas através de níveis de desempenho. Além disso, a necessidade de redigir uma resposta, suscita no aluno uma reflexão sobre a acção para a qual é necessária a sistematização, a interpretação e a tomada de consciência de alguns erros, podendo melhorar a sua prestação na realização da tarefa.

Referências

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* (http://sitio.dgidc.min-edu.pt/basico/Paginas/default.aspx, retirado em 23 Janeiro, 2008)

Noizet, G. & Caverni, J. (1985). *Psicologia da avaliação escolar.* Coimbra: Coimbra Editora.

Ministério da Educação (2001). Programa de Matemática A.

Stiggins, R. (2004). New assessment beliefs for a new school mission. *Phi Delta Kappa*, 86 (1), p. 22–27.

Paulo Dias
Escola Secundária da Moita

Raciocinar e conjecturar usando uma Ilha de Sonho

Uma das principais finalidades do ensino da Matemática é os alunos desenvolverem a sua capacidade de raciocínio (ME/DEB, 2001). Neste âmbito, qual deverá ser o meu papel enquanto professora? O que deverei considerar um bom raciocínio matemático? Será que um aluno só pode raciocinar matematicamente sobre uma situação quando já é capaz de dominar ferramentas matemáticas abstractas que lhe permitam expressar o que pensou com rigor e formalismo? Estas são algumas das questões com que nos confrontamos quando procuramos equacionar modos de ajudar os alunos a desenvolverem a sua capacidade de raciocinar em Matemática.

Procuremos reflectir sobre estas questões focando-nos nas actividades de formulação, teste e prova de conjecturas incluindo aqui a procura de argumentos matemáticos que permitam compreender a razão pela qual uma conjectura parece resistir a tentativas de refutação. Todos estes aspectos prendem-se com a natureza específica do raciocínio matemático, pelo que importa dedicar-lhes uma atenção particular.

Para formular conjecturas é necessário perceber as condições matemáticas a que devem atender os exemplos a considerar e decidir sobre o tipo de variações dos exemplos. Ou seja, há que fazer uma análise matemática criteriosa pois só é profícua uma "busca informada" (raciocínio indutivo fundamentado). Por exemplo, para testar a conjectura "qualquer fracção unitária com denominador par origina uma dízima finita", os alunos devem seguir um critério matemático como "só me interessa estudar fracções em que o denominador seja múltiplo de 2 e o numerador 1". Ao adoptarem-no estão a trabalhar com restrições ao conjunto de números relativamente ao qual faz sentido considerar o numerador e o denominador. Da análise apoiada nas condições matemáticas surge, neste caso, um contra-exemplo, nova análise e reformulação da conjectura, novo teste e reformulação, sempre que necessário (Gomes, 2005).

Os alunos ao desenvolverem uma actividade em que está em jogo formular e testar conjecturas têm oportunidade de lidar com o raciocínio indutivo, mas também com as suas limitações. É importante propor-lhes casos em que as aparentes regularidades observadas a partir de poucos exemplos, ou de exemplos pouco diversificados, falhem. Contraria-se assim, a noção frequentemente cimentada de que a análise de alguns exemplos basta para obter conclusões matemáticas generalizáveis.

Há algum tempo, propus aos alunos a realização, com recurso ao *GeoGebra*, da tarefa *A ilha de sonho* (adaptada de Junqueira e Valente, 1997) em que, resumidamente, se pretende que localizem uma casa numa ilha, que tem a forma de um triângulo equilátero, de tal modo que a soma das distâncias da casa a cada uma das três praias que cercam a ilha seja mínima. Neste âmbito, formularam diversas conjecturas, integrando vários conhecimentos matemáticos. Observemos alguns aspectos da actividade desenvolvida:

Conjectura 1: "Pode construir [a casa] no "(in)centro" do triângulo". Uns alunos acham que é verdadeira, outros que é falsa. Falsa porque podia ser em qualquer lugar do triângulo. "Verdadeira, porque também dá aí". Discute-se se *em qualquer lugar* também abrange o poder ficar no "incentro". Consenso estabelecido: "Não refutada pelas experiências, embora pareça não traduzir todas as possibilidades existentes".

Conjectura 2: "Tem que construir no incentro". Falsa pela descoberta de um contra-exemplo: conseguimos pelo menos encontrar mais um caso/local em que a casa não se encontrava no incentro e verificava as condições pedidas.

Conjectura 3: "Pode construir em qualquer local da ilha". Não foi refutada. Alguns alunos acham que é verdadeira. Mas, será sempre verdadeira? Porquê? Se for sempre verdade deve existir uma razão... É introduzida a procura da justificação/prova no grupo turma.

Como procurei ilustrar, a discussão das conjecturas incluiu a sua comparação, a análise da validade de cada uma e a colocação de questões que serviram de incentivo à procura de uma prova. Por vezes, pedimos aos alunos para comentarem afirmações de cariz matemático e eles ficam sem saber o que dizer, ou mal conseguem diferenciar duas afirmações semelhantes que se distinguem, por exemplo, quanto à sua abrangência ou generalidade. Esta pode ser uma potencialidade da discussão de conjecturas. A prova surgiu da procura de por que é que a conjectura 3 resiste a tentativas de falsificação e foi construída, em interacção com a turma, a partir das sugestões "Dividir o triângulo original em 3 triângulos, como mostra a figura 1" e, mais tarde, "Considerem as áreas dos vários triângulos e a decomposição de figuras": $A = A_1 + A_2 + A_3$ e sejam h_1, h_2 e h_3 as alturas dos triângulos A_1, A_2 e A_3 relativas aos lados das praias,

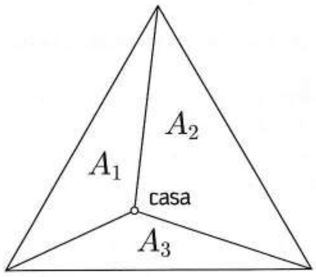
$$\frac{l \times h}{2} = \frac{l \times h_1}{2} + \frac{l \times h_2}{2} + \frac{l \times h_3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{l \times h}{2} = \frac{l(h_1 + h_2 + h_3)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = h_1 + h_2 + h_3$$

Discutiu-se, entre outros aspectos, o significado de cada uma das alturas tendo em conta o contexto do problema e, portanto, face à conclusão visada. Analisou-se, ainda, o facto da validade da terceira conjectura implicar a da primeira. Além disso, a prova surgiu, de um modo integrado e natural, como um instrumento de compreensão e não apenas como uma manipulação simbólica abstracta, e/ou argumentação matemática elaborada em factos anteriormente aceites e algo estranha e paralela ao que os alunos estão mais habituados a fazer em Matemática.

Figura 1



Do meu ponto de vista, o raciocínio matemático envolve a interpretação de situações, a análise de condições, a identificação de ferramentas matemáticas apropriadas e a capacidade de as usar, a tomada de decisões informadas sobre a aceitabilidade/razoabilidade da(s) solução(ões) encontradas e estabelecer conexões matemáticas. A manipulação numérica e algébrica é, entre outros, um aspecto importante da Matemática que não deve ser descurado, pois além de constituir uma forma eficaz e elegante de resolver certos problemas, é de reconhecida importância o domínio de mecanismos que, após uma fase de apropriação e algum treino, se convertem em automatismos. Todavia, a construção de argumentos matemáticos encadeados, ainda que por vezes expressos de forma menos abstracta de acordo com o ano de escolaridade, apoiada, por exemplo, em argumentos não simbólicos ou num formato misto (simbólico e não simbólico), parece-me também um recurso fundamental à construção progressiva do modo mais simbólico e ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

Referências

Gomes, A. (2005). Auto-Avaliação das aprendizagens dos alunos e investimento na apropriação de critérios. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Junqueira, M. & Valente, S. (1997). Conjecturas e provas em Geometria. Uma nova visita à ilha do triângulo equilátero. Educação e Matemática 45, 44-48.

ME/DEB (2001). Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais. Lisboa: ME/DEB.

Anabela Gomes
Escola Básica 2, 3 D. Luís de Mendonça Furtado

ɘflexões sobre a geometria (1)[1]

ɖuardo Veloso

ʼalvez a melhor maneira de caracterizar este artigo seja dizer ue tenta responder a questões do tipo:

- o que fazem os geómetras?
- de que problemas se ocupam?
- que métodos usam para resolver esses problemas ou para provar as suas afirmações?

ʖuem leu o livro *Experiência Matemática* de Reuben e Hersh irá imediatamente que se trata então de uma espécie de escrição da experiência geométrica, e não estará a errar ıuito… No entanto, desde já deve ser dito que a descrição ue vai ser esboçada diz respeito mais à própria geometria do ue ao ensino da geometria, embora seja natural que nesta ɛvista os dois aspectos sejam sempre considerados.[2]

Para facilidade de organização, tomaremos dois aspecɔs da experiência geométrica — construções geométricas transformações geométricas — como focos da nossa refleão. Em qualquer caso, o nosso campo de reflexão será o da ɛometria elementar.[3]

1. Construções geométricas

As construções geométricas que fazemos desde a nossa infância são tão naturais que somos levados facilmente a pensar que é um conceito que não precisa de envolver qualquer reflexão… é qualquer coisa pela qual podemos passar rapidamente, para abordar depois noções mais complexas. No entanto, se considerarmos que os *Elementos* de Euclides — que se tornaram, com o decorrer do tempo, num paradigma da apresentação (e mesmo quase da construção) das teorias matemáticas — são constituídos, em grande parte, por problemas e resultados relativos a construções geométricas, e que alguns dos mais célebres resultados no campo da geometria são teoremas que afirmam a impossibilidade de certas construções geométricas, como a trissecção do ângulo, chegaremos à conclusão que esse conceito merece um esforço de análise e de reflexão. A melhor maneira de o fazer é de resto consultar os *Elementos* e ver com cuidado o que, em termos modernos, está subjacente, numa proposição relativa a uma construção geométrica, ao enunciado, à construção e à demonstração que Euclides apresenta.

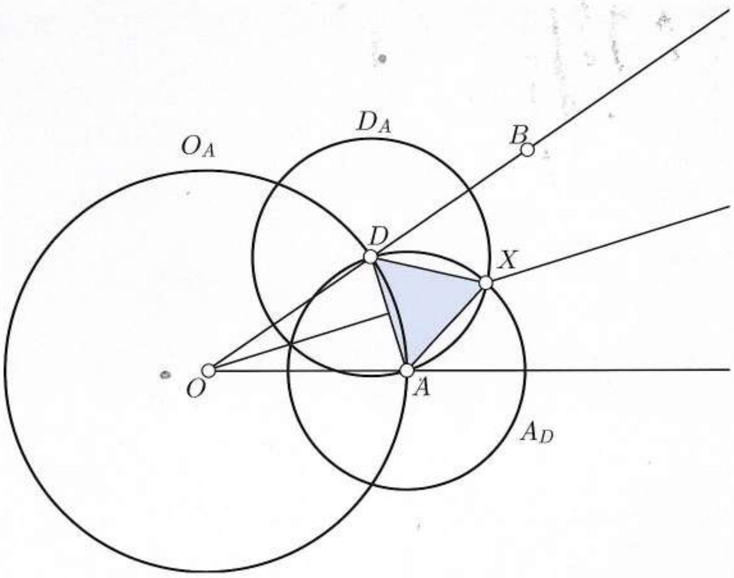


Figura 1

Escolherei a proposição I.9 (proposição 9 do livro I), referente à construção da bissectriz de um ângulo dado.[4]

Numa proposição deste tipo existem sempre três partes:

- o enunciado, que é a proposta de um problema de construção;
- a construção, que é a descrição em sequência dos passos da construção geométrica, incluindo a validação de cada um deles;
- a demonstração, ou seja a prova de que o objecto que resultou da nossa construção verifica as condições do enunciado; trata-se de uma sequência de afirmações e da sua justificação.

Vejamos, no caso da Prop. I.9, em que consiste cada uma dessas três partes.

Enunciado

PROP. I.9. *Bissectar um ângulo rectilíneo dado*

Embora a definição de Euclides não seja nestes termos, podemos partir da definição de ângulo usual, ou seja como conjunto de duas semirectas OA e OB com a mesma origem. Assim, supomos dado o ângulo AOB (veja a figura 1).

Construção

A construção é constituída por uma sequência finita de acções permitidas. As acções permitidas nos *Elementos* de Euclides estão expressas nos três primeiros postulados, que reescrevemos da seguinte forma:

POST. I. *Dados dois pontos, é permitido unir um ao outro com um segmento de recta.*

POST. II. *Dado um segmento de recta, é permitido prolongar o segmento, de forma contínua, numa recta [ou semirecta].*

POST. III. *Dados dois pontos, é permitido traçar uma circunferência tendo um dos pontos como centro e passando pelo outro.*

São ainda acções permitidas a construção de pontos como intersecção de figuras resultantes de acções permitidas anteriores.

A *sequência de acções* é então a seguinte (designamos em geral por XY a circunferência de centro X e passando por Y e colocamos entre parênteses rectos os postulados que permitem cada acção:

- traçar a circunferência O_A [Post. III], e construir o ponto D como intersecção da semirecta OB com O_A;
- traçar a circunferência A_D [Post. III];
- traçar a circunferência D_A [Post. III], e construir o ponto X como intersecção de A_D com D_A, de modo que OX intersecte o segmento D_A;
- unir o ponto O e o ponto X pelo segmento OX [Post. I], prolongar o segmento OX [Post. II], e construir assim a semirecta OX.

Neste ponto, Euclides anuncia implicitamente que a construção está concluída, ao afirmar que OX bissecta AOB, o que equivale a afirmar que o ângulo AOX é igual ao ângulo XOB.

Segue-se como dissemos a

Demonstração

A demonstração é uma sequência de afirmações, cada uma seguida da sua justificação:

- os dois lados OA e OX (do triângulo OAX) são iguais aos dois lados OD e OX (do triângulo ODX) [OA e OD são raios de c_1 e OX é comum];
- a base AX é igual à base DX [o triângulo AXD é equilátero, pela proposição I.1[5]], logo os ângulos AOX e DOX são iguais [pela prop I.8[6]], portanto OX bissecta o ângulo AOB.

O que é importante compreender é que, em suma, esta construção geométrica consiste em:

- partir de um conjunto de pontos — neste caso A, O e B —, a que poderíamos chamar os *pontos base* da construção;
- obter uma sequência finita de pontos — neste caso $AOBDX$ — cada um dos quais está numa das duas condições seguintes:
- ou é um ponto base
- ou pode ser construído a partir dos pontos anteriores da sucessão por meio de *acções permitidas*.

Aos pontos assim obtidos chamaremos *e-construtíveis* (o prefixo e significa "na geometria euclidiana"). E diremos ainda

Compasso euclidiano e compasso "moderno"

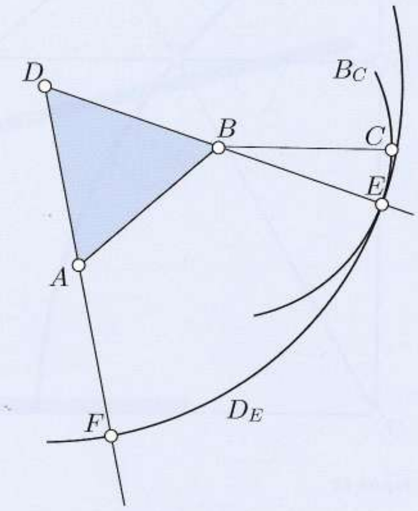
De acordo com os postulados dos *Elementos*, a acção permitida ao compasso é o traçado de uma circunferência, dados o centro e um ponto por onde passe. O transporte de segmentos, útil em tantas construções geométricas, não é permitido. No entanto, Euclides ultrapassa esta limitação (que tinha imposto a si próprio!) com as suas duas primeiras proposições: a primeira (Prop. I.1) diz respeito à construção do triângulo equilátero e a segunda (Prop. I.2) é uma demonstração maravilhosa de que, afinal, com o seu compasso e a sua régua não graduada, é capaz de transportar segmentos:

Prop. I.2. Construir um segmento igual a um segmento dado e com uma das extremidades num ponto dado.

Sejam BC e A o segmento e ponto dados.

Construção: segmento AB [Post. I]; triângulo equilátero ABD sobre segmento AB [Prop. I.1]; semirectas DB e DA [Post. II]; circunferência B_C [Post. III], e ponto de intersecção E; circunferência D_E [Post. III], e ponto de intersecção F; AF é o segmento pedido na Prop. I.2.

Demonstração: uma das extremidades de AF é A; BC igua l a BE [raios de B_C]; DE igual a DF [raios de D_E]; DA igual a DB [ABD é um triângulo equilátero]; mas então $AF = DF - AB$ e $BE = DE - AB$ são iguais, e portanto $AF = BC$.



que uma circunferência é *e-construtível* se o seu centro e o ponto por onde passa são e-construtíveis, e que uma recta é *e-construtível* se passa por dois pontos e-construtíveis.

George Martin, no livro *Geometric Constructions*, compara as construções geométricas a um jogo. Na realidade, as *acções permitidas* que enunciámos são as *regras do jogo* das construções geométricas euclidianas, tal como os movimentos permitidos aos diferentes tipos de peças do xadrez constituem as regras do xadrez.

Note-se que existem diferentes modos de exprimir as regras no jogo das construções geométricas. No caso da geometria euclidiana, dizemos muitas vezes que é a geometria da régua não graduada e do compasso euclidiano, ou seja, as regras são dadas em termos dos instrumentos que permitem realizar as acções permitidas. Mas é óbvio que não basta apresentar os instrumentos, teremos também que esclarecer com precisão o que é permitido fazer com esses instrumentos (veja caixa *Compasso euclidiano e compasso "moderno"*).

1.1. Mudando as regras do jogo

O "jogo" das construções geométricas permite analisar bons exemplos de um dos modos como se processa o desenvolvimento da geometria (de resto, o da matemática em geral). Em termos dos instrumentos que podemos utilizar, podem por exemplo existir problemas que resistem às nossas tentativas de resolução com os instrumentos permitidos, e, seremos assim levados a inventar ou descobrir — se preferirem — outros instrumentos/processos para os resolver. Por outro lado, a nossa curiosidade intelectual pode levar-nós a colocar questões do tipo seguinte: perderemos muitas possibilidades, se usarmos apenas o compasso e abdicarmos de utilizar a régua não graduada?

Vemos assim aparecer naturalmente duas direcções de desenvolvimento que também têm expressão em outros domínios da matemática, e que no caso das construções geométricas foram percorridas com resultados ricos e muitas vezes surpreendentes. Vamos exemplificar brevemente estes dois caminhos, esperando abrir a curiosidade dos leitores para outras leituras mais completas.

1.2. Inventando instrumentos ou novos processos

Deve ter sido com alguma surpresa que os gregos, depois de verem como era fácil a bissecção de um ângulo com régua não graduada e compasso (como explicado por Euclides na Prop. I.9 que acabamos de ver), depararam com grandes dificuldades ao querer trissectar um ângulo utilizando os mesmos instrumentos. Há até quem especule que os gregos talvez tivessem já a convicção da impossibilidade da trissecção nestas condições, e fosse por isso que recorreram à utilização de outros processos, em particular de curvas especiais para a resolver.

Hippias de Elis (segunda metade do séc V a.C.) inventou a *quadratriz* para resolver a trissecção do ângulo. O nome quadratriz deriva do facto da curva poder ser também utilizada na resolução de outro problema clássico da geometria grega, a quadratura do círculo (dado um círculo de raio r, determinar um segmento a tal que o quadrado de lado a tenha a área igual à do círculo).

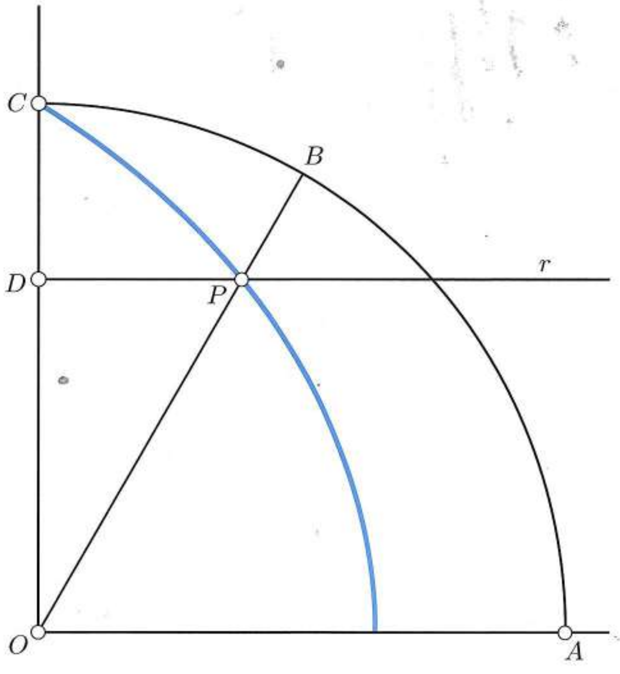


Figura 2A

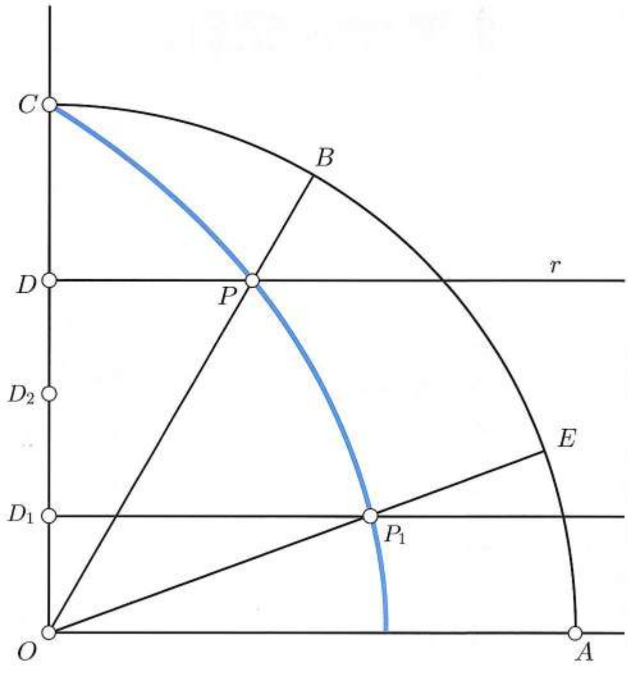


Figura 2B

A quadratriz admite a seguinte definição (ver figura 2A):

- OAC é um quarto de circunferência; D é um ponto do segmento OC e B um ponto do arco de circunferência AC; r é uma semirecta com origem em D e paralela a OA;
- D e B partem simultaneamente de C e movem-se com movimentos uniformes sobre o segmento CO e o arco CA, atingindo simultaneamente O e A;
- a quadratriz é a curva descrita pelo ponto P, intersecção da semirecta r e do segmento OB.

