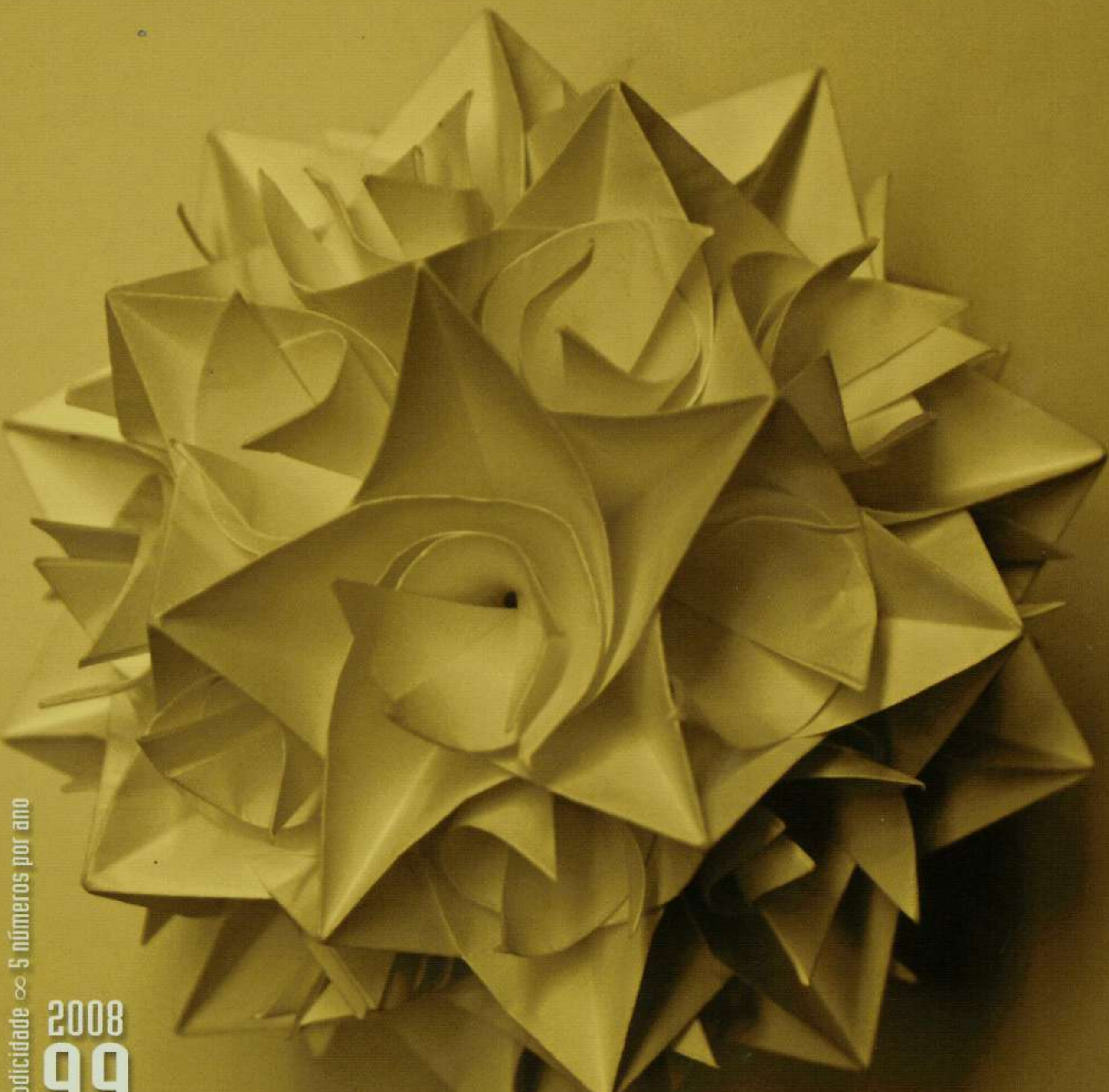
# Educação e Matemática

Revista da Associação de Professores de Matemática



Periodicidade ∞ 5 números por ano

2008

99

Setembro ∞ Outubro

Preço 5,75€


# ficha técnica

**EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA**

**Directora** Ana Paula Canavarro
**Subdirectora** Adelina Precatado
**Redacção** Ana Luísa Paiva
Alice Carvalho
António Fernandes
Cláudia Fialho
Helena Amaral
Helena Rocha
Isabel Rocha
Joana Brocardo
Manuela Pires
Nuno Candeias
Paulo Dias

**Colaboradores Permanentes**
A. J. Franco de Oliveira Matemática
José Duarte Tecnologias na Educação Matemática
José Paulo Viana O problema deste número
Lurdes Serrazina A matemática nos primeiros anos
Maria José Costa História e Ensino da Matemática
Rui Canário Educação

**Capa** António Marques Fernandes
**Paginação** Gabinete de Edição da APM

**Entidade Proprietária**
Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, 27–A, 1500–236 Lisboa

**Data da publicação** Setembro 2008
**Tiragem** 4000 exemplares
**Periodicidade**
Jan/Fev, Mar/Abr, Mai/Jun, Set/Out e Nov/Dez

**Impressão**
Etigráfe, Artes Gráficas, Lda
Rua Major Rosa Bastos, 55 A–B, Montemor
2670–502 Loures

**Depósito Legal** nº 72011/93
**Registo no ICS** nº 124051
**ISSN** 0871-7222

**Porte Pago**

## Sobre a capa

Modelo em origami dobrado por Ilda Rafael. Concepção original de Herman Van Goubergen.

**António M. Fernandes**

## Neste número também colaboraram

Ana Colaço, Carlos Miguel Ribeiro, Cristina Martins, Fernanda Joaquim, Fernando Nunes, João Janeiro, Luciana Pereira de Brito, Manuel Vara Pires, Márcia Freire, Maria José Delgado, Nuno Candeias, Pedro Almeida, Rafael Gonçalves, Sandra Marques, Sara Cabral Costa, Sofia Rodrigues, Sónia Figueirinhas, Vincenzo Bongiovanni.

## Correspondência

Associação de Professores de Matemática
Rua Dr. João Couto, Nº 27–A, 1500–236 Lisboa
Tel: (351) 21 716 36 90
Fax: (351) 21 716 64 24
E-mail: revista@apm.pt

## Nota

Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

# Editorial

## Como vamos de aprendizagens?

**Fernando Nunes**

Sem grandes surpresas, o final do ano lectivo que passou foi assinalado na comunicação social pela atenção habitual aos resultados das provas escritas de duração limitada realizadas, no final de um ciclo de estudos: as aferições e os exames.

As posições em relação aos exames podem ser organizadas num largo espectro que vai desde os que acreditam que o exame é o garante da qualidade das aprendizagens e, portanto, quantos mais melhor, até aos que apontam inconvenientes considerados relevantes — não avaliam aspectos julgados cruciais das aprendizagens, a classificação e a selecção sobrepõem-se a finalidades formativas, provocam o empobrecimento do processo contínuo de ensino aprendizagem, etc. — passando pelos que lhes reconhecem limitações, mas colocam o acento na acção reguladora que os exames podem ter.

Este ano, estes aspectos estiveram presentes, mas existiu uma diferença adicional que veio chamar a atenção para um aspecto conjuntural que não protagonizava as informações difundidas pela comunicação social em anos anteriores. Paradoxalmente, foi assumido por sectores, que antes advogavam a criação de mais exames para garantir a representatividade da avaliação, que os resultados desses mesmos exames podiam não ser representativos. Além disso, a razão apontada não tem a ver com uma qualquer falta de rigor na sua aplicação ou com procedimentos não adequados, mas sim com uma característica especial: o grau de dificuldade, ou facilidade, das questões apresentadas.

Quando se entrevista um aluno que acabou de ser submetido ao exame e ele afirma que achou a prova fácil, ou difícil, a sua apreciação pode não ser confirmada pelo resultado obtido. Achou fácil, mas o seu desempenho foi considerado fraco, ou achou que era difícil, mas a nota que obteve foi elevada. Do mesmo modo, a opinião de alguém que está numa posição diferente do examinando, nomeadamente um professor, poderá ser, ou não, confirmada pelo êxito, ou pelo insucesso, das respostas dos alunos. Não parece muito garantido que o nível de dificuldade de uma questão seja definido rigorosamente por um juízo individual apriorístico. Se nos pode parecer evidente que determinada questão é de mais fácil resposta que uma outra, e até possamos ter imensa razão, talvez a única maneira fiável, pelo menos enquanto não for inventado o *facilómetro*, que nos permitiria afirmar da maior ou menor dificuldade de uma questão, tenha a ver com as respostas dadas pelo grupo de pessoas que a ela responderam. Ou seja, a questão A é mais difícil que a questão B se as respostas a esta foram mais correctas do que as dadas àquela. Em última análise, o que se passou é evidente: se os alunos tiveram melhores resultados este ano do que no ano anterior, então o exame este ano foi mais fácil. Se aconteceu o inverso, então teremos de o considerar mais difícil, mesmo que tal não nos pareça. Estamos a supor que os alunos deste ano não são significativamente diferentes dos do ano passado e que o intervalo de tempo de um ano não é suficiente para garantir alterações sensíveis, mesmo que se tenham implantado reformas profundas.

Quando se quer comparar a dificuldade de duas provas, deverá atender-se também a alguns factores que podem influenciar os resultados. Se os alunos foram preparados durante o ano para a realização das provas, treinando as respostas a questões semelhantes às que vão encontrar na prova, é muito natural que tenham melhor desempenho do que se forem confrontados pela primeira vez com esse género de questões. E se o tipo de prova se mantiver semelhante ao longo de vários anos, não é de espantar que os resultados melhorem, em média, de ano para ano. Em Portugal, as provas de aferição do básico são um exemplo razoável desta tendência. Quem assistiu à *surpresa* que acompanhou a primeira prova de aferição, realizada com alunos do 4° ano de escolaridade, consegue ver a enorme diferença que existe com a previsibilidade das provas realizadas este ano, ou no ano transacto. Uma boa forma boa de melhorar o desempenho dos alunos portugueses em testes internacionais consistirá em lhes propor que tentem responder a perguntas parecidas com as que irão sair nesses testes. Segundo responsáveis irlandeses, foi mesmo isso que foi feito no seu país e que provocou o *milagre* irlandês.

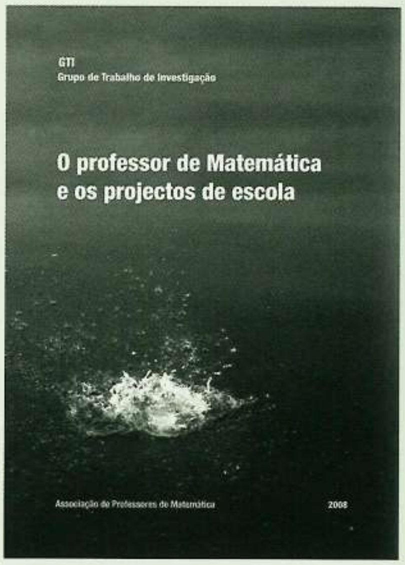
Então, se os resultados dos exames são melhores, isso quer dizer necessariamente que os alunos sabem mais e melhor matemática? Gostam mais de matemática? Têm competências desenvolvidas de cálculo mental? São perseverantes quando abordam um problema e não desistem à primeira dificuldade? São capazes de demonstrar resultados? Reconhecem a importância da matemática no mundo em que vivemos?

Sabemos que a mudança em educação não é rápida e que as pressas resultam muitas vezes em vagares e retrocessos. Seria mais avisado tentar que a evolução fosse sustentada pela melhoria de condições estruturais e informada por dados relevantes. A discussão que existiu este ano sobre os exames, a pressuposição da sua facilidade *versus* a reivindicação da melhoria da preparação matemática dos alunos foi mais uma diversão que não ajudou os profissionais. É urgente recolocar o problema do ensino e aprendizagem da matemática no contexto da melhoria de condições e na procura de informações relevantes, em vez de se passar a mensagem que o desempenho no exame é o fim último a que tudo deve estar subordinado e que é ele que nos dá a verdadeira amplitude da competência matemática dos nossos alunos.

**Fernando Nunes**

## O professor de Matemática e os projectos de escola

*Edição* APM, 2008 | PVP: 10,50€ Sócio: 7,00€




Grupo de Estudos O professor como investigador do Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) da Associação de Professores de Matemática (APM) foi criado em Abril de 2000 para realizar uma reflexão aprofundada acerca do tema "O professor como investigador" e contribuir para a divulgação da perspectiva que a investigação sobre a prática faz parte da actividade profissional do professor. A ênfase inicial no tema o professor como investigador foi-se deslocando do professor para os problemas relacionados com a sua própria prática. Deste modo, o foco passou a estar nestes problemas e na investigação realizada para os resolver, o que incentivou os membros deste grupo a lançarem-se na exigente aventura de se envolverem na produção de textos originais sobre a investigação da sua própria prática profissional.

Como produto da primeira experiência de trabalho desenvolvido pelo grupo, resultou o livro Reflectir e Investigar sobre a Prática profissional, publicado pela APM (2002). Nele se incluía uma colectânea de textos que testemunham experiências profissionais dos elementos do grupo enquanto investigam a sua prática profissional para melhor compreender as suas acções e as suas necessidades, e melhorá-las.

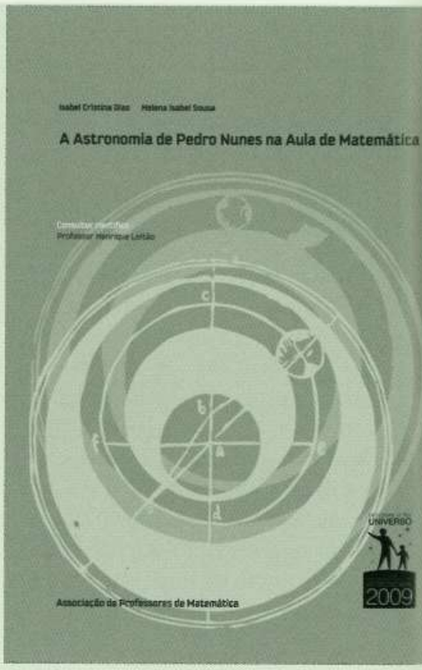
Dado o sucesso do primeiro trabalho e a riqueza das experiências vividas, o Grupo de Estudos decidiu encetar um novo ciclo cujo foco foi o tema do currículo e da gestão curricular, sempre na lógica de investigar a própria prática.

Assim, a segunda experiência de trabalho deu origem ao livro O Professor e o Desenvolvimento Curricular, também publicado pela APM (2005), que inclui um conjunto de textos que mostram que a gestão do currículo torna-se cada vez mais complexa no contexto multicultural das salas de aula actuais.

Assim, este novo livro, O Professor de Matemática e os projectos de escola, inclui uma colecção de experiências realizadas em diferentes níveis de ensino. Mais importante do que cada experiência em si mesma é perceber de que forma ela pode contribuir em termos do conhecimento para a profissão, e que mais valia trazem para a vida das escolas, em particular para o grupo de professores de Matemática. Neste sentido, pode contribuir para uma melhor compreensão das questões associadas às dinâmicas do trabalho desenvolvido no seio de projectos de escola, os percursos que se percorrem e os factores que facilitam e sustentam as dinâmicas de trabalho colaborativo. À venda no ProfMat 2008.

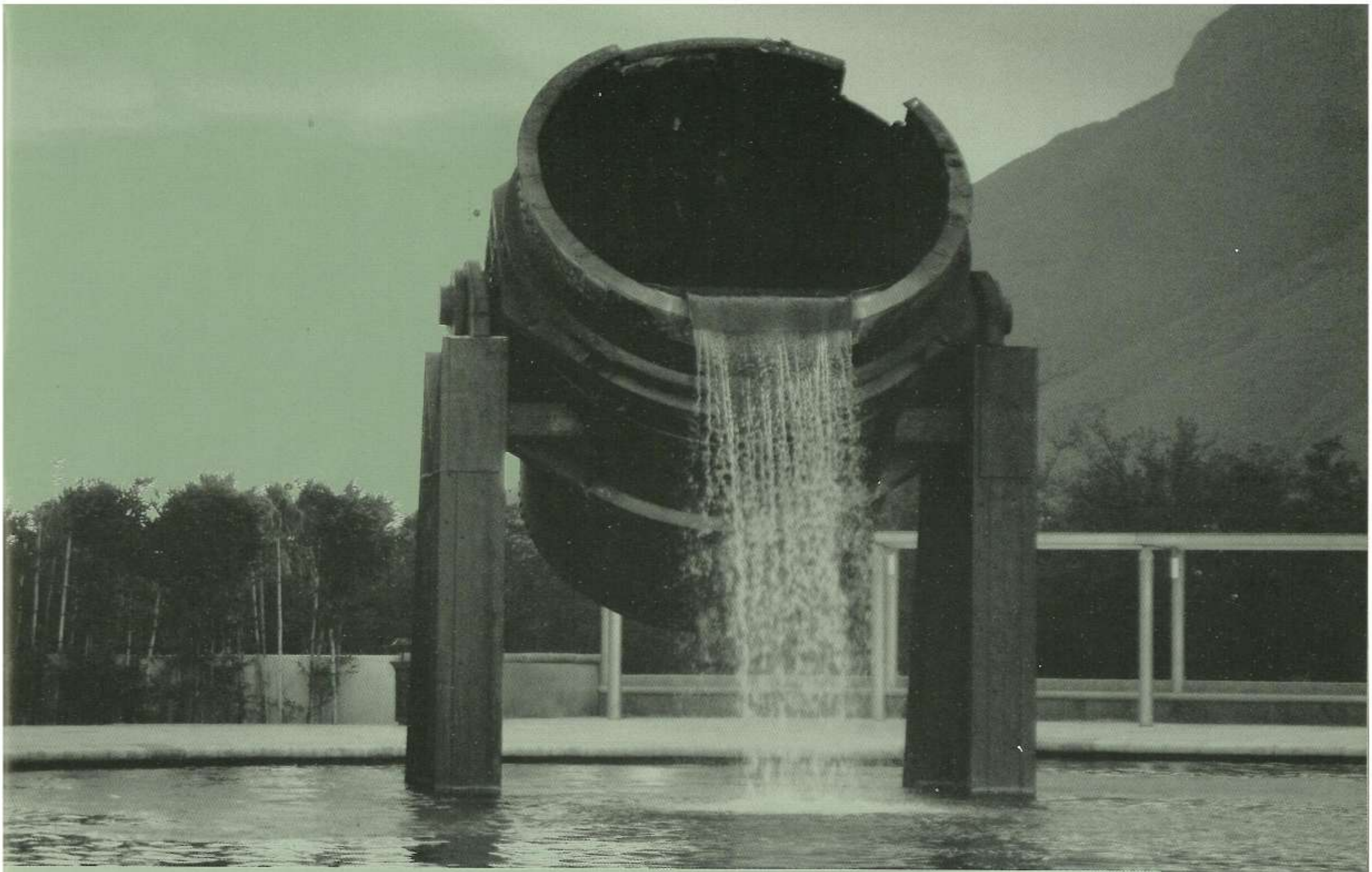
## A Astronomia de Pedro Nunes na Aula de Matemática

*Edição* APM, 2008 | PVP: 7,50€ Sócio: 5,00€




Neste trabalho são apresentadas quatro actividades que os professores de Matemática do 3° Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário poderão propor aos alunos. É também incluído um texto acerca da presença da História da Matemática no ensino e aprendizagem da disciplina: aspectos didácticos, influência epistemológica, argumentos pedagógicos e formas de abordagem. Em particular, é focada a utilização de textos históricos, visto que as actividades apresentadas se basearam em textos originais de Pedro Nunes.

Esta nova edição é uma das formas que a APM encontrou de se associar à comemoração do Ano Internacional da Astronomia. Assim, no primeiro capítulo do livro é feita uma breve descrição da vida e obra do matemático português, da sua importância na Ciência do séc. XVI e do seu papel no desenvolvimento da Astronomia.



# O que nos faz falta? A participação num encontro internacional, ICME11

Paulo Dias

O 11° Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME11) decorreu em Monterrey (México) de 6 a 13 de Julho. Com aproximadamente 4000 participantes, onde se incluíam professores de todos os níveis de ensino, educadores matemáticos e matemáticos dos cinco continentes e de muitos países diferentes. Todos estiveram envolvidos numa agenda intensa de trabalhos para discutir novos conhecimentos, novas perspectivas e as tendências actuais da investigação no ensino da matemática e na prática docente. De diferentes nacionalidades e várias línguas, partilharam as suas experiências em prol do desenvolvimento da educação matemática. Na sessão de abertura foram entregues as medalhas Felix Klein 2005 e 2007 a Ubiratan D'Ambrosio e Jeremy Kilpatrick, e as medalhas Hans Freudenthal 2005 e 2007 a Paul Cobb e a Anna Sfard, respectivamente.

Na primeira sessão plenária, Michèle Artigue (França) e Jeremy Kilpatrick (EUA), explicaram os seus pontos de vista acerca da natureza do conhecimento em educação matemática. Na sua perspectiva, o conhecimento científico nesta área tende a evoluir segundo as crenças dos professores, as suas representações, conhecimentos e práticas. Por ser provisória a natureza das questões da educação matemática, é necessário reequacionar e redireccionar constantemente a investigação. Em particular, é importante conhecer e ajustar com frequência os conhecimentos para ensinar matemática (MKT — Mathematic Knowledge for Teaching). Será que os professores dominam e conhecem os objectos que procuram ensinar aos alunos? Noutra plenária, David Clarke (Austrália) e outros painelistas analisaram as diferentes possibilidades de investigação e as preocupações de professores e investigadores dos cinco continentes. Na procura de definição de uma agenda de investigação salientaram a atenção a dar à confluência de vários factores na sala de aula, o discurso, a organização, os materiais utilizados, as tarefas e a tecnologia; à implicação da dicotomia ensinar/aprender ou aprender/ensinar; à relação entre a motivação e o sucesso em matemática; e à influência da cultura na aprendizagem da matemática. Célia Hoyles (Reino Unido) explicou a importância que o desenvolvimento tecnológico tem na criação das situações didácticas. Para esta investigadora aprender matemática de forma interactiva, experimentando, visualizando e manipulando permite diferentes percursos de aprendizagem e a construção do conhecimento e da autonomia. Com escolas cheias de computadores e internet por todo o lado, quais as implicações na educação matemática?