Vê-se imediatamente como a quadratriz resolve o problema da trissecção do ângulo (e mesmo a divisão de um ângulo em qualquer número de partes iguais).

Seja AOB o ângulo a trissectar (figura 2B).

Pelo teorema de Tales, trissecta-se o segmento OD, obtendo-se assim os pontos D_1 e D_2. Obtém-se o ponto P_1 como intersecção da quadratriz com a semirecta passando por D_1 e paralela a OA. E depois o ponto E como intersecção da semirecta OP_1 com a arco de circunferência CA. O ângulo AOE tem uma amplitude igual a $1/3$ da de AOB.

Note-se um processo de trabalho muito característico em geometria, que foi utilizado nesta solução da trissecção, e que retomaremos mais tarde na parte deste artigo relativa às transformações geométricas:

Em termos breves, o que fizemos foi o seguinte:

- sabemos dividir um segmento de recta em três partes iguais, mas não sabemos fazer essa construção para um ângulo;
- a quadratriz estabelece uma correspondência biunívoca entre um segmento e um arco de circunferência;
- aproveitando esta correspondência, transferimos o problema do arco de circunferência para o segmento, resolvemos o problema no segmento, e depois transferimos a solução para o arco de circunferência.

A invenção da quadratriz é um exemplo típico da primeira direcção de desenvolvimento da geometria que apontámos: a criação de novos instrumentos/processos para resolver problemas insolúveis com os instrumentos da geometria euclidiana.

Outros curvas que resolvem a trissecção são por exemplo a concóide de Nicomedes (c. 200 a.C.), a hipérbole, utilizada por Papo de Alexandria (c. 290–350 a.C.), o caracol de Étienne Pascal (c. 1650), a parábola (intersecção com uma circunferência), solução de Descartes no livro *La Géométrie* (1637), e a *cycloidum anomalarum* de Tommaso Ceva (1648–1737).[7]

No mesmo sentido, e relativamente à trissecção e aos outros problemas clássicos, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo, outras curvas foram inventadas e/ou utilizadas, como por exemplo na duplicação do cubo duas parábolas ou uma parábola e uma hipérbole, por Menecmo (c. 375–325 a.C.) e a cissóide de Diocles (c. 240–c. 180 a.C.). Na quadratura do círculo talvez o exemplo mais notável seja a espiral de Arquimedes (280–212 a.C.).

Ainda no sentido de alargar os processos para resolver problemas que resistem ao compasso e à régua não graduada, podemos referir a invenção de novos instrumentos, como por exemplo a *régua graduada* (uma régua com duas marcas

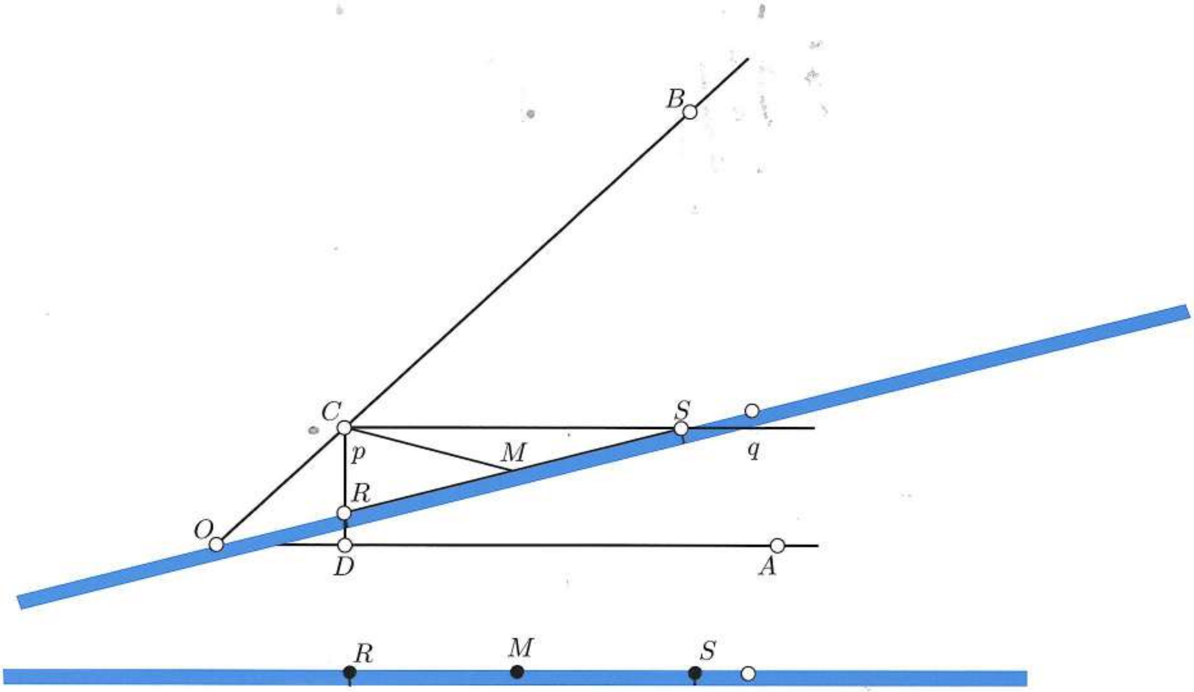


Figura 3

num dos bordos). Naturalmente, é preciso especificar — tal como Euclides fez para o compasso e a régua não graduada —, que construções são admissíveis com o novo instrumento. De maneira intuitiva[8], podemos dizer que a *acção permitida* com a régua graduada consiste em traçar uma recta, de modo que as duas marcas estejam sobre dois pontos em duas rectas já construídas e a recta passe por um ponto também já construído. Na figura 3 mostramos como Papo, o último grande matemático grego da antiguidade, resolveu a trissecção com a régua graduada.[9]

Sendo dado o ângulo AOB a trissectar, e sendo R e S as duas marcas na régua, marca-se a partir de O e no lado OB do ângulo o segmento OC, de comprimento igual a metade do segmento RS. Traçam-se a perpendicular e a paralela a OA passando por C (representadas na figura pelo segmento p e pela semirecta q, respectivamente). Ajusta-se a régua de modo a que os pontos R e S fiquem sobre p e q e que R, S e O sejam colineares (utilizando a acção permitida com a régua graduada). Como o leitor concluirá facilmente, os triângulos OMC e CMS, em que o ponto M é o ponto médio do segmento RS, são isósceles, e daí concluirá que o ângulo SOC tem uma amplitude dupla da do ângulo OSC, que é igual a AOS (alternos-internos).

Portanto, a semirecta OS trissecta o ângulo AOB.

No livro de Yates referido na nota 7 encontrará numerosos instrumentos e mecanismos para a trissecção (um *instrumento de três hastes* usado por Étienne Pascal para traçar o seu caracol, o pantógrafo de Tommaso Ceva, o esquadro do carpinteiro, o trissector de Kempe, e muitos outros). Alguns destes instrumentos utilizam, de formas diversas, o mesmo princípio da inserção[10] da régua graduada.

Assim, observámos neste ponto, e relativamente às construções geométricas, uma linha de desenvolvimento da geometria que consiste em responder a desafios e problemas criando novos objectos, instrumentos e processos, expandindo assim a geometria. Historicamente, esta linha de desenvolvimento enriqueceu a geometria com numerosos novos objectos, cujo interesse e importância ultrapassou depois, em muitos casos, a razão inicial da sua consideração. O melhor e mais claro exemplo disto é a invenção das cónicas por Menecmo, utilizadas inicialmente "apenas" para resolver o problema da duplicação do cubo.

1.3. Restringindo as acções permitidas

Esta é uma segunda linha de desenvolvimento da geometria, no âmbito das construções geométricas. Iremos apenas estudar dois exemplos mais significativos, embora o leitor que fique interessado possa encontrar outros, no livro de George Martin já referido.

A. Só com o compasso

Imagine o leitor que se apresenta numa sessão de formação contínua em geometria apenas com o seu compasso. pois se esquece de levar a régua (não graduada). Estava previsto que nessa sessão o formador iria propôr problemas de construções geométricas extraídos dos *Elementos* de Euclides. O formador resolve aproveitar o seu esquecimento para propôr a todos que abdiquem da régua e utilizem apenas o compasso. No entanto, o formador enuncia o que é, nas novas condições, uma construção geométrica permitida:

Uma construção geométrica — na *geometria do compasso* — consiste em partir de um conjunto de pontos base (sejam

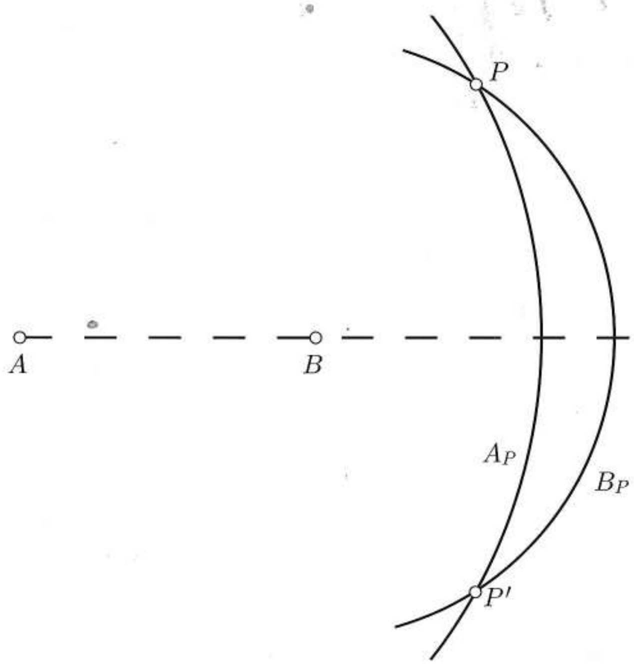


Figura 4

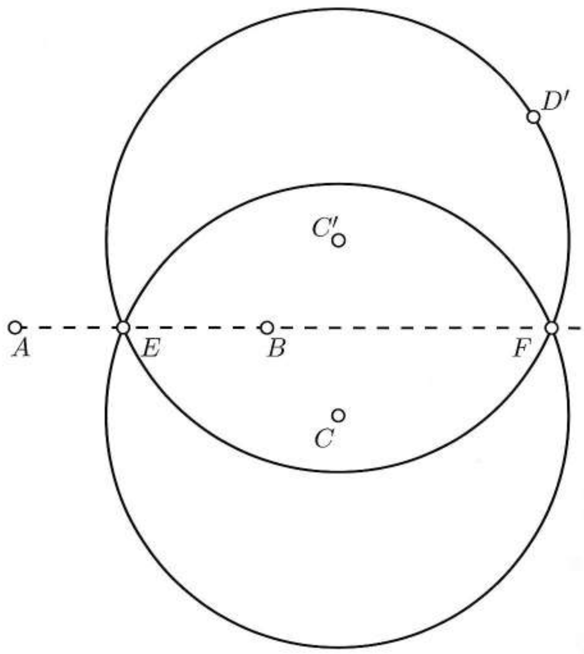


Figura 5

por exemplo A e B) e formar uma sequência finita de pontos $ABP_1P_2P_3\ldots, P_n$ em que cada um dos pontos

- ou pertence ao conjunto base
- ou é um ponto de intersecção de duas circunferências, cada uma das quais tem como centro um ponto anterior da sequência e passa por um ponto anterior da sequência.

Aos pontos da sequência chamaremos *c–construtíveis* (o prefixo c significa "na geometria do compasso"). Uma circunferência será *c–construtível* se tiver como centro um ponto c–construtível e passar por um ponto c–construtível. Uma recta será *c–construtível* se passar por dois pontos c–construtíveis.

O leitor deve ter neste momento uma dúvida... Se não tenho régua, como posso desenhar rectas? O que acontece é que, segundo estas regras do jogo, eu não tenho que *desenhar* as rectas, tenho apenas que construí-las, e isso significa encontrar para cada uma 2 pontos c–construtíveis por onde ela passe (em imaginação, está claro, mas não estamos nós em matemática?!).

Como muito provavelmente o leitor nunca teve oportunidade de abordar este assunto, irei apresentar brevemente duas construções geométricas nesta "geometria do compasso":

I. A imagem de um ponto c-construtível por meio de uma reflexão, cujo eixo é c-construtível, é um ponto c-construtível.

II. Se A, B, C e D são pontos c-construtíveis, e a recta AB intersecta a circunferência C_D mas não passa por C, então os pontos de intersecção da recta AB com a circunferência C_D são c-construtíveis.

Construção I.
Sejam A, B e P os três pontos base (por definição c-construtíveis), e seja AB o eixo da reflexão (ver figura 4; a recta AB está a tracejado porque é apenas uma recta imaginada, do ponto de vista do desenho). Se P pertencer à recta AB, a sua imagem P' coincide com P e portanto é c-construtível. Se P não pertence a AB, consideremos as circunferências c-construtíveis A_P e B_P. Designemos por P' a sua intersecção diferente de P. O ponto P' é a reflexão de P por meio da reflexão de eixo AB, porque A e B são equidistantes de P e de P'. Por outro lado, P' é c-construtível porque é intersecção de A_P com B_P.

Construção II.
Ver figura 5. Sejam C' e D' as imagens dos pontos C e D por meio da reflexão de eixo AB. De acordo com a construção anterior, C' e D' são pontos c-construtíveis e portanto a circunferência $C'_{D'}$ é c-construtível, do que resulta que E e F são c-construtíveis.

É possível demonstrar que todos os pontos e-construtíveis são c-construtíveis, e que portanto todas as construções da geometria euclidiana podem ser feitas apenas com o compasso (excepto no facto de não podermos "desenhar" as rectas...). É o chamado *teorema de Mohr-Mascheroni.*

O matemático George Mohr (1640–1697) nasceu na Dinamarca mas viveu a maior parte da sua vida na Holanda. Publicou em 1672 o livro *Euclides Danicus* que contém o resultado que acabámos de referir.

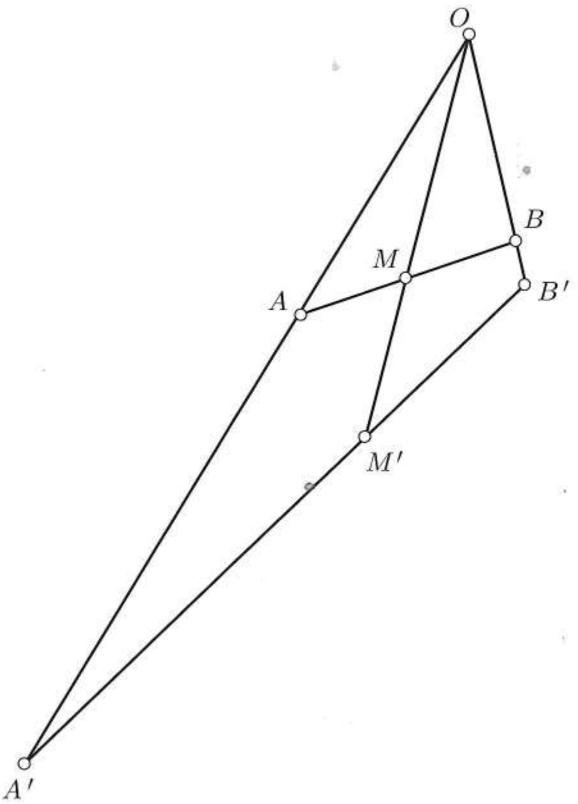


Figura 6

O livro ficou ignorado até ser descoberto por acaso e republicado em 1928. Entretanto Lorenzo Mascheroni (1750–1800), professor na Universidade de Pádua, demonstrou o mesmo resultado, independentemente de Mohr, e publicou-o no livro *Geometria del Compasso*, em 1797 (125 anos depois de Mohr).

Portanto, como acabámos de ver, se deixar a régua em casa e levar apenas o compasso para a sessão de formação contínua, pode divertir-se a fazer todas as construções clássicas da geometria euclidiana apenas com o compasso. Se quiser mesmo traçar os segmentos e as rectas, siga o conselho de George Martin: pegue numa folha de papel e faça uma dobragem bem vincada— fica imediatamente com uma régua não graduada.

Ocorre perguntar: e se levar apenas a régua, esquecendo-se do compasso? É o que vamos ver no ponto B.

B. Só com a régua

Que construções podemos levar a cabo, na geometria euclidiana, se dispomos apenas da régua não graduada? É natural termos poucas expectativas, mas note-se que temos tido algumas surpresas...

Um teorema do geómetra Jacob Steiner (1795–1863) afirma que não é possível constuir o centro de uma circunferência dada utilizando apenas a régua não graduada. A ideia de David Hilbert (1862–1943) para demonstrar este teorema é um exemplo de um processo interessantíssimo de demonstração em geometria, e por isso tem interesse referi-lo aqui. Mas vamos fazê-lo numa situação ainda mais simples.[11]

Mesmo algo tão elementar como a construção do ponto médio de um segmento dado AB não pode ser realizada apenas com a régua não graduada. Como provaria Hilbert esta afirmação? Sigamos o seu método:

- São dados os pontos A e B (pontos base da construção) e daí o segmento AB [Post. I]. Suponhamos (por absurdo) que existia um *processo de construção* do ponto médio do segmento AB, seja M. De acordo com a ideia que vimos de construção geométrica, isso significava que existia uma sequência finita de pontos M_1, M_2, ..., M, que terminava no ponto M e em que cada ponto ou pertencia ao conjunto dos pontos base (neste caso A e B) ou podia ser obtido a partir dos pontos anteriores por meio de construções permitidas pelos postulados I e II (os que dizem respeito apenas à régua). Trata-se portanto de um conjunto finito C de rectas (ou segmentos de recta) e das suas intersecções (terminando no ponto M). A ideia genial de Hilbert surge agora:
- Imaginemos um ponto O, exterior ao plano (seja α) onde fizemos esta construção do ponto M, e um outro plano (seja β), não passando por O, e efectuemos uma projecção central, de centro O, de α sobre β.
- As rectas e pontos do conjunto C têm por imagem um conjunto C' de rectas e pontos (em particular A', B' e M'), que descrevem exactamente o mesmo processo de construção do ponto médio de $A'B'$, a saber M'. Mas, nas condições indicadas, M' pode não ser o ponto médio de $A'B'$ (figura 6). Portanto não existe um processo de construção do ponto médio de um segmento dado, utilizando apenas a régua não graduada.

De acordo com Howard Eves, o matemático árabe Abû'l-Wefâ (940–998) considerou construções feitas com régua não graduada e um compasso enferrujado, ou seja, um compasso com uma única abertura (mas que se podia especificar para cada construção). Matemáticos italianos, no séc. XVI, consideraram uma hipótese mais restrita, em que a abertura do compasso enferrujado era dada uma vez por todas, e mostraram que todas as construções dos *Elementos* de Euclides podiam ser realizadas nessas condições. Mas o resultado definitivo foi alcançado pelos dois geómetras mais famosos do séc. XIX, J. V. Poncelet (1788–1867) e Steiner. Poncelet enunciou o teorema (agora designado por teorema de *Poncelet-Steiner*) e indicou um processo de demonstração e Steiner demonstrou-o completamente. O resultado é o seguinte:

Todas as construções da Geometria Euclidiana podem ser realizadas com régua não graduada, se for dada uma circunferência e o seu centro.[12]

1.4. Algebrizando, para demonstrar impossibilidades

Temos vindo a referir, neste artigo, por diversas vezes, os três famosos problemas de construções geométricas da antiguidade clássica. Naturalmente, os problemas eram propostos para serem resolvidos no âmbito da geometria euclidiana.

Mas, como é conhecido e foi referido, (muito provavelmente) a convicção de que eram insolúveis utilizando apenas os instrumentos e regras euclidianas levou à procura de soluções por assim dizer não ortodoxas, que resultaram num enorme enriquecimento da geometria.

Uma outra direcção de desenvolvimento e enriquecimento da geometria e da matemática em geral foi a procura da demonstração daquela impossibilidade. Como afirmou Felix Klein (1849–1925)[13]

Que construções geométricas são, ou não, teoricamente possíveis? [...] Um aspecto singular relativo a esta questão é o facto da geometria elementar não fornecer qualquer resposta a esta questão. Temos que recorrer à álgebra [...]. Este novo método de ataque tornou-se necessário devido ao facto da geometria elementar não possuir um método geral, um algoritmo, [como é o caso da álgebra].

Não podemos descrever, mesmo sucintamente, por absoluta falta de espaço, em que consistiu esta linha de desenvolvimento da matemática e que processos de raciocínio foram assim criados e utilizados com êxito. Remetemos por isso para um artigo anterior (ver nota 4) que faz uma introdução, com profusa indicação de leituras, para o processo de algebrização das construções geométricas e para a sua aplicação com inteiro êxito nas demonstrações de impossibilidade.

Notas

1 a) Dedico este texto aos colegas do Grupo de Trabalho de Geometria da APM (GTG), dado que é também o resultado de muitos projectos em comum e de numerosas discussões. O GTG não é um grupo "perfeito" e temos muita dificuldade em levar rapidamente até ao fim todos ou mesmo a maior parte dos projectos que nascem da nossa imaginação. Mas é um ambiente de trabalho muito agradável, e é sempre com prazer que antevemos os sábados de manhã das nossas reuniões mensais. b) Este artigo será publicado em duas partes (em números sucessivos da revista), sendo a presente referente às construções geométricas e a segunda às transformações geométricas.

2 No ProfMat 2008, em Elvas, o GTG, representado por três dos seus elementos, fez uma conferência, intitulada *Dez ideias para o ensino da geometria*, que consistiu essencialmente na descrição e exemplificação da experiência geométrica que o GTG entende dever ser a base da aprendizagem da geometria nos ensinos básico e secundário. Um documento PDF com as projecções feitas durante a conferência pode ser solicitado ao autor.

3 O leitor interessado em conhecer (muito) melhor a história dos métodos em geometria, e não apenas na geometria elementar, poderá ler com proveito o livro de Coolidge indicado na bibliografia deste artigo.

4 Já utilizei esta mesma proposição num artigo anterior, (E&M nº85, Nov–Dez 2005, *O triunfo da Álgebra*) e assim poderei referir alguns desenvolvimentos remetendo o leitor para esse artigo.

5 Prop. I.1. Construir um triângulo equilátero sobre um segmento dado. *Elementos* de Euclides na web:

`http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`

6 Prop. I.8. Se em dois triângulos dois lados de um deles são iguais a dois lados do outro, e se as bases [isto é, os terceiros lados] são iguais, então os ângulos relativos aos pares de lados iguais são iguais.

7 Para a trissecção do ângulo, o livro a consultar é um detalhado trabalho de Robert Yates, *The Trisection Problem*. Sobre os problemas clássicos, consultar *Geometria: temas actuais*. No que se refere a curvas especiais, além da obra de Gomes Teixeira (ver bibliografia), consultar o livro muito completo *A Book of Curves*, de Lockwood.

8 Ver Martin, *Geometric Constructions*, cap. 9 (The marked ruler) para uma apresentação rigorosa deste ponto. O livro de George Martin — minha principal fonte de informações sobre este assunto —, é o livro a utilizar por quem queira estudar com alguma profundidade o tema das construções geométricas.

9 Note-se que o instrumento da régua graduada é usado em conjunto com o compasso. Deveríamos sempre dizer *compasso e régua graduada*, o que inclui portanto *o compasso e a régua não graduada* de Euclides.

10 Sobre este tipo de construção, denominado *neusis* (*verging* em inglês), será proveitoso completar estas informações demasiado breves com uma consulta da *História da Matemática* da Universidade Aberta (págs. 280 a 283, ver bibliografia).

11 Exemplo dado por Howard Eves, no livro *College Geometry*, pág. 180.

12 Demonstração na obra citada de Howard Eves, pag. 181–185 ou George Martin, obra citada, cap. VI.

13 No livro *Famous Problems of Elementary Geometry*.

Bibliografia

Coolidge, Julian Lowell. *A History of Geometrical Methods*. New York: Dover Publications Inc., 1968

Estrada, M. Fernanda et al. *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

Eves, Howard. *College Geometry*, Boston, Jones and Bartlett Oublishers, 1995

Gomes Teixeira, F. *Obras de Matemática*. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1915.

Klein, Felix. *Famous Problems of Elementary Geometry*. New York: Dover Publications Inc, 2003.

Lockwood, E. H. *A book of curves*. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.

Martin, George. *Geometric Constructions*. New York: Springer, 1998.

Veloso, Eduardo. *Geometria: temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

Yates, Robert C. *The Trisection Problem*. Reston: NCTM, 1971.

Eduardo Veloso

Raciocínio e tecnologia

Os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, publicação traduzida e editada pela APM em 2007, contém, para além das Normas de Conteúdo, ou seja, os conteúdos a aprender, como a Geometria ou a Álgebra, as Normas de Processo, que indicam as formas de adquirir e utilizar os conhecimentos, de que são exemplos a Comunicação e o Raciocínio que aqui surge associado com a Demonstração.

Tendo em conta a temática desta Revista, vamos deter-nos um pouco sobre o raciocínio procurando a sua relação com o uso da tecnologia.

Desde o pré-escolar e os primeiros anos de escolaridade, que se reconhece a importância de estimular os alunos a estabelecer conjecturas, procurando provas, o que é favorecido pela criação e descrição de padrões geométricos e numéricos, num ambiente de trabalho que aponta para uma matemática que se compreende.

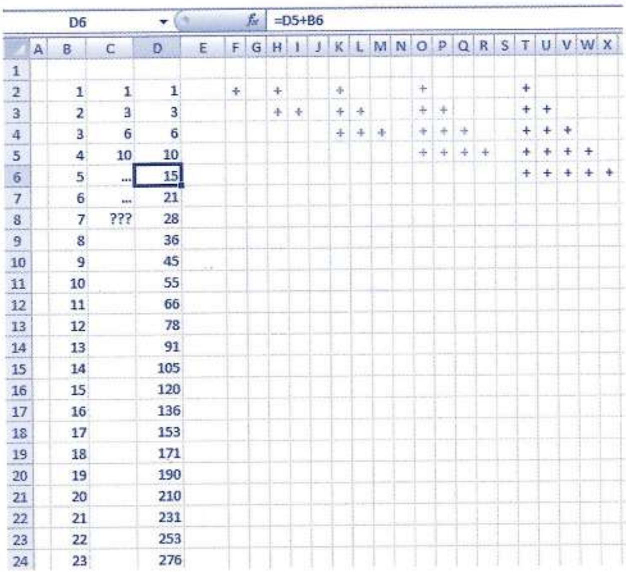
Nos anos 3º–5º, sugere-se que o raciocínio se desenvolve quando os alunos são encorajados a exporem as suas ideias e em que formular conjecturas e tentar justificá-las é uma parte integrante da actividade matemática dos alunos, abordagem que é desenvolvida e aprofundada nos anos seguintes. Neste sentido, nos níveis 6º–8º, à medida que, por exemplo, analisam padrões e estruturas para a identificação de regularidades e que formulam generalizações, devem ser convidados a argumentar, analisando a plausibilidade das suas conjecturas e apresentando aos outros as linhas do raciocínio que seguiram, de modo a poderem ser avaliadas.

Ao longo dos anos e até ao final do ensino secundário, o trabalho de questionamento (o porquê?) constante, as oportunidades de comunicar e partilhar estratégias e resultados, argumentar e ouvir os argumentos dos outros, conduzem a um progressivo domínio de várias formas de raciocinar numa grande variedade de contextos matemáticos ou de aplicação e ao uso de processos demonstrativos, progressivamente mais apurados.

Até que ponto a tecnologia vem estimular o desenvolvimento do raciocínio? Ou, pelo contrário, como alguns afirmam, torna os alunos mais *mandriões*, mais *dependentes das máquinas* e menos críticos?

Vamos partir do exemplo referido na página 311 dos *Princípios e Normas*, em que a professora, após explicar o conceito de número triangular, pede aos alunos de um 7º ano de escolaridade que representem os primeiros cinco números triangulares, desenvolvendo uma estrutura de pontos que os ajude a ver o que acontece, quando se passa de um número triangular ao seguinte.

A partir daí, pedem-se vários "números seguintes" e ... porque não, o centésimo termo, o que obriga a reflectir sobre o processo seguido até aí, eminentemente recursivo e desajustado para responder à pergunta, uma vez que obriga a saber o 99º.



D6 =D5+B6

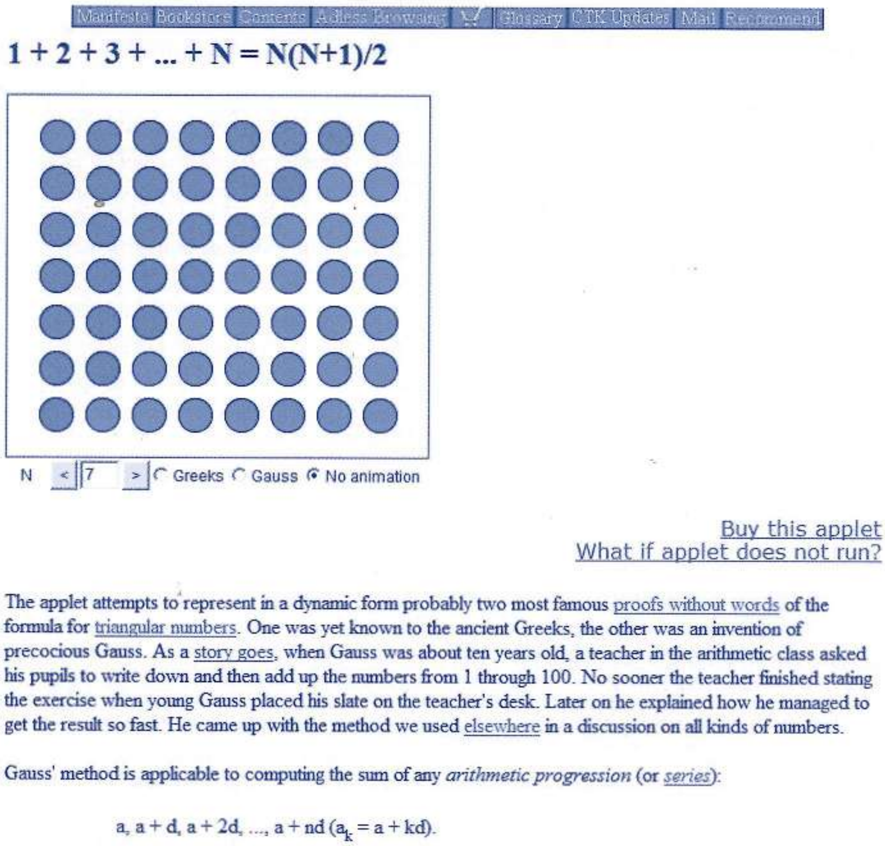
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1																								
2		1	1	1		+		+			+				+					+				
3		2	3	3				+	+		+	+			+	+				+	+			
4		3	6	6							+	+	+		+	+	+			+	+	+		
5		4	10	10											+	+	+	+		+	+	+	+	
6		5	...	15																+	+	+	+	+
7		6	...	21																				
8		7	???	28																				
9		8		36																				
10		9		45																				
11		10		55																				
12		11		66																				
13		12		78																				
14		13		91																				
15		14		105																				
16		15		120																				
17		16		136																				
18		17		153																				
19		18		171																				
20		19		190																				
21		20		210																				
22		21		231																				
23		22		253																				
24		23		276																				

Figura 1

Que vantagem podemos tirar aqui do uso da tecnologia?

Com uma folha de cálculo podemos simular a situação que está a acontecer (ver figura 1). Os alunos podem ser convidados a escrever numa coluna (B) o conjunto dos números naturais (o número de ordem de cada número triangular) e os primeiros quatro números triangulares na coluna ao lado (C). Deve-lhes ser dado tempo para observarem os dados e tentarem perceber o que está a acontecer, cada vez que é gerado um novo número triangular, constituindo os desenhos dos triângulos (representados, na figura 1, através de cruzes) uma visualização que pode auxiliar a encontrar uma resposta. Na imagem, pode observar-se que o desenho de cada triângulo se obtém do anterior, acrescentando uma linha de pontos igual ao número de ordem do triângulo. Por exemplo, para calcular o termo de ordem n=4, ao triângulo anterior, com 6 pontos, acrescenta-se 4, para obter o novo triângulo com 10 pontos e assim sucessivamente.

Não será difícil, após alguns momentos de discussão, entender que o processo recursivo se resume a juntar à soma acumulada nos números anteriores, o número correspondente à ordem. É isso que observamos na imagem, no cálculo do 5º número triangular: na célula D6 (=D5+B6), o conteúdo calculado é 15, ou seja, (1+2+3+4)+5 = 10+5, que tem uma visualização geométrica na figura triangular mais à direita, na folha de cálculo representada na figura 1. Copiando agora esta fórmula ao longo da coluna D e tão longe quanto se queira, obtemos a resposta para o termo de ordem 100 ou superior, até que a capacidade máxima de representação numérica do programa seja ultrapassada.


Manifesto Bookstore Contents Adless Browsing Glossary CTK Updates Mail Recommend

1 + 2 + 3 + ... + N = N(N+1)/2

N < 7 > Greeks Gauss No animation

Buy this applet
What if applet does not run?

The applet attempts to represent in a dynamic form probably two most famous proofs without words of the formula for triangular numbers. One was yet known to the ancient Greeks, the other was an invention of precocious Gauss. As a story goes, when Gauss was about ten years old, a teacher in the arithmetic class asked his pupils to write down and then add up the numbers from 1 through 100. No sooner the teacher finished stating the exercise when young Gauss placed his slate on the teacher's desk. Later on he explained how he managed to get the result so fast. He came up with the method we used elsewhere in a discussion on all kinds of numbers.

Gauss' method is applicable to computing the sum of any *arithmetic progression* (or *series*):

$a, a + d, a + 2d, ..., a + nd \ (a_k = a + kd).$

Figura 2

Claro que aqui já reconhecemos algum valor à tecnologia, nomeadamente à folha de cálculo, quer porque facilmente gera recursivamente centenas ou milhares de termos, quer porque ao fazê-lo permite que os alunos observem as relações entre os números, discutam e coloquem mais conjecturas, o que só acontece no contexto de questões e desafios apropriados lançados pelo professor e de uma discussão por ele bem conduzida. Na folha de cálculo, substituir uma fórmula (normalmente, uma combinação de endereços de células) por outra e copiar ao longo de uma coluna "por arrasto" para ver o que sucede, é um processo instantâneo que pode fazer parte do processo de generalização, mas também do de verificação e prova.

No entanto, até agora continua por encontrar um processo explícito, uma expressão geradora de qualquer termo da sequência, sem que para o efeito seja necessário conhecer o termo anterior. Provavelmente, poucos alunos serão capazes de reconhecer, através da tabela, que cada termo pode ser encontrado através da semi-soma do produto da ordem desse termo pela ordem seguinte (o 5° termo, 15, pode ser calculado multiplicando a ordem, 5, por 6 e dividindo, em seguida por 2).

Assim, fomos procurar recursos na Internet e nas referências finais do novo Programa de Matemática do Ensino Básico, em *Recursos: sítios e materiais na Internet*, encontrámos o site `http://www.cut-the-knot.org` que disponibiliza algumas centenas de actividades interactivas, uma das quais nos chamou a atenção porque se intitulava, *Sum of consecutive integers is triangular*. Por curiosidade, fomos ver e encontrámos uma actividade que oferece um modelo geométrico dinâmico e uma explicação e prova analítica para a relação entre a soma dos inteiros consecutivos e os números triangulares, de certo modo, aquilo que procurávamos.

O método de Gauss para encontrar rapidamente a soma de qualquer número de inteiros consecutivos encontra-se aí bem ilustrado. Na figura 2, seleccionámos n=7, para calcular 1+2+3+4+5+6+7, que pode ser visto eventualmente como o conjunto das bolas de cor que crescem, do lado esquerdo, de baixo (1) para cima (7). O método apoia-se no facto de podermos adicionar a estes elementos os da sequência in-

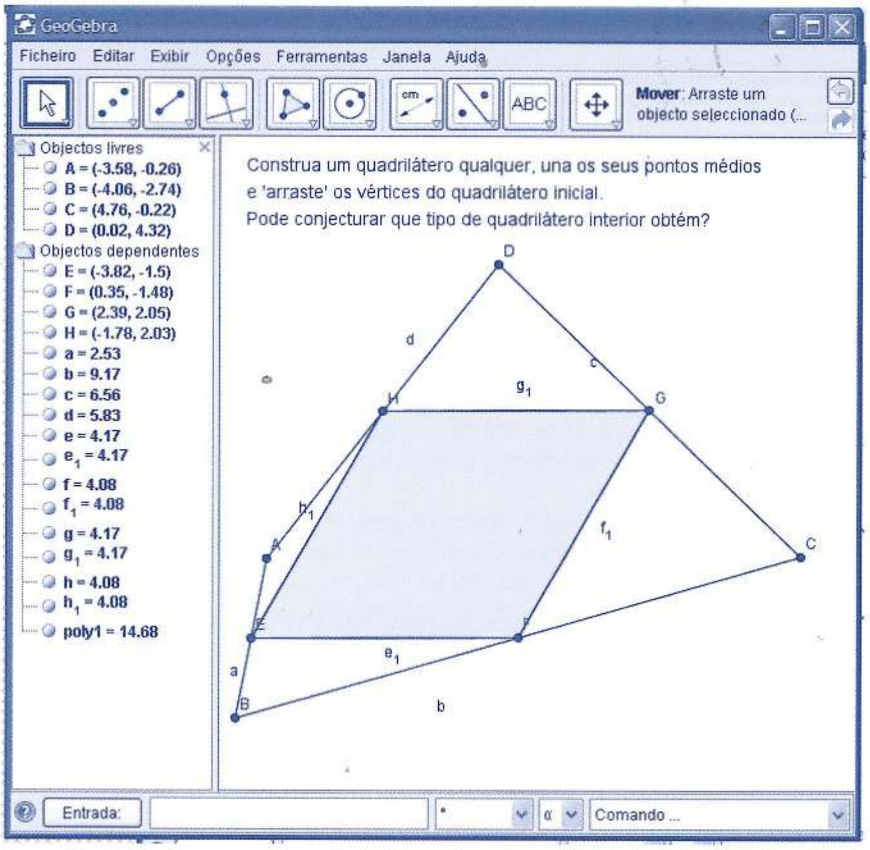


Figura 3

versa (por exemplo, 1+7; 2+6; 3+5; 4+4), sendo que cada linha tem sempre o mesmo número de elementos (8) tão bem ilustrado no rectângulo de 7x8 da figura. Claro que o resultado são 56 pontos, produto relativamente ao qual teremos agora de calcular a metade, uma vez que adicionámos os termos de duas sequências (em ordem ascendente e descendente) e não de uma, que nos conduz ao valor 28, que corresponde ao 7º número triangular (ver também a folha de cálculo, na figura 1).

Torna-se aqui evidente que a soma dos 7 inteiros consecutivos é igual a (7x8)/2 e que, para n termos, teremos uma expressão geral nx(n+1)/2, expressão tão bem conhecida dos alunos do ensino secundário e que traduz a soma dos n termos de uma progressão aritmética de razão 1 e para a qual encontramos uma prova analítica no referido site.

Um problema que se poderia ter iniciado com umas fichas de cor nos primeiros anos de escolaridade, explorando apenas padrões geométricos, pode progressivamente ser conduzido a níveis mais elevados de exploração de natureza numérica e algébrica e a tecnologia pode ser uma mais-valia no processo de gerar números, evidenciar relações, permitir múltiplas representações e disponibilizar informação pertinente e modelos visuais facilitadores da apropriação dos conceitos.

Num Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) como o Geogebra, o Geometer's Sketchpad ou o Cabri, averiguar o que se passa com a figura que resulta de unir os pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero qualquer, pode ser um desafio que estimula também o desenvolvimento do raciocínio e convida à procura de justificações e à prova (ver figura 3).

A figura, por mais que se "arrastem" os vértices do quadrilátero inicial, parece manter-se sempre um paralelogramo, o que se pode confirmar em cada momento, medindo lados, ângulos e averiguando quanto ao paralelismo entre dois lados opostos. Mas isto não constitui ainda uma prova, no sentido matemático do termo. No entanto, as características do programa, permitindo a construção instantânea de uma grande diversidade de quadriláteros dos mais "convencionais" aos mais "enviesados", através da propriedade do "arrasto", fornecem evidência suficiente que suporta a conjectura que se trata de um paralelogramo. A figura obtida, embora assuma várias formas, mantém invariantes o paralelismo entre os lados opostos e as dimensões dos lados e amplitudes dos ângulos opostos.