A cerca das tendências do design de investigação para os próximos anos, se por um lado Guadalupe Carmona

(Universidade de Austin, EUA) na sua conferência destacou três níveis de intervenção ao nível da prática dos alunos e dos professores: o que devem fazer os alunos/professores para aprender mais? O que é que os alunos/professores aprendem? Como é que os alunos/professores aprendem? Por outro lado, José António de la Peña (México) referiu-se às tendências globais da investigação em educação matemática: os problemas internos da matemática (a questão da aceitação da prova por via computacional); a emergência da teoria matemática-física; a aplicação da matemática a outras ciências; a revolução dos computadores e da tecnologia na educação matemática (matemática experimental, simulação e modelação); a aprendizagem da matemática por acumulação e persistência, dia-a-dia; o ensino das ciências com técnicas pedagógicas próprias que precisam ser desenvolvidas e são diferentes das da investigação em ciência; a aprendizagem a partir da história da matemática; e a matemática como uma construção cultural e humana.

Para mim, que participei pela primeira vez no ICME, foi uma experiência profissionalmente enriquecedora. Conhecer a realidade de outros países e confrontá-la com a minha era inevitável. O que falta em Portugal? Percebi que alguns territórios do pacífico ocidental, os designados por *tigres asiáticos*, centram o seu sistema de ensino e avaliação essencialmente no treino de procedimentos de cálculo. Através de OLAS (On-Line Assessment System), segundo Fumi Ginshima (Japão), promovem estratégias de resolução de problemas, de motivação e de melhoria do rendimento dos alunos. Num sistema equivalente ao nosso *moodle*, desafiam os alunos para além do espaço físico da escola e avaliam quantitativamente os seus resultados, numa perspectiva de que todos os alunos sejam incluídos. Já a Finlândia adoptou há 25 anos a *resolução de problemas* como tema central de desenvolvimento do seu currículo. Num sistema onde não há reprovação, nem exclusão ou avaliação externa até ao equivalente ao 9º ano português. Para Pekka Kupari, todos os alunos têm uma oportunidade de aprender. Problemas desafiantes e a constante implementação de estratégias de auto-avaliação dos alunos e dos professores permitem a melhoria da auto-eficácia em matemática neste país do norte da Europa. Trabalhar colaborativamente na sala de aula tarefas complexas, reais, significativas e, às vezes, de construção, em grupos de 2 ou 3 alunos, com o propósito de aumentar o nível e a qualidade da aprendizagem foi a proposta de Rejkje Dekker. Esta investigadora holandesa referiu-se ao papel do professor e à sua decisiva importância na criação dos contextos de aprendizagem. O professor detém a *chave* de estimulação, de regulação e de ajuda nas actividades. Noutro canto do mundo. Na Venezuela, segundo Nelly Gómez, as turmas têm 40 alunos e os professores trabalham 56 horas semanais para terem um vencimento razoável. Para além disso, fazem formação e investigação porque são obrigados e nada disso tem reflexo nas decisões curriculares governamentais.

Para terminar, quero salientar a participação portuguesa no ICME2008. Aproximadamente meia centena de portugueses deslocaram-se a Monterrey. Era muito fácil encontrar um Português na Universidade de Nuevo León. Também, é fácil aceitar que em Portugal muito se trabalha na investigação das temáticas da educação matemática e que a relevância desse trabalho é reconhecida nos documentos curriculares e internacionalmente, quer pelas comunicações apresentadas ou pelas citações feitas por investigadores de outros países. Contei 34 nomes diferentes no programa, com apresentações de comunicações e dinamizações de grupos. Desde o International Program Committee, as Regular lectures, os Topic Study Groups, os Discussion Groups, as Sharing Experiences Groups até aos Poster exhibition and Round Table sessions. Alguns aparecem mais do que uma vez. Outros que as fizeram mas, cujo, o nome não está no programa. E outros que apenas assistiram. Entre estes nomes está Jaime Carvalho e Silva, professor da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, que foi eleito para o cargo de Secretário-Geral da Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI — International Commission on Mathematical Instruction), a maior associação mundial dedicada ao ensino da disciplina e sob os auspícios da qual é organizado o ICME.

**Paulo Dias**
**Escola Secundária da Moita**

# Jogo justo?

**Pedro Almeida**

— Vamos fazer um jogo. Jogamos um bocado e depois paramos para pensar um pouco sobre o jogo. Depois voltamos a jogar, está bem? Este jogo é para dois jogadores. Como somos muitos fazemos duas equipas: A e B. Lançam-se dois dados. Não é importante quem lança os dados, mas como todos gostamos, vamos lançar os dados um vez cada um. Se a diferença entre os dados for 0, 1 ou 2, ganha um ponto a equipa A. Se a diferença for 3, 4 ou 5, ganha a equipa B. Alguém tem dúvidas?

— E se calhar 6 e 6?

— Como é que se vê a diferença?

— O que é a diferença, por exemplo, um dado mostra 3, o outro mostra 4, qual é a diferença?

Há alunos que mostram dificuldade em compreender a linguagem e outros dão a resposta e explicam como entendem a diferença. Um dos alunos demorava-se a dizer a diferença entre 5 e 6 e os colegas impacientavam-se e queriam explicar-lhe, mas o professor insistiu para que lhe dessem tempo. Por fim disse "O seis é maior." O professor retorquiu "Quanto? É maior, mas quanto?" Os colegas insistiram "Tens cinco, para chegar a seis é mais quanto?" A resposta foi dada de imediato. Questionaram-se mais alguns alunos para se ter a certeza de que todos eram capazes de determinar a diferença. A turma está entusiasmada e mostra vontade de começar. O aluno que lança os dados determina a diferença e o professor regista a pontuação no quadro (figura 1).

Perante a pontuação registada no quadro, a vitória era evidente.

— Gostaram do jogo? — era evidente — Agora que já sabem jogar, querem experimentar jogar sozinhos com os vossos colegas de mesa? — todos querem — Mas antes quero só pedir para repararem numa coisa …

O professor abriu um parênteses para perguntar porque teria feito o registo daquela maneira e não como habitualmente, com os risquinhos ao lado uns dos outros. Ouviram-se várias hipóteses, umas mais próximas que outras, até que foi confirmada a intenção de uma maior facilidade de contagem. Curiosamente, nos jogos que se seguiram todos usaram o mesmo processo de registo. Havia cinco grupos de quatro a jogarem dois contra dois.

Combinou-se que fariam 20 lançamentos. No fim compararam-se as pontuações.

— Então, gostaram do jogo? — todos acharam muito giro.

— Não notam nada estranho?

Não, ninguém achava nada estranho, a não ser, enfim, o facto — pelos vistos, pouco significativo — de terem ganho só as equipas A. O professor propôs então que voltassem a jogar, mas quem tinha sido da equipa A passava a ser da equipa B e vice-versa.

A proposta foi acolhida com entusiasmo renovado (talvez, quem sabe, pelos que tinham sido da equipa B).

No fim voltou a verificar-se o mesmo espectáculo: as equipas A tinham ganho todas (figura 2).

— Não acham isto estranho? — fez-se um silêncio aqui e ali interrompido por um não, tímido, em jeito de encolher de ombros. — Vamos a ver: imaginem que agora no intervalo um de vocês propõe a outro este jogo, mas diz logo "Eu sou da equipa A.". Que diz o outro?

Houve quem dissesse com ar desafiador que aceitava, mas perante a insistência do professor uma aluna reconheceu que o outro também quereria ser da equipa A. Foi o suficiente para que logo outro confessasse que se calhar iriam discutir. Ou então o outro não aceitaria jogar.

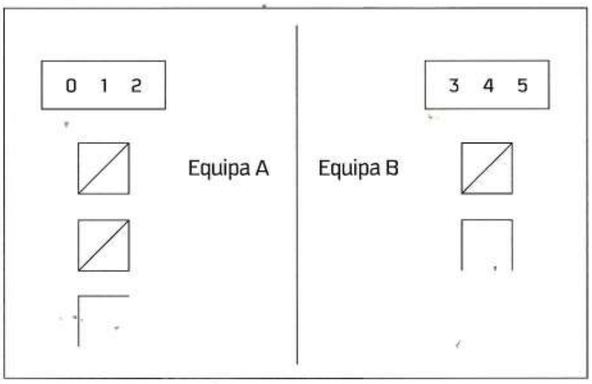



Figura 1

0 1 2 | 3 4 5

| Equipa A | Equipa B |
|---|---|
| 16 | 4 |
| 15 | 5 |
| 13 | 7 |
| 11 | 9 |
| 14 | 6 |

Figura 2

| Eq. | Dif. | Hipóteses possíveis | | | | | | | | | | Totais | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1/1 | 2/2 | 3/3 | 4/4 | 5/5 | 6/6 | | | | | 6 | 24 |
| | 1 | 1/2 | 2/3 | 3/4 | 4/5 | 5/6 | 6/5 | 5/4 | 4/3 | 3/2 | 2/1 | 10 | |
| | 2 | 1/3 | 2/4 | 3/5 | 4/6 | 6/4 | 5/3 | 4/2 | 3/1 | | | 8 | |
| B | 3 | 1/4 | 2/5 | 3/6 | 6/3 | 5/2 | 4/1 | | | | | 6 | 12 |
| | 4 | 1/5 | 2/6 | 6/2 | 5/1 | | | | | | | 4 | |
| | 5 | 1/6 | 6/1 | | | | | | | | | 2 | |
| | | | | | | | | | | | Total | 36 | 36 |

Tabela 1

— E então se fizessem a proposta de jogar a um colega de outra turma, que não sabe o que vocês sabem deste jogo?

— Ele aceitava. — alguns esfregaram as mãos e sorriram para os compinchas.

— E o que lhe ia acontecer?

— Ia perder!....

— Mas isso era batota. — exclamou uma colega com alguma indignação.

— Era batota, diz a V. Concordam? Podemos continuar a achar este jogo muito giro?

— É um jogo batoteiro.

— Isso não é jogar, porque já sabemos quem vai ganhar.

— É como às vezes no futebol. Há meninos que não se importam de jogar com os que não sabem jogar na mesma equipa, mas há outros meninos que só querem jogar com os que sabem jogar, porque não querem perder.

A conversa continuou mais uns minutos até que chegou a hora do intervalo e saímos, mas de fugida alguns passaram pelo professor para dizerem que sabiam porque é que a equipa A ganhava sempre. Partiam com a promessa que falariam sobre isso quando voltassem.

E voltou-se à carga:

— A equipa A ganha porque o 0, o 1 e o 2 são os números mais utilizados.

— Que queres dizer com mais utilizados? Alguém quer ajudar o D. a explicar melhor isto?

— São os números que calham mais nos dados, os outros são mais difíceis de calhar.

— Se o B ganhasse com 0, 1 e 2 e o A com 3, 4 e 5, passava a ganhar sempre a equipa B.

— Pois é, os números é que interessam.

— E vocês acham que podemos tornar este jogo mais justo, mais equilibrado?

— Eu estava a pensar... podíamos fazer o A ganhar, quando saísse a diferença 1 e o B ganhava com a diferença 2.

— E as outras diferenças? Tens a certeza que isso tornava o jogo mais justo? Como podemos ter a certeza?

— Há umas diferenças que saem mais que as outras...

— Isso já vimos, mas será que podemos saber qual é a que sai mais? — o professor começou a temer o desinvestimento perante a tarefa que, a ele mesmo, lhe parecia gigantesca e resolveu ajudar.

— Digam-me quais são as diferenças que podem sair. — e foi registando numa coluna 0, 1, ... 5. — Quais são as hipóteses de sair 0?

— 3/3; 6/6;

— Primeiro 1/1, depois 2/2 — sugeriu uma aluna que até então tinha estado sempre calada.

A ideia desta aluna foi poderosa na fase seguinte porque foi ela mesma que achou que devia dizer as hipóteses inversas; por ex,: diferença 1 – 1/2; 2/3; ... 5/6; 6/5; 5/4; ... Fez-se o levantamento das hipóteses (tabela 1).

— A partir do 10 vai descendo.

— A equipa A está sempre a ganhar.

— A equipa A tem o dobro das hipóteses da equipa B.

— Já sei uma maneira de fazer o jogo justo: a equipa A ganha com a diferença 0 e a B com a diferença 3, porque assim têm o mesmo número de hipóteses.

— E as outras diferenças, não arranjam maneira de as distribuir pelas duas equipas? — o nível de abstracção estava muito alto. Propôs-se que os alunos pintassem as hipóteses com cores diferentes (cada grupo tinha já copiado para papel quadriculado a tabela que se foi fazendo no

**Solução 1**

Dif. 5 — Diferença 1 — Diferença 0

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | **A** |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 6 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 5 | 4 | 3 | 1 | 2 | 3 | 6 | 5 | 4 | **B** |
| 5 | 6 | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 1 | |

Dif. 4 — Diferença 2 — Diferença 3

**Solução 2**

Dif. 5 — Diferença 1 — Diferença 3

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 6 | 5 | 4 | **A** |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 1 | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 6 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 5 | 4 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | **B** |
| 5 | 6 | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |

Dif. 4 — Diferença 2 — Diferença 0

**Solução 3**

Diferença 1 — Diferença 2

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 5 | 4 | 3 | **A** |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 6 | 5 | 4 | 1 | 2 | 6 | 5 | 1 | 6 | **B** |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 4 | 5 | 6 | 3 | 2 | 1 | 5 | 6 | 2 | 1 | 6 | 1 | |

Diferença 0 — Diferença 3 — Dif. 4 — Dif. 5

quadro) e as recortassem para depois experimentarem maneiras de distribuir as hipóteses.

— Já sei, podemos usar a técnica do relógio — referia-se a um problema que a turma tinha resolvido umas semanas antes: *dividir o mostrador de um relógio em duas partes, de modo a que a soma dos números de uma parte seja igual à da outra* — juntamos os maiores com os menores.

Essa foi a técnica explicitamente utilizada por um grupo, mas outros foram ao encontro da solução por tentativa e erro. (Ver soluções nesta página)

Por fim foi pedido um levantamento do que foi aprendido ou trabalhado:

— Aprendemos um jogo de dados.

— Aprendemos a não ser injustos.

— Aprendemos a fazer jogos justos.

— Aprendemos a fazer cálculos.

— Aprendemos a diferença entre dois números.

— Aprendemos a ver as hipóteses...

— ... com ordem! — referindo-se ao facto de terem sido metódicos na análise das probabilidades.

O que surpreende neste trabalho é a aceitação da injustiça, uma espécie de mentalidade fatalista, coexistindo com uma sensibilidade tão forte à própria injustiça. Isto é, qualquer injustiça sentida na pele é vivida de uma forma total, mas a capacidade para se colocar numa posição crítica perante as situações não assume uma realização plena. Esperemos que esta actividade tenha contribuído para o desenvolvimento desse tal sentido crítico tão necessário a uma cidadania vivida em democracia.

**Pedro Almeida**

**Grupo de Trabalho do 1º CEB da APM**

## "Sabe mais do que um miúdo de 10 anos?"

Todos os dias a RTP 1, depois do jantar, exibe o Concurso "Sabe mais do que um miúdo de 10 anos?", que eu não vou comentar, e que, entre outros aspectos, tem contribuído para pôr a nu a (deficiente) *numeracia* nacional (a compreensão dos números, das operações, o cálculo mental, o sentido do número, as competências essenciais). Não costumo ver senão casualmente o concurso mas, desta vez, em 16/01/08, foi tal e ligado à Matemática o que se passou que senti que tinha de registar o sucedido e enviar para a revista E&M.

No concurso era apresentada uma pergunta. Acabei por escrevê-la de memória, alguns 20 minutos depois do concurso. Por isso não garanto que esteja exactamente igual, mas estará certamente muito próxima da realizada. A pergunta era:

Como se chama uma figura que, ao ser dobrada segundo um eixo vertical, dá origem a duas figuras iguais e coincidentes?

O concorrente adulto, aparentando uns 40–50 anos, depois de pensar algum tempo (em quê?), declarou que não sabia responder. Decidiu copiar a resposta de um aluno (talvez do 5º ano?), algo que é permitido pelas regras do concurso.

Para cúmulo, a resposta foi: "Semimétrica". O apresentador, naturalmente, considerou a resposta errada.

Talvez ainda mais relevante seja o episódio final, no qual, depois de ter apresentado os acompanhantes familiares do concorrente, entre os quais o sobrinho, um jovem de 12–13 anos, o apresentador decidiu dirigir-lhe directamente a mesma pergunta. O rapaz afirmou, esboçando um sorriso, que não sabia responder.

Foi confrangedor. Como cidadão e como professor de Matemática, senti-me incomodado e interpelado a reflectir na *iliteracia matemática* dos portugueses, dos jovens e dos menos jovens...

**João Janeiro**
**ES3 Padre António Vieira, Lisboa**

## O Sucesso no Insucesso
## Um Desabafo

Com este texto não pretendo discorrer sobre o insucesso em Matemática, não vou enumerar as causas que levam a tal, nem exumar culpas do insucesso em Matemática. Muitas análises têm sido feitas sobre o insucesso dos alunos que reflectem o insucesso dos professores, segundo alguns. Este insucesso, tantas vezes sublinhado estatisticamente, faz-me sofrer e por isso, tento suavizar esta dor, que não é só minha mas de todos os que diariamente trabalham com esta disciplina, através deste pequeno texto e pintar algum verde numa tela tão escura.

Acredito profundamente neste dogma "Tudo é relativo" e é nesse sentido que me debruço em especial sobre o contexto em que se faz o trabalho, o contexto de uma sala de aula ou de um grupo de alunos que o acaso juntou.

Ao longo de todos estes anos (quase 30) como professora de Matemática considerei que tinha uma vida de constante insucesso profissional, mesmo em anos anteriores (dez anos a esta parte) em que as percentagens de negativas não atingiam os valores desta era pós moderna, mas os 35% ou 30% de classificações negativas eram para mim dados que me entristeciam. Nas vezes em que 50% dos alunos com quem trabalho não atingem um nível satisfatório de conhecimentos que os levem a progredir, sem grande sofrimento, para o ano seguinte ou para uma vida futura, serei considerada uma profissional sem sucesso e já agora uma incompetente. Então pus-me a divagar, coisa própria da idade, e concluí que afinal este meu insucesso é relativo. Vieram-me à memória pequenos casos que me aconteceram e que continuam a acontecer que me têm dado ânimo para continuar e manter a alegria de ensinar.

Estes pequenos episódios, entre outros, que me proponho contar não são para me vangloriar mas para dar um pouco de ânimo aos professores deste clube tristemente famoso a que normalmente chamo "O clube dos mais de 50%".

Há uns anos uma amiga e colega de Matemática veio do Porto visitar-me e vinha acompanhada da filha de 12 anos, assim acabamos no *McDonald's* para almoçar. Fomos atendidos por um ex-aluno meu que trabalhava lá mas também estudava no Técnico.

Distraída na conversa não tinha reparado nele, foi ele quem me cumprimentou delicadamente. A filha da minha amiga fazia colecção de *pins* e perguntou ao Carlos, o meu ex-aluno, onde poderia arranjar um *pin* igual aquele que ele trazia do *McDonald's*, o Carlos respondeu que já não havia mais pins desses, aquele era único e que também fazia colecção, entretanto tirou o pin e deu-lho. Esperamos pelo serviço, agora já com outro empregado, perguntámos pela conta e foi-nos dito que estava tudo pago. Chamei o Carlos e disse-lhe que não podia aceitar isso, ele respondeu: "Não se preocupe isto dá-me o maior prazer, também lhe quero agradecer pois foi com a professora que eu comecei a perceber Matemática". Fiquei muito emocionada por aquele reconhecimento simples, espontâneo e público. A minha amiga estava calada e só passado um bocado é que disse: "estou emocionada com tal reconhecimento por parte de um aluno".

O Ricardo, aluno que encontrei no 11° ano, há alguns anos atrás, começou com um teste de 4 valores e não ligava nada porque a Matemática "não era para ele". Como faço questão que todos os alunos passem pelo quadro de vez em quando, um dia o Ricardo foi ao quadro e com a minha ajuda foi fazendo o exercício. Quando acabou virou-se para a turma e disse: "Eu percebi isto". A partir daí começou a entender que a Matemática afinal era para ele. Passou no 11° ano com dez valores. Continuamos a trabalhar juntos no 12° ano, no exame nacional teve 12 valores. No início do ano lectivo seguinte fez questão de ir à escola para me comunicar que tinha entrado na Faculdade no curso de Economia.

Este ano trabalhei com duas turmas de 10° ano do Agrupamento Cientifico-Natural que na sua grande maioria não apresentava conhecimentos, nem *skills* (segundo os meus parâmetros) para iniciarem o ensino secundário. Serei pouco moderna quando considero que alunos que não conhecem uma linguagem mínima matemática, não são capazes de resolver sequer equações de 1° grau, não reconhecem uma inequação simples, nem percebem qual o seu significado, não sabem nada!