Para o demonstrarmos, precisamos de nos apoiar na semelhança de triângulos, através da igualdade das amplitudes dos ângulos e da proporcionalidade entre os lados homólo-

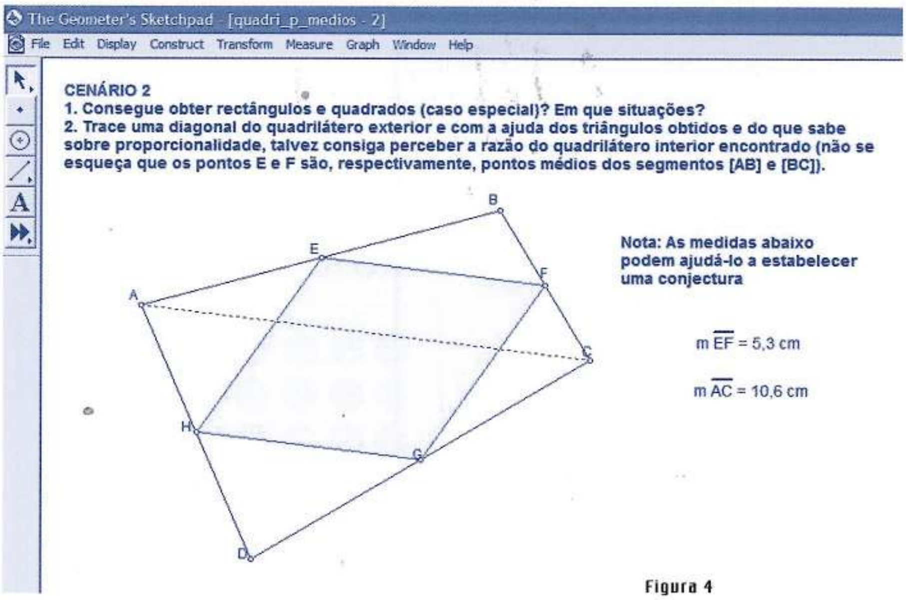


Figura 4

gos. Suporte e apoio a esta prova estão disponíveis nas páginas 34 e 35 da publicação *A Matemática na Educação Básica*, editada pelo DEB, em 1999. Aos alunos poderão ser dadas "pistas" no próprio AGD (ver figura 4).

Não seria suficiente, o espaço desta e doutra revista, para dar exemplos de programas computacionais que podem promover o desenvolvimento do raciocínio, seja ele de natureza mais numérica, geométrica ou algébrica. A folha de cálculo, *applets* ou um AGD, podem desempenhar esse papel. Podem, porque têm características que favorecem o confronto dos alunos com a surpresa da regularidade que surgiu da "cópia" ao longo da coluna da folha de cálculo ou do "arrasto" da figura no AGD. Podem, porque permitem visualizar de imediato o impacto de pequenas mudanças numa variável, num valor numérico ou numa figura, em diferentes representações, sejam elas geométricas, uma tabela ou um gráfico. Podem, porque fornecem modelos e informam sobre o seu maior ou menor ajuste a um conjunto de dados. Mas estas características constituem apenas um potencial que se revela e se aprofunda de acordo com a forma como o professor for colocando as questões, dando tempos para observação individual das tabelas de valores e dos gráficos, na procura de relações, para a discussão em pequeno grupo e para a partilha de estratégias, reflexão e confronto de argumentos com toda a turma. Em resumo: só o professor pode promover o desenvolvimento do raciocínio, mas nunca como agora a tecnologia lhe ofereceu tantas e tão diversificadas oportunidades de ir até onde nunca imaginou poder ir.

José Duarte

Raciocinar... em Música [ii]

Crescemos a ouvir falar das qualidades da música no desenvolvimento do raciocínio. Se pensarmos nos três elementos estruturantes da música percebemos porquê. A harmonia obriga-nos a relacionar as notas entre si e a imaginar as infinitas possibilidades de agrupamento de sons. A melodia, apesar de nos levar a um exercício semelhante, relaciona-se com o tempo de maneira diferente: podemos pensar no som de um acorde numa fracção de tempo, mas uma melodia para existir precisa de tempo e o acto de a imaginar exercita essa relação. Finalmente, o ritmo, onde mais facilmente vemos a presença matemática, nos compassos simples, compostos ou complexos. Mas o raciocínio mais estimulante e complexo é o que conjuga todos os anteriores com a abstracção necessária para a criação musical. Provavelmente nenhum é tão esmagador como o de Beethoven ao escrever a sua última sinfonia surdo.

Mário Laginha **[Pianista e Compositor]**

O Problema do ProfMat 2008

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2008 de Elvas consistiu na resolução do problema *2008 Caixas de Rebuçados:*

Temos 2008 caixas, cada uma delas contendo respectivamente 1, 2, 3, 4, ..., 2007 e 2008 rebuçados. Uma operação consiste em escolher um conjunto de caixas e retirar de cada caixa o mesmo número de rebuçados. Qual é o número mínimo de operações necessárias para esvaziar todas as caixas?

Dos quinze concorrentes, doze indicaram correctamente o número mínimo de operações: 11 (um número bastante baixo, para surpresa de alguns).

Houve abordagens distintas. A Lénia, o Daniel, o Eduardo, a Iva & Angelino, a Jonita e o Raul começaram por analisar o problema para casos mais simples, com poucas caixas, para daí tentar generalizar. Os resultados obtidos encontram-se representados na tabela 1.

Analisando a tabela, vemos que o número de operações n aumenta de uma unidade sempre que o número de caixas C chega a uma potência de 2. Assim, é de prever que n seja a solução da condição $2^{n-1} < 2^n$. No nosso problema, $C = 2008$ e $2^{10} \leq 2008 < 2^{11}$. Logo, seriam precisas 11 operações.

O Eduardo apresentou este resultado de forma diferente: $n = \text{int}\ (\log 2C) + 1$.

Para levar a cabo estas 11 operações é preciso definir, em cada uma delas, que caixas escolher e quantos rebuçados tirar. Há muitas possibilidades, embora parecidas entre si ou até equivalentes (mesmas operações mas por ordem diferente). Algumas respostas apresentam a sucessão de operações, sem indicação explícita da estratégia seguida, mas outras indicam-na. Gostámos da que a Jonita e o Avelino indicaram. Ei-la, por palavras ligeiramente diferentes:

Número r de rebuçados a retirar: metade dos que estão na caixa mais cheia (se ela tiver um número ímpar, r é metade arredondado por excesso).

Caixas a escolher: todas as que tiverem r ou mais rebuçados.

Teremos então a seguinte evolução da situação expressa na tabela 2.

Mas, como salientam Iva & Nuno Angelino, *o número de rebuçados a retirar não tem de ser sempre o indicado*. Com efeito, na primeira operação, poderíamos retirar entre 985 e 1024 rebuçados.

Parabéns ao Raul e ao Nelson que acrescentaram demonstrações (muito parecidas) de que o valor mínimo do número de operações é 11. Não são fáceis e ocupam bastante espaço.

Uma curiosidade: as respostas da Sara e do Francisco foram entregues numa bela caixa, a caixa 2009, cheia de rebuçados! Bela ideia, que a organização agradeceu...

Terminamos com a frase com que a Sara concluia a sua resolução:

Como podemos observar, no final todas as caixas estão vazias (e quem comeu os rebuçados está muito, muito cheio...).

Lista de participantes

Individuais: Avelino Sousa; Cláudia Vieira; Daniel Castanho; Eduardo Cunha; Fausto da Silva; Francisco Estorninho; Jonita Ralha; Lénia Mestre; Nelson Sousa; Patrícia Sampaio; Raul Aparício Gonçalves; Sara Gil.

Em equipa: Iva & Nuno Angelino; João Oliveira & Berta Alves; Ricardo Poças & Margarida Abreu.

Premiados e Prémios

1°. Raul Aparício Gonçalves (*Unidade TI-nSpire, oferta Texas Instruments*)
2°. Jonita Ralha (*Calculadora Gráfica Casio CFX9750, oferta Beltrão Coelho*)
3°. Nelson Sousa (*Jogo Timberr, oferta AFR*)
4°. Avelino Sousa (*Livro "O Assassino das meias verdes", oferta Gradiva*)
5°. João Oliveira & Berta Alves (*Livro "Desafios 10", oferta Afrontamento*)

Atenção: Os prémios devem ser levantados até 30 de Julho de 2009. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa.

Tabela 1

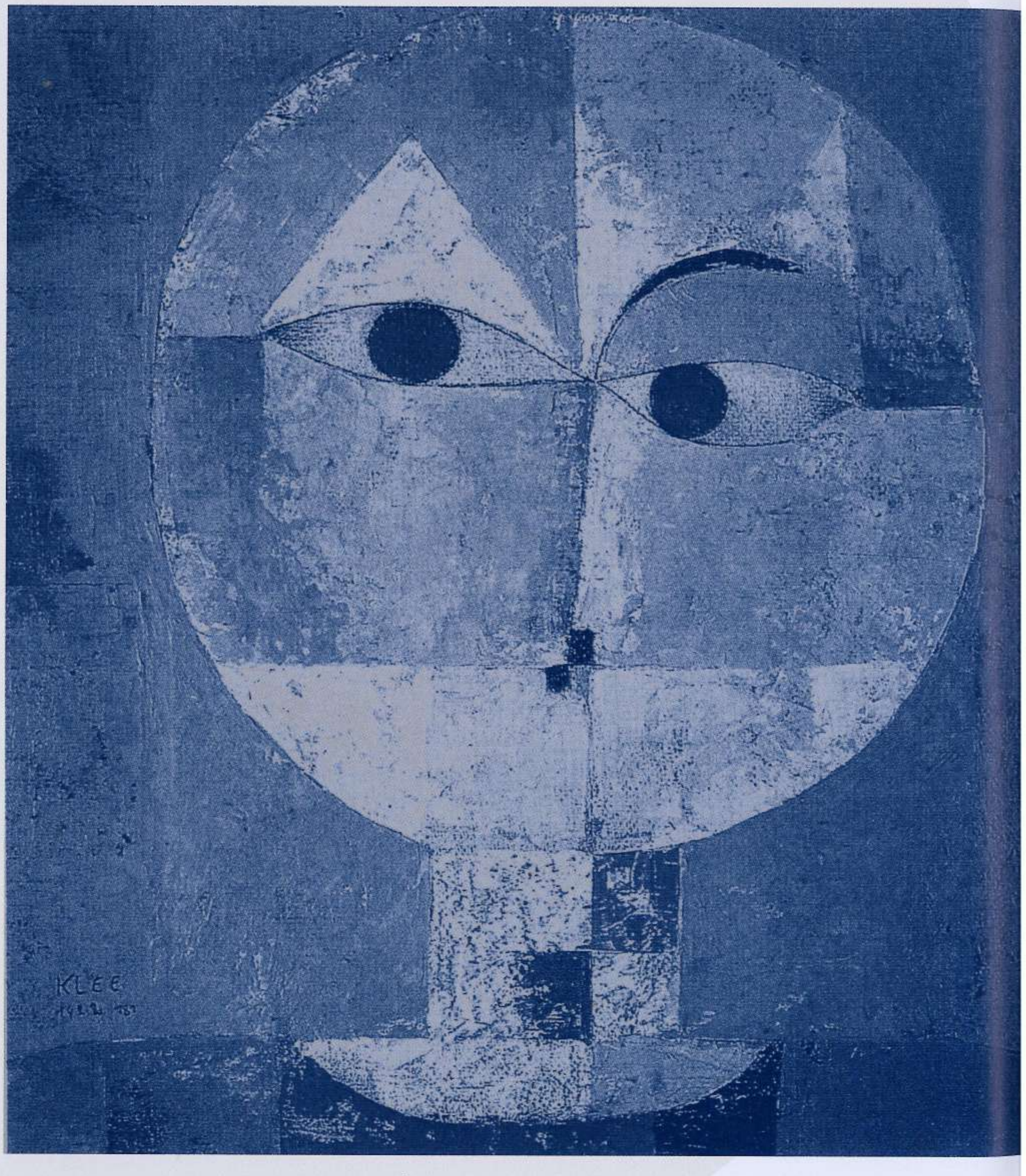
Nº de caixas C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nº de operações n	1	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5

Tabela 2

Operação	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Rebuçados na caixa mais cheia	2008	1004	502	251	125	62	31	15	7	3	1
Rebuçados a retirar	1004	502	251	126	63	31	16	8	4	2	1

Representações dos alunos. Que raciocínios revelam?

Alice Carvalho



Uma componente essencial do trabalho do professor prende-se com as experiências de aprendizagem que quer proporcionar aos seus alunos, tendo em conta os conteúdos ou tópicos matemáticos visados.

Esta faceta do seu trabalho concretiza-se muitas vezes na escolha de uma tarefa e toda a reflexão feita em torno dela.

Uma professora do 3° ano de escolaridade queria trabalhar problemas que envolvessem a multiplicação. O problema adaptado da prova de aferição de matemática 2002 (figura 1) parecia-lhe ser interessante, mas envolvia a multiplicação com números decimais, conteúdo que ainda não tinha abordado. Alterar os números do problema, para que só estivessem envolvidos números inteiros, mudando o preço de cada almoço de 1,50€ para 2€, era uma hipótese, mas o facto de os alunos não saberem ainda o algoritmo da multiplicação envolvendo números decimais poderia ser um desafio impulsionador de estratégias alternativas seria interessante observar como é que os alunos lidavam com o problema, que sentido dariam a 1,50€, que justificações mobilizariam. A dinâmica criada no esforço para chegar à solução do problema e o confronto de estratégias poderia proporcionar um momento rico de aprendizagem matemática.

A segunda hipótese era de facto mais desafiante e esta professora empenhou-se completamente em dar espaço aos seus alunos para resolver o problema através da mobilização de processos que fossem para eles relevantes, mesmo que lhe parecessem um pouco longos. À partida pensou que a multiplicação era o processo mais rápido. Estava curiosa para ver se algum aluno a mobilizava espontaneamente, como lidaria com o factor decimal e que interpretação faria do número obtido no produto. E que outras estratégias iriam surgir mais? Será que os seus alunos a iriam surpreender?

Feita a escolha da tarefa, consideradas estas questões e ponderada a forma de a levar para a sala de aula, é altura de ver o que realmente acontece. Neste artigo analisaremos a forma como os alunos desta professora mobilizaram os seus conhecimentos para resolver estes problemas para os quais foram desafiados (figura 1).

Paralelamente trazemos a experiência de uma outra turma do 3° ano cujo professor optou por levar esta tarefa para a sala de aula por a considerar consistente com a sua opção metodológica de adiar a introdução dos algoritmos formais, neste caso a multiplicação com números decimais.

Os nomes dos alunos não correspondem aos verdadeiros.

gura 1

. tabela indica o número de almoços servidos, na 2ª semana de .bril de 2008, na escola do Paulo.

Dias da semana	Número de almoços servidos
Segunda-feira	100
Terça-feira	75
Quarta-feira	50
Quinta-feira	100
Sexta-feira	125

. Cada almoço custa 1,5 euros. Quanto é que a escola recebeu pelos almoços de quarta-feira?
Regista todos os teus cálculos.

. Já sabes o dinheiro que a escola obteve com os 50 almoços de quarta-feira.
Partindo deste valor, calcula quanto é que a escola fez nessa semana em almoços.
Regista todos os teus cálculos.

Turma A

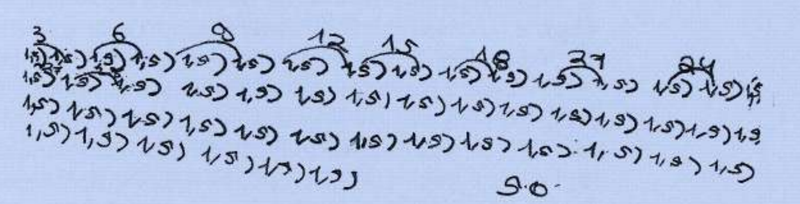
Passada a primeira fase de interpretação do problema no grande grupo, os alunos lançaram-se ao trabalho, podiam trocar impressões com os colegas perto de si. Muitos alunos começaram por adicionar sucessivamente 1,50€, descobrindo quase de imediato que 1,50€ + 1,50€ eram 3€. Mas o processo de escrever 50 parcelas de 1,50€ e contar sucessivamente de 3 em 3 fez com que algumas crianças mudassem de estratégia e optassem por outra mais eficaz, uma vez que a forma como fizeram o registo levava a enganos, como mostra a resolução da Isabel (figura 2).

E o raciocínio começou a mobilizar-se para a resolução do problema.

— Eu podia fazer primeiro dez almoços, que é mais fácil! Depois é só contar de dez em dez até chegar a 50 almoços — disse a Isabel, ao debater-se com a confusão que emergia do facto de ter escrito tudo muito apertado.

Esta mudança de estratégia fez com que evitasse um erro que estava a cometer logo na primeira linha dos seus registos (figura 2), uma vez que associou duas vezes a mesma parcela.

Figura 2. Primeira resolução da Isabel



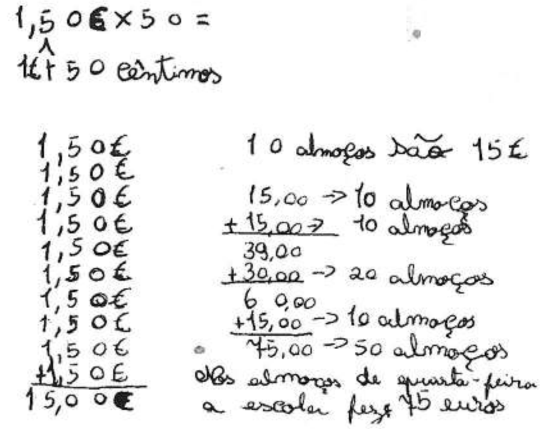
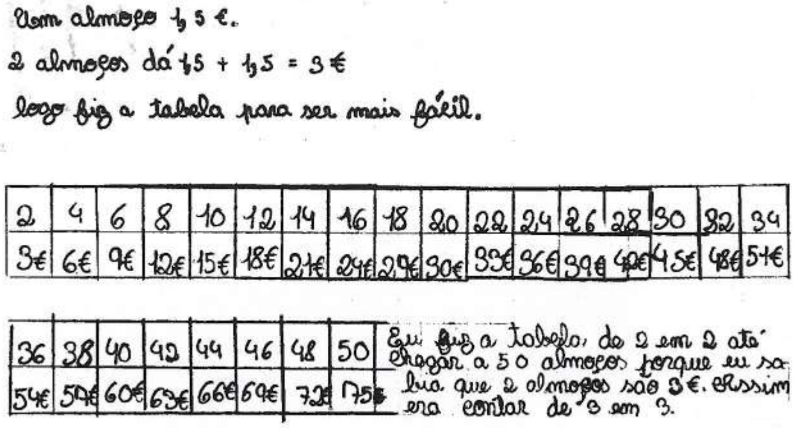


Figura 3. Segunda resolução da Isabel.



2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
3€	6€	9€	12€	15€	18€	21€	24€	27€	30€	33€	36€	39€	42€	45€	48€	51€

36	38	40	42	44	46	48	50
54€	57€	60€	63€	66€	69€	72€	75€

Figura 4. Resolução do Pedro

Na resolução apresentada na figura 3, podemos observar que a Isabel percebeu que este problema podia ser resolvido através de uma multiplicação, pois regista este procedimento logo em primeiro lugar, talvez os primeiros registos com as 50 parcelas (figura 2) a fizessem evoluir na compreensão do problema, mobilizando, de seguida, uma estratégia conceptualmente mais evoluída, mas como ainda não dominava o cálculo através da multiplicação, raciocinou por etapas. Primeiro calculou o preço de 10 almoços e partiu deste dado para chegar ao preço de 50, decompondo-o em 10 + 10 + 20 + 10. A estratégia aditiva prevalece, mas esta resolução, feita com compreensão, permite-lhe criar a pouco e pouco estruturas sólidas para a apropriação da multiplicação com números decimais. Desmontar a sua estratégia e colocar à discussão sobre outra forma de representar a adição de 10 parcelas de 1,5€ poderá ajudá-la a dar o salto para a multiplicação por 10. Proporcionar a análise do produto obtido, 15€, em comparação com o factor 1,5€, também me parece relevante para fazer compreender a transformação dos números quando os multiplicamos por dez. Numa etapa seguinte poder-se-á direccionar a discussão na turma para que percepcione o 50 como 5 × 10 e que, por isso, possa aplicar esta relação multiplicativa ao cálculo do preço de 50 almoços: 10 almoços são 15€, então 50 almoços são 5 × 15€.

O Pedro resolveu o problema construindo uma tabela (figura 4). Como muitos partiu do preço de 2 almoços, fazendo 1,5 + 1,5 = 3€.

No preenchimento da tabela, o Pedro foi fazendo em simultâneo contagens de 2 em 2 e de 3 em 3. A razão da escolha desta estratégia está explícita na sua justificação escrita.

O recurso à construção de uma tabela foi uma estratégia muito útil para si e para os colegas que tiveram a oportunidade de confrontar os seus modos de resolução com este que tão bem estruturou todo o processo de pensamento. Muitos reconheceram que esta estratégia permite calcular de forma mais organizada, evitando-se os enganos que surgiram nas resoluções através da adição de 50 parcelas de 1,5.

Embora o modo de preenchimento da tabela tivesse sido através de adições sucessivas, esta forma de representação permite desenvolver as bases para o raciocínio proporcional, uma vez que a criança teve de lidar simultaneamente com o número de almoços e o respectivo preço, mantendo sempre uma relação constante nas replicações necessárias para chegar ao preço de 50 almoços, que neste caso foi de 2 almoços/3€. O próximo desafio seria verificar se tendo de calcular um número muito superior de almoços usaria a mesma estratégia de construção da tabela.

O Renato da turma B, usou a tabela representada na figura 5 para calcular o preço de 10 almoços.