Os resultados do teste diagnóstico feito no início do ano lectivo indicavam que aproximadamente 76 % dos alunos demonstravam que não tinham conhecimentos mínimos para ingressarem no 10° ano. Como nunca desisto dos alunos, apostei neles, dei aulas extras de apoio. Alguns retribuíram estudando, os que tinham menos conhecimentos fizeram um grande esforço para atingir os objectivos mínimos definidos para o 10° ano, a falta de bases era profunda, alguns tinham tido sempre nível dois no ciclo anterior. A percentagem de classificações negativas do 1° período rondava os 80%, no terceiro período foi à volta de 60%, uma subida de 20% mas ainda grande insucesso! Deveremos também reparar nos 6, 7 alunos que conseguiram transitar de ano com 8 e 9 valores que não é grande base de partida mas representa algum sucesso para os que tinham grandes dificuldades.

Poderia continuar a relatar muitos mais casos de sucesso dentro do insucesso, tenho a certeza que todos os colegas terão situações semelhantes, mas escrevi isto como forma de animar a classe e sublinhar que mesmo que tenhamos dois casos por turma, alunos que na maior parte das vezes se consideram perdidos para a Matemática, e que para além de os incentivar na busca do conhecimento necessário temos que fazer um trabalho de mentalização para que se sintam capazes e confiem nas suas capacidades, estamos a ter sucesso pois estamos a trabalhar para o sucesso desses alunos.

Não posso deixar de lembrar os bons alunos que com o seu interesse e o seu trabalho não nos deixam cair na tentação de exigir menos quer de nós quer dos alunos.

São estes pequenos grandes nadas que me tem dado alento para continuar com esta profissão um pouco ingrata em que, na maior parte das vezes, se parte de um terreno "estagnado" em que pouco a pouco se consegue desbravar algumas parcelas preparando-as para um bom cultivo, para além de ter que concorrer com as novas posturas de vida, com a competição desenfreada da televisão e do computador.

Por isto tudo, meus caros colegas de Matemática, apesar de sermos politicamente, economicamente e estatisticamente um caso de insucesso profissional, considero que humanamente somos um caso de sucesso, nem que se trabalhemos só para um aluno.

Tudo é relativo, dentro deste insucesso, temos sucesso sim!

Desejo a todos um próximo ano lectivo bom, cheio de pequenos grandes sucessos.

**Márcia Freire**
**Escola Sec/3° José Cardoso Pires**
**Santo António dos Cavaleiros**

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de forma a tornar possível a sua inclusão na Revista.

# E quando uma aluna traz a regra para a aula?...

Sandra Marques    Sara Cabral Costa

Enquanto professoras sabemos bem que os alunos chegam à escola e às nossas mãos já possuidores de uma bagagem considerável de ferramentas ao nível de conhecimentos, estratégias e técnicas. No entanto, nem sempre é fácil lidar com isto, nem para a professora, nem para os restantes alunos, nem para quem acompanha os alunos nos seus estudos. O episódio que apresentamos surgiu no decurso de um projecto de investigação relacionado com o tópico matemático da proporcionalidade directa, numa turma de 6.° ano (Costa, 2007). Esta turma tinha pertencido à mesma professora no ano lectivo anterior (como turma do 5.° ano) e tinha uma dinâmica de aula que valorizava muito a participação dos alunos e os momentos de partilha de diferentes estratégias. Com frequência, os alunos, a partir de tarefas propostas, eram levados a formular as suas próprias estratégias que, posteriormente, eram discutidas e aprofundadas em grande grupo, também com a ajuda da professora (uma das autoras deste artigo).

## O episódio inesperado

No âmbito do projecto de investigação referido, foi aplicado um teste inicial que procurava identificar as estratégias mais intuitivas dos alunos e o seu desempenho na resolução de tarefas sobre o tema, ainda antes do ensino formal da proporcionalidade directa. Neste teste foram propostas várias tarefas distintas, umas de valor omisso (questões em que são dados três valores e pedido o quarto), outras de comparação numérica (questões em que são dados os quatro valores, pedindo-se ao aluno para os relacionar) e ainda outras onde tinham de identificar a existência ou não de proporcionalidade directa. Numa das tarefas de valor omisso, uma aluna usou a regra de três simples na sua resolução. A questão colocava-se: Onde aprendeu? Porque a aplicou nesta tarefa? Saberia aplicá-la com compreensão? A dúvida era mais do que legítima pois tal não sucedeu nesta situação! (Figura 1.)

As professoras mostraram-se surpresas por se tratar de uma aluna que estava a frequentar o 6.° ano pela primeira vez e não lhe ter ensinado tal procedimento no ano lectivo anterior. No entanto, decidiram não a questionar nesse momento e manter a dinâmica de aula, em que a professora propunha a tarefa aos alunos, individualmente ou a pares e, posteriormente, eram apresentadas as estratégias elaboradas pelos alunos e exploradas as dificuldades que surgiam.

Logo na segunda aula, no confronto de estratégias em grande grupo conduzido pelo questionamento da professora, um braço no ar indicava que havia alguém que ainda tinha uma estratégia diferente para apresentar. A Carla dirigiu-se ao quadro, tal como outros o tinham feito, e apresentou a regra de três simples como estratégia de resolução.

A regra tinha acabado de entrar na sala. O que fazer agora? Seria de desprezar? Quando um aluno é portador de uma informação, de um conhecimento extra-escolar, ou pelo menos, extra-aula, deve ou não essa experiência ser integrada na dinâmica de trabalho? Dever-se-á promover a sua discussão ou, por outro lado, pô-la de lado porque não interessa naquele momento, muito embora possa vir a interessar mais tarde, nessa mesma aula ou na semana seguinte? E o que fazer se, contrariando a intenção da professora, a estratégia apresentada acabar por ser adoptada pela maioria dos alunos?

Com a Carla no quadro, alguns alunos mostraram de imediato surpresa, pois consideraram esta estratégia muito "rápida" e "simples" de executar. A professora reforçou essa percepção e completou a explicação dada pela Carla, explo-

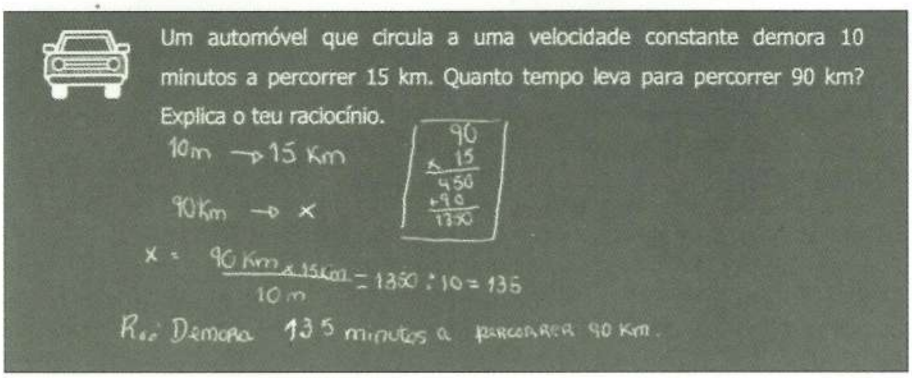



Figura 1. Resolução da Carla no teste inicial

rando algumas propriedades, relacionando-a, por exemplo, com a propriedade fundamental das proporções. Optou, assim, por não afastar a regra da sala mas sim integrá-la em conhecimentos dos alunos, tal como havia feito com outras estratégias.

## Daí em diante . . .

Esta estratégia mostrou-se muito atractiva para vários alunos, que passaram a utilizá-la com sucesso nas tarefas seguintes. A partir de então este procedimento foi tão valorizado pela professora como as outras soluções apresentadas (usando tabelas, taxa unitária, adições sucessivas, etc.). No entanto, esta estratégia parecia ser a eleita pelos alunos. Isto foi possível verificar na ficha de avaliação final onde muitos alunos usaram este procedimento, sempre com sucesso. Na entrevista final, a investigadora (a outra autora do artigo) constatou que todos os alunos utilizaram correctamente a regra de três simples (figura 2). No entanto, conseguiam, após solicitação, apresentar estratégias alternativas, alegando que usavam a regra de três simples por ser mais rápida.

Professora — Percebeste esse enunciado?

Carla — Sim... Diluir um copo e meio de concentrado em 9 de água... Ah posso fazer regra de três simples! Se... É um copo mais meio?

Professora — Pois copo e meio é um copo mais meio.

Carla — Um copo e meio ... Pronto... Um e meio de concentrado... Nove de água, três de concentrado... x. Três copos de concentrado vezes nove copos de água depois a dividir por um e meio de concentrado que dá 27 a dividir [usa calculadora] posso? Igual a 18... 18 copos de água.

Professora — Achas que haveria outra forma? Assim se não soubesses a regra de três simples ou não ias saber fazer?

Carla — Era... Mas não uso muito as outras...

Professora — Está bem mas põe aí a resposta...

Carla — Ah podia fazer tabela... Mas era mais elaborada e não cabe assim aqui e eu gosto mais de fazer isto... Tenho mais... Não sei... Tenho mais certezas!

Os alunos mostraram igualmente uma maior tendência para o seu uso quando se tratava de cálculos repetidos (figura 3). Isso mesmo ocorreu, com vários alunos, na tarefa do cálculo das quantidades necessárias para cada ingrediente de uma determinada receita (figura 4).

Marta — Então se ela foi... Dividimos isto [quantidade de cada ingrediente] por 4 e sabemos quanto é que era para cada ovo. 50 g a dividir por 4 é 12,5; 250 a dividir por 4 é 62,5 g; 200 g a dividir por 4 era 50 gramas... Então... Então aqui fazia-se agora... Se ela tinha seis ovos então [pausa, olha para dados iniciais] ... Ah! Se não fizéssemos isto fazíamos por regra de três simples.

Professora — Já estás a usar outra estratégia...

Marta — Pois então aqui fazia-se 6 vezes 50 g a dividir por 4 que era igual a 75 g. [calcula mentalmente, usa calculadora para confirmar] Já sabemos que este aqui é farinha, depois a mesma coisa com os outros ingredientes... Que é igual a 12000 a dividir por 4 que vai dar 300 g de açúcar e depois só falta manteiga... 4 ovos, 50 g se forem 6 ovos deverá usar 6 vezes 50 a dividir por 4. Deverá usar 375 g de farinha, 300 g de açúcar e 75 g de manteiga.

Professora — Vou só perguntar uma coisa... Por que é que abandonaste esta estratégia? Estava errada?

Marta — Não, é que é mais fácil andar a fazer assim, se fizesse assim demorava mais tempo.

Professora — Outras estratégias?

Marta — A proporção, a tabela...

Foi precisamente a propósito de uma questão colocada na entrevista (figura 5) que a Carla afirmou que já conhecia esta regra ainda antes de ingressar no 2.° ciclo:

Carla — Porque no ATL onde eu ando... Prontos... É uma maneira que eu faço... Porque eu já não me lembrava mas lá no ATL disseram-me que havia esta regra... Eu já não me lembrava mas sabia como é que se fazia e pronto comecei a utilizar.

Professora — Sabias antes do ATL?

Carla — Sabia! Na professora do... Do 1.° ao 4.°...

Professora — E falaram desta regra?

Carla — Sim, utilizámos mas não era assim muito usada... Porque não era assim tão difícil [as tarefas]!

## Reflexão final

A regra de três simples é, possivelmente, uma estratégia usada ao longo da vida pela maioria das pessoas que a aprenderam, por exemplo quando se pretende saber quantos litros de combustível se prevê gastar um carro numa viagem, escolher entre duas promoções do tipo leve $x$ e pague $y$ num supermercado, efectuar um câmbio monetário ou converter unidades de medida.

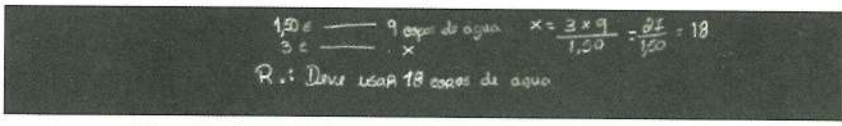



Figura 2 — Regra de três simples numa tarefa de valor omisso, durante a entrevista

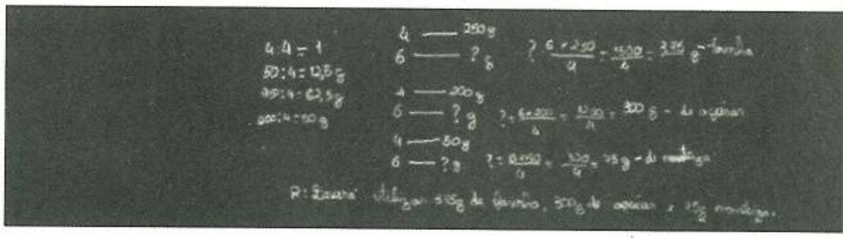


Figura 3 — Regra de três simples num cálculo repetitivo

6. Na hora do lanche, Ricardo lembrou-se de uma receita que a avó fazia sempre. Foi ver os ingredientes para pedir à mãe para o fazer ...

200 gr de açúcar;

200 gr de farinha;

4 ovos;

50 gr de manteiga;

A mãe quis fazer um bolo maior e resolveu usar os 5 ovos que tinha em casa. Indica as quantidades dos outros ingredientes que vai ter que usar, para que o bolo tenha o mesmo sabor.

Figura 4

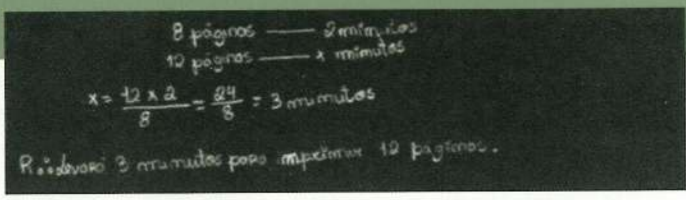



Figura 5 — Um dos momentos da entrevista em que o aluno usou a regra de três simples

Embora assente numa relação numérica, esta regra é possivelmente um dos aspectos mais visíveis, a par de outros, da Matemática no contexto da realidade. No entanto, nem sempre é aplicada com compreensão, servindo de "fórmula mágica" para encontrar a resposta a um problema em que, a partir de três valores, pretendemos obter o quarto. Trata-se assim de uma ferramenta poderosa de resolução de problemas envolvendo situações de proporcionalidade directa.

Apesar da abordagem da regra de três simples não fazer parte da planificação da professora, a cultura de sala de aula aberta à comunicação por parte dos alunos das suas estratégias, levou a que esta ferramenta chegasse a toda a turma. A professora tinha habituado os seus alunos a discutir os assuntos em plenário. Usualmente, partia das produções apresentadas pelos alunos para discutir as diferentes estratégias de resolução e as representações a que eles chegaram. A resolução de problemas assente numa reflexão dos alunos sobre o modo como pensaram fez com que, entre outras estratégias, surgisse a regra de três simples.

A abordagem adoptada pela professora foi a de relacionar esta regra com os conhecimentos que os alunos já tinham, associando-a à propriedade fundamental das proporções. Assim, em vez de afastar esta ferramenta trazida pela aluna, optou por estabelecer conexões com os conhecimentos anteriores, procurando criar condições para a sua compreensão por todos os alunos.

Por outro lado, parece-nos muito importante levar os alunos a distinguir situações em que existe proporcionalidade directa das situações em que tal não ocorre. É necessário considerar de uma forma equilibrada ambas as situações, e levar os alunos a reconhecer que a regra de três simples somente é aplicável a situações de proporcionalidade directa. Assim, ao serem confrontados com os dois tipos de situações, os alunos devem ser capazes de reconhecer que estratégias podem usar, inclusivamente estratégias pessoais de resolução de problemas. Ou seja, o importante é que os alunos perante uma tarefa (de cariz proporcional ou não) consigam aplicar, com compreensão, uma estratégia eficaz, formal ou informal.

É importante que quem conhece a regra perceba que nem sempre, em situações em que são dados três valores e pedido o quarto, a pode usar. Além disso, se a regra for aplicável, tem de se saber usá-la bem, relacionando os valores apropriados. Para isso, uma boa compreensão das relações multiplicativas e da propriedade fundamental das proporções são elementos essenciais. Ignorá-los e apenas praticar a regra, só pode produzir um conhecimento superficial, que permite resolver exercícios de rotina, mas se mostra inadequado para resolver problemas ligeiramente diferentes do habitual.

## Referências

Costa, S. (2007). *O raciocínio proporcional dos alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

**Sandra Marques**
Escola E. B. 2, 3 Piscinas, Lisboa
Escola Superior de Educação de Lisboa

**Sara Cabral Costa**
Escola E. B. 2, 3 Gaspar Correia, Portela
Escola do Hospital de Santa Maria, Lisboa

# Triangulando . . . ou os devaneios de dois adolescentes

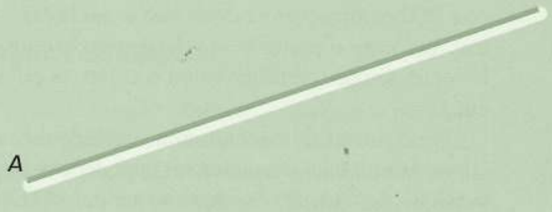
Rafael Gonçalves    Sofia Rodrigues    Sónia Figueirinhas

O Rafael e a Sofia, no ano lectivo 2007/2008, eram alunos da mesma turma de 9° ano, na Escola Básica de 2° e 3° Ciclos Roque Gameiro, na Amadora.

No 3° período, combinei com alguns alunos que, semanalmente, lhes proporia um "TPC" diferente do usual. A entrega desse trabalho não era obrigatória e tinham uma semana para pensar na proposta e resolvê-la. Quer o Rafael quer a Sofia entregaram sempre esses trabalhos, nos quais se envolveram com o entusiasmo e o empenho que lhes conheci durante dois anos. O artigo que aqui se publica é resultado desse primeiro enunciado, a que chamei *Uma investigação a propósito da classificação de triângulos*. Optei por intervir pouco no texto redigido pelos alunos e na linguagem que empregaram, sobretudo por pensar que está garantida a correcção e a clareza do discurso e das conclusões.

Considera o segmento de recta *AB*. Encontra todos os pontos *C* de forma a que o triângulo *ABC* seja:

| | |
|---|---|
| A.–Rectângulo | B.–Acutângulo |
| C.–Obtusângulo | D.–Isósceles |
| E.–Escaleno | F.–Equilátero |



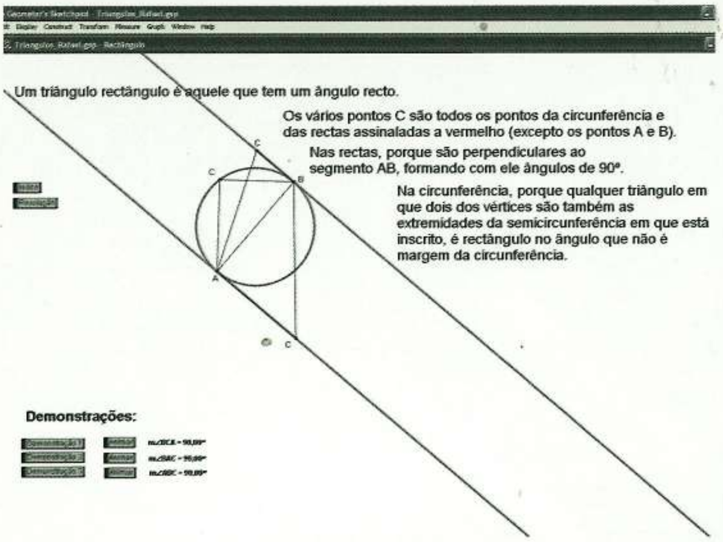



Figura 1

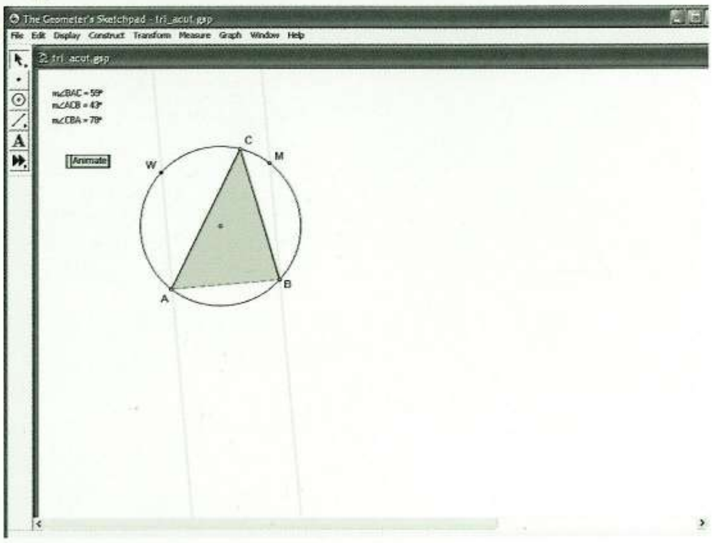



Figura 2

Assim que a professora nos entregou a proposta, pensámos: "até me parece uma actividade acessível" (Sofia) e "isto vai ser fácil" (Rafael). Pareceu apenas mais uma daquelas tarefas 'malucas' da nossa professora (que, às vezes, dão muito que pensar). Contudo, quando lemos aquilo mais tranquilamente, depressa nos apercebemos que "era um pouco mais trabalhoso" (Sofia), "não seria assim tão fácil, pois havia ali situações com infinitas soluções" (Rafael) e que talvez exigisse construções dinâmicas.

Nalguns casos, somente após inúmeras tentativas é que conseguimos chegar ao que se pretendia, pelo que o desafio acabou por ser bem mais complicado do que parecia inicialmente.

A existência de um programa que permite fazer construções geométricas que não são estáticas — o GSP — ajudou imenso, pois, de outra forma, não imaginamos como iríamos resolver o desafio e entregar à professora (talvez em papel — com 200 construções e outras tantas medições — para mostrar que, com o ponto $C$ em determinado sítio, os triângulos eram sempre rectângulos ou equiláteros ou acutângulos, etc.).

No decorrer da tarefa, foram surgindo dificuldades, tais como: "como é que vou mostrar que, dentro daquelas rectas paralelas, o triângulo é sempre acutângulo?" "Dentro de que limites posso fazer deslocar o ponto $C$?"

## Classificação quanto aos ângulos

Na primeira alínea, a professora pedia-nos todos os pontos $C$ de maneira a que o triângulo $ABC$ fosse rectângulo. Em primeiro lugar, pensámos logo na matéria que tínhamos dado antes (todos os ângulos inscritos numa semicircunferência têm 90°) e fizemos uma circunferência cujo diâmetro era $AB$.

Depois lembrámo-nos que o triângulo podia ser rectângulo num dos outros dois vértices. Para em $A$ haver um ângulo recto, então $C$ tinha de estar numa posição em que o segmento $AC$ fosse perpendicular ao segmento dado em $A$. Por isso, traçámos uma recta perpendicular ao segmento $AB$ e que passava em $A$. O mesmo se aplicava a $B$. Chegámos à conclusão que todos os pontos dessas duas rectas e dessa circunferência podiam ser pontos $C$, e foi assim que chegámos à solução (figura 1).

Na segunda alínea, já houve divergências entre nós...

Um dos raciocínios (errados) surgidos durante a investigação da segunda alínea foi: "Para o triângulo ser acutângulo, tenho que construir uma circunferência que passe pelos pontos $A$ e $B$. Depois, traço rectas perpendiculares a $AB$ que passem pelos pontos $A$ e $B$. A partir daí, verifiquei que, se o ponto $C$ se encontrasse entre as rectas paralelas, o triângulo teria todos os ângulos agudos. Então, o vértice $C$ pode

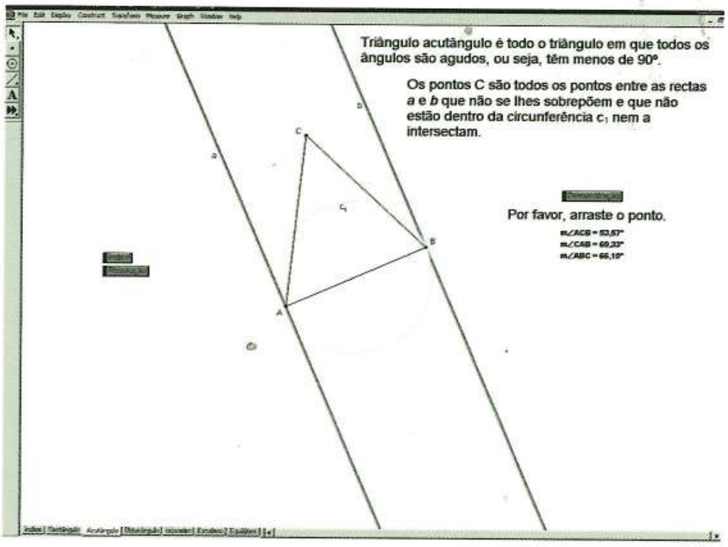



Figura 3

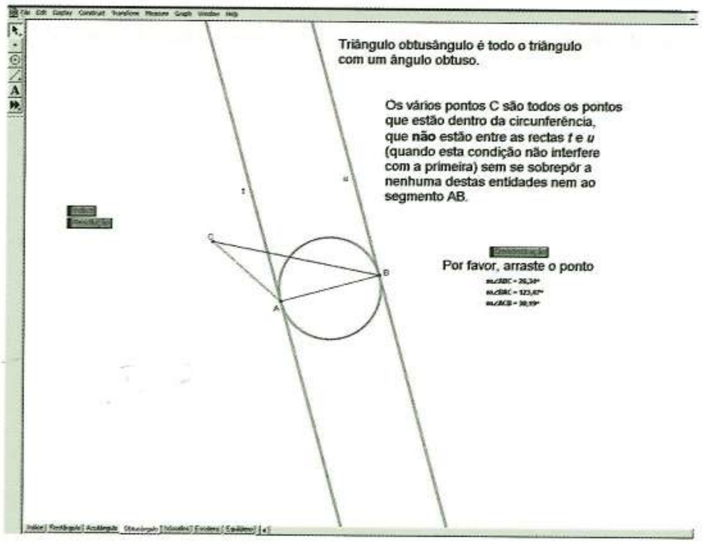



Figura 4

ser qualquer um dos pontos pertencentes ao arco $WM$, com excepção dos pontos $W$ e $M$, uma vez que se o ponto $C$ coincidisse com um desses pontos, o triângulo seria rectângulo em $C$".

Fazendo deslocar o ponto $C$ ao longo da circunferência, contudo, viu-se que isto era verdadeiro para os pontos do arco referido, mas não para o resto dos pontos da circunferência e que estão entre as rectas paralelas (arco $AB$), pelo que o raciocínio teve de ser revisto (figura 2).

O outro raciocínio foi: "Para o triângulo ser acutângulo, devo fazer duas rectas perpendiculares ao segmento, uma que passe em $A$ e outra que passe em $B$, visto que se o ponto C se encontrar entre as duas rectas, todos os ângulos vão ser agudos. Mas depois de «desenhar» as rectas, e de ver os resultados, apercebi-me que havia uma região muito próxima do segmento dado em que o ângulo em $C$ era obtuso... Comecei por desenhar um quadrado cuja diagonal era o tal do segmento, mas depressa me apercebi que mesmo assim havia zonas entre as duas rectas e fora do quadrado em que um dos ângulos não era agudo. Só depois me lembrei da alínea anterior. Ora, se o ponto $C$ fosse parte da circunferência cujo diâmetro é o segmento dado, então o ângulo $ACB$ seria recto, e o triângulo, rectângulo, ou seja, para o triângulo ser acutângulo, o ponto $C$ tinha de estar entre as duas rectas mas sem intersectar a circunferência de diâmetro $AB$. Mas e se fosse dentro da circunferência? Eu já tinha visto que havia zonas em que o triângulo ficava obtusângulo, e não rectângulo nem acutângulo, como era pretendido. Por isso pensei: e se existir uma espécie de «dégradé» em que os ângulos fora da circunferência têm menos de 90° (excepto quando não estão entre as duas rectas), em que os ângulos que intersectam a circunferência têm exactamente 90° (porque como já foi dito antes, todos os ângulos inscritos numa semicircunferência têm 90°) e em que os ângulos dentro da circunferência têm mais de 90°? Tentei comprovar a minha ideia arrastando o ponto no *Sketchpad* (é por motivos como este que um programa de geometria dinâmica dá muito jeito) e deu certo. Assim, para o triângulo ser acutângulo, o ponto $C$ tem de estar entre as duas rectas mas no exterior da circunferência."

Este processo permitiu resolver, ao mesmo tempo, duas alíneas do enunciado (figuras 3 e 4).

## Classificação quanto aos lados

Relativamente ao triângulo isósceles, começámos por desenhar $[AB]$ e a partir dele traçámos a mediatriz, $k$. Qualquer ponto da recta $k$, à excepção do ponto médio do segmento $AB$ — que é colinear com $A$ e com $B$ e, nesse caso, não forma um triângulo — pode ser o ponto $C$.

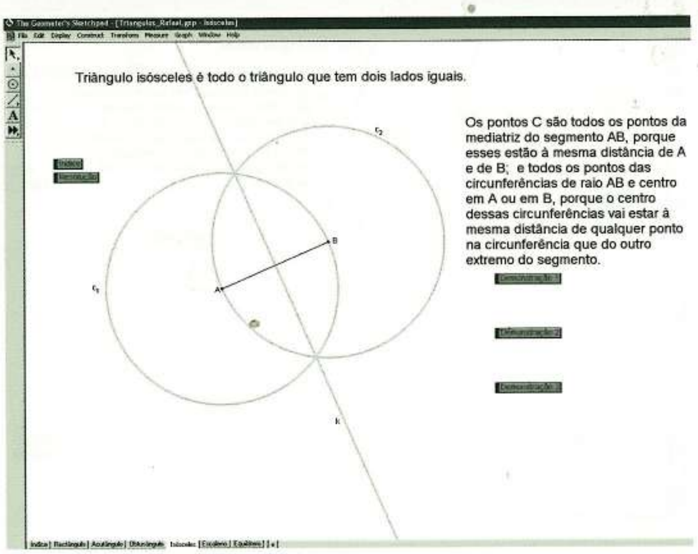



Figura 5

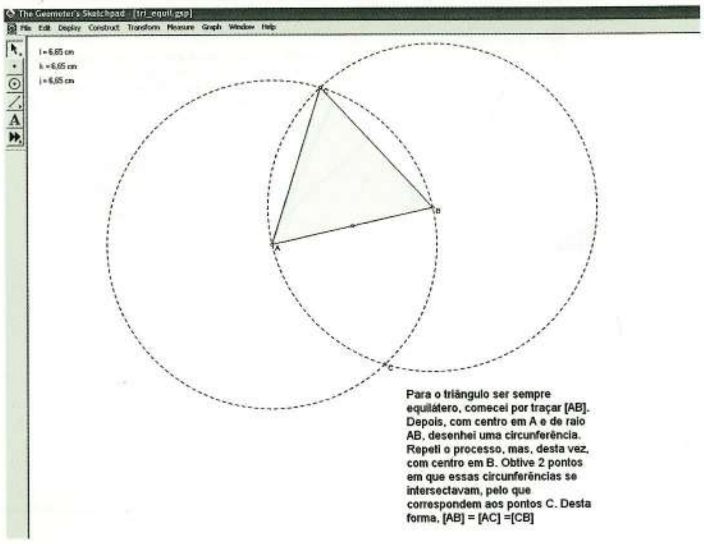



Figura 6

Nesta situação, os lados iguais vão ser os que concorrem em $C$, mas também temos de ter em conta que os lados iguais podem ser os concorrentes em $A$ ou em $B$ e, por isso, temos de construir duas circunferências, uma de centro em $A$ e raio $AB$, e outra de centro em $B$ e raio $AB$ porque, assim, qualquer ponto $C$ dessas circunferências, desde que não coincida com $A$ ou com $B$, está a uma distância do centro ($A$ ou $B$) igual ao lado $AB$ (raio da circunferência) e forma com os outros dois pontos um triângulo isósceles (figura 5).

Ao fazer esta construção, descobrimos duas situações em que o triângulo isósceles era equilátero: o ponto $C$ situa-se na intersecção das circunferências com a mediatriz.

No écrã que surge na figura 6 pode ver-se a resolução e explicação para a penúltima alínea da investigação.

Visto que os pontos sobre a mediatriz de $[AB]$ e sobre as circunferências de raio $AB$ com centro em $A$ ou em $B$ dão origem a triângulos equiláteros ou isósceles, para o triângulo ser escaleno, os pontos $C$ tinham de estar fora desses três elementos (figura 7).

## À laia de conclusão …

### Alunos

Bom, divertimo-nos imenso, quer a realizar a actividade (o que nos permitiu aprofundar os nossos conhecimentos de geometria, e, ao mesmo tempo, descobrir e explorar as facetas desconhecidas do Geometer's Sketchpad, que embora já tivéssemos explorado nas aulas, não tínhamos tido oportunidade de aproveitar certas funcionalidades como os botões de "esconder" e "revelar", e os botões de animação), quer a escrever o artigo em si (porque fortalecemos as relações entre nós, colegas, e com a professora, o que é sempre positivo), e achamos que esta proposta da professora, uma proposta diferente das actividades normais e rotineiras características desta fase escolar, nos conseguiu cativar e embora não tivesse contado para a nota, despertou-nos a curiosidade.

### Professora

Para que o artigo aparecesse escrito, professora e alunos reuniram semanalmente na escola mas, entre essas reuniões, trocou-se muita correspondência electrónica, o que suscitou algumas situações interessantes, quer a nível da comunicação, quer a nível matemático. Abaixo transcrevem-se duas delas:

*Mensagem do Rafael, depois de muito insistir junto de ambos para que escrevessem sempre com conhecimento a todos:*

"Gostaria que a Sofia me enviasse a versão alterada do texto, para verificar se o meu raciocínio é igual, visto que o ficheiro que vinha anexado no mail dela (Desculpa por me estar a re-

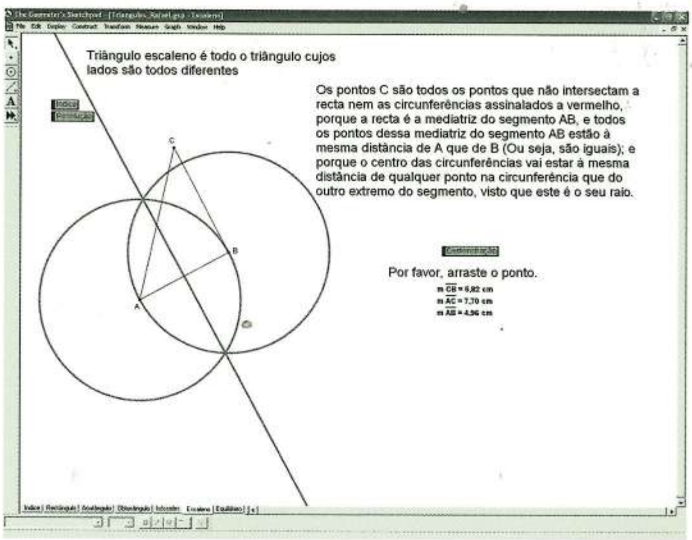



Figura 7

ferir a ti na terceira pessoa, mas isto de escrever um mail para duas pessoas é um bocado esquisito ...) era o mesmo que vinha anexado no primeiro mail enviado pela professora."

*Troca de mensagens entre os alunos aquando da escrita de parte do texto:*

**Sofia**

"Relativamente ao triângulo isósceles (sketch09), comecei por desenhar o $[AB]$, a partir do qual obtive a mediatriz. Assim, tracei uma mediatriz, para que esta pudesse conter todos os pontos $C$. Posto isto, concluo que qualquer ponto da recta $k$, à excepção do ponto $D$ — que é colinear com $[AB]$ e, nesse caso, não se formaria um triângulo — pode ser o ponto $C$."

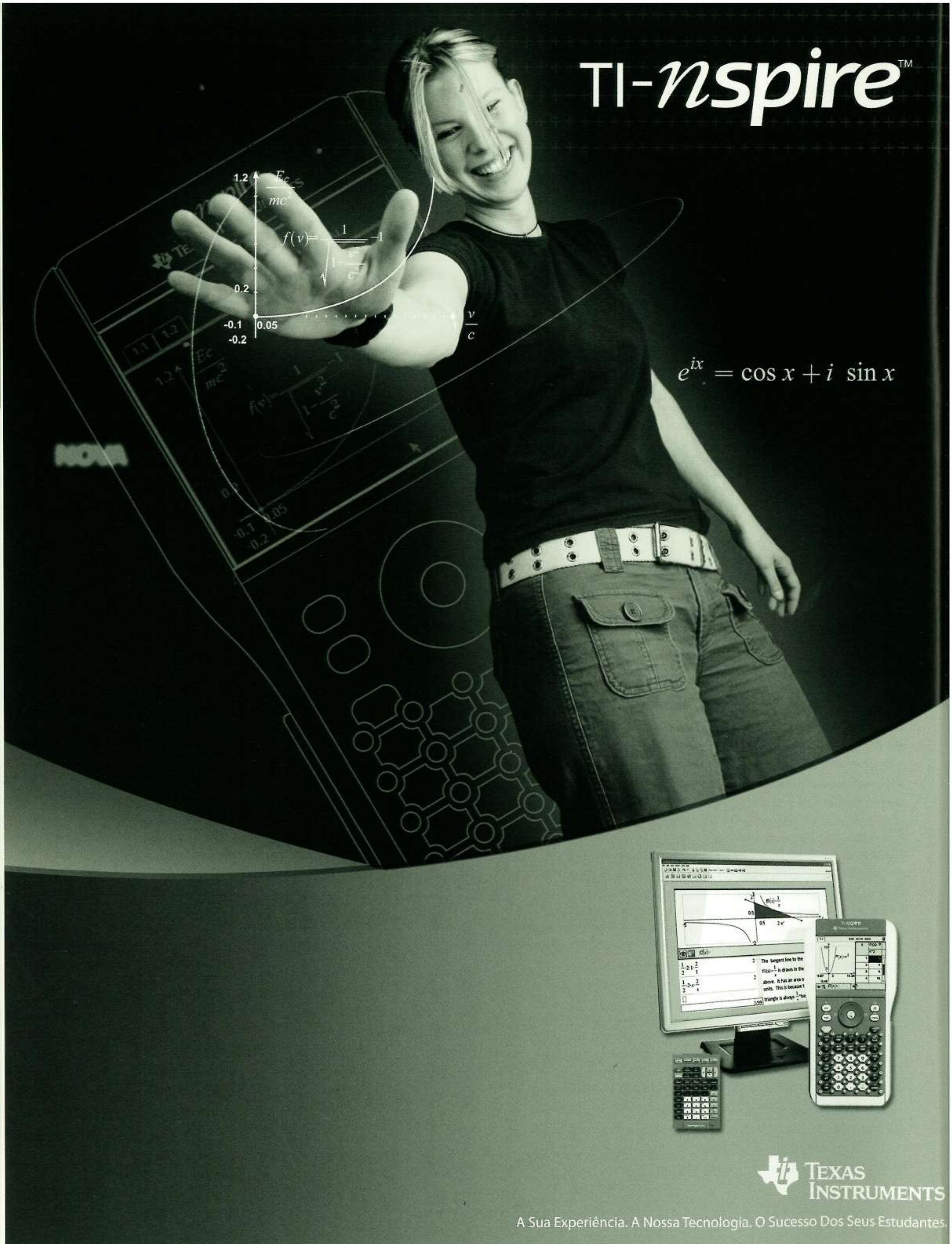
**Rafael**

"Quanto aos lados, Sofia, está incompleto porque assim, como tu descreveste, os lados iguais vão ser os que se tocam em $C$, e também temos de ter em conta que os lados iguais podem ser os que se tocam em $A$ ou em $B$, e para isso, temos de construir duas circunferências, uma de centro em $A$ e raio $AB$, e outra de centro em $B$ e raio $AB$, porque assim, o centro dessas circunferências vai estar à mesma distância de qualquer ponto na circunferência que do outro extremo do segmento."

## Um último pensamento:

Ainda que seja francamente estimulante ver que os alunos trabalham com qualidade e persistência mesmo que não seja "para a nota", pergunto-me porque se convenceram eles que não contaria...

**Rafael Gonçalves**
**Sofia Rodrigues**
**Sónia Figueirinhas**
**EB 2,3 Roque Gameiro, Amadora**


TI-nspire™
$e^{ix} = \cos x + i \sin x$
TEXAS INSTRUMENTS
A Sua Experiência. A Nossa Tecnologia. O Sucesso Dos Seus Estudantes.

# Sempre a aprender ...

Nuno Candeias

A partir do dia em que decidi ser professor empenhei-me em obter mais e melhor formação para conseguir ensinar melhor os meus alunos. Não me ocorreu que iria aprender tanto com eles. Isso tem acontecido durante os meus dez anos de ensino e, em particular, aconteceu com um conjunto de alunos que jamais poderei esquecer.

Os três episódios seguintes ocorreram durante uma investigação educacional que empreendi com uma turma de alunos do 8.° ano durante os temas referentes à geometria. Durante, praticamente, quatro meses os alunos resolveram diversas tarefas recorrendo exclusivamente a *software* de geometria dinâmica. A sala de aula passou a ser uma sala de informática equipada com 14 computadores e um projector multimédia. As tarefas, 26 no total, foram essencialmente de três tipos: exploração, investigação e resolução de problemas (Ponte, 2003). A metodologia de ensino assentou no trabalho a pares, uma vez que na sala não existia um computador para cada aluno. Aprendi com todos, mas aqui cinjo-me a um par de alunos, André e José, que tiveram um desempenho notável aquando da implementação da referida proposta curricular.

André tinha na altura 13 anos e era bastante reservado, apresentando um bom comportamento dentro da sala de aula, mas que tinha algumas dificuldades de aprendizagem a Matemática. Era um rapaz sereno, pouco interventivo e pouco participativo nas aulas. Costumava levar muito tempo a realizar os exercícios pedidos e, na maior parte das vezes, só copiava o que está no quadro. Quando existia trabalho de grupo refugiava-se nos colegas, pois tinha, ainda, algumas dificuldades em perceber português. Apesar de tudo tinha tido sucesso na escola. As suas raízes eram guineenses e estava em Portugal desde os seus 8 anos. Vivia com familiares, uma vez que os seus pais ficaram na sua terra natal. O seu olhar expressivo, o telemóvel de última geração e o boné eram a sua imagem de marca.

André tinha um grande respeito e amizade por José, com o qual começou a trabalhar em grupo durante o 2.° período do 7.° ano, na altura com algumas negativas que precisava de recuperar. Nessa época José começou a ajudá-lo nas aulas de estudo acompanhado, continuando sentado ao pé dele em várias disciplinas. Isso permitiu que André melhorasse consideravelmente o seu aproveitamento, tendo transitado paro o ano lectivo seguinte sem nenhum nível inferior a três.