Este modo de construir uma tabela dá-nos mais evidência da mobilização de relações multiplicativas, uma vez que só são preenchidas algumas colunas. São muitas as questões que o professor pode levantar neste ponto: como será que o aluno preencheu o preço de 5 almoços? É natural que tenha calculado primeiro o preço de 10 almoços e que depois encontrasse a sua metade. E como preencheria 50 almoços? Será que encarava o 50 como sendo 5 vezes maior que 10 e aplicava esta relação criando apenas mais uma coluna, assinalando com setas a relação multiplicativa envolvida, ou tinha de fazer mais 5 colunas, contando de 10 em 10 e de 15 em 15?

A exploração das tabuadas, através do preenchimento de tabelas por saltos ao estabelecer relações de dobro e de metade, em vez de as completarem seguidamente por adições sucessivas, talvez seja um método mais poderoso no desenvolvimento do raciocínio multiplicativo. Será interessante observar se esta abordagem na aprendizagem das tabuadas ajuda os alunos a aplicar estas relações e processos de representação a problemas com a mesma estrutura, como seja, usar tabelas de razão para resolver problemas que envolvem relações proporcionais.

1,5	1	5	10
	1,5€	7,5€	15,0€

Figura 5. Tabela do Renato.

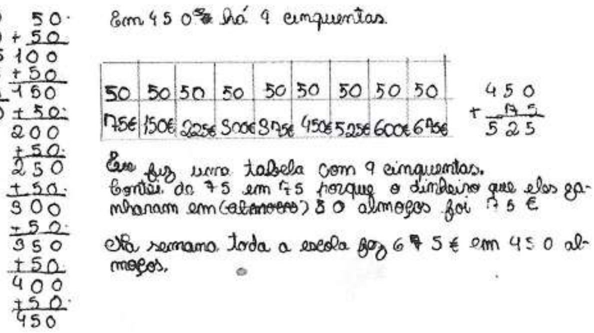


Figura 6. A resolução do Pedro [2° problema].

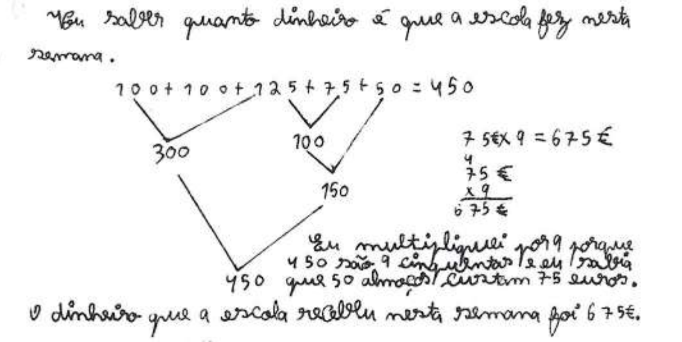


Figura 7. A resolução do Fábio [2° problema].

No segundo problema (ver figura 1), um dos objectivos era que os alunos estabelecessem relações numéricas entre o 50 e o 450. Como já sabiam quanto custavam 50 almoços era interessante verificar se utilizaram este facto para mais rapidamente calcular o preço de 450 almoços, fazendo-o ou através de adições sucessivas ou mobilizando o raciocínio multiplicativo.

Analisemos a resolução que o Pedro fez para este caso (figura 6). Depois de calcular o total de almoços da semana, observamos que parte do preço de 50 almoços, calcula quantos grupos de 50 há em 450, adicionando sucessivamente 50 até encontrar este valor, escreve que em 450 há 9 cinquentas e fez novamente uma tabela com 9 colunas e duas linhas. Podemos reparar pela justificação escrita que apresenta que o preenchimento da segunda linha da tabela foi feito através de contagens de 75 em 75. Na apresentação aos colegas fê-lo do seguinte modo: "50 almoços custam 75€, 100 almoços é 75 + 75 que dá 50 + 50 + 50, 150 euros ..." e assim sucessivamente até chegar ao cálculo de 450 almoços. Foi interessante verificar que ao ter de mostrar oralmente como contou de 75 em 75, estruturou o 75 em saltos de 50 e 25, para lhe facilitar o cálculo, aspecto que não revela no registo escrito. Foi ainda necessário discutir se o que a tabela mostrava correspondia à explicação que estava a expressar oralmente. A pergunta "Então 50 almoços custam 450€?" e a respectiva resposta "Não, isso é este cinquenta." (apontou para a coluna 6) foram suficientes para poder verificar que em cada coluna, junto do 50, teria de escrever o número de grupos de 50 correspondente, para que a tabela representasse com rigor o seu pensamento (ver figura 6).

Na resolução do segundo problema surgiu nesta turma um processo diferente (figura 7). É de notar como o Fábio contou o número total de almoços da semana. Enquanto no trabalho do Pedro (figura 6) observamos o uso do algoritmo da adição, nesta estratégia o cálculo foi feito horizontalmente, estando subjacente a estrutura do 100 (juntou o 25 do 125 com o 75 para obter um novo grupo de 100). Através da sua justificação escrita sabemos porque é que multiplicou por 9, mas não está explícito como sabe que em 450 há 9 grupos de cinquenta. Oralmente, a sua explicação foi muito rápida, o Fábio apontou para o seu esquema e disse: "Em 300 há 6 e em 150 há 3." "Mas porquê? Como provas que em 300 há 6 grupos de 50?" insistiu a professora. "É fácil, o 300 é 100, 100, 100 e cada cem tem 2 cinquentas... 2, 4, 6". Uma nova questão direccionada para o estabelecimento de relações "Se em 300 há 6 vezes o 50, em 150 há 3 vezes o 50 porquê?" obteve resposta imediata de outro colega: "Metade de 300 são 150.".

Desenvolver a capacidade de argumentação é um aspecto importante do raciocínio, mas muitas vezes os alunos não sentem a necessidade de justificar através da escrita processos que utilizaram, para eles é mais do que evidente o porquê dos procedimentos usados. A discussão oral permite que este processo se aperfeiçoe e gradualmente se reflicta na escrita. As perguntas dos colegas e do professor ajudam a criar um sentido de audiência para aquilo que escrevem e dizem, por isso, vale a pena mostrar como se pensou porque isso é também importante para os outros.

Turma B

Este problema também foi resolvido numa outra turma do 3° ano de escolaridade. O professor desta turma optou por ensinar os algoritmos verticais só depois de sentir que os seus alunos tinham alguma flexibilidade no cálculo, mobilizando processos alternativos. Isto não quer dizer que não tenha ensinado processos estruturantes de cálculo, mas estes focalizaram-se primeiro, e durante um período longo de tempo, na utilização de estratégias de contagens por saltos, por compensação, decomposição e estabelecimento de relações numéricas. Simplificar os cálculos para imprimir maior velocidade ao processo de resolução e encontrar estratégias novas para contar aos colegas e professor tornou-se um desafio permanente. No domínio da multiplicação e divisão, as relações de dobro, de metade e a multiplicação por 10 e por 100 são as estratégias a que mais recorrem espontaneamente e que têm permitido o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo.

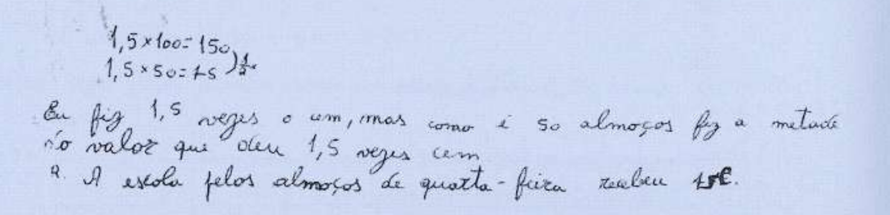
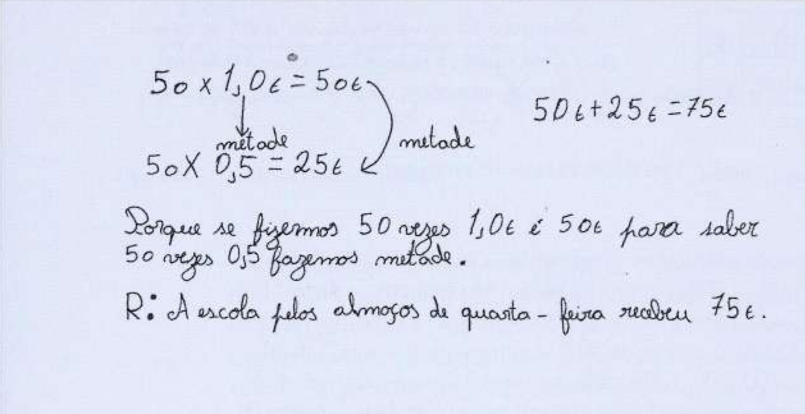


Figura 9. Resolução do Bernardo (1º problema).

Figura 8. Resolução da Diana (1º problema).



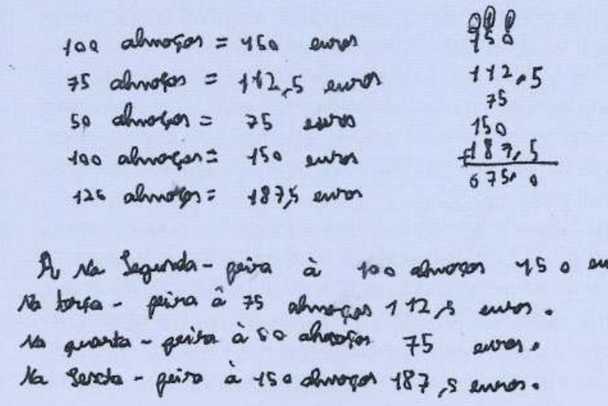


Figura 11. A resolução do Gil (2º problema).

Nos exemplos seguintes, podemos constatar na diversidade de resoluções que surgiram que estas estratégias são usadas para simplificar os cálculos, mas o sentido de número e a capacidade de percepção sobre os efeitos que as operações neles exercem não se perdem, ao contrário do que acontece muitas vezes no cálculo vertical, uma vez que separar o número por ordens compromete o raciocínio sobre os números envolvidos. Se as crianças não tiverem desenvolvido o hábito de criticar e verificar os resultados, estes podem ser completamente desadequados à solução do problema sem que a criança o note de forma autónoma.

Na resolução apresentada na figura 8, constatamos que a Diana tem uma percepção clara de que 1,5€ corresponde a 1 euro mais metade de 1 euro e mobiliza a multiplicação e divisão de forma inter-relacionada. Tem ainda a preocupação de apresentar uma explicação escrita sobre a razão do recurso à metade.

As resoluções representadas nas figuras 9 e 10 diferem da anterior na medida em que o processo escolhido não partiu da decomposição de 1,5€, mas também aqui se observa como a sucessiva aplicação de relações multiplicativas, multiplicar por 100, por 10, o dobro e a metade, imprimem uma grande flexibilidade no cálculo. Na estratégia da figura 9, o Bernardo, para calcular o preço de 50 almoços, parte de cem vezes 1,5€ e depois calcula a metade deste valor, representada simbolicamente por 1/2. Na da figura 10, o Gil parte de 10 vezes 1,5€ e aplica sucessivamente o dobro até ao cálculo do preço de 40 almoços. Ao verificar que só lhe faltava saber o preço de 10 em vez de multiplicar adiciona o valor de 10 almoços. Não apresenta nenhuma explicação escrita, mas a representação simbólica mostra com clareza o encadeamento do seu raciocínio.

No segundo problema (ver figura 1) foram também bastante diversificados os processos utilizados pelos alunos desta turma, sendo a primazia dada à multiplicação.

Foram poucos os alunos que optaram por calcular o dinheiro obtido nos almoços de cada dia da semana e adicionar, de seguida, os 5 totais obtidos para obter o dinheiro que a escola realizou nos almoços da semana. Na figura 11 temos um exemplo dessa estratégia. É de realçar que pertence ao

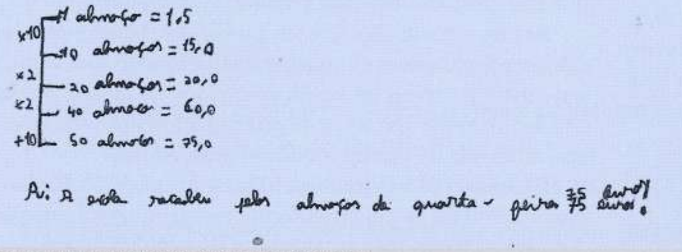


Figura 10. A resolução do Gil (1° problema).

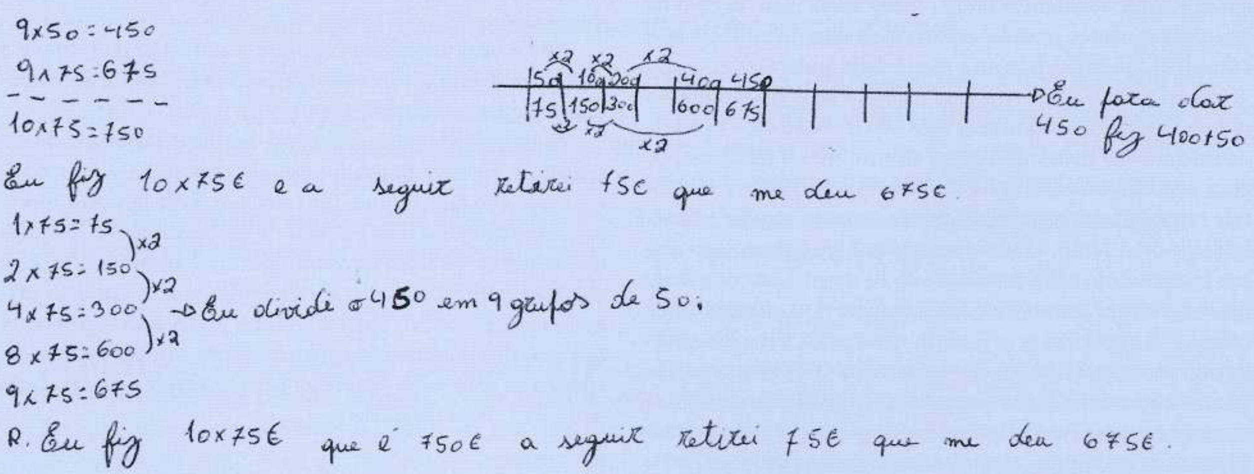


Figura 12. Resolução do Mário (2° problema).

Gil (figura 10), mas aqui não está explícito como é que chegou aos valores apresentados em cada um dos dias da semana. É natural que também tenha estabelecido uma série de relações, recorrendo ao que já sabia do problema anterior, mas não o expressou através de operações ou da escrita. O incentivo para clarificar o seu registo, evidenciando os modos de pensar para chegar aos vários cálculos intermédios, seria uma boa estratégia para continuar a desenvolver a sua capacidade de argumentação e de representação. O algoritmo da adição com números decimais é utilizado correctamente e é pertinente a sua mobilização, uma vez que estão envolvidos números para os quais o cálculo mental se torna mais difícil. No entanto, podia ser incentivada a associação das parcelas para as quais o cálculo mental não oferece dificuldade.

Outros alunos resolveram o 2° problema, partindo do preço de 50 almoços. Para isso, após terem calculado que o número total de almoços da semana era 450, encontraram o número de vezes que o 50 integrava esse número, tal como nos processos apresentados nas figuras 6 e 7 pelos alunos da outra turma do 3° ano.

Destaco a resolução representada na figura 12 por conter várias estratégias de resolução para a mesma solução. A capacidade de representação é um ponto crítico no desenvolvimento do raciocínio, aqui podemos observar a destreza com que o Mário lida com a construção de tabelas e como passa dum modo de resolução para outro. Sabendo que em 450 há 9 grupos de 50, calculou primeiro o preço de 10 grupos de 50 almoços e depois retirou 75€, chegando a 675€. Este parece ter sido o seu primeiro passo. Resolve ainda apresentar outra estratégia: faz uma tabela começando no preço de 50 almoços e, através de dobros sucessivos, chega ao de 400. Na coluna do 450 adiciona 75. A adição foi mobilizada porque o raciocínio multiplicativo usado antes não funcionava neste caso. Podemos constatar que ainda apresenta uma outra forma para resolver o problema: para chegar ao produto de 9 × 75, começa em 1 × 75 e prossegue com sucessivos dobros, tendo o cuidado de registar esse procedimento através de setas. Este é o processo que esta turma utiliza para estudar as tabuadas e que este aluno teve a capacidade de transpor para esta situação.

Síntese

Nas duas turmas do 3° ano de escolaridade verificamos que as crianças lidaram com a resolução deste problema com recurso a processos diversificados, nomeadamente a construção de tabelas, o cálculo por etapas, a contagem por saltos, a aplicação de relações numéricas e explicação por palavras de procedimentos usados. Estes processos reflectem um bom domínio e flexibilidade no cálculo, mesmo quando estão envolvidos números decimais.

As várias representações apresentadas por estes alunos evidenciam uma forte compreensão de procedimentos simbólicos, mas todos eles são alternativos aos algoritmos formais. A aposta é que quando estes forem ensinados, os alunos já tenham desenvolvido as ferramentas necessárias que os torne críticos para optarem por eles se forem mais vantajosos, porque reduzem o tempo gasto a calcular no caso de haverem números grandes envolvidos, mas que não os mobilizem se forem irrelevantes numa dada situação.

A opção por uma estratégia consistente com os números envolvidos no problema será um bom indicador do nível de conhecimento matemático dos alunos, mas a sensibilidade para ver os números e as suas relações de inclusão, e encontrar regularidades numéricas que imprimam rapidez e flexibilidade no cálculo, só terá possibilidade de crescer se os alunos tiverem tido a oportunidade de ao longo da escolaridade desenvolverem estratégias diversificadas de contagem e de cálculo. A experiência no uso de estratégias, a sua discussão e confronto comparativo em termos de maior ou menor eficácia virão a constituir a competência de cálculo do aluno.

Este é um percurso demorado e exigente porque é preciso dar tempo aos alunos para pensarem nas suas próprias estratégias, incentivar a justificação escrita e proporcionar espaços de discussão colectiva de ideias. A colocação de questões mobilizadoras do raciocínio, que permitam desmontar mal-entendidos, completar ideias, provar afirmações, progredir na compreensão dos conceitos é uma tarefa que exige do professor uma constante interacção e uma consciência muito clara do que deseja que os seus alunos aprendam e do que está em causa em cada situação.

Assim, a resolução de bons problemas, aqueles que têm subjacente conceitos e capacidades que os alunos devem desenvolver, passíveis de serem resolvidos de modos diversificados, torna-se um recurso privilegiado para promover a aprendizagem da matemática com profundidade.

Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e o raciocínio faz-se em articulação, mas para isso, tanto para o professor como para os alunos, a atenção não estará apenas na resposta ao problema, mas no modo como se pensa, nas estratégias que se usam, nos conceitos e capacidades que se mobilizam e na maneira como são apresentados e discutidos.

Esta é uma abordagem em que o ambiente da turma e a visão que se tem da aprendizagem da matemática desempenham um factor crucial.

A capacidade para explicar e justificar processos de resolução terá mais possibilidades de crescer se o fizer muitas vezes e se aqueles que me ouvem e lêem também forem intervenientes: os seus pedidos de esclarecimento, as questões e outras opiniões tornar-me-ão mais atento, reflexivo e aberto a críticas, mas o que espero dos outros também exige um procedimento igual da minha parte. É este ambiente que tem de ser construído gradualmente, através de uma dinâmica de interacção impressa pelo professor e que irá fazer parte da cultura da turma.

Alice Carvalho
EB1 /JI Orlando Gonçalves — Agrupamento de Alfornelos
Formadora na equipa de Formação Contínua de Matemática para professores do 1° ciclo na ESE de Lisboa

Raciocinar em ... Jornalismo

A primeira página está em branco. Como espelhar nela o dia? Como retratar o que de relevante se passou? E o que é relevante? Porquê? Cruzam-se opiniões e argumentos. Há dois terramotos na Ásia mas a crise financeira atinge mais pessoas. Vamos repetir a ideia de que há pânico nas bolsas? Não, isso já toda a gente sabe. É a segunda-feira mais negra nas bolsas desde 1987? É esse o título. E em Portugal, o que há de novo? A bolsa de Lisboa teve a maior queda desde que foi criada? É um dado significativo, um recorde histórico. Puxar por isso. O governo garante a segurança dos depósitos? Quem diz? É o ministro? Também merece destaque. Aos poucos, alinham-se os títulos. Fiéis à realidade mas, ao mesmo tempo, claros, concisos, atractivos. É preciso escrever com os olhos de quem lê, escolher as imagens que gostaríamos de ver se não as tivéssemos escolhido. A pouco e pouco, as páginas são preenchidas neste jogo tenso. A ideia faz-se ao papel, o papel à banca. E há um novo jornal na rua, feito já a pensar no seguinte. É assim que, todos os dias, de forma quase automática, mobilizo o meu raciocínio.

Nuno Pacheco **[Jornalista]**
Director-adjunto, PÚBLICO

Construíndo argumentações matemáticas nos primeiros anos

A importância de explicar e justificar ideias

Este número da revista centra-se no tema **Raciocinar em Matemática**. Em salas de aula em que é valorizado o raciocínio, a explicação e a justificação são aspectos chave da actividade dos alunos, o que traz para primeiro plano a necessidade de se dedicar uma atenção especial às actividades de argumentação matemática em todos os níveis de escolaridade.