José era um aluno brilhante a todas as disciplinas, excepto a Educação Física, na qual não conseguia ter melhor do que nível três, apesar de praticar vários desportos. É comum ter 100% nos testes das restantes disciplinas, ficando aborrecido consigo próprio quando isso não acontece. Nas suas intervenções na aula, sempre de alto nível, utiliza raciocínios brilhantes e um vocabulário avançado para a sua idade, que deixam quem o ouve falar pela primeira vez atónito e admirado com a sua verborreia. Como não vira a cara a um desafio, José tinha grandes expectativas quando coloquei aos alunos a hipótese de participarem num estudo, no qual iriam utilizar, durante um período de tempo considerável, um programa informático para aprender geometria.

## Construção de triângulos

Nesta tarefa de *exploração* pretendia-se que os alunos aprendessem a construir triângulos isósceles e equiláteros. Depois, era-lhes pedido que relacionassem diversos tipos de triângulos classificados quanto aos lados e quanto aos ângulos. A construção de triângulos rectângulos também foi importante, uma vez que estes seriam estudados em tarefas

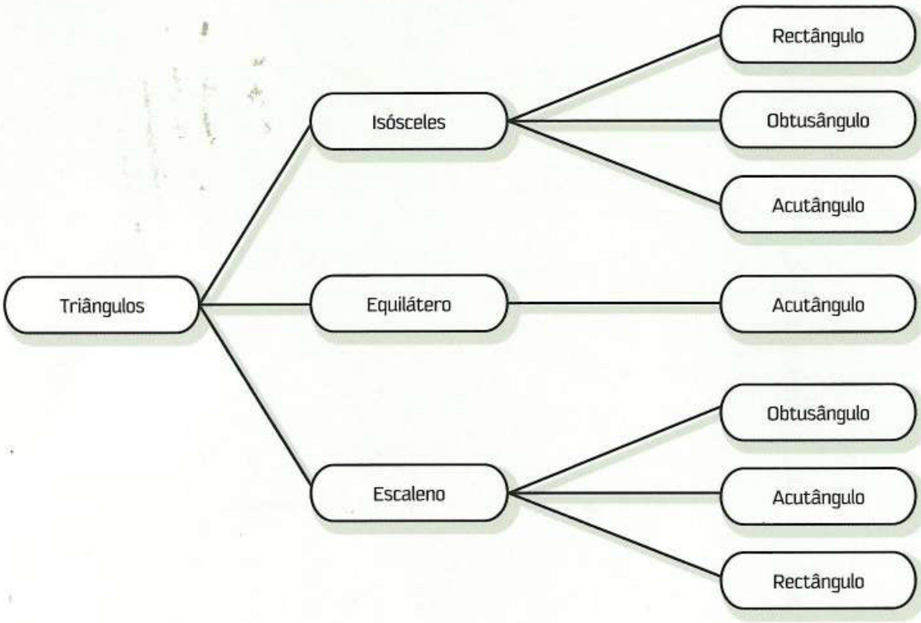



Figura 1. Aspectos essenciais do esquema apresentado por André e José na resposta à questão 4 b).

posteriores. Um dos pontos abordados durante a realização da tarefa por todos os grupos, e também na discussão final, prendeu-se com o esquema que comparava todos os triângulos anteriores:

> 4 b) *Investiga as relações que existem entre os triângulos acutângulos, obtusângulos, equiláteros, isósceles e escalenos. Faz um esquema das relações que encontraste.*

André e José não sentiram grandes dificuldades. Foi o único grupo que realizou uma investigação completa, relacionando as classificações de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos, tendo apresentado um esquema cuja essência se reproduz na figura 1.

Este esquema foi o resultado das conclusões a que os alunos foram chegando à medida que responderam às questões da tarefa. Destas salientou-se a que os interrogava sobre a possibilidade de existir um triângulo equilátero que fosse simultaneamente um triângulo rectângulo.

## Lugares geométricos

Esta tarefa de avaliação consistiu na resolução de nove problemas relacionados com lugares geométricos. Para os resolver, os alunos tiveram que construir e relacionar entre si circunferências, coroas circulares, mediatrizes, triângulos e rectângulos. O enunciado do problema 3 era o seguinte:

> *Num jogo de basquetebol a bola está a 4 metros do Manuel e a 5 metros da Sara. Onde está a bola?*

André e José apresentaram uma solução (figura 2) que partia da posição da bola para indicar as posições possíveis de Manuel e Sara, ou seja, inverteram o problema simplificando-o.

Se tivessem marcado primeiro a posição dos alunos da questão, a resposta ao problema (a posição da bola) dependeria da distância a que eles estavam um do outro. No comentário que elaborei sobre a sua resolução, propus-lhes que tentassem resolver o problema novamente, mas começando por colocar as posições das personagens da questão, desenhando as circunferências com os raios da questão e, posteriormente, investigando as várias hipóteses de resposta que existiriam. Os alunos aceitaram o desafio e tentaram encontrar todas as soluções possíveis para o problema. Construíram duas circunferências: uma centrada em Manuel, de raio 5, e outra centrada em Sara, de raio 4. Depois, movimentaram uma delas para verificar se existia solução e sintetizaram, da seguinte forma, as várias respostas possíveis:

(i) se eles estiverem a mais de 9 m, não existe solução para o problema (as circunferências não se intersectam); (ii) se eles estiverem a menos de 9 m e a mais de 1 m, a bola pode estar em dois locais diferentes (pontos de intersecção das duas circunferências); (iii) se eles estiverem exactamente a 1m, só existe lugar possível para a bola (as circunferências são tangentes); e (iv) se eles estiverem a menos de 1 m, volta a não existir solução (as circunferências não se intersectam).

## Pavimentações com translações

Quando realizaram esta tarefa de investigação, os alunos já tinham resolvido duas tarefas relacionadas com translações e vectores. Nesta pretendia que estudassem as pavimentações utilizando essa transformação geométrica. A última questão foi a que suscitou mais interesse, pois conduzia os alunos a uma pequena investigação sobre as figuras que permitem pavimentar:

Ex. de Manuel Bola = 4,00 cm
Bola Ex. Sara = 5,00 cm

3 O Manuel pode estar num raio de 4cm enquanto a Sara se situa num raio de 5cm da bola.

Processo de resolução
Marcámos um ponto – a Bola – e depois com o menu Transform construímos dois pontos,
uma a 4cm do ponto "bola" e outro a 5 cm.
No fim traçámos duas circunferências, cada uma a passar nos pontos contruídos anteriormente,
a 4cm e 5cm.

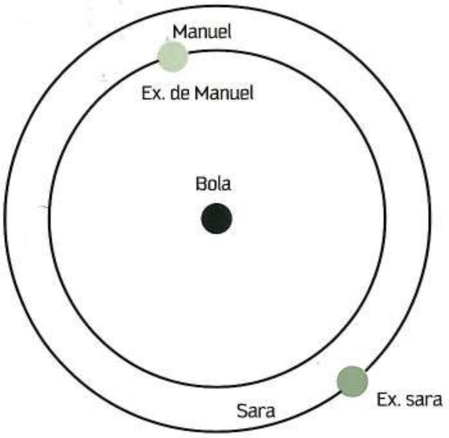



Figura 2. Solução inicial apresentada pelos alunos.

> *E se partíssemos inicialmente de outros quadriláteros [o rectângulo tinha sido estudado nas questões anteriores] também conseguiríamos pavimentar? E com triângulos? Regista as tuas descobertas.*

André e José elaboraram conjecturas interessantes, tendo inclusive alargado a sua investigação a outros polígonos: pentágonos e hexágonos. Depois das experiências e descobertas que fizeram, culminaram a sua investigação tentando encontrar uma relação entre o número de eixos de simetria de um polígono e a possibilidade de ele pavimentar ou não. Nessa altura travou-se o seguinte diálogo:

*Professor* — Então já conseguiram responder à última questão?

*José* — Já! Percebemos que os quadrados e os rectângulos permitem pavimentar.

*Professor* — Porquê?

*José* — Conseguimos fazer translações deles para cobrir tudo.

*Professor* — E já experimentaram com triângulos?

*José* — Dava com os equiláteros, mas tínhamos que rodar alguns, logo não eram translações.

*Professor* — Correcto! E com losangos e papagaios, dá?

*José* — Com losangos dá, mas com papagaios não dá. Eu acho que tem a ver com os eixos de simetria.

*Professor* — Porquê?

*José* — O quadrado tem 4, o rectângulo tem 2, o losango também tem 2 e o papagaio tem só 1.

*Professor* — E com o paralelogramo?

*José* — Dá e tem 0 eixos de simetria.

*Professor* — Então que conjectura é que escreverias?

*José* — Acho que quando o número de eixos de simetria é par dá para pavimentar com translações.

*Professor* — Essa conjectura é interessante. Teríamos de arranjar uma demonstração para ver se a conjectura é verdadeira, ou um contra exemplo para dizer que é falsa.

Alguns minutos depois José voltou a chamar-me para me dizer que o hexágono tinha 6 eixos de simetria e também pavimentava. Assim, ficou convencido da sua conjectura, uma vez que não tinha encontrado nenhum contra exemplo. Na folha de resposta da tarefa escreveram:

> Apesar de ser impossível com triângulos pavimentar, usando apenas o *Translate* [translação do *software* de geometria dinâmica]. Já com quadriláteros, apenas o rectângulo, quadrado e losango permitem pavimentar, pois têm eixos de simetria pares. Indo mais além, todas as figuras com eixos de simetria pares permitem pavimentar o *sketch*.

À noite, com o auxílio do *Sketchpad*, construiu um octógono regular e percebi de imediato que com este polígono era impossível pavimentar. No início da aula seguinte sentei-me ao computador com os alunos e revimos o *sketch* que tinham construído anteriormente. De seguida construímos um octógono regular e os alunos tentaram pavimentar com este polígono utilizando translações. Ficaram admirados ao verificarem que não era possível pavimentar o plano, apesar do octógono ter um número par de eixos de simetria. Nessa altura conversámos sobre os ângulos internos desse polígono e o facto de a sua amplitude, 135°, não ser divisor de 360° e, como tal, não permitir pavimentar. Depois os alunos começaram a resolver outra actividade, mas ficou evidente para mim as conexões que este assunto teria com a geometria que se ensina no 9.° ano: rotações e os ângulos internos de polígonos.

## Reflexões finais

Estes três episódios de aprendizagem referem-se ao desempenho de André e José e ao papel que o professor teve, de algum modo, nessa aprendizagem. Mas também apresentam situações em que os alunos influenciaram a aprendizagem do professor.

No primeiro caso relacionado com o desenrolar da tarefa 3, a possibilidade de os alunos sistematizarem as suas ideias leva-os a construir um esquema que explica e organiza localmente os vários tipos de triângulos e as relações entre eles. Essa organização leva-os a perceber as relações que existem entre lados e ângulos dos diferentes tipos de triângulos e a entender que só um deles, o equilátero que só pode ser acutângulo, tem características que o elevam a uma categoria diferente. É um triângulo muito especial e com um papel de relevo no estudo da geometria plana. Eu aprendi como uma questão bem colocada, pode levar os alunos a desenvolverem esta capacidade de sistematização, tão mal tratada no nosso ensino. A apresentação já sistematizada de factos e características de determinada teoria pode ser substituída por um conjunto de sugestões e explorações que podem ajudar os alunos a apreendê-la de uma forma mais consistente. O questionamento, neste caso escrito, mas também o oral são decisivos para fomentar a compreensão dos alunos (Long, 1992; Menezes, 199).

O segundo momento de aprendizagem referido neste artigo leva-nos para a importância de ao encontrar uma solução de um problema que acreditamos estar correcta ser necessário verificar se esta responde totalmente ao problema. Mas para que isso aconteça é necessário dar tempo e permitir que os alunos comecem a resolver o problema, o que leva ao início da sua compreensão. Apesar de André e José terem tido mais dificuldades na resolução de problemas geométricos é de salientar que apesar deste problema fazer parte de uma tarefa de avaliação que já tinha um comentário avaliativo os alunos voltaram a tentar partindo dessas indicações. Aprendi com eles a tentar e se não se conseguir resolver de imediato tentar outra vez. Eles foram persistentes, como professor também o tenho de ser. Eles gostavam de um bom desafio!

O último momento de aprendizagem permite elucidar um tipo de situação em que o professor não consegue explicar ou justificar uma afirmação no momento. Mas a possibilidade de reflectir mais pausadamente levou ao surgimento do contra exemplo e até a uma possível estratégia para iniciar o estudo de um novo tema. Em situações mais problemáticas mais abertas é possível que surjam conjecturas cuja aceitação ou negação não seja imediata, mas isso possibilita também a aprendizagem por parte do professor, mesmo em temas que se julga dominar totalmente. Não deixar os alunos com ideias matemáticas erradas sempre foi uma das minhas principais preocupações quando ensino. Por vezes a dificuldade reside em encontrar a melhor maneira de explicar, justificar ou negar rapidamente o que é dito na sala de aula. No entanto, penso ser preferível não deixar os alunos a pensar algo que esteja errado. Neste caso a discussão cingiu-se ao professor e ao grupo de dois alunos. Porém podia ter ocorrido com afirmações feitas pelos alunos perante toda a turma e nesse caso torna-se necessário discutir e, por vezes, voltar a discutir mais tarde com todos a veracidade ou refutação de conjecturas. Aqui as discussões em grande grupo desempenham uma papel fundamental neste aspecto da aprendizagem, em particular dos conceitos geométricos (Gardiner e Hudson, 1998).

Por fim, gostaria de referir o papel que os ambientes de geometria desempenharam tanto na aprendizagem dos alunos, como na minha própria. Não me revejo no cepticismo apresentado por uma professora que participou no estudo de Hannafin, Burruss e Little (2001), que pensava que este tipo de *software* não era significativo na aprendizagem geométrica dos alunos e considerava que os alunos não tinham aprendido de forma aprofundada os temas estudados. Os meus alunos aprenderam, conseguiram fazer construções geométricas, investigações e resolveram problemas com a ajuda destas ferramentas poderosas. O que dariam os matemáticos gregos para as terem usado no seu tempo.

Acredito que a presença na sala de aula dos ambiente de geometria dinâmica só faz sentido se forem os próprios alunos a utilizá-lo, de preferência desde muito cedo. É preciso tempo para que os utilizem, mas é gratificante a sua aprendizagem. O professor tem que aprender a utilizar estas ferramentas e, também assim, pode aprender com os seus alunos. Aprender à medida que eles vão aprendendo e ver a geometria de uma forma diferente. Eles estiveram a aprender, eu estou sempre a aprender ...

## Referências bibliográficas

Gardiner, J., & Hudson, B. (1998): The evolution of pupils' ideas of construction and proof using hand-held dynamic geometry technology. In Olivier, A. & Newstead, K. (Eds) *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 337–344). África do Sul.

Hannafin, R., Burruss, J., & Little, C. (2001). Learning with dynamic geometry programs: Perspectives of teachers and Learners. *The Journal of Education Research*, 94(3), 132–144.

Long, E. (1992). Teachers'questionning and students' responses in classroom Mathematics. Proceedings of PME XVI (pp. III/172), Durham, USA.

Menezes, L. (1999). Matemática, Linguagem e Comunicação, APM (Eds.) Actas do ProfMat99 (pp. 71). Portimão.

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. *Actas do ProfMat 2003* (CD-ROM, pp. 23–39). Lisboa: APM.

**Nuno Candeias**

**Escola E. B. 2º e 3º Ciclos Vasco Santana**

# O máximo do mínimo, e vice-versa

— Desenhem um triângulo com um lado a medir 53 cm, outro 28 cm e o terceiro à vossa escolha — pediu o professor.

— Vou construir o meu triângulo de modo que o menor ângulo seja o máximo possível — disse a Helena.

— Pois eu — acrescentou o Ricardo, — vou fazer ao contrário: o maior ângulo vai ter o menor valor que se consegue.

Quanto medem os terceiros lados dos triângulos da Helena e do Ricardo?

*(Respostas até 31 de Dezembro para zepaulo@armail.pt)*

## O cercado da galinhas

O problema proposto no número 97 de Educação e Matemática foi o seguinte:

*Um criador de galinhas resolveu construir um cercado rectangular. Para um dos lados mais compridos do rectângulo aproveitou parte do muro da sua propriedade. Os outros três lados seriam construídos em rede, apoiada em postes igualmente espaçados de 6 em 6 metros.*

*Depois de ter comprado todo o material, verificou que se tinha enganado nas contas e que lhe faltavam 5 postes. Contudo, descobriu que se pusesse os postes de 8 em 8 metros tudo ficava perfeito e não precisava de alterar nenhuma das dimensões do cercado.*

*Quantos metros de rede usou? Quais são as dimensões do cercado?*

Recebemos 7 respostas, enviadas por Armando Fernandes (Aveiro), Francisco Estorninho (Lisboa), Graça Braga da Cruz (Ovar), João Barata (Castelo Branco), José Paulo Coelho (Santana), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Ricardo Poças (Viseu).

O processo seguido pelos nossos leitores foi bastante parecido na fase inicial. Eis como começou o Francisco:

Vamos supor que o criador comprou $k$ postes.

"... se pusesse os postes de 8 em 8 metros tudo ficava perfeito" então temos:

$k$ postes; $k+1$ segmentos de rede; o comprimento de rede comprada foi de $8(k+1)$ metros.

"... postes igualmente espaçados de 6 em 6 metros... verificou que se tinha enganado nas contas e que lhe faltavam 5 postes" então será:

$k+5$ postes; $k+6$ segmentos de rede; o comprimento de rede comprada foi de $6(k+6)$ metros. Logo:

$8(k+1) = 6(k+6)$

$8k+8 = 6k+36$

$k = 14$

Foram comprados 14 postes e o comprimento da rede é $8(k+1) = 8 \times 15 = 120$ m.

A partir daqui, as resoluções diversificaram-se. O João Barata continuou assim:

Com os 14 postes distanciados de 8 metros podem construir-se os seguintes cercados:

| Lado menor | Lado maior |
|---|---|
| 8 m | 104 m |
| 16 m | 88 m |
| 24 m | 72 m |
| 32 m | 56 m |
| 40 m | 40 m |

Com 19 postes distanciados de 6 metros poderiam construir-se os seguintes cercados:

| Lado menor | Lado maior |
|---|---|
| 6 m | 108 m |
| 12 m | 96 m |
| 18 m | 84 m |
| 24 m | 72 m |
| 30 m | 60 m |
| 36 m | 48 m |

A solução é o cercado que aparece nas duas tabelas: 24 m por 72 m.

Outra possibilidade, seguida por outros leitores, é fazer apenas a primeira tabela e depois procurar o caso em que os comprimentos dos lados sejam múltiplos de 6.

A Graça não fez quaisquer tabelas. Vejamos como chegou ao resultado.

Sejam $x$ e $y$ os comprimentos dos lados menor e maior, respectivamente.

Como $x$ e $y$ são múltiplos de 6 e de 8, logo ambos múltiplos de 24, podemos representá-los na forma $x = 24r$ e $y = 24s$, em que $r$ e $s$ são números naturais.

O comprimento da rede é 120 metros, logo $2x + y = 120$ ou, substituindo, $48r + 24s = 120 \Leftrightarrow 2r + s = 5$.

Mas $s > r$, logo, $r = 1$ e $s = 3$. Portanto $x = 24$ e $y = 72$.

# O que é uma boa reflexão sobre a prática?

Cristina Martins
Manuel Vara Pires

Este texto resulta do trabalho que estamos a desenvolver no Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico (PFCM), integrados na equipa de formação da Escola Superior de Educação de Bragança. Este programa, em desenvolvimento desde 2005, enfatiza a reflexão (individual ou conjunta) como um instrumento essencial de ajuda ao professor na melhoria das suas práticas de ensino, devendo ter uma forte expressão na construção do portefólio de desempenho dos participantes. No entanto, enquanto formadores, e apesar de reconhecermos a importância dos processos reflexivos no desenvolvimento profissional docente, ao longo da formação temos vindo a ser confrontados com diversas questões — Que aspectos são mais significativos numa reflexão sobre a prática? Qual o papel do formador para conseguir desenvolver a capacidade reflexiva dos professores participantes? Que estratégias devem ser seguidas? — cujas respostas envolvem uma enorme complexidade e, na generalidade dos casos, exigem actuações diferenciadas.

## O papel da reflexão no PFCM

O documento orientador elaborado pela Comissão de Acompanhamento do PFCM[1] aponta alguns aspectos que os professores deverão ter em conta nas suas produções escritas a incluir no portefólio:

O professor deverá referir (...) [um] relato da aula, descrevendo a exploração matemática da tarefa com os alunos, e que inclua dados dos próprios alunos (respostas às questões do professor, raciocínios que exprimiram, dúvidas que colocaram, dificuldades que revelaram, registos que fizeram nos cadernos, produções matemáticas que realizaram) — o que aconteceu na sala de aula pode também ser ilustrado com episódio(s) relevante(s), onde seja explorado um acontecimento particularmente interessante relacionado com a aprendizagem matemática dos alunos, ou alguma surpresa, dilema, dificuldade sentida pelo professor. (p. 9)

Adianta, ainda, que o portefólio deve incluir ainda uma reflexão sobre a forma como a aula se desenvolveu, bem como a avaliação que o professor faz sobre o que os alunos aprenderam em Matemática com a actividade desenvolvida, identificando os factores que favoreceram ou dificultaram essa aprendizagem, e sobre o que ele próprio terá aprendido com essa situação de ensino e aprendizagem. Por outro lado, relativamente ao papel a desempenhar pelo formador neste processo de reflexão, o documento sugere:

No processo de formação, o formador surge como um dos intervenientes, colaborando nas planificações, participando nas dinâmicas de sala de aula, de modo que a reflexão posterior sobre as experiências realizadas com os alunos seja feita com uma maior profundidade, ajudando a perceber aquilo que resultou, o que deve ser evitado, o que é necessário desenvolver, etc. Nesta perspectiva, o formador tem o papel de um parceiro que questiona com um outro olhar as práticas, ajuda a preparar materiais, propõe novas abordagens num ambiente de colaboração. (p. 4)

Figura 1.