Partindo deste pressuposto, seleccionámos para este número um artigo da autoria de Joy Whitenack e Erna Yackel, dois autores de referência no campo da argumentação no ensino da Matemática. Este artigo, intitulado **Making Mathematical Arguments in the Primary Grades: The Importance of Explaining and Justifying Ideias**, foi publicado na revista **Teaching Children Mathematics** em Maio de 2002 e, como o próprio título indica, foca-se nos primeiros anos de escolaridade. A publicação da tradução que aqui apresentamos foi autorizada pelo NCTM, a quem agradecemos.

Neste texto, os autores, partindo da descrição e análise de um episódio que ocorreu numa turma do 2º ano, sublinham a importância, para a aprendizagem, dos alunos apresentarem e discutirem argumentos matemáticos e analisam o papel do professor na constituição e manutenção de ambientes que promovem a argumentação. Globalmente, a sua leitura pode contribuir para iluminar a dinâmica da argumentação na aula de Matemática e para evidenciar desafios com que o professor se confronta quando orienta o seu trabalho no sentido de ajudar os alunos a construírem argumentos sobre os seus processos de resolução e a analisarem criticamente ideias apresentadas por colegas.

Os alunos do 2º ano da professora Jones acabaram de voltar a reunir-se depois de trabalharem em diversos problemas. Assim que os alunos se sentaram na frente da sala, a professora Jones pede a Casey para explicar a sua resposta de 16 para o seguinte problema. "A tia Mary tinha 31 rebuçados no balcão e o tio Johnny come 15 rebuçados. Mostra quantos rebuçados a tia Mary tem no balcão agora." Casey vai ao quadro e escreve: 30–15=15; 15+1=16. E então explica:

"Eu tirei este 1 de 31. E 30 menos 15 é igual a 15. E mais 1 é igual a 16. Se pegarmos neste 1 e o adicionarmos ao 30 para fazer 31 é o mesmo que quando fazemos menos, só que temos um número maior em 1, e se tirarmos o 1 do 30 e adicionarmos ao 15, ficamos com 16. E foi assim que fiquei com 16."[1]

Quando a professora Jones pede comentários ou perguntas, uma outra aluna, Shari, imediatamente diz que a abordagem de Casey "foi muito fixe": Explica, então, porque é que Casey resolveu o problema da forma como o fez "Porque, às vezes, as pessoas sabem que 15 mais 15 é igual a 30. Então se sabemos isso, é capaz de ser mais fácil." Quando a professora Jones pergunta a Casey se usou os dobros, 15+15=30, ele diz que sim.

Os *Principles and Standards for School Mathematics* afirmam que "os programas educacionais devem permitir ao aluno desenvolver e avaliar argumentos matemáticos e provas[2]." (NCTM 2000, p. 56). O exemplo anterior ilustra este tipo de raciocínio matemático nos primeiros anos. Quando Casey explica o seu pensamento à turma, a sua argumentação matemática torna-se parte da discussão seguinte. Depois de apresentar a sua argumentação, a turma é capaz de encontrar sentido na sua estratégia e não apenas na sua resposta. De maneira significativa, a sua explicação torna-se o ponto de partida para os seus colegas desenvolverem argumentações matemáticas que apoiam, melhoram, ou, eventualmente refutam as suas ideias. Shari, por exemplo, explicou porque é que Casey resolveu o problema da forma como o fez, isto é, tentou clarificar a explicação do seu pensamento, quando afirmou que a abordagem de Casey era uma maneira "mais fácil" ou mais eficiente de encontrar a resposta. Além de tornar o pensamento de Casey mais claro para outros, Shari e Casey abriram caminho para os outros alunos desenvolverem argumentos que apoiassem ou, eventualmente, contrariassem o pensamento de Casey enquanto a discussão continuava. Como este exemplo ilustra, explicar as próprias ideias, é uma parte essencial do desenvolvimento de argumentações matemáticas. Por outras palavras, raciocinar envolve construir argumentações matemáticas, nomeadamente explicar as próprias ideias para as tornar claras para outros.

Construir argumentações matemáticas também pode envolver justificar as ideias próprias aos outros. Na justificação matemática, um aluno apresenta explicações para lidar com um desafio às suas ideias colocado por um colega. Para ilustrar a diferença entre explicação e justificação regressamos à discussão que acorreu após Casey e Shari terem explicado as suas ideias. À medida que a discussão continua a professora, pergunta aos alunos se têm perguntas ou comentários e Teri responde.

Professora Jones: Então aquilo era algo que Casey já sabia e ele começou por aí. Mais alguém tem algum comentário ou pergunta?

Teri: Porque é que o juntaste [o 1] ao 30 e o puseste no 16? O 1 para o 16?

Casey: Eu adicionei-o ao 15 para obter 16.

Teri: Hã?

Professora Jones: Faz sentido, Teri?

Teri: Mas porque é que o adicionaste ao 30 primeiro e depois ao 15?

Professora Jones: Podes mostrar-nos o teu primeiro pensamento? O que é que pensaste primeiro? Acho que isto pode ajudá-la a perceber o que fizeste.

Quando, da primeira vez, Teri perguntou a Casey porque é que ele adicionou o 1 ao 15 para obter 16, podemos inferir que queria que Casey clarificasse o seu pensamento, isto é, pediu-lhe uma explicação. Ao fazer a pergunta seguinte, porém, parecia estar a desafiar o raciocínio de Casey. Quando este aluno respondeu à primeira pergunta com "eu adicionei-o a 15 para ter 16" a sua explicação não foi convincente. Consequentemente, quando Teri coloca a sua segunda pergunta, "Mas porque é que o adicionaste ao 30 primeiro e depois ao 15?" estava a pedir a Casey para justificar o seu raciocínio.

Determinar se um aluno está a explicar ou a justificar o seu pensamento, exige que consideremos as razões pelas quais o aluno está a apresentar um argumento. Em algumas alturas, o aluno pode explicar uma ideia para clarificar o seu pensamento para outros. Noutras alturas, o aluno apresenta um argumento para validar o seu pensamento ou para justificar a sua actividade. Fazer estas distinções subtis durante o ensino é difícil e, não necessariamente vantajoso. Aqui estabelecemo-las para detalhar os papéis complexos e importantes que tanto a explicação como a justificação desempenham enquanto os alunos desenvolvem argumentações durante as discussões.

Em suma, quando os alunos argumentam matematicamente, não partilham simplesmente as suas respostas; em vez disso, explicam e justificam as ideias que tiveram enquanto pensavam e resolviam o problema. Explicar e justificar são aspectos importantes do raciocínio sobre ideias matemáticas, isto é, de construir argumentações para a resolução de problemas.

A importância de construir argumentações matemáticas

Um professor pode encorajar os alunos a explicar e a justificar as suas ideias durante as discussões, por muitas razões. Todos os alunos podem beneficiar com estas discussões, incluindo o aluno que está a explicar e os outros que estão a participar na discussão. Quando lhes pede para explicar e justificar o seu pensamento, os alunos podem revisitar as suas ideias matemáticas. Por exemplo, à medida que a aluna explica a sua resposta, pode construir uma argumentação matemática mais forte, ou pode encontrar uma nova forma de olhar o problema. A aluna não só desenvolve uma compreensão mais aprofundada das ideias sobre as quais se está a debruçar, mas também pode construir novas compreensões. Além destes benefícios, os seus colegas têm oportunidades de reflectirem sobre novas ideias. Por exemplo, depois de Casey e Shari terem explicado o método de resolução de Casey, um outro aluno, George, disse que não tinha compreendido o pensamento de Casey. Referiu, "É difícil para mim compreender isto porque ninguém fez um problema como este antes." Porque Casey apresentou uma nova maneira de pensar, George e os outros alunos foram incentivados a reflectir para compreenderem as ideias de Casey. Estas situações são oportunidades de aprendizagem para todos os alunos. Por fim, estas discussões dão a cada aluno a possibilidade de desenvolverem argumentos matemáticos e podem fazer avançar as ideias matemáticas que são partilhadas por todos os participantes (NCTM 2000).

Desenvolvendo a argumentação durante o ensino da Matemática

O documento *Principles and Standards for School Mathematics* refere:

> Se os alunos têm de aprender a formular conjecturas, a experimentar diversas abordagens de resolução de problemas, a construir argumentações matemáticas e a responder a argumentações de outros, então é essencial criar um ambiente que fomente este tipo de actividades. (NCTM 2000, p. 18)

Como esta citação sugere, fomentar um ambiente em que os alunos explicam e justificam as suas ideias é importante, mas como criar ambientes que promovem a argumentação matemática? Para responder a esta pergunta, precisamos de compreender o papel dos professores e alunos nas salas de aula em que a explicação e a justificação são aspectos importantes no ensino da Matemática.

O documento *Principles and Standards for School Mathematics* sugere que quando os professores encorajam os alunos a apresentar as suas ideias de forma a que outros as possam avaliar, proporcionam oportunidades para que desenvolvam argumentações matemáticas (NCTM 2000). Ajudar os alunos a compreender como e quando argumentar matematicamente é uma parte importante deste processo. Na verdade, a professora Jones e os seus alunos estabeleceram, em conjunto, normas para a explicação e justificação de ideias matemáticas. Com o tempo, os alunos aprendem a ouvir-se uns aos outros, a colocarem questões quando não entendem a contribuição de um colega e a explicarem e justificarem as ideias uns dos outros. O papel do professor é ajudá-los a compreenderem as suas responsabilidades durante as discussões.

O professor não só facilita discussões em que os alunos falam acerca das suas ideias matemáticas, mas também, quando necessário, inicia discussões em que a turma "fala sobre falar sobre a matemática" (Cobb, Wood e Yackel, 1993). Neste tipo de comunicação matemática, o professor e os alunos podem discutir, por exemplo, como e quando os alunos podem explicar as suas ideias. Por um lado, ambos os tipos de discussão são essenciais para ajudar os alunos a aprender a comunicar as suas ideias e, por outro, a ouvir e a valorizar as ideias dos seus colegas. Ao desenvolverem estas capacidades, o professor e os alunos estabelecem e "mantêm um ambiente que respeita, fortalece e encoraja os alunos" a construir sentido para a Matemática (NCTM 2000, p. 122).

Figura 1 O raciocínio independente de cada aluno contribui para as discussões com toda a turma.

Raciocinar por si próprio ⟶ Estabelecer significados partilhados

Figura 2 Formas partilhadas de comunicar e de raciocinar contribuem para o raciocínio individual de cada aluno.

Raciocinar por si próprio ⟵ Estabelecer significados partilhados

Figura 3 A relação entre o raciocínio individual e o raciocínio colectivo é dinâmica.

Raciocinar por si próprio ⟷ Estabelecer significados partilhados

Os professores podem usar diversas estratégias para ajudar os alunos a explicarem as suas ideias. Para ilustrar algumas destas estratégias, regressamos ao diálogo entre a professora Jones e os seus alunos, enquanto discutem o método de resolução de Casey. É de recordar que depois de Casey e Shari falarem sobre o método de resolução deste aluno, a discussão continuou pois a Professora Jones encorajou outros alunos a pensarem sobre a abordagem de Casey. No nosso exemplo, a professora encorajou os seus alunos a levantarem questões e a fazerem comentários. Depois da primeira questão de Teri "Porque é que o juntaste [o 1] ao 30 e o puseste no 16?" a professora fez uma pergunta importante: "Faz sentido, Teri?" Ao formular esta pergunta a professora permitiu a Teri continuar a discutir as ideias de Casey com ele. Por outras palavras, incentivou Teri a colocar mais uma questão a Casey. Ao mesmo tempo, a professora Jones ajudou Casey a ter em conta a pergunta de Teri e sugeriu como poderia o aluno aprofundar a sua explicação sobre o porquê de ter adicionado 1 ao 15. Desta forma, a professora facilitou uma discussão em que os alunos tiveram oportunidades tanto de explicar as suas ideias como de responder a questões dos colegas. Estes também contribuíram para a discussão ao colocarem perguntas de esclarecimento, ao apresentarem desafios ou ao explicarem e justificarem as ideias de outros.

A importância do papel da professora Jones durante estas discussões não pode ser exagerada. Focou-se em diversos aspectos do raciocínio dos alunos e continuou as conversações com diferentes alunos de formas diferentes (NCTM 2000, p. 125). Em particular, reconheceu pontos que os alunos não perceberam e tornou as suas questões e comentários o centro da discussão. Também permitiu que os alunos colocassem perguntas no seguimento de intervenções de colegas e deu a estes alunos a oportunidade de responderem. Incentivou os alunos a continuarem a raciocinar, à medida que discutiam as ideias uns dos outros. Além disso, ao encorajá-los a partilharem as suas ideias, comunicou aos seus alunos que as suas ideias são importantes. Os alunos contribuíram explicando as suas ideias; por isso, também eles ajudaram a conversação a progredir. Neste sentido, a professora Jones e os seus alunos estabeleceram conjuntamente como e quando comunicar ideias (Yackel e Cobb 1996; Hiebert et al. 1996).

Envolvimento na argumentação matemática: algumas reflexões finais

Uma questão mais geral é a relação entre o raciocínio em que os alunos se envolvem enquanto trabalham individualmente e o raciocínio que acontece durante as discussões na turma. As crianças devem ter oportunidades para raciocinar individualmente sobre problemas, isto é, para se convencerem a eles próprios enquanto resolvem problemas. Devem ter tempo para desenvolver argumentações em que explicam e justificam os seus métodos de resolução. À medida que resolvem problemas, podem fazer perguntas a si próprios, tais como "Porque é que eu posso usar esta abordagem e não outra? Que informação posso usar para me ajudar a resolver este problema? Posso resolver o problema de mais de uma maneira? Há abordagens 'mais fáceis' ou mais eficientes?" Permitir que os alunos raciocinem individualmente, ajuda-os a compreender como partilhar, explicar e justificar as suas ideias durante as discussões na turma. À medida que contribuem para estas discussões, contribuem em parte para fazer avançar as ideias matemáticas que são conjuntamente partilhadas por todos os participantes. Esta relação é ilustrada na figura 1. A seta mostra como é que o pensamento e o raciocínio individual de cada aluno contribui, em parte, para ajudar todos os alunos a desenvolverem formas partilhadas de comunicar e de raciocinar matematicamente.

Além disso, à medida, que os alunos acordam formas de comunicar e de raciocinar matematicamente durante discussões com toda a turma, também motivam os seus colegas a considerar as suas ideias, isto é, a convencerem-se a si próprios relativamente a ideias de outros. Quando tal acontece, podem começar a usar estas ideias quando trabalham individualmente. Assim, enquanto os alunos desenvolvem formas partilhadas para raciocinar como uma turma, também se auto-ajudam a raciocinar autonomamente sobre novas ideias. Esta relação é ilustrada na figura 2 pela seta invertida.

Claro que estas relações são dinâmicas; acontecem simultaneamente durante o ensino. Esta relação dinâmica é ilustrada pelas setas que apontam em ambos os sentidos (ver figura 3). Regressando à discussão anterior sobre a importância de raciocinar ou de se convencer a si próprio, e de desenvolver significados partilhados, a seta representa as oportunidades de aprendizagem que podem ocorrer durante este processo. A relação entre o raciocinar individualmente e estabelecer significados partilhados com os outros é verdadeiramente essencial.

Observações finais

Ajudar os alunos a explicarem e a justificarem as suas ideias, isto é, a argumentarem sobre os seus métodos de resolução, pode tornar o trabalho do professor, por vezes, estimulante e exigente. Em algumas situações, os alunos podem não saber apresentar argumentos matemáticos aos colegas. Por exemplo, os alunos nem sempre sabem que palavras usar, especialmente se as suas ideias são novas ou não estão completamente desenvolvidas. Além disso, podem não saber como lidar com desafios, nem como colocar perguntas que requerem um esclarecimento. O professor deve monitorizar continuamente a discussão, enquanto dá aos alunos oportunidades para desenvolverem formas de raciocinarem uns com os outros.

Os alunos colhem muitos benefícios de raciocinar matematicamente. Frequentemente desenvolvem ou melhoraram as suas ideias, enquanto explicam e justificam o seu pensamento. De uma forma mais geral, ao permitirem que os alunos expliquem e justifiquem as suas ideias, os professores ajudam-nos a desenvolver predisposições para a matemática. Os alunos começam a ver a actividade matemática não só como a obtenção de respostas correctas ou a utilização e descrição de procedimentos rotineiros, mas também como a exploração de ideias matemáticas. Com o apelo para delinear novas abordagens educativas que apoiem a construção de sentido matemático pelos alunos, ajudá-los a verem-se a si próprios e a outros como pensadores matemáticos, parece ser um importante ponto de partida.

Notas

1 Por nos parecer que é mais simples compreender o raciocínio da criança a partir das suas palavras, apresentamos o texto original correspondente a "Se pegarmos neste 1 e o adicionarmos ao 30 para fazer 31, é o mesmo que quando fazemos menos, só que temos um número maior em 1": *"If you take that 1 and add it onto the 30 to make 31, it's just when you minus you just have 1 higher number"*.

2 A palavra *proof* foi traduzida por prova.

Referências

Cobb, Paul, Terry Wood, and Erna Yackel. "Discourse, Mathematical Thinking, and Classroom Practice." In *Contexts for Learning: Sociocultural Dynamics in Children's Development*, edited by Ellice A. Forman, Norris Minick, and C. Addison Stone, pp. 99–119. New York: Oxford University Press, 1993.

Hiebert, James, Thomas P. Carpenter, Elizabeth Fennema, Karen Fuson, Piet Human, Hanlie Murray, Alwyn Olivier, and Diana Wearne. "Problem Solving as a Basis for Reform in Curriculum and Instruction: The Case of Mathematics." *Educational Researcher* 25 (May 1996): 12–21.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000.

Yackel, Erna, and Paul Cobb. "Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics." *Journal for Research in Mathematics Education* 27 (1996): 458–77.

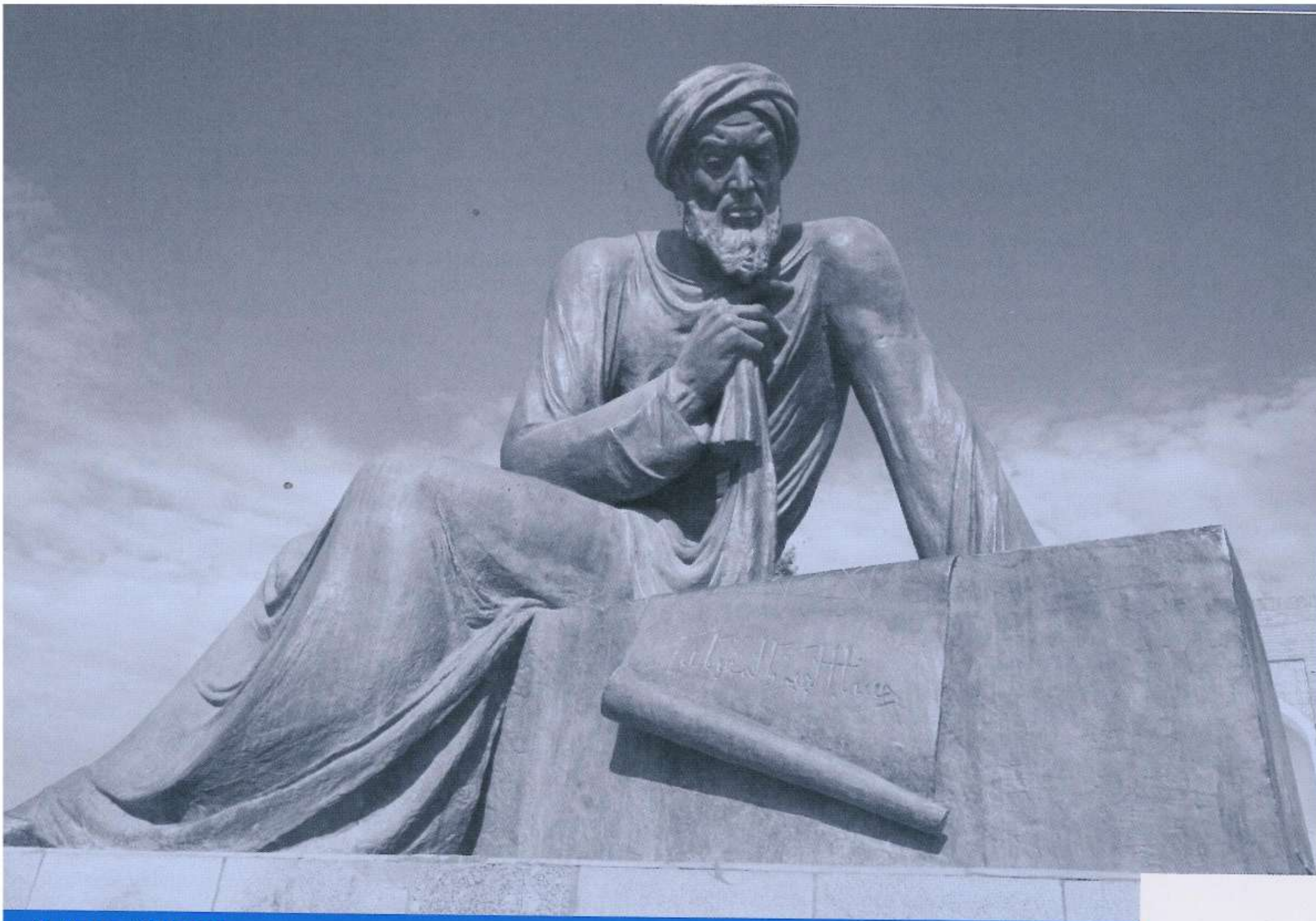
Tradução: Rita Zurrapa
Revisão: Ana Luísa Paiva

Raciocinar em... Desporto

Para que lado pontapear a bola?