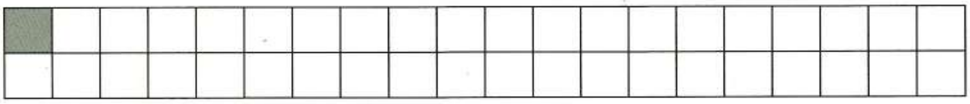


Figura 2.

Por isso, o desenvolvimento da capacidade de reflexão dos professores participantes tem merecido uma atenção muito especial. De facto, a reflexão sobre as práticas docentes e a colaboração têm sido assumidas como instrumentos determinantes para a melhoria do conhecimento matemático e profissional e, por isso, ao longo da formação tem sido disponibilizado tempo para discussão nas sessões de trabalho e seguidas estratégias formativas diversificadas de modo a ajudar a melhorar e alargar o âmbito das reflexões produzidas. A elaboração de sínteses escritas das sessões de formação, a leitura e análise de narrativas feitas por outros professores, a adopção de um guião de reflexão, a discussão e reflexão sobre a aplicação da mesma tarefa em diferentes salas de aula ou a partilha de reflexões entre formandos são exemplo de estratégias formativas utilizadas.

## Análise de uma reflexão

A reflexão escrita, que a seguir se apresenta e analisa, foi elaborada pela professora Carolina durante o seu segundo ano de formação. Corresponde a uma situação de ensino e aprendizagem — composta por quatro tarefas matemáticas relacionadas com os conceitos de 'número par' e 'número ímpar' — desenvolvida em 2007, numa aula da sua turma de dezasseis alunos do segundo ano de escolaridade.

A reflexão escrita inicia-se fazendo a ligação às sessões de formação conjuntas de "que resultou a preparação de algumas propostas de trabalho de modo a construir práticas pedagógicas activas, dinâmicas e produtivas". Continua com referências à planificação da situação de ensino e aprendizagem, explicitando a apresentação da situação, as finalidades, o que os alunos vão aprender, sugestões para a apresentação e exploração da situação, possíveis caminhos a seguir pelos alunos, materiais a utilizar e processos de avaliação a adoptar. Segue-se o desenvolvimento da aula, em que é feita uma descrição pormenorizada das diferentes etapas percorridas e das tarefas propostas. Esta descrição integra opiniões e produções dos alunos e é acompanhada de comentários e apreciações. A narrativa termina com a reflexão sobre o que aconteceu, perspectivando o trabalho lectivo a desenvolver no futuro. Globalmente, a reflexão elaborada por Carolina pode ser dividida em três partes fundamentais: (1) Objectivos da situação proposta; (2) Descrição da situação; e (3) Importância da situação realizada.

Na primeira parte da reflexão, *Objectivos da situação proposta*, Carolina começa por clarificar as suas intenções educativas mais gerais e explicita as principais finalidades da situação de ensino e aprendizagem:

> Procurei criar ambientes de aprendizagem significativa e colocar o aluno numa atitude activa de aprendizagem. Na verdade, só há aprendizagem quando a criança reage dinamicamente a uma questão que suscite o seu interesse e responda à sua curiosidade.

Apresenta como principal objectivo da sua aplicação a modificação da forma como tratava os conceitos 'número par' e 'número ímpar', aproveitando para salientar que o primeiro propósito que a levou a participar nesta formação foi precisamente modificar a sua atitude em relação à Matemática. No seguimento desta ideia, diz ter tomado a opção de pesquisar uma abordagem diferente para trabalhar os referidos conceitos e apresenta, de uma forma sucinta, a tarefa realizada:

> Essa necessidade levou-me à pesquisa e, no livro *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar — Adendas, 2.º ano*, encontrei uma forma diferente de dar o conceito de números pares e ímpares que me apeteceu experimentar. Em vez de ensinar a criança a memorizar que os números acabados em 0, 2, 4, 6 e 8 são pares, a actividade descrita no referido livro, desenvolve o conceito de par e ímpar fazendo com que os alunos partilhem quadrados e construam rectângulos com duas unidades de largura.

Na segunda parte da reflexão, *Descrição da situação*, Carolina descreve pormenorizadamente todas as tarefas da situação de ensino e aprendizagem. A situação prevê a realização de quatro tarefas sequenciadas e articuladas para o mesmo fim. A professora inicia a primeira tarefa, *Construção de rectângulos*, informando os alunos do respectivo objectivo: "Construir rectângulos com duas unidades de largura". Descreve os passos subsequentes e vai dando indicações sobre a sua própria actuação e sobre as diversas solicitações e respostas dos alunos, acompanhando esta descrição com esquemas representativos dos materiais utilizados que ajudam à compreensão do que estava a ser feito:

> No quadro magnético coloquei um rectângulo dividido em quadrados como se encontra representado na figura 1. Pedi a um aluno para ir colocar um quadrado magnético e o resultado apresenta-se na figura 2.

Carolina vai referindo as perguntas que formulou, tal como "Conseguiste formar um rectângulo?", e identifica as respostas dadas pelos alunos. O relato vai explicitando as diversas etapas da aula e, para além de continuar a indicar o que foi pedido aos alunos, a professora regista também a sua intervenção no desenvolvimento da tarefa e apresenta uma fotografia onde torna visível o trabalho realizado pelos alunos:

Repeti o processo para 3, 4, 5 e 6 quadrados e expliquei aos alunos que, quando fossem capazes de formar rectângulos, esse número de quadrados era par e, se não formassem rectângulos, esse número de quadrados era ímpar. Na fotografia que apresento seguidamente podemos observar um aluno a colocar os quadrados no quadro magnético (...).

A consequência deste procedimento é também explicitada:

Pedi aos alunos para completar o quadro acrescentando outra coluna: Par ou ímpar?.

| Número de quadrados | Fazem um rectângulo? | Par ou ímpar? |
|---|---|---|
| 1 | Não | Ímpar |
| 2 | Sim | Par |
| 3 | Não | Ímpar |
| 4 | Sim | Par |

Portanto, nesta primeira tarefa, Carolina faz considerações sobre o papel do professor, o papel do aluno, o que foi solicitado aos alunos e as questões formuladas. Para além disso, também apresenta esquemas e fotografias que ilustram as resoluções e os processos seguidos pelos alunos.

Nas tarefas posteriores estes pontos foram novamente contemplados, mas outros aspectos foram emergindo. Na segunda tarefa, *Par ou ímpar?*, Carolina refere o ambiente de trabalho na sala de aula:

Depois de lhes ter dado um certo tempo pedi-lhes para compararem os resultados. Cada aluno foi dizendo um número e se esse número era par ou ímpar. Os colegas iam comprovando se tinham esse número e se coincidiam as respostas. À medida que iam dizendo os números, faziam o registo no quadro preto.

Nesta fase da tarefa identifica dificuldades sentidas pelos alunos relacionadas quer com a Matemática quer com outras áreas disciplinares. No mesmo sentido, apresenta os procedimentos seguidos para solucionar dificuldades detectadas:

Notei que alguns alunos tinham dificuldade em dizer que os números terminados em 0, 2, 4, 6 e 8 eram pares e os outros eram ímpares, mas sempre que isso ocorria podiam manusear os quadrados e o rectângulo. Outra dificuldade que sentiram foi na formação do plural das palavras: par — pares e ímpar — ímpares.

(...) Depois de repetir mais alguns exercícios, reforcei o conceito de par e ímpar através de explorações adicionais.

— Quantas portas há na sala de aula?

— Uma.

— Esse número é par ou ímpar?...

— Quantos professores?

— Dois.

— Par ou ímpar?...

— Existe um número par ou ímpar de mesas na sala?

Na terceira tarefa, *Jogo 'pares ou ímpares'*, Carolina começa por assinalar um episódio relacionado com as interpretações muito próprias que, muitas vezes, os alunos fazem daquilo que ouvem dizer aos outros:

O objectivo deste jogo é desenhar quadrados. Expliquei-lhes as regras do jogo e foi engraçado verificar que algumas crianças não tentavam "fechar" o quadrado, preocupavam-se mais em chegar ao final da folha como se fosse uma meta a atingir (...).

Continua a apresentar exemplos das produções dos alunos. Destaca a presença do formador na sala de aula que entende como uma ajuda no acompanhamento do trabalho dos alunos, especialmente, daqueles com mais dificuldades. Também o empenhamento dos alunos na realização da tarefa é realçado na sua reflexão: "entretanto tocou para o intervalo e os alunos não quiseram sair da sala sem ver quem era o vencedor. (...) Quando chegou a hora de entrada queriam outra folha para continuarem a jogar".

Em relação à quarta tarefa, *Baile dos pares*, os aspectos referidos são bastante semelhantes aos identificados nas tarefas anteriores. Contudo, nesta fase da reflexão, Carolina revela os seus sentimentos em relação ao desenvolvimento da tarefa e integra elementos do trabalho realizado posteriormente:

No final da aula, senti que tinha corrido bem, que eles aderiram com entusiasmo, mas senti um vazio. Estava à espera que eles perguntassem: "E se eu tivesse um número grande de quadrados?". Estava a contar ter que juntar os rectângulos e os quadrados de alguns alunos para fazerem a verificação, mas tal não aconteceu. Cheguei a pensar que a aula não tinha resultado.

(...) No dia seguinte, fiz exercícios de verificação e gostei de ver quando eu perguntava: "O número 34 é par ou ímpar?". Eles agrupavam de tal modo que conseguiram chegar facilmente ao resultado excepto dois alunos que tiveram necessidade de continuar com os quadrados e o rectângulo por mais alguns dias.

Refere ainda que, para finalizar a tarefa, pediu a cada aluno que, numa folha, descrevesse e ilustrasse o trabalho realizado. De seguida, justifica este seu procedimento e destaca a sua enorme importância quer para os alunos quer para si própria, constituindo um elemento significativo no processo de ensino e aprendizagem:

Com isto pretendi levá-los a reflectir sobre o que fizeram, o que aprenderam de novo e acabar com a ideia que alguns insistiam em ter de que estas tarefas não eram matemática nem serviam para aprender e que eram brincadeira.

(...) Estas produções escritas sobre as tarefas em que trabalharam têm um grande valor, pois podem constituir um factor de aprendizagem e um elemento significativo da avaliação. Pode ser uma fonte preciosa para o professor, pois pode originar uma reflexão mais profunda sobre o que se pretendia e o que se conseguiu, a validação ou rejeição de metodologias, a utilização adequada de estratégias, etc.

Na sequência desta ideia, e após ilustrar o relato com algumas produções dos alunos, reforça, mais uma vez, a relevância da reflexão final produzida pelos alunos e destaca alguns pontos resultantes da análise das suas produções:

A meu ver, estas produções são muito significativas uma vez que obriga os alunos, desde cedo, a reflectir sobre o como, o porquê e o que aprenderam de novo e dão-nos informações úteis quer através da escrita, quer através do desenho.

No desenho da primeira produção é interessante observar que a aluna associou os números pares ao rectângulo e os números ímpares ao quadrado e, tanto no primeiro desenho como no último, a tabuada do 2 esteve presente. São alunos do 2.° ano, e como tal, não podemos contar com grandes descrições nem com grandes reflexões.

A terceira parte da reflexão, *Importância da tarefa realizada*, é iniciada por Carolina, realçando "ser oportuno reflectir sobre o antes e o depois do tratamento do conceito de números pares ou ímpares". Depois adianta algumas conclusões, confrontando a estratégia seguida com as utilizadas em outras ocasiões e perspectivando a sua actuação no futuro:

Com esta aula cheguei à conclusão de que não volto a abordar a noção de números pares e ímpares como dantes o fazia: através do par de meias, do par de luvas, etc. Com este processo os alunos têm imensa dificuldade em saber o porquê de ser par e não ser ímpar ou ao contrário. Se eu tenho um par de meias, são duas meias. Então o número dois é par. Mas... e se tenho 3? E se tenho 65? Já não vou andar com 65 meias para mostrar os resultados. E os quadrados estão sempre prontos a auxiliar nas tarefas como podemos observar pela fotografia seguinte (...).

A sua reflexão termina tecendo considerações sobre a relevância do carácter lúdico e experimental das tarefas, sobre a importância da descoberta e do estabelecimento de conclusões feito pelos próprios alunos e sobre o trabalho anterior necessário para a realização destas propostas. Por fim, Carolina apresenta um breve balanço da situação de ensino e aprendizagem realizada:

(...) com o aspecto lúdico a auxiliar o processo; os alunos mexem, colocam, tiram e, o mais importante, verificam com o próprio material o porquê de ser de uma forma ou de outra. E quando são eles próprios a chegar às conclusões, aprendem mais facilmente e não esquecem tão depressa. Não me posso esquecer que estou a lidar com uma turma bastante boa, mas mesmo assim, e para não ter surpresas, trabalhei com eles a construção de rectângulos com duas, três e quatro unidades de largura antes desta actividade. A maioria dos alunos correspondeu ao que era pedido e penso que compreendeu o novo conceito.

## Considerações finais

A reflexão escrita produzida pela professora Carolina contempla aspectos essenciais que se devem associar a uma *boa* reflexão sobre a prática. De facto, ao ler e analisar o seu texto, é notória a preocupação com os diversos aspectos relacionados com a planificação da situação de ensino e aprendizagem, com a identificação do que os alunos aprenderam, com a explicitação do que a professora aprendeu e com as consequentes implicações no seu trabalho futuro. Neste sentido, destacamos:

— a forma como está organizada a reflexão que, atravessando as principais componentes do ciclo lectivo (planificação do trabalho, condução da aula, avaliação do que foi feito), constitui uma narrativa bastante completa, fundamentada e documentada do que aconteceu e por que aconteceu;

— a descrição pormenorizada do desenvolvimento das tarefas, com incidência no trabalho realizado pelos alunos, na sua própria actuação enquanto professora, nas questões que vai formulando e nas respostas dadas pelos seus alunos, nas dificuldades detectadas e nos procedimentos a seguir para as ultrapassar ou no ambiente de trabalho da sala de aula;

— a valorização das opiniões e das produções dos alunos, no sentido de as tornar significativas para a aprendizagem matemática dos seus alunos e para dar mais sentido às suas opções na sala de aula;

— a importância que o desenvolvimento da situação de ensino e aprendizagem teve para os alunos, justificada pela sua participação activa na descoberta e estabelecimento de conclusões durante as tarefas realizadas;

— a importância que o desenvolvimento da situação de ensino e aprendizagem teve para a professora, justificada pelo incentivo à consolidação ou eventual alteração das suas práticas de ensino.

Aliás, a explicitação da importância que uma dada situação de ensino e aprendizagem tem para o próprio professor foi identificada, em muitas reflexões de professores participantes no PFCM, como uma área bastante problemática exigindo uma grande capacidade de análise. Por isso, continua a ser necessária uma maior incidência da reflexão do professor sobre os factos ocorridos e sobre si próprio, questionando os seus próprios papéis, funções, desempenhos e concepções, no sentido de uma maior compreensão das suas práticas de ensino que conduza a uma melhoria efectiva da sua actuação enquanto professor.

### Nota

1 Serrazina, L., Canavarro, A., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J., & Gouveia, M. J. (2006). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.° Ciclo.* (documento não publicado)

Cristina Martins
Escola Superior de Educação de Bragança

Manuel Vara Pires
Escola Superior de Educação de Bragança

Colecção Clássicos Disney **Livro 9**

Não perca hoje 'Cinderela' e amanhã 'O Livro da Selva' Cada volume por mais 2,90 € com o Público

Público

**Wimbledon** Irmãs Williams discutem hoje o título P2

**Fugas** O *charme* medieval de Reims

**História Virtual** E se Sampaio não tivesse convidado Santana Lopes a formar Governo? P2

**2004 8,8 2005 8,1 2006 8,1 2007 10,6 2008 14**

**Surpresa: os alunos já são bons a Matemática**

**As notas dos exames nacionais de Matemática A foram as mais altas de todas as disciplinas, atingindo uma média de 14 valores. A percentagem de chumbos desceu de 18 para sete por cento. Por oposição, os resultados de Português foram os piores dos últimos 12 anos.** ***Pág. 6***

In Público, 05 de Julho de 2008

Esta é a primeira página do Jornal Público de 5 de Julho de 2008.

Da notícia, publicada na página 6, com o título "Exame de Matemática bate recorde com média de 14", fica-se a saber que entre todos os exames nacionais com um número relevante de inscritos, o de Matemática A foi o que registou a média mais alta este ano, enquanto a Português houve mais alunos a chumbar. Refere a notícia que não só a subida de Matemática é muito considerável, como é inédito o facto de esta prova, realizada por mais de 36000 alunos do 12° ano, passar a ser aquela onde os jovens se saem melhor. E, acrescenta-se que, mesmo considerando a globalidade dos alunos que fez a prova, a média continua a ser uma das mais positivas: 12,5 contra 9,5 do ano passado. A melhoria dos resultados fez com que a percentagem de chumbos caísse de 18% para 7%.

Mas o artigo apresenta também as razões invocadas pelo Ministério da Educação para esta melhoria global a Matemática, como sendo, seguramente, o efeito combinado de três factores: mais tempo de trabalho e estudo por parte de alunos e professores, no quadro do Plano de Acção para a Matemática; provas bem elaboradas, "sem erros" e com mais meia hora de tolerância; maior alinhamento entre o programa e o trabalho dos professores, designadamente através de testes intermédios e o banco de perguntas do GAVE.

Decidimos, na última reunião de redacção da EM, que estas actualidades não seriam sobre Exames, até porque a revista só sairia no ProfMat, em Setembro, mas não resistimos, desrespeitámos a decisão colectiva, afinal esta primeira página do *Público* vai ficar na história.

Recordámos títulos e notícias de outros anos, escolhemos 2002 que parece também ter sido de extremos — "Quase metade dos alunos não passaram do 4 no exame de Matemática do 12° ano" (1ª página do Público de 22 Agosto de 2002), "Matemática, a disciplina mais temida" (JL/ Educação de 4 de Setembro de 2002), "Diferença entre médias de exame e notas internas chega a ultrapassar 10 valores" (Outubro de 2002, a propósito dos *Rankings* e onde a Matemática é uma das disciplinas com maior desfasamento). Mas quem não se lembra de outras referências do mesmo tipo? Quantos de nós, professores de Matemática, não desejamos tanto que os alunos aprendam mais e também que as notícias sejam diferentes? E é também por isto, que não conseguimos deixar de ficar tristes... porque afinal, no dia em que a notícia parece fazer história, no dia em que poderemos guardar um recorte de jornal diferente, quase todos (incluindo nós próprias) também disseram que esta notícia nada ou quase nada valia.

É óbvio que as aprendizagens dos alunos não se medem assim, nem se alteram tão bruscamente. É óbvio que provas de exame diferentes produzem resultados diferentes, para o melhor e para o pior, às vezes, temos que reconhecer, com diferenças mais significativas do que esperávamos, como é o caso destas. Serão provavelmente tão injustos os títulos e as ilações que se tiraram em 2002 quanto os de hoje...

Mas, a este "nada valer", não é também alheia, a análise que o próprio Ministério da Educação faz:

1 — Efeitos do PAM? Todos sabemos que estes alunos do secundário não foram ainda envolvidos pelo PAM. Até sabemos que as condições de trabalho, em muitas turmas do secundário, são hoje piores do que antes, com muitos alunos e turmas não desdobradas.

2 — Exames "sem erros"? Não nos parece que os exames de Matemática se tenham, no passado, caracterizado por erros.

3 — Banco de Itens do GAVE? Os itens são, nem mais nem menos, os dos exames dos anos anteriores, que sempre estiveram disponíveis.

4 — Mais trabalho de alunos e professores? Não deixa de ser curioso este argumento, para uma equipa ministerial que tem sistematicamente desconsiderado os professores.

Como certamente a maioria dos professores de Matemática, nós queremos resultados melhores, queremos sobretudo melhores aprendizagens dos alunos e queremos também boas notícias, mas, por isto mesmo, não podemos deixar de expressar aqui a nota bem negativa que sentimos que esta equipa ministerial merece, também neste comentário sobre os resultados dos exames!

**Adelina Precatado**
**Helena Rocha**

# A Matemática, o YouTube e o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico

O *Youtube* (`www.youtube.com`) é mais um espaço da *web* social, principalmente usado por adolescentes, que veio oferecer oportunidades de publicação e alojamento de documentos vídeo, que podem ser posteriormente acedidos por qualquer utilizador com acesso à Internet. Vários professores têm hoje referências e hiperligações para vídeos a partir de blogues pessoais ou de turma, permitindo a divulgação e partilha de ficheiros.

No entanto, para a comunidade de adultos, nomeadamente professores, o *YouTube* veio a público da pior forma (ou talvez não?!): a divulgação de imagens capturadas de telemóveis dentro de salas de aula, mostrando 'desafios' e 'ameaças' à imagem do professor e algumas cenas de violência na sala de aula.

Na preparação de uma conferência que fui chamado a fazer, ocorreu-me a ideia de procurar por bons documentos de vídeo educativos, disponibilizados no *YouTube*, que pudessem ser explorados pelos professores de Matemática. Surpresa minha: na verdade, existem e muitos.