Um guarda-redes num *penalty* opera com probabilidades e, tanto quanto possível, condiciona as opções do marcador da penalidade, o que aumenta a probabilidade de antecipar correctamente o lado para que a bola é pontapeada. Do outro lado passa-se exactamente o mesmo, mas em sentido contrário. Este jogo fascinante passa-se em pouquíssimos segundos e a probabilidade de a bola ser colocada num ponto é o resultado de decisões de sentido contrário, que antecipam outras decisões impossíveis de prever. No desporto moderno, sobretudo no que envolve competição entre jogadores, raciocinar é tomar decisões, em processos dinâmicos de alta complexidade, severamente constrangido pelo tempo. Por isso nos é tão fácil tomar decisões enquanto espectadores, sobretudo depois do acontecimento.

João Barreiros **[Professor]**
Faculdade de Motricidade Humana, UTL



Al-Khwarizmi (780—850)

O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos

João Pedro da Ponte   Neusa Branco   Ana Matos

Raciocinar envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento. Em Álgebra, isso faz-se em grande medida usando símbolos, nomeadamente sinais e letras do nosso e de outros alfabetos, já que a sua utilização é central neste campo da Matemática. Os símbolos permitem expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada e são muito úteis para a resolução de problemas. No entanto, os símbolos podem ter significados diversos, conforme o contexto em que são usados, e uma boa parte das dificuldades dos alunos está precisamente nesta interpretação. Neste artigo referimos alguns problemas que podem ocorrer na aprendizagem deste tema devido à utilização dos símbolos, em especial nas expressões algébricas que intervêm no trabalho com equações e funções. Na nossa perspectiva, o raciocínio em Álgebra requer a compreensão da linguagem algébrica, sendo por isso de grande importância compreender a natureza e origem das dificuldades dos alunos. Assim, analisamos os erros e as dificuldades mais comuns dos alunos no trabalho com expressões algébricas e na resolução de equações do primeiro grau. Terminamos com diversas sugestões para situar o trabalho em Álgebra, não apenas na manipulação simbólica, mas, de um modo mais geral, no desenvolvimento do pensamento algébrico.

O simbolismo e o pensamento algébrico

A Álgebra surge na Antiguidade com a resolução de problemas, nomeadamente de Aritmética e Geometria. Inicialmente, esses problemas eram expressos em linguagem natural, mas com o contributo de matemáticos como Diofanto, começaram a usar-se pequenas abreviações. No século XVI, com François Viète, deu-se uma transformação fundamental — a construção de uma Álgebra simbólica. Não podemos minimizar a importância dos símbolos que é reconhecida. Por exemplo, pelo matemático americano Keith Devlin quando defende que "sem os símbolos algébricos, uma grande parte da Matemática simplesmente não existiria".

A linguagem algébrica cria a possibilidade de distanciamento em relação aos elementos semânticos que os símbolos representam. Deste modo, a simbologia algébrica e a respectiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas. No entanto, esta grande potencialidade do simbolismo é também a sua grande fraqueza. Esta vida própria tem tendência a desligar-se dos referentes concretos iniciais e corre o sério risco de perder todo o sentido. É o que acontece quando se utiliza simbologia de modo abstracto, sem referentes significativos, transformando a Matemática num jogo de manipulação, pautado pela prática repetitiva de exercícios envolvendo expressões algébricas, ou quando se evidenciam apenas as propriedades das estruturas algébricas, nos mais diversos domínios, como sucedeu no movimento da Matemática moderna.

Este movimento foi fortemente criticado por Hans Freudenthal, fundador da corrente da Educação Matemática Realista. Na sua perspectiva, na escola, os símbolos literais devem ter algum significado, pelo menos numa fase inicial, por analogia ao que sucedeu no desenvolvimento histórico da Álgebra. Além disso, Freudenthal interpreta a linguagem algébrica como um sistema regido por um vasto conjunto de regras sintácticas que permitem desenvolver alguma acção. Compara a linguagem corrente com a linguagem algébrica e sublinha a complexidade desta e a quantidade de interpretações incorrectas que podem surgir na sua aprendizagem. Com esta ênfase na linguagem algébrica e nos símbolos, numa fase inicial associados a referentes, continua a dar uma importância primordial ao simbolismo e à progressiva formalização, mas representa uma outra concepção da Álgebra.

Mais recentemente, principalmente desde a década de 80 do século passado, têm sido discutidas diferentes visões da Álgebra. Muitas dessas discussões procuram delimitar o que deve ser incluído, ou não, neste campo e, em particular, na Álgebra que se ensina nas escolas básicas e secundárias. Nessas discussões emergiu igualmente o interesse pela caracterização do pensamento algébrico. Um dos autores que mais escreveu sobre esta ideia foi o americano James Kaput. Para ele, o pensamento algébrico manifesta-se quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade. Kaput identifica cinco facetas do pensamento algébrico, estreitamente relacionadas entre si: (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintacticamente; (iii) o estudo de estruturas abstractas; (iv) o estudo de funções, relações e de variação conjunta; e (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos.

Esta perspectiva sobre a Álgebra e o pensamento algébrico reforça a ideia de que este tema não se reduz ao trabalho com o simbolismo formal. Pelo contrário, aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações. Resumir a actividade algébrica à manipulação simbólica, repetitiva e rotineira, equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas um dos cinco aspectos mencionados.

Diferentes interpretações para os símbolos

Já nos anos 70, num estudo feito no Reino Unido, Dietmar Küchemann indicava diversas acepções para as letras usadas em Álgebra. Para além de várias noções rudimentares (letra avaliada, letra não considerada e letra como objecto) apontava três acepções fundamentais usadas correntemente em Matemática:

1. *Letra como incógnita*, representando um número específico mas desconhecido, com o qual é possível operar directamente. Esta interpretação está intimamente relacionada com a resolução de equações como $x + 3 = 6$, por exemplo.
2. *Letra como número generalizado*, situação em que o aluno a vê como representante de vários números ou, pelo menos, como podendo ser substituída por mais do que um valor.
3. *Letra como variável*, caso em que esta é vista como representante de um conjunto de valores e pode ser usada para descrever relações entre dois conjuntos de valores.

É de notar que muitas das expressões algébricas e equações usadas frequentemente nas aulas de Matemática variam na sua natureza e podem e ser interpretadas de modos distintos. Zalman Usiskin (1988), um outro autor norte-americano, apresenta como exemplo as equações seguintes:

$$A = LW;$$
$$40 = 5x;$$
$$\sin(x) = \cos(x) \cdot \text{tg}(x);$$
$$1 = n\frac{1}{n};$$
$$y = kx.$$

Segundo Usiskin (1988), a primeira expressão apresentada, $A = LW$, é uma fórmula, na qual as letras A, L e W representam três quantidades — área, comprimento e largura

— que são entendidas como se fossem números conhecidos. Na equação $40 = 5x$, a letra x é usualmente vista como incógnita, ou seja, como representante de um certo número desconhecido. A expressão $\sin(x) = \cos(x) \cdot \mathrm{tg}(x)$ é uma identidade, sendo a letra x vista como o argumento de uma função. A expressão $n = n \cdot (1/n)$ representa a propriedade da existência de inverso e pode surgir da generalização de uma regularidade, em que n é uma das suas instâncias. Por último, $y = kx$ pode ser interpretada como a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade directa em que as três letras utilizadas assumem papéis distintos: x é o argumento da função (variável independente), y é o valor que a função toma para cada argumento (variável dependente) e k pode ser visto como a constante de proporcionalidade directa ou como um parâmetro, se considerarmos a família de funções respectiva. Por outro lado, esta expressão pode ainda ser encarada como a equação reduzida das rectas não verticais que contêm a origem do referencial e têm declive k. Podemos discordar destas interpretações num ou noutro ponto, mas os exemplos apresentados mostram que a utilização das letras é multifacetada, envolvendo uma diversidade de significados, de acordo com as situações em causa.

Dificuldades na compreensão de expressões algébricas e equações do 1.º grau

Muitas das dificuldades dos alunos na resolução de equações surgem devido aos erros que estes cometem no trabalho com expressões algébricas, por não compreenderem o significado destas expressões ou as condições da sua equivalência. Boa parte destas dificuldades tem a ver com o facto de os alunos continuarem a usar em Álgebra os conceitos e convenções aprendidos anteriormente em Aritmética. Verificam-se, também, dificuldades de natureza pré-algébrica, tais como a separação de um número do sinal "menos" que o precede. Vejamos algumas das dificuldades mais comuns.

1. *Adição incorrecta de termos semelhantes*. Diversos estudos têm identificado dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de equações do 1.º grau. Carolyn Kieran, do Canadá, é uma autora que se tem destacado neste campo. Uma das situações que identifica refere-se ao facto de muitos alunos adicionarem incorrectamente os coeficientes de dois termos, afirmando, por exemplo, que $-2x + 5x = 8$ é equivalente a $-7x = 8$.

Sara (7.º ano)[1], não revela qualquer dificuldade em interpretar a notação algébrica e em seguir procedimentos correctos para iniciar a resolução da equação

$$3(x-7)+10=2x-3.$$

Esta aluna usa correctamente a propriedade distributiva, mas depois não adiciona correctamente os termos semelhantes no primeiro membro ($-21 + 10 = -11$ e ela faz -31). Demonstra, aqui, uma dificuldade na execução das operações com números inteiros relativos (ver figura 1).

$$3 \times x - 3 \times 7 + 10 = 2x - 3$$
$$(\Leftrightarrow) 3x - 21 + 10 = 2x - 3$$
$$(\Leftrightarrow) 3x - 31 = 2x - 3$$
$$(\Leftrightarrow) 3x - 2x = +31 - 3$$
$$(\Leftrightarrow) x = 31 - 3$$
$$(\Leftrightarrow) x = 28$$

Figura 1.

2. *Adição incorrecta de termos não semelhantes e interpretação incorrecta do sinal "="*. Perante a equação $2x + 3 = 4x - 1$, Afonso (8.º ano) exprime a sua surpresa pelo facto de $4x$ ser um termo do segundo membro da equação, quando esperava que a soma de $2x$ com 3 tivesse dado origem a $5x$:

Afonso — Aqui, como é que é isto? $4x$...? Se tem $2x + 3$, vai dar igual...

Professora — Não pode dar ali $4x$?

Afonso — Não, é a maneira... Não percebo como vai dar.

Professora — O que é que tu esperavas que desse? Explica lá.

Afonso — Não, porque... Não sei... Também o 3 o que é que podia estar aqui a fazer, se está aqui o $4x$? Mas se isto é a somar e depois vai dar igual a $4x$ menos 1 ... (...) Se eu somasse ficaria $5x$, não é, stora?

O aluno considera o binómio $2x + 3$ como uma expressão que não está terminada e que pode, ainda, ser alvo de simplificação. Deste modo, não interpreta o sinal "=" como exprimindo uma relação de equivalência. Além disso, influenciado pela sua experiência anterior em Aritmética, encara o sinal "+" como um indicador da necessidade de proceder a uma adição e obter um resultado, que deve surgir à direita do "=". Esta interpretação da expressão algébrica do primeiro membro e dos sinais "+" e "=" impede-o de conseguir resolver a equação de forma correcta. A interpretação do sinal "+" como indicador de uma adição algébrica e a compreensão do sinal "=" como indicador de uma relação de equivalência são aspectos necessários à compreensão da Álgebra, que não surgem nos alunos de forma imediata.

3. *Interpretação incorrecta de monómios do 1.º grau*. Teresa (7.º ano) mostra dificuldades na compreensão de monómios do tipo ax, com a diferente de zero. Na equação $2x + 3 = 15$, entende a letra x como representante do algarismo das unidades de um número com duas dezenas. Deste modo, argumenta que esta equação é impossível, uma vez que ao adicionar 3 a esse número não pode obter 15:

Professora — O que tu entendes por isso que aí está?

$5+\overset{13}{x}=18$

$2x+3=15$

É impossível dar 15.

Figura 2.

d) $-3-x=0$

$\cancel{-x=0+3}$

$\frac{-x}{-1}=\frac{3}{-1}$

Figura 3.

Teresa — Acho que não dá porque está aqui um 2, temos que acrescentar mais qualquer coisa, mais 3 não pode dar 15.

Professora — Portanto, o que tu entendes é que está um 2...

Teresa — Sim, e está o x, por isso significa, que tem de ser 20 e qualquer coisa mais os 3, é impossível dar 15 (ver figura 2).

4. *Separação entre parte literal e a parte numérica numa expressão algébrica.* Sara (7.° ano) mostra dificuldade em simplificar a expressão algébrica $P = A + (A + 3) + (A \times 2)$ por considerar que deve separar totalmente a parte literal e a parte numérica dessa expressão:

Sara — Se calhar posso somar os 3 mais 3 vezes 2.

Professora — Como é que tu já chegaste a esse resultado?

Sara — Somei os A's porque são figuras.

Professora — Sim. E depois?

Sara — E depois é só os números.

Professora — Ah... E porque é que colocaste 3 vezes 2? Porque é que é 3 vezes 2?

Sara — Porque é os 3 centímetros, mais o dobro do primeiro lado.

Professora — Continuo sem perceber porque é que juntaste os 3 centímetros com o dobro do primeiro lado.

Sara — Porque são os dois números.

Professora — Então, juntas sempre os números com os números?

Sara — Sim, os números com números e as letras com letras.

A aluna adiciona a parte literal, considerando que todos os monómios do primeiro grau têm coeficiente 1, obtendo $3A$ e, em seguida, multiplica 3 por 2:

$3A + 3 \times 2$

5. *Resolução incorrecta de uma equação do tipo $ax=b$.* A resolução deste tipo de equações levanta grandes dificuldades para muitos alunos para certos valores de a e b. Isso é descrito num estudo da investigadora belga Joëlle Vlassis, desenvolvido com alunos entre os 13 e os 14 anos que já antes tinham começado a estudar Álgebra. Este estudo descreve a dificuldade sentida por alguns alunos na resolução de equações como, por considerarem que após o sinal "–" deve estar um número positivo. Pensando deste modo não compreendem como pode $-x$ ser igual a 4.

A determinação da solução de uma equação deste tipo constitui também uma dificuldade para muitos alunos portugueses. Na resolução da equação $-x = 3$, Juliana (7.° ano) divide ambos os membros por -1, mas indica que a solução da equação é 3 em vez de -3 (ver figura 3).

Noutros casos, os alunos resolvem este tipo de equações de forma correcta, embora não sejam capazes de explicar os procedimentos que efectuam. É o que acontece com Afonso (8.° ano), quando procura explicar como resolveu a equação $-2x = -4$:

Afonso — E depois aqui é x igual a... -4 sobre -2.

Professora — Porquê?

Afonso — Então, temos aqui um número. Fica $x = -4$ e depois passa o -2 cá para baixo.

Professora — Cá para baixo?? É que eu não estou a perceber ... Mas porquê?

Afonso — Porque eu acho que é assim.

Os erros e dificuldades mais comuns no trabalho com expressões algébricas e equações encontram-se sistematizados no Quadro 1. Note-se, porém, que alguns alunos não chegam propriamente a cometer erros. A sua dificuldade é de tal ordem que nem sequer percebem muito bem o que representa uma equação e muito menos o que está envolvido na respectiva resolução. A lista indicada não pretende ser exaustiva mas apenas indicativa. Importa, sobretudo, que o professor esteja alerta para a possibilidade da ocorrência destas e de outras dificuldades dos alunos, tendo em conta que elas podem estar relacionadas com as experiências vividas nas suas aulas.

Quadro 1 — Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau

Erro/Dificuldade	Exemplo	Autor
Adição de termos que não são semelhantes e Interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma acção	$3 + 4n = 7n$ $2a + 5b = 7ab$	Booth, 1984, 1988 Kieran, 1981, 1992 Küchemann, 1981 MacGregor e Stacey, 1997
Interpretação incorrecta de monómios do 1.º grau	Interpretação de $4y$ como: — quatro "y's"; — um número com quatro dezenas e um número desconhecido de unidades; — $4 + y$ por analogia com $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$.	Booth, 1984
Uso de parêntesis	$3(x + 2) = 7x \Leftrightarrow 3x + 2 = 7x$	Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernadez, 1996
Não saber como começar a resolver uma equação		Kieran, 1985
Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorrecta de termos semelhantes	$-2x + 5x = 8 \Leftrightarrow -7x = 8$	Kieran, 2006
Adição incorrecta de termos não semelhantes	$2x + 5 = x + 8 \Leftrightarrow 7x = 9$	Kieran, 1985
Transposição incorrecta de termos	$16x - 215 = 265 \Leftrightarrow 16x = 265 - 215$ $30 = x + 7 \Leftrightarrow 30 + 7 = x$ $3x + 5 = 2x \Leftrightarrow 3x = 2x + 5$ $7x = x + 8 \Leftrightarrow 7 - 8 = x + x$	Kieran, 1985, 1992
Redistribuição (*Redistribution*)	$-2x + 5 = 8 \Leftrightarrow -2x + 5 - 5 = 8 + 5$	Kieran, 1992
Eliminação	$3x - 3 = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 2x - 4$	Kieran, 1992
Conclusão incorrecta da resolução da equação	$6x = 24 \Leftrightarrow 6 + x = 24$ $11x = 9x = \frac{11}{9}$ $2x = 4 \Leftrightarrow$ i) $x = 4 - 2$; ii) $x = \frac{4}{-2}$; iii) $x = \frac{2}{4}$;	Kieran, 1985, 1992 Lima e Tall, 2008 Vlassis, 2001
	$-x = -17 \Leftrightarrow ??$ $-x = 4 \Leftrightarrow ??$	

3. A Ana e o Miguel são irmãos e decidiram contar o dinheiro que cada um tem no seu mealheiro. O Miguel tem mais 5 euros que a Ana. Se a Ana tiver x euros o que podes dizer acerca do dinheiro que tem o Miguel? O Miguel tem 5€ a mais que a Ana.

Figura 4.

$2 \times 2 + 3 = 4 \times 2 - 1$
$(=)\ 4 + 3 = 8 - 1$
$(=)\ 7 = 7$

$2 \times (-2) + 3 = 4 \times (-2) - 1$
$(=)\ -4 + 3 = -8 - 1$
$(=)\ -1 = -9$

Figura 5.

Origem das dificuldades

Estudos realizados nos anos 80 sugerem que o modo como as crianças pensam em Álgebra está estreitamente relacionado com o seu desenvolvimento cognitivo, estabelecendo um paralelismo entre o seu desempenho e o estádio de Piaget em que se encontram. A ideia de que as dificuldades dos alunos em Álgebra têm a sua principal origem no atraso do seu desenvolvimento cognitivo implica que qualquer acção do professor para as minorar será necessariamente infrutífera. No entanto, as autoras australianas Mollie MacGregor e Kaye Stacey argumentam que esta interpretação não explica o facto de alunos num mesmo estádio de desenvolvimento lidarem por vezes com a simbologia algébrica de formas muito díspares. Defendem, por isso, que as diferentes interpretações dos alunos podem ter outra origem, salientando os seguintes pontos:

1) *Uso de pressupostos intuitivos e raciocínio pragmático sobre um sistema de notações não familiar.* No início do estudo da Álgebra os alunos, não familiarizados com a linguagem que a caracteriza, podem recorrer a estratégias que lhes permitam responder a determinadas questões, do modo que lhes parece mais adequado. É o que sucede com Raquel (7.° ano), que escreve algo relacionado com os restantes dados do problema, ignorando a letra que é usada no enunciado para representar o número de euros que a Ana tem (figura 4).

Relativamente à mesma situação, Teresa (7.° ano) opta por atribuir um valor específico à letra, por si escolhido: "Então, aqui por exemplo, se a Ana tiver vinte euros, o Miguel tem vinte e cinco, porque o Miguel tem mais cinco euros que a Ana".

2) *Estabelecimento de analogias com sistemas simbólicos usados no quotidiano, noutras áreas da Matemática ou noutras disciplinas.* Alguns alunos, por exemplo, atribuem valores às letras de acordo com a ordem em que estas surgem no alfabeto: $a = 1, b = 2$, e assim sucessivamente.

3) *Interferência de outras aprendizagens em Matemática.* Alguns alunos consideram que, em qualquer monómio com coeficiente igual a um, a letra envolvida representa o valor 1. A interferência de outras aprendizagens é também notória em Maria (8.° ano). Depois de resolver correctamente uma equação do 1.° grau, obtendo o valor 2, procura verificar, desnecessariamente, se -2 também é solução, tal como sucede em alguns tipos de equações do 2.° grau que já estudou (figura 5).

Maria — Acho que não há outra hipótese, sem ser o 2.

Professora — Quer dizer, se houvesse outra hipótese, para ti era o −2, era?

Maria — Hum, hum.

Professora — E porquê?

Maria — Não sei, lembrei-me daquilo... Da solução, que às vezes dá −2 e 2.

4) *Influência de materiais e estratégias de ensino pouco adaptados.* Por exemplo, os alunos podem manifestar dificuldades na interpretação das letras utilizadas, nomeadamente, quando estas são usadas como abreviações de palavras ou como designações de objectos. Este erro pode ser induzido pelo modo como as tarefas são construídas e como o próprio professor gere as discussões na aula. Lesley Booth sublinha que é importante que o professor compreenda as dificuldades dos alunos e a sua origem, uma vez que esta compreensão lhe permite propor tarefas capazes de promover aprendizagens mais significativas e minorar as dificuldades dos alunos.