No motor de pesquisa interno ao *YouTube* escrevi *number sequences* e um dos vídeos disponibilizados foi o *Sequences 1: Number sequences* (figura 1). Um professor, tendo por fundo um quadro branco com dois conjuntos de três termos das sequências dos ímpares e dos quadrados perfeitos, explica como se pode continuar cada uma delas e, depois, fazendo referência ao livro *The Book of Squares*, explica como se podem gerar os termos da segunda sequência, a partir dos da primeira. O primeiro número ímpar (1) é igual ao primeiro quadrado perfeito (1), a soma dos dois primeiros ímpares (1+3) é igual ao segundo quadrado perfeito (4), a soma dos três primeiros ímpares (1+3+5) é igual ao terceiro quadrado perfeito (9) e assim sucessivamente.

As regularidades numéricas são um tema do Novo Programa do Ensino Básico que aparecem explícitas, quer na secção relativa ao 1° ciclo, quer na secção do 2° ciclo.

Por exemplo, no tema Números e operações, do 1° ciclo, pode ler-se que o trabalho "com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstracção e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico" (p. 14). Desde o 1° ao 4° ano, a investigação de regularidades em sequências e tabelas de números, constituem objectivos de aprendizagem.

Já no 2° ciclo, no tema Números e operações se reconhece que "o trabalho com sequências numéricas em que se pede ao aluno que continue ou invente sequências de números, estabelece uma ponte conceptual importante entre os três ciclos do ensino básico" (p. 32).

Ora quais podem ser as vantagens de usar este vídeo?

Em primeiro lugar, os professores 'entram definitivamente' num espaço social 'frequentado' por muitos dos seus alunos

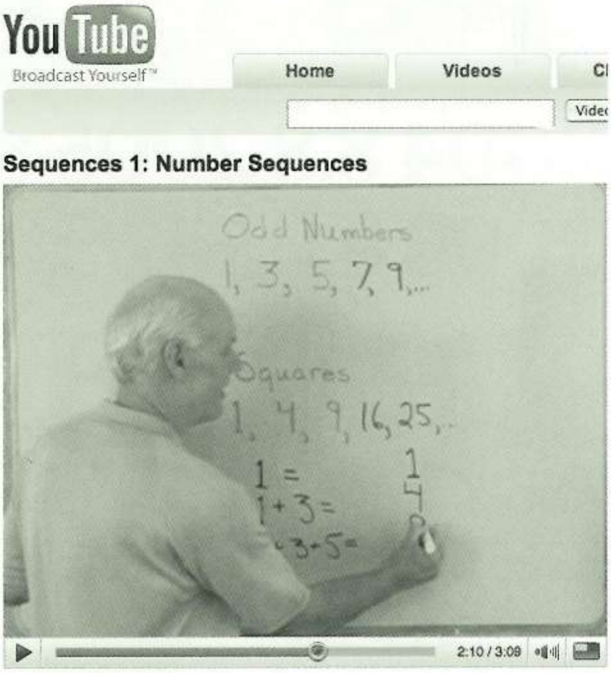



Figura 1

e podem dar exemplos, discutir e dar opinião fundamentada sobre qualquer coisa que também já conhecem e até pode servir objectivos de aprendizagem escolar.

Em segundo lugar, podem pensar em integrar curricularmente este material. Por exemplo, podem solicitar a um grupo de alunos que procurem o referido vídeo na Internet (ou outros, dentro do mesmo tema) e numa aula o apresentem aos seus colegas, seguindo ou não um guião previamente distribuído, preparando um conjunto de questões a colocar-lhes, de modo a promover a discussão e aprendizagem sobre o tema.

Questões como, "*Qual a soma dos 8 primeiros ímpares? E dos 20 primeiros ímpares? Será preciso adicionar todos os termos da sequência dos ímpares para responder às questões anteriores? Como se passa de um quadrado perfeito ao quadrado perfeito seguinte? Em concreto, como se pode passar de 25 a 36? E de 36 a 49? Serão capazes de 'mostrar' através de um modelo geométrico como se pode visualizar a passagem de um quadrado perfeito ao quadrado perfeito seguinte (de $n^2$ a $(n+1)^2$)?*", podem ser colocadas aos alunos, obrigando-os a pensar, a avançarem hipóteses e conjecturas e a explicitarem os seus raciocínios.

Esta acção didáctica, vem no sentido que aponta o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico, quando nas indicações metodológicas relativas às capacidades transversais do

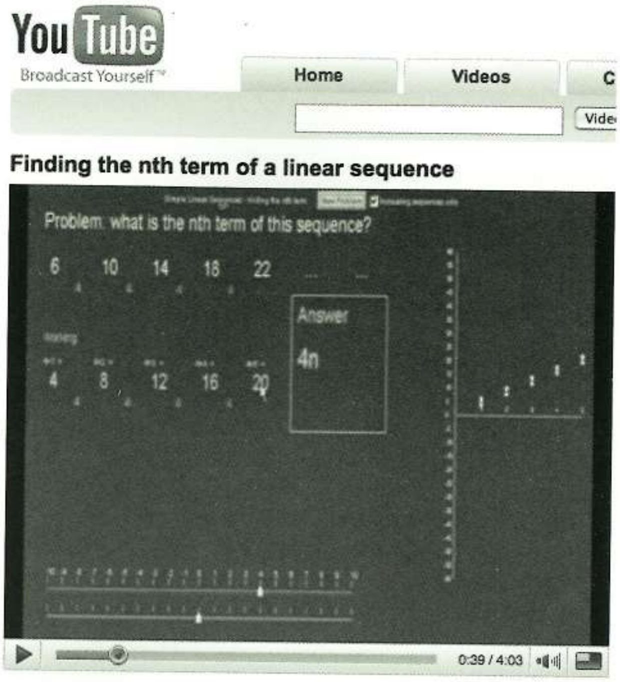



Figura 2

2º ciclo, sugere que "o professor deve incentivar a formulação e teste de conjecturas que devem ser justificadas com base em argumentos matemáticos e, também aqui, ele desempenha um papel fundamental através do questionamento que faz, das pistas que dá e do modo como incentiva os alunos" (p. 46).

Não satisfeito com o que encontrei, continuei a pesquisa, agora sobre sequências lineares (*linear sequences*), e encontrei outro bom vídeo: *Finding the nth term of a linear sequence* (figura 2).

Desta vez, apresentam-se cinco termos de uma sequência e a respectiva representação gráfica. O rato vai-se deslocando no écran, enquanto uma voz de fundo, 'faz a leitura' da sequência (6, 10, 14, ...), procurando explicar como se passa de um termo para outro ('vai de 4 em 4') o que sugere a expressão 4.n (múltiplos de 4). Surgem então todos os termos da nova sequência (4, 8, 12, 16, ...) por baixo dos iniciais e a respectiva representação gráfica em sobreposição, o que mostra a não coincidência (numérica e gráfica). Através de uma explicação comparativa e reflexiva é-se levado à expressão geral 4.n+2, esta sim, correspondente ao modelo da sequência inicial. E mais exemplos se seguem ...

Ora este vídeo pode ser explorado no 3º ciclo, uma vez que no Novo Programa se reconhece que, "neste ciclo retoma-se a investigação de sequências e regularidades, já realizada nos ciclos anteriores, com vista a aprofundar o estudo de relações algébricas e sua simbolização, fundamental para o desenvolvimento da noção de variável e para a compreensão da linguagem algébrica" (p. 55). No mesmo documento, refere-se ainda que "o computador (...) é um bom recurso para apoiar os alunos no estabelecimento de relações entre a linguagem algébrica e os métodos gráficos, na realização de tarefas de exploração e investigação e na resolução de problemas (...) Uma função é estudada essencialmente como relação entre variáveis [pelo que se deve recorrer] às várias representações (algébrica, gráfica e tabular) de uma função na interpretação e resolução de problemas e na modelação de situações" (p. 56).

Já posteriormente, na escrita do artigo, por curiosidade, consultei informação do *YouTube* relativa aos dois vídeos e fui conduzido aos dois *sites* associados a cada um deles: o `mathtv.com` (associado à figura 1) onde se podem encontrar vários vídeos educativos para matemática organizados por temas curriculares e o `waldomaths.com` (associado à figura 2), um *site* com recursos educativos para matemática, entre os quais vídeos e *applets*. Curiosamente, este último *site* disponibiliza o *applet* que se vê no vídeo e que podemos explorar directamente na *web* com os alunos. De notar que este *applet* permite trabalhar não apenas sequências lineares, mas também quadráticas e cúbicas.

Porque a Internet, também é isto: 'pega-se numa ponta' e segue-se de ligação em ligação, através de hipertexto/hipermédia, até outras ideias, mais ou menos associadas ao conceito inicial que nos moveu na primeira pesquisa.

A história das tecnologias está repleta de exemplos de ferramentas que, criadas com fins profissionais ou de lazer, foram sendo progressivamente apropriadas pela comunidade educativa e utilizadas para promover aprendizagens específicas em várias áreas do saber ou para o desenvolvimento de capacidades transversais. Disto são exemplos, os processadores de texto, as folhas de cálculo e mais recentemente os blogues, entre muitas outras.

Embora de uma outra natureza, o *YouTube* poderá constituir, não só um espaço onde podemos colocar pequenos filmes que poderemos criar (até com um telemóvel) para ilustrar conceitos específicos de matemática ou opções didácticas, como recorrer aos recursos vídeo que já hoje se encontram disponíveis nesse espaço social e que ilustrei nos dois exemplos anteriores. E, por certo, alguns alunos dirão: *"A minha stora ta bue moderna, k ja usa o YouTube! Muito a frente!"*

**José Duarte**

# A excentricidade da parábola

Vincenzo Bongiovanni

A noção de excentricidade de uma elipse e hipérbole está relacionada ao maior ou menor alongamento dessas curvas. No caso da parábola, a maior ou menor abertura não tem nada a ver com a excentricidade mas com o *latus rectum* que é um segmento cuja medida é expressa na equação $y^2 = px$ pela constante $p$. Nos livros didáticos, em geral, omite-se o fato da excentricidade da parábola ser 1. Apresenta-se apenas a excentricidade da elipse como um número entre 0 e 1 e a excentricidade da hipérbole como um número maior que 1. Deixa-se intuir que a excentricidade da parábola é 1 por ser uma curva limite entre a elipse e a hipérbole.

O objectivo deste artigo é relacionar as excentricidades das três curvas por meio de uma única fórmula.

O ensino das cónicas no Brasil ocorre na última série do Ensino Médio dentro do conteúdo da geometria analítica. Em geral, as cónicas são apresentadas como três curvas distintas: a elipse como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante; a hipérbole como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias (em módulo) a dois pontos fixos é constante e a parábola como o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de uma reta e de um ponto fora dela. A partir dessas definições toda a nomenclatura relacionada a essas curvas é estabelecida e as definições de excentricidade para a elipse e a hipérbole são apresentadas da seguinte maneira:

Figura 1

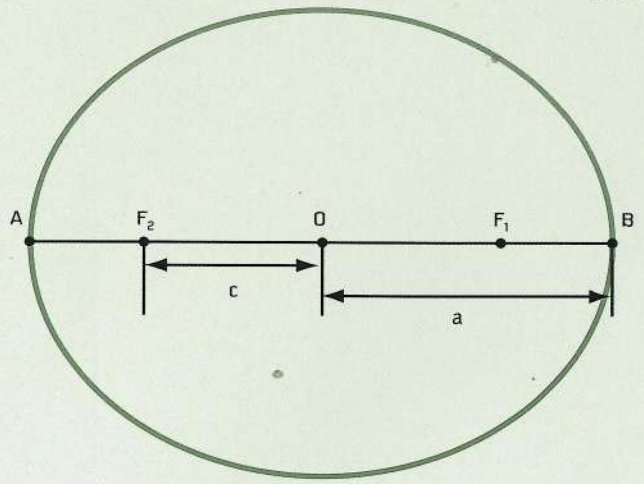
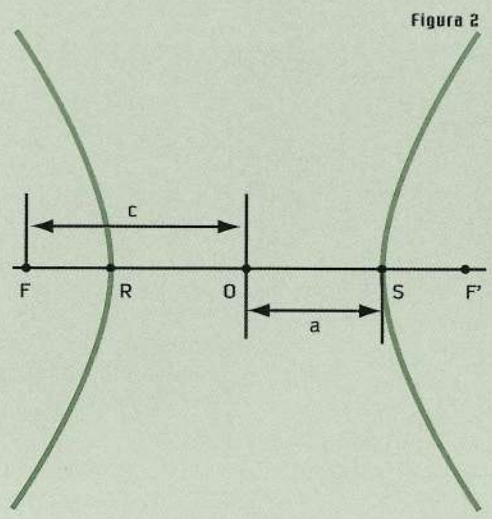



Figura 2




A *excentricidade de uma elipse* de centro $O$, eixo maior $AB$ e focos $F_1$ e $F_2$ é o número onde $c/a = OF_2 = OF_1$ e $a = OB = OA$ (figura 1).

A *excentricidade de uma hipérbole* de centro $O$, eixo focal $RS$ e focos $F$ e $F'$ é o número $c/a$ onde $c = OF = OF'$ e $a = OR = OS$ (figura 2).

A seguir são estabelecidas as equações dessas curvas a partir das definições de cónicas como lugares geométricos e o estudo prossegue unicamente no quadro analítico. Essa abordagem, embora económica e moderna, esconde completamente a origem geométrica das cónicas.

Uma outra caracterização das cónicas que permite obter a excentricidade das três curvas é a chamada definição monofocal. Nesse enfoque, a cónica é definida como o lugar geométrico dos pontos $P$ de um plano tal que o quociente das distâncias de $P$, a um ponto fixo $F$ e a uma reta fixa $d$, com $P \notin d$, é uma constante. Adotando esse ponto de vista, define-se a excentricidade da elipse, da hipérbole e da parábola como sendo essa constante que será denotada por $e$. Observa-se que se $0<e<1$ teremos uma elipse, se $e=1$ teremos uma parábola e se $e>1$ teremos uma hipérbole (figura 3).

No primeiro e no terceiro caso pode-se provar que quando $PF/PP' = e$ (constante) então $e=c/a$. mas o problema de relacionar a excentricidade da parábola com a fórmula da excentricidade proveniente das outras duas curvas permanece.

Um ponto de vista bastante interessante e pouco utilizado no Ensino Médio é voltar à origem geométrica das cónicas. Pode-se adoptar a definição de cónica como sendo a secção de um cone de revolução por um plano secante. Sendo $\alpha$ o ângulo formado pelos planos secante e horizontal e $\beta$ o ângulo formado por uma geratriz do cone de revolução com o plano horizontal teremos: para $\alpha<\beta$ a secção do cone pelo plano é uma elipse, para $\alpha=\beta$ a secção é uma parábola e para $\alpha>\beta$ a secção é uma hipérbole (figura 4).

Essa definição apresenta a vantagem de englobar as três curvas e de associar a excentricidade a uma única expressão algébrica. Pode-se definir a excentricidade da cónica como

Figura 3

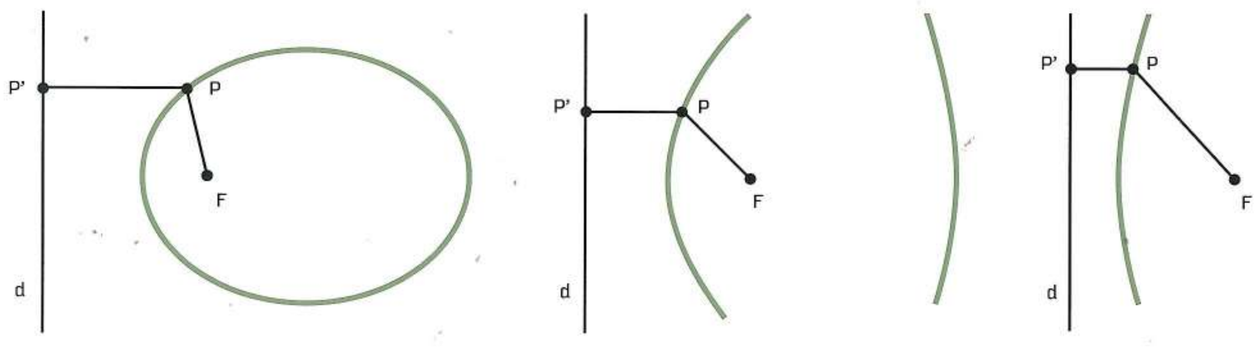
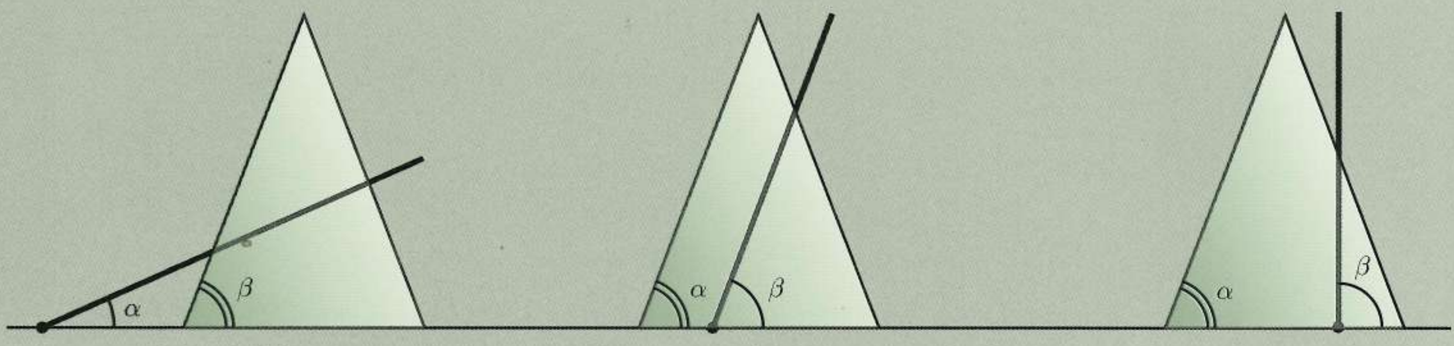


Figura 4

Projeção ortogonal de um cone de revolução contido num plano horizontal sobre um plano vertical de projeção. O cone é intersectado por um plano perpendicular ao plano de projeção e oblíquo ao plano horizontal. Na geometria descritiva esse plano é chamado de plano de topo.




sendo sen $\alpha$/sen $\beta$. Para a elipse teremos,

$$0 < \frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \beta} < 1$$

pois que $0 < \alpha < \beta$, para a parábola,

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \beta} = 1$$

pois que $\alpha = \beta$ e para a hipérbole

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \beta} > 1$$

pois que $\alpha > \beta$. Além disso pode-se demonstrar que para a elipse e a hipérbole,

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \beta} = \frac{c}{a}$$

recuperando-se a fórmula conhecida da excentricidade. Para $\alpha = 0$ o plano será paralelo à base do cone e a secção será uma circunferência. Nesse caso,

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \beta} = 0$$

o que mostra que essa definição trata o caso limite com coerência.

## Bibliografia


Bongiovanni, V. *Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d'enseignants: étude d'une sequence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif*. Thèse de doctorat, Grenoble, 2001.



Vincenzo Bongiovanni

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

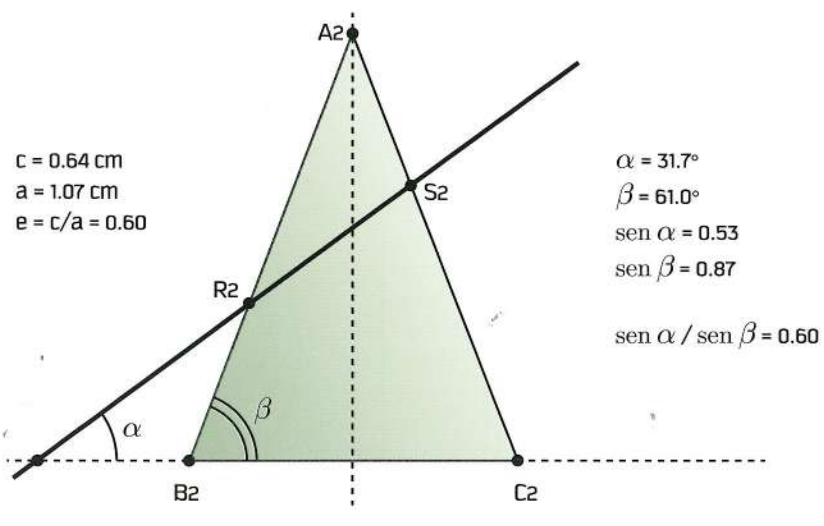




Figura 5

# Aprendendo matemática sem pensar que o é: situações com alunos do 3.º ano*

Carlos Miguel Ribeiro Fernanda Joaquim Ana Colaço

* Este texto é um resumo de uma comunicação apresentada no XI Encontro Nacional — A matemática nos Primeiros Anos.

Neste artigo pretendemos apresentar duas situações em que os alunos desenvolveram actividades matemáticas, concretamente relacionadas com geometria, sem se aperceberem de que estavam a desenvolver competências matemáticas. Estas tarefas permitiram aos alunos explorar as simetrias e o *Origami* numa perspectiva bastante distinta daquela a que estavam habituados e contribuíram também para a construção de uma nova perspectiva face à matemática, deixando de a considerar como algo estático — produto acabado — e encarando-a numa perspectiva dinâmica — que se vai construindo.