A concluir

Alan Schoenfeld e Abraham Arcavi criticam o facto dos programas de Matemática encararem a utilização de variáveis como algo que, após alguma prática, os alunos compreendem de modo uniforme e sem qualquer ambiguidade. Com base num pequeno estudo realizado com matemáticos, educadores matemáticos, cientistas, linguistas e lógicos, ilustram a diversidade de formas como a notação matemática pode ser entendida. Estes autores argumentam que, no cenário escolar, a construção do conceito de variável é um processo complexo que merece atenção particular, considerando-o mesmo como um tópico central no ensino-aprendizagem da Matemática. A utilização, com significado, da noção de variável facilita a transição entre a Aritmética e a Álgebra e propicia a construção de novos conceitos matemáticos de carácter mais avançado, noutros anos de escolaridade.

No que diz respeito aos significados dos símbolos, parece aconselhável introduzir desde cedo as suas diversas utilizações, nomeadamente como incógnita, número generalizado e variável. Essa é a perspectiva, por exemplo, dos *Prin-*

cípios e Normas do NCTM, onde se defende, de um modo abrangente, que os alunos devem compreender os diversos significados e usos das letras, através da representação de quantidades, nomeadamente na resolução de situações problemáticas. Também o novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* indica que a aprendizagem da linguagem algébrica se deve iniciar no 2.° ciclo. Para o 3.° ciclo, este programa defende que:

> A aprendizagem das operações com monómios e polinómios, e [d]a simplificação de expressões algébricas, deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida, por exemplo, efectuando cálculos a partir de expressões algébricas substituindo as letras por valores numéricos. É conveniente usar expressões algébricas para representar problemas, usando letras para designar incógnitas ou variáveis, e introduzir expressões com variáveis ligadas a um contexto. O conceito de variável, pela sua complexidade, justifica que os alunos explorem situações variadas em que surjam letras (nomeadamente, em equações e fórmulas) e discutam os seus significados (p. 55).

O facto de se considerar uma fronteira mais alargada para a Álgebra do que a estabelecida tradicionalmente não significa que se menospreze o cálculo algébrico e o papel do simbolismo. Note-se, contudo, o avanço tecnológico e a emergência de *software* de manipulação simbólica levam a questionar a necessidade de se insistir demasiado em procedimentos morosos e desprovidos de significado.

Indo para além da simples manipulação de símbolos e expressões algébricas, Arcavi defende que se deve procurar o desenvolvimento do que designa por "sentido do símbolo" (*symbol sense*). Na sua perspectiva, isso inclui a capacidade de manipular e interpretar expressões algébricas e a consciência de que os símbolos podem desempenhar papéis distintos consoante os contextos, intuindo a existência dessas diferenças. Assim, o aluno deve criar uma sensibilidade e intuição que lhe permita interpretar aspectos implícitos nos símbolos e antecipar o que pode decorrer das acções que desencadeia sobre eles. Este autor sustenta que isso está ao alcance de todos os alunos, mesmo daqueles que usualmente sentem maiores dificuldades na disciplina de Matemática.

Na nossa perspectiva, continuando a valorizar o simbolismo, mas promovendo a sua apropriação em contextos de trabalho significativos, quer de cunho matemático (estudo de relações e regularidades), quer relativo a situações extra-matemáticas (modelação e variação), a aprendizagem da Álgebra deve visar a compreensão dos seus conceitos fundamentais. Para isso deve dar-se atenção ao desenvolvimento do pensamento algébrico, nas suas diversas vertentes, permitindo aos alunos a elaboração de raciocínios cada vez mais abstractos e complexos.

Nota

1 Os exemplos que apresentamos referem-se a alunos portugueses que participaram em estudos realizados por Ana Matos e Neusa Branco. Desses alunos, Teresa e Raquel (ambas do 7.° ano), não tinham estudado anteriormente qualquer tópico de Álgebra. Em contrapartida, Sara e Juliana (também do 7.° ano) e Afonso e Maria (ambos do 8.° ano) já tinham iniciado anteriormente o estudo da linguagem algébrica.

Bibliografia

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24–35.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29–48). Lisboa: SEM–SPCE.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor: Nfer-Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K–12* (pp. 20–32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, disponível em `http://ia.fc.ul.pt`].

Devlin, K. (2002). Matemática: *A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317–326.

Kieran, C. (1985). The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students. In L. Streefland et al. (Eds.), *Proceedings of the 9th PME International Conference* (vol. 1, pp. 141–146). Noordwijkerhout, Holanda.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York, NY: Macmillan.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *ICME 8: Selected lectures* (pp. 271–290). Seville: SAEM Thales.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11–49). Rotterdam/Taipei: Sense.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11–16* (pp. 102–119). London: Murray.

Lima, R., & Tall, D. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 3–18.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(1), 1–19.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano de escolaridade: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, disponível em `http://ia.fc.ul.pt`].

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC. [Disponível em `http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf`].

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, *81*(6), 420–427.

Socas, M., Machado, M., Palarea, M., & Hernandez, J. (1996). *Iniciacion al álgebra*. Madrid: Síntesis.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K–12* (1988 Yearbook, pp. 8–19). Reston, VA: NCTM.

Vlassis, J. (2001). Solving equations with negatives or crossing the formalizing gap. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference* (vol. 4, pp. 375–382) Utreque, Holanda.

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Neusa Branco
Escola Superior de Educação de Santarém

Ana Matos
Escola Secundária da Lourinhã

Raciocinar em... Direito

Pensar em direito, quase sempre significa não fazer raciocínios. O Direito pode ser pensado de várias formas, conforme o objecto ou matéria visados ou o fim a atingir. Na criação de normas jurídicas segue-se o método tópico de matriz escolástica; na interpretação de textos normativos, o método lógico-dedutivo; na formulação de soluções o método indutivo-sintéctico. Como muletas literárias do método seguido no pensamento jurídico, são essenciais a dialéctica, a retórica e a gramática. Como instrumentos de análise jurídica, o rigor na observação da realidade e a competência técnica na escolha das hipóteses experimentadas, são determinantes. O pensamento é, em Direito, uma operação intelectiva, fundada num saber assente na experiência feita por pessoas com reconhecido prestígio social. Pensar o Direito é conseguir criar formas de exercer e efectivar a justiça do caso concreto.

Eduardo Vera-Cruz Pinto **[Professor]**
Faculdade de Direito de Lisboa, UL

História de um ProfMat a duas vozes ...

Joana Latas
Rui Gonçalo Espadeiro

Terminado o período de férias, Setembro é o mês de regresso às escolas e às habituais rotinas de preparação de um novo ano lectivo. Porém, o início de Setembro deste ano arrancou de maneira diferente, abrindo um precedente ao que estávamos acostumados.

Évora, terça-feira, dia 2 de Setembro. Tocou o despertador à hora certa. Vá de levantar que são horas de ir para o Minerva. Espera aí! Hoje não é para ir para o Minerva. Hoje começa o ProfMat em Elvas. Bom, tenho que me despachar na mesma para chegar a Elvas a tempo e horas de assistir à sessão de abertura. Vamos embora ...

Estremoz, terça-feira, dia 2 de Setembro. Óculos, computador, Baú. Acho que está tudo! Vamos ver se consigo chegar a tempo de assistir à sessão de abertura!

Algum tempo depois...

—Gonçalo, que tal?

—Cá estou eu todo animado para mais um encontro. Vamos entrando no Coliseu porque a sessão de abertura deve estar a começar e eu ainda quero rever o pessoal conhecido.

—Está certo. Combinamos aqui à entrada no final da manhã.

(...)

—A conferência terminou bem depois do previsto... Já não temos muito tempo! As sessões práticas começam às 14h15 e ainda temos de ir aprumar os Baús... Também temos de reservar um tempo para os últimos retoques da comunicação sobre Quadros Interactivos que é amanhã de manhã e não vou poder ficar para a Assembleia-geral.

O segundo dia

(...)

—Achei que a discussão das comunicações sobre Quadros Interactivos foi pouco participada, mas a organização fez muito bem em adoptar este formato de simpósio de comunicação. Assim já não corremos o risco de estarem a decorrer 2 comunicações sobre o mesmo tema em simultâneo. Além disso, podem sempre ser cruzados dados dos diferentes contributos na discussão final.

Já reparaste bem na diversidade de temáticas das comunicações? E muitas delas começam a ter um lugar cativo nestes encontros: Matemática para a Vida, Novas Oportunidades, Educação e Formação adultos, Matemática e Sociedade... ainda bem que assim é. Quanto mais debatidas forem estas questões, mais facilmente conseguiremos dar resposta à multiplicidade de papéis que actualmente se exige do professor de Matemática.

—É verdade. Também gostei muito da forma como as comunicações estavam organizadas: o formato simpósio de comunicação. Já tinha experimentado este formato noutros encontros (SIEM e EIEM) e achei que se ajusta bem ao ProfMat. Tem a vantagem de as comunicações estarem agrupadas por áreas de interesse, enriquecendo a discussão e o debate em torno dessas temáticas.

O Cine-teatro ontem à tarde é que também esteve pouco participado.... Para não variar, estavam poucos sócios. Por vezes, acho que nos esquecemos que a Assembleia-geral é o momento, por excelência, em que cada um poderá dar voz à sua opinião, tendo um papel mais interventivo na vida da Associação. De seguida fomos jantar. Aproveitaram o resto da arena do Coliseu e preparam lá o banquete. A sensação de jantar numa arena de uma praça de touros é agradável (sem touros). A única coisa que correu menos bem foi o bacalhau. Estava muito salgado. Mas para compensar a salada estava com pouco sal. De resto foi a animação própria dos jantares do ProfMat.

—Hoje temos de ir mais cedo para mais uma sessão de Baús da Matemática... Será que ainda temos tempo de dar uma vista de olhos pela parte histórica da cidade? Gostava de ver as montras das lojas amigas da Matemática. Ouvi dizer que estavam muito interessantes. Por acaso foi uma óptima maneira de envolver a comunidade no espírito do ProfMat!

—Agrada-me esse programa pelo centro histórico. Aliás, acho que a cidade de Elvas soube muito bem acolher e é de louvar o trabalho realizado pela Comissão Organizadora. Em ano de mudança e com o encontro a realizar-se no início de Setembro é de valorizar o esforço de todas as pessoas envolvidas na organização do encontro. Muitos devem ter sido os colegas que não tiveram férias como deve ser.

(...)

—Na sessão do Baú de 1.° ciclo tivemos menos "fregueses" que ontem.... Só se inscreveram 5 pessoas... Por acaso contava com mais professores do 1.° ciclo, mas já sei que a sessão do secundário esteve bem composta!

Ontem, na sessão de Baús do 3.° ciclo, também se fizeram explorações muito interessantes das tarefas que apresentámos.

Tanta sessão com Baús! Vamos ver se agora os professores aproveitam este projecto do Núcleo de Évora e exploram estes materiais nas salas de aula.

—Os professores aqui na região até podem requisitar os materiais, no caso de não os terem disponíveis na escola! Bem, vou indo. Vemo-nos depois da sessão especial.

(...)

—A sessão da revista foi muito animada e estava a sala cheia. Não sei se tinha a ver com o facto de ser fim de tarde e normalmente haver acepipes nesta sessão, mas o que é cer-

to é que estava repleta de pessoal. E desta vez até não houve nada para trincar.

O tema desta sessão foi a apresentação do livro, recentemente editado, sobre os 20 anos da revista: 20 anos de Temas na *Educação e Matemática*. Logo à chegada fui brindado com a oferta de um exemplar do livro assim como outros 19 assistentes. Foi aí que percebi que momentos antes tinha ajudado a carregar para a sala uma caixa com os livros que iriam servir este propósito.

—Há gente com sorte... Eu comprei-o ainda há pouco, mas só o folheei. Reparei que estava dividido em secções, cada uma escrita por uma pessoa diferente.

—Pois é. Na sessão, cada um dos autores foi convidado a intervir durante 4 a 5 minutos, lançando um desafio dentro da temática que abordou e ao jeito do *Pense nisto*, rubrica muitas vezes presente na *Educação e Matemática*. Foi muito interessante.

—A sessão especial a que assisti foi diferente do que esperava. Duas investigadoras do Instituto Gulbenkian de Ciência apresentaram um projecto. Em linhas gerais, pretendem criar módulos de Biologia, que possam ser utilizados em sala de aula, envolvendo processos matemáticos para serem resolvidos. O projecto está agora em fase embrionária, mas achei importante terem vindo até cá para apresentarem as ideias e discutir, com os professores de Matemática que estão no terreno, a viabilidade de um projecto deste género. Acabou por surgir uma partilha interessante: os conceitos matemáticos que se podem explorar, em que anos, e outras questões mais práticas. Deixaram contacto para quem se quisesse voluntariar para colaborar ou interagir no projecto. Acho que vão ter muitos adeptos!

—O meu estômago já está a dar sinal. O almoço foi bom, mas já lá vão umas horas! Talvez seja melhor procurar um sítio para jantar.

—Estás a brincar comigo. Olha que eu nem sequer lanchei. Temos que encontrar um restaurante bom e depressa. Depois logo se vê se vamos ao concerto do Rui Veloso.

Depois de tantas voltas à procura de um restaurante com uma mesinha livre que fosse para jantar, lá encontrámos um na estrada para Estremoz. Nada mau. Tinha muitas mesas disponíveis e a açorda de marisco estava uma delícia. Quando o jantar terminou já não houve coragem para ir ao concerto.

—Há que regressar a casa. Amanhã esperam-nos um painel e uma conferência que prometem.

Terceiro dia...

—Tinhas razão. Foi uma excelente despedida do Profmat. Será que para próximo ano é novamente no arranque do ano lectivo? Onde vai ser?

—Para o ano será em Viana do Castelo.

Que maravilha, uma semana no Alto Minho. Ainda bem que assim é ... ProfMat ao pé de casa não é bem a mesma coisa.

—Entretanto temos um ano para digerir toda a (in)formação deste encontro!

Nem sempre temos oportunidade de assistir a intervenções com este nível de qualidade. Esta manhã, por exemplo, foi com agrado que partilhei do clima envolvente que se gerou no auditório. Estou plenamente de acordo com a Manuela quando afirma que estamos no momento de "agitar as águas". É bom sabermos que não estamos sozinhos nisto. É

das melhores mensagens que podemos levar daqui. No fundo é o oxigénio necessário para mergulhar no ano lectivo...

—Na conferência do Kilpatrick foi dita uma coisa, que me deixou a pensar, sobre o papel de cada um de nós na mudança. Já ontem a Paula Canavarro, no final da sessão da revista, deixou no ar uma interrogação que nos obriga a pensar sobre qual tem sido o contributo de cada um para a educação matemática.

—Há que encorajar os professores a mudar.

Se o currículo é mesmo como um oceano, temos mais é que vestir os nossos fatos de mergulho e nadar em direcção às profundezas...

Por falar nisso, Gonçalo, com quantas palavras já contribuíste para a Educação e Matemática?

—Não me faças perguntas difíceis. Daqui a dois meses já terei uma melhor resposta para te dar. Niña, es buena hora de ir a comer unas tapas y tomar unas cañas en Badajoz!! Hasta la vista Elvas. Pronto nos volveremos a ver en Viana.

Joana Latas, EBI Padre Bento Pereira, Borba
Rui Gonçalo Espadeiro, Centro de Competência da Universidade de Évora

Raciocinar em... Medicina

Raciocinar em Medicina é partir de aspectos parciais para o que é mais provável entre o possível e por vezes partir de premissas razoavelmente seguras para conclusões individuais teoricamente certas ou muito prováveis. Partindo dos sintomas e sinais referentes a vários orgãos e sistemas, colhidos pela anamnese e pela observação, numa relação empática com o doente, o médico formula hipóteses de diagnóstico, comparando um quadro clínico concreto com padrões pré-estabelecidos que já possui nos seus esquemas mentais. O diagnóstico é o elemento chave e o mais complexo do raciocínio clínico, constituindo a condição fundamental para aplicar terapêuticas correctas e formular prognósticos credíveis.

Helena Estrada **[Médica Especialista em Medicina Interna]**

Raciocinar em... Arqueologia

Não sei se existe geração mais consciente da importância do pensamento e dos métodos matemáticos para as ciências humanas do que aquela em que me incluo. Assistimos ao despontar da chamada história serial. Iniciámo-nos na computação manual através de sistemas elementares de cartões perfurados; acompanhámos as invenções de Clive Sinclair, desde a máquina de calcular até ao computador pessoal, o célebre ZX Spectrum; estudámos aprofundadamente estatística. Trouxemos, enfim, para dentro das humanidades os métodos quantitativos, que chegaram a constituir disciplinas de leccionação em vários cursos superiores de letras.

Tudo isto fizemos... mas não nos deixámos sucumbir debaixo do fetiche do número, o qual, tal como os computadores, apenas nos respondem aquilo que estamos preparados para lhes perguntar. No princípio e no fim, o humano, dotado de pensamento formal, matemático, mas também de imaginação criadora, onírica por natureza.

Luís Raposo **[Director do Museu Nacional de Arqueologia]**

XIX EIEM09

Vai realizar-se a 16 e 17 de Maio de 2009, em Vila Real, o Encontro de Investigação em Educação Matemática, promovido pela Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Este próximo XIX EIEM09, Números e Estatística: reflectindo no presente, perspectivando o futuro, tem como propósito reflectir sobre trabalhos de pesquisa em dois grandes temas do currículo da Matemática, os Números e a Estatística, bem como promover, discutir e perspectivar o desenvolvimento da investigação nas várias vertentes com eles relacionadas, nomeadamente, no seu ensino e aprendizagem, na formação de professores, na utilização de tecnologias e nas orientações actuais e desenvolvimento curriculares.

A inscrição deve ser feita online, em

`http://www.home.utad.pt/~eiem09`

até 14 de Março de 2009.

Se pretende apresentar uma comunicação, deverá enviar o seu resumo para o endereço `eiem2009@utad.pt`, até 20 de Fevereiro de 2009.

Para mais informações consultar a página do encontro

`http://www.home.utad.pt/~eiem09.`

APM — 2009

Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

Modalidades de associado e seus direitos

Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

Preço da quota anual em 2009

Modalidades de associado individual	
Professor	50,00 €
Estudante s/vencimento	35,00 €
Aposentado	38,50 €
@-sócio	38,50 €
Residente no estrangeiro	53,50 €

Modalidade de associado institucional	
Modalidade 1 [1 exemplar EeM]	55,00 €
Modalidade 2 [2 exemplares EeM]	77,00 €
Modalidade 1 + *Quadrante*	71,00 €
Modalidade 2 + *Quadrante*	95,00 €

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `http://www.apm.pt`

Assinaturas das revistas para 2009

		Educação e Matemática (inclui actas ProfMat)	*Quadrante*
Sócio individual	Portugal		12,00 €
	Estrangeiro		15,00 €
Instituições	Portugal	42,00 €	23,00 €
	Estrangeiro		27,00 €

índice

Editorial

01 **Raciocinar para aprender e aprender a racionar**
Ana Maria Roque Boavida

Artigos

03 **O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia *soft***
Paulo Oliveira

11 **Resolvo problemas, logo penso**
Leonor Moreira

29 **Raciocinar em Matemática com imagens visuais vagas e com intuição**
Manuel Joaquim Saraiva

37 **Construir, experimentar, descobrir, provar…**
Adelina Precatado

46 **Medindo a incerteza…**
Paulo Correia

51 **A Avaliação e o Raciocínio Matemático**
Sílvia Semana, Leonor Santos

65 **Reflexões sobre geometria (1)**
Eduardo Veloso

78 **Representações dos alunos. Que raciocínios revelam?**
Alice Carvalho

89 **O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos**
João Pedro da Ponte, Neusa Branco, Ana Matos

97 **História de um ProfMat a duas vozes**
Joana Latas, Rui Gonçalo Espadeiro

Secções

50 **O problema deste número** *José Paulo Viana*
Os quatro filhos da família Canelas

61 **Actualidades** *Manuela Pires, Nuno Candeias*
Arsélio e Tomás são o melhor da escola

73 **Tecnologias na educação matemática** *José Duarte*
Raciocínio e Tecnologia

27 **Materiais para a aula de Matemática**
O Preço da TV, *Ana Luísa Paiva*

44 **Materiais para a aula de Matemática**
Triângulo Duplicado?!, *Adelina Precatado*

62 **Pontos de vista, reacções e ideias …**
A discutir também se desenvolve o raciocínio, *Sílvia Zuzarte Machado*
Avaliar a capacidade de raciocinar matematicamente em questões de escolha múltipla, é possível?, *Paulo Dias*
Raciocinar e conjecturar usando uma *Ilha de Sonho*, *Anabela Gomes*

85 **Para este número seleccionámos**
Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos

34 **Pense nisto**
Raciocínio matemático na aula: Uma questão de confiança?, *Ana Paula Canavarro*

02 **Grande Concurso Educação e Matemática**
À procura de 100

77 **O problema do ProfMat 2008** *José Paulo Viana*
2008 Caixas de Rebuçados

Depoimentos

18 **01 Discutindo tarefas tendo por horizonte o raciocínio matemático**
Teresa Olga Duarte

21 **02 As actividades de investigação… um contributo para o desenvolvimento do raciocínio**
Isabel Gorgulho

24 **03 A conjectura de Ciprian**
Irene Segurado