Enquanto professores, uma das nossas competências é a de conseguir que os alunos adquiram/construam conhecimentos e aprendam a gostar de matemática. Indo ao encontro do que vem preconizado na Organização Curricular e Programas do 1.° ciclo (DEB, 1991a), como sendo uma das grandes finalidades do ensino da matemática, preparámos um conjunto de tarefas que considerámos motivadoras e potenciadoras de aprendizagens significativas. Estas foram preparadas de modo a que a resolução das consequentes actividades permitisse aos alunos desenvolver as capacidades de raciocínio, comunicação e resolução de problemas.

As actividades aqui descritas foram concretizadas por duas turmas distintas do 3.° ano, cujas professoras se encontram a frequentar o Programa de Formação Contínua em Matemática. Ambas as aulas foram gravadas em áudio, o que levou a que as professoras pudessem efectuar uma descrição/reflexão mais profunda e profícua contribuindo para um enriquecimento do seu portefólio e, como consequência dessa reflexão, também para uma tomada de consciência da sua postura enquanto profissionais. Apenas assim foi possível registar os comentários dos alunos em cada situação que se mostraram uma mais valia na descrição e reflexão sobre as tarefas implementadas.

Estas tarefas estão relacionadas fundamentalmente com reflexões (simetrias axiais) e com alguns conteúdos de geometria e de números e operações que se podem explorar na construção de *origami*. A necessidade de preparar um conjunto de tarefas relacionadas com as simetrias surgiu pois os alunos evidenciaram anteriormente imensas dificuldades na determinação da imagem de uma determinada figura (utilizando papel quadriculado), segundo um eixo de simetria vertical, pois a grande maioria efectuava translações. A exploração matemática do *Origami* surgiu como forma de mostrar aos alunos a presença da matemática para além daquela que se aprende na escola.

Por serem duas aulas distintas, apesar de terem em comum o denominador de os alunos considerarem não estar a abordar conteúdos matemáticos, e de modo a ilustrar mais claramente o percurso de cada aula, iremos referir-nos separadamente a cada uma delas. Iniciaremos pelas actividades de simetria e posteriormente as que se relacionam com o *origami*.

## As reflexões enquanto jogo

Esta tarefa foi proposta a uma turma de 23 alunos do 3.º ano e, como motivação e contextualização ao tipo de actividade matemática a ser desenvolvida, num momento anterior foi realizado um jogo, a pares. Comummente realizados no Pré-Escolar (DEB, 1997), este não era conhecido de nenhum dos alunos, e consistia na representação da sua imagem ao espelho. Durante esta actividade apenas foram focadas questões de lateralidade e proximidade/afastamento existentes entre as díades, (os alunos iam trocando de papéis), não tendo sido prestada qualquer atenção aos termos matemáticos empregues pelos alunos, nem ao rigor matemático da medição das distâncias.

## O desenrolar da actividade de simetrias

Esta actividade apenas foi possível realizar na sala de aula pois o chão desta era composto por mosaicos quadrangulares[1]. A sala foi disposta em U e colocada uma fita-cola castanha no chão da sala, ao longo das juntas dos mosaicos quadrangulares. Esta disposição permitiu que até os alunos que estavam no lugar participassem pois podiam corrigir as posições dos colegas.

A professora dialoga com os alunos, à medida que cola a fita-cola, de modo a despertar-lhes a curiosidade sobre a actividade e contextualizá-los no que iriam desenvolver. Os alunos associam a fita-cola a um espelho e ao falar em simetrias referem que é eixo de simetria.

Com a finalidade de que todos os alunos percebessem o que se pretendia, a professora assume a função de objecto inicial e um dos alunos desempenha o papel de reflexão. Esta actividade permitiu avaliar até que ponto os alunos compreenderam as relações existentes entre o original e a imagem e a maneira de identificar o local onde se situa cada um dos intervenientes — considerando o interior dos quadrados. (Esta foi já realizada numa turma do 1.º ano de escolaridade, mas "legendando" com uma folha o aluno que representa a imagem para que não ocorressem equívocos.)

Com a finalidade de poderem apropriar-se dos conteúdos que estavam a ser trabalhados, todos os alunos realizaram a actividade. Uma vez que o espaço disponível na sala não permitia que todos realizassem o jogo em simultâneo, fizeram-no quatro pares de cada vez, o que se revelou positivo, pois, desta forma, os restantes elementos da turma observaram o trabalho desenvolvidos pelos colegas e corrigiam, oportunamente, as suas falhas, o que permitiu uma tomada de consciência dos conceitos de distância, posição relativa e simetria conduzindo, deste modo, a uma efectiva construção de conceitos por parte de todos os alunos.

## Um problema improvável

Uma vez que todos os alunos, no papel de imagens, representavam, sem dificuldade o que era realizado pelo colega que se estava a "ver ao espelho", foi então colocado um novo problema à turma. Foi pedido, a uma das alunas, que

Figura 1.

tem na altura o papel de original, que transponha, com um dos pés o eixo. Recorde-se que os alunos consideravam a fita-cola no chão como um espelho, evidenciando que não consideravam estar a efectuar uma actividade de matemática, mesmo após terem referido, no início da aula, que a fita-cola representava o eixo de simetria.

Professora: Veneta, passa lá o pé para o lado da Daniela.

Tiago: *Ai! Partiste o espelho!*

Valter: *Ela está a pisar o espelho...*

Gonçalo: *Professora, está mal! Partiu o espelho!*

Nesta altura gerou-se alguma confusão na aula. A aluna no papel de "reflexo" colocara o pé para trás, afastando-se do eixo, evitando a todo o custo, também ela, "partir o espelho" (figura 1).

Visto que era uma actividade completamente nova para eles, apesar de estar no seguimento de tudo o que estavam a fazer, obrigava a um entendimento perfeito do conceito de simetria; os alunos demonstraram uma enorme vontade de aprender a solucionar este problema e iam fornecendo oralmente algumas hipóteses de resolução. Algumas delas não estavam correctas, mas a professora, ao aceitar os contributos de todos os alunos e ao confrontar toda a turma com as opiniões dos colegas, leva a que todos participem, não se sintam inibidos com o facto de errarem, e utiliza o erro em prol das aprendizagens.

Professora: Então tomem lá atenção, Veneta colocou a perna direita assim (a atravessar o eixo), então a Daniela (o reflexo) ia pôr a perna dela onde?

Aluno: Eu sei!

Professora: Vai lá explicar Benjamim

Benjamim (pega na perna direita da colega): Tens de pôr esta perna para cá!

Professora: Estão de acordo com o Benjamim?

Daniela M.: Não, tem de ser a outra, para ficar também com a perna do mesmo lado a partir o espelho...

Professora: Então vem cá explicar o que é que a Daniela tem de fazer.

Daniela M (pega na perna esquerda da colega): A Daniela (imagem) tem de pôr esta perna para o lado de lá.

Professora: Em que quadrado?

Aluno: No mesmo que a Veneta mas do outro lado.

Os alunos sentiram alguma dificuldade em lidar com esta situação, o que aliás é normal, uma vez que o conteúdo matemático a que se refere a colocação do eixo de simetria nesta situação (cortando a imagem), apenas é parte integrante do programa do 9.° ano de escolaridade (DEB, 1991b).

Porém, a discussão, o diálogo e debate de ideias, e a utilização de uma estratégia de tentativa e erro, corrigido pelos próprios, permitiu que os alunos entendessem que a simetria exige sempre um movimento a partir do eixo e a aluna realizou, finalmente, o movimento correcto, atravessando o eixo no chão (partindo assim ambas o espelho).

Esta tarefa, apesar de, ou talvez por, ser considerada pelos alunos como não estando relacionada com matemática, proporcionou-lhes a oportunidade de construírem, uns, e reforçarem, outros, o seu conhecimento e entendimento referente a simetrias.

Nas actividades seguintes — utilizando papel quadriculado — os alunos evidenciaram uma clara compreensão dos conceitos de simetria evidenciando o facto da actividade anterior ter sido efectivamente motivadora e promotora de aprendizagens, pois deixaram de efectuar translações e de se enganar na determinação das distâncias. Foi também efectuada uma introdução à localização de pontos no plano, sendo uma primeira abordagem ao conceito de coordenadas cartesianas.

## A construção do Origami e suas potencialidades matemáticas

A arte do *origami* — efectuar construções apenas dobrando papel — pode ser utilizada nas escolas de diversas maneiras, em particular na área da Matemática. De uma forma geral, e particularmente no 1.° ciclo, o processo de construção de *origami* permite abordar conteúdos como sejam as figuras geométricas — quadrados, rectângulos, triângulos — suas propriedades e relações entre eles, as noções de rectas paralelas, perpendiculares, ângulos, bissectriz, diagonal de um polígono, área de um rectângulo, de um triângulo, metade, terça parte, etc, cabendo ao professor seleccionar que conteúdos focar em cada situação específica. A sua construção permite ainda que os alunos aprendam a seguir e a dar instruções, analisar e ler esquemas, sendo também um possível ponto de partida para o estudo dos circuitos e caminhos.

Nas tarefas propostas pretendia-se explorar alguns dos conceitos geométricos referidos, ao mesmo tempo que os alunos construíam uma caixa e um cão seguindo os esquemas fornecidos pela professora. Este conjunto de tarefas foi proposto a uma turma do 3.° ano de escolaridade, composta por 20 alunos de cinco nacionalidades (russa, moldava, ucraniana, irlandesa e portuguesa). Para a primeira construção, os alunos utilizaram uma folha rectangular e, na segunda, duas folhas quadrangulares de dimensões similares.

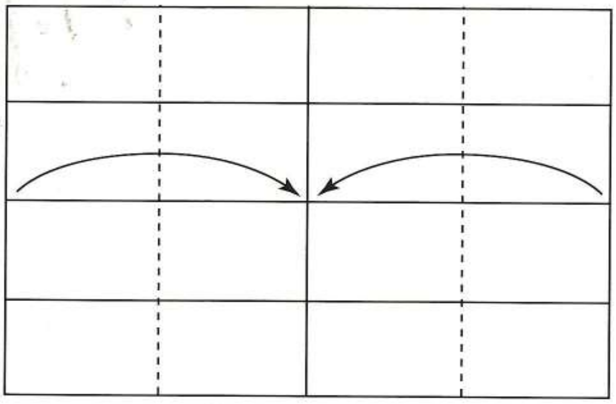


Figura 2.

Os alunos trabalham sozinhos, mas uma vez que se encontram sentados em díades, sempre que têm alguma dúvida recorrem, em primeiro lugar, ao colega.

Esta tarefa foi preparada com o objectivo matemático primordial de abordar alguns temas geométricos, nomeadamente a classificação de alguns quadriláteros que se iriam obter aquando da construção dos *origamis*, bem como a classificação de triângulos e sua relação com os quadrados/rectângulos a partir dos quais alguns deles eram obtidos. Um outro tópico abordado relaciona-se com os conceitos de metade, quarta parte, dobro, quádruplo, ....

Através da leitura e interpretação dos esquemas por parte dos alunos, foi possível à professora efectuar uma avaliação construtiva dos conhecimentos que os alunos possuíam já sobre os temas focados.

## O processo de construção e algumas evidências

Seguindo o esquema, os alunos dobram, inicialmente, as folhas ao meio e, num segundo momento, dobram-nas em quatro partes iguais, segundo o comprimento, como se pode observar na figura 2.

Nesse processo a professora vai questionando os alunos sobre que tipos de figuras geométricas obtêm e qual a relação entre estas e a folha inicial:

Professora (mostra uma folha dobrada ao meio): *Antes tinha isto, que é o quê? Agora tenho isto, que é... (mostra a folha com cada metade dividida ao meio.)*

Vyatcheslav (Slava): *São duas iguais, é metade!*

Professora: *Todos concordam?*

Alguns alunos: *Não!*

Professora (mostrando as duas folhas — uma dividida ao meio e outra dividida em quatro partes iguais.): *O Slava diz que são iguais e que são metade, vocês dizem que não. Afinal, são iguais ou não?*

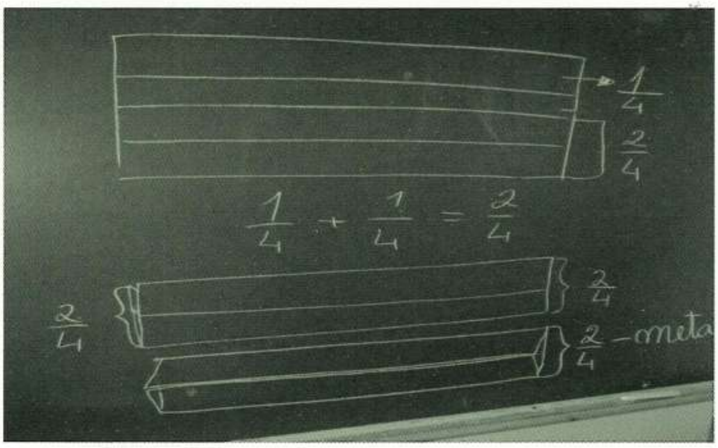



Figura 3.

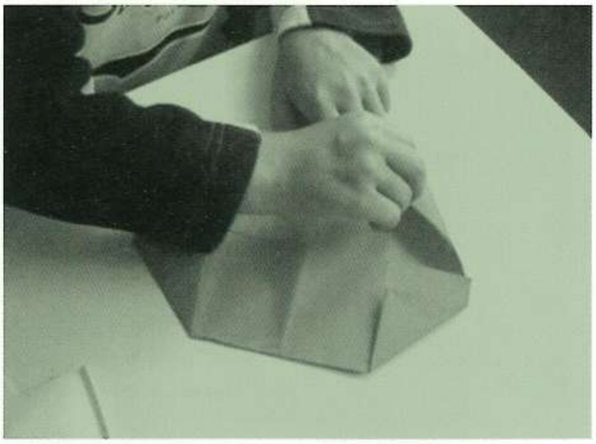


Figura 4.

Este momento de comunicação e de questionamento por parte da professora põe em evidência algumas das normas sociais e sociomatemáticas aceites e praticadas pela turma, revelando espírito crítico por parte dos alunos face às respostas apresentadas pelos colegas e que não têm qualquer pudor em reconhecer que não sabem ou que não estão de acordo com algum comentário/resposta fornecida.

De modo a clarificar esta situação os alunos sobrepuseram as duas dobragens, desempenhando as discussões e argumentações geradas por esta situação uma base para uma consolidação de conteúdos relativamente às relações entre unidade, metade e quarta parte.

Professora: *Quantas quartas partes tem a folha toda?*

Alunos: *Tem quatro.*

Professora: *Quantas quartas partes tem metade da folha?*

Alunos: *Tem duas.*

Professora (indica na folha dobrada): *Então isto [2/4] forma o quê?*

Slava: *Duas quartas partes mais duas quartas partes dá quatro quartas partes (2/4 + 2/4 = 4/4)*

O Slava, com o seu comentário, demonstra que interiorizou já perfeitamente a noção de metade e de equivalência de fracções, conteúdo apenas constante do programa do 5.º ano de escolaridade (DGEBS, 1991).

Para que todos os alunos pudessem partilhar efectivamente da contribuição do Slava, a professora representa no quadro a folha e respectiva divisão em quatro partes equitativas (figura 3).

De modo a possibilitar que os alunos cimentem estes conteúdos, a que relacionem estes conceitos, e a permitir-lhes a construção de uma outra forma de pensar/considerar a metade (o mais usual é considerar-se que as metades têm de estar juntas, ideia que a professora pretendia desmistificar), a professora prossegue com as suas questões:

Professora — *Então, à metade da metade eu chamo...?*

Volodimir (Vova) — *Um quarto, porque está dividido em quatro partes!*

Professora (indica a representação no quadro) — *Então, se eu disser que as duas partes das pontas são metade, estou a dizer certo ou não?*

Vova — *Sim, está a dizer certo porque são duas de quatro partes.*

Prosseguindo com a actividade de construção do *origami*, foi efectuada a terceira dobragem constante do esquema e, uma vez que a folha de papel ficava dividida longitudinalmente em oito partes iguais, a professora aproveitou também esta situação para recordar o termo com que se designa cada uma das oito partes.

Perto do fim da construção da caixa, na 5.ª dobragem, os alunos, seguindo o esquema, efectuam a dobragem dos quatro vértices (figura 4).

Ao dobrarem um deles, a professora, com o intuito de fazer uma revisão das figuras geométricas questiona-os sobre que figuras obtêm em cada canto ao que os alunos respondem: *um triângulo recto!*, e ao abrir a dobragem referem que: *obtêm um quadrado pois tem os lados todos iguais!*. Os alunos identificam o quadrado como soma dos dois triângulos rectângulos, apesar de não se exprimirem em termos matematicamente correctos. Com efeito, quando a professora os questiona de modo a justificarem a identificação que tinham efectuado, apenas referem que é um quadrado pois as medidas dos lados são todas iguais, apresentando assim uma justificação baseada na percepção da representação e não uma justificação matematicamente correcta.

Terminada a construção da caixa de papel, é então iniciada a construção de um cão (utilizando para tal as duas folhas de papel quadrangulares).

A professora explorou com os alunos algumas propriedades das figuras geométricas e dos segmentos de recta que se obtinham em cada dobragem. Numa das dobragens da construção um aluno equivoca-se na leitura do esquema e em vez de efectuar a dobragem indicada, dobra a folha quadrangular pelos eixos de simetria não diagonais, obtendo não o que se pretendia mas um conjunto de quadrados (figura 5).

Este equívoco por parte de um aluno é aproveitado pela professora para explorar uma outra perspectiva da visualização.

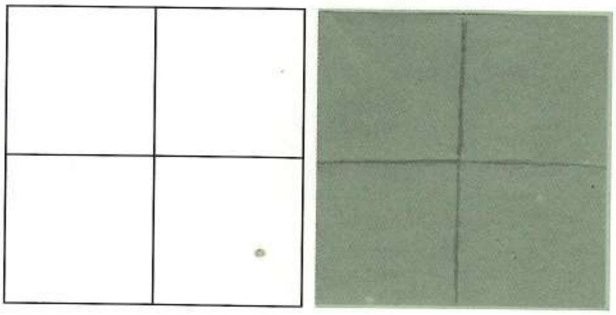


Figura 5.

Professora — *Quantos quadrados podemos contar aqui?*

Catarina — *São cinco.*

Professora — *Estão de acordo?*

Alunos (Em coro) — *Não!*

Catarina — *Ai são, são!*

A Catarina não está de acordo com os colegas e não tem qualquer problema em o expressar. Os alunos apenas visualizavam os quatro quadrados interiores, não contando com o quadrado da folha. Dado que, aparentemente, apenas a Catarina conseguiu ver os cinco quadrados, é então solicitado à aluna que explique aos colegas qual o processo utilizado para efectuar a contagem, que foi contrário ao utilizado pelos colegas pois partiu do maior para os mais pequenos.

Com tarefas deste tipo é possível demonstrar aos alunos a presença da matemática nos mais diversos domínios, no caso, a arte do *origami*, de que por vezes os alunos não se apercebem, nem mesmo após terem realizado as actividades e durante o seu desenrolar terem sido discutidos inúmeros conceitos matemáticos:

Professora — *E o que é que nós aprendemos com estes trabalhos?*

Alunos — *Muitas coisas!*

Slava — *Aprendemos as rectas paralelas e as perpendiculares. Aprendemos...*

Vova — *A metade que é como dois quartos!*

Slava — *Yah! E descobrimos figuras geométricas dentro de outras... Parecia um jogo, professora!*

Catarina — *Pois parecia, mas essas coisas é de Matemática! Nós não fizemos Matemática!*

Para a Catarina, apesar de terem sido abordados vários conteúdos matemáticos, por estarem a construir os *origamis* (a caixa e o cão), não estavam a fazer matemática pois estavam imersos num outro tipo de actividade. Apesar de ser habitual na sala de aula, não tinham ainda sido explorados, de forma tão intensiva, os conteúdos matemáticos subjacentes às construções realizadas, daí a resposta da Catarina.

## Alguns comentários

Estas duas actividades, e os comentários decorrentes, tornam evidentes que os alunos necessitam de ser motivados e contextualizados nas tarefas que desenvolvem pois se isso ocorrer poderemos levá-los a ver uma matemática com utilidade e numa perspectiva um pouco distinta daquela que muitos conhecem e de que não gostam.

Ao preparar tarefas motivadoras e que possuam significado para os alunos — ainda que estes considerem nada ter a ver com matemática, apesar de assim não ser — e que permitem abordar os conceitos (matemáticos) de modo integrado nos diversos domínios, facultamos aos alunos de hoje, adultos de amanhã a possibilidade de irem, ao seu ritmo, construindo os seus próprios conhecimentos, contribuindo para a construção de uma sólida formação e cultura matemática e também para que a matemática deixe de ter a conotação negativa que tem presentemente.

Dando aos alunos a oportunidade de realizarem actividades com estas características, estamos a possibilitar que estes adquiram desde cedo o gosto pela matemática e tomem consciência da sua existência e importância na escola e fora dela.

Por relacionarem diferentes conteúdos e domínios matemáticos, consideramos que estas tarefas contribuem para solidificar a educação matemática dos alunos, permitindo-lhes uma visão mais ampla dos diversos domínios abordados, desmistificando também, assim, que a matemática é a ciência dos números, tal como o expressou a Catarina.

## Nota

1 Esta actividade foi já desenvolvida com outras turmas em que as professoras tiverem necessidade de recorrer ao hall da escola ou mesmo ao exterior, pois eram os únicos locais em que o chão se adequava à sua realização.

## Referências


Departamento de Educação Básica (1991a). *Organização Curricular e Programas — Ensino Básico — 1.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação.

Departamento de Educação Básica (1991b). *Programa de Matemática Ensino Básico — 3.º Ciclo: Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem* (5.ª ed. Vol. II). Lisboa: Ministério da Educação.

Departamento de Educação Básica (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Ministério da Educação.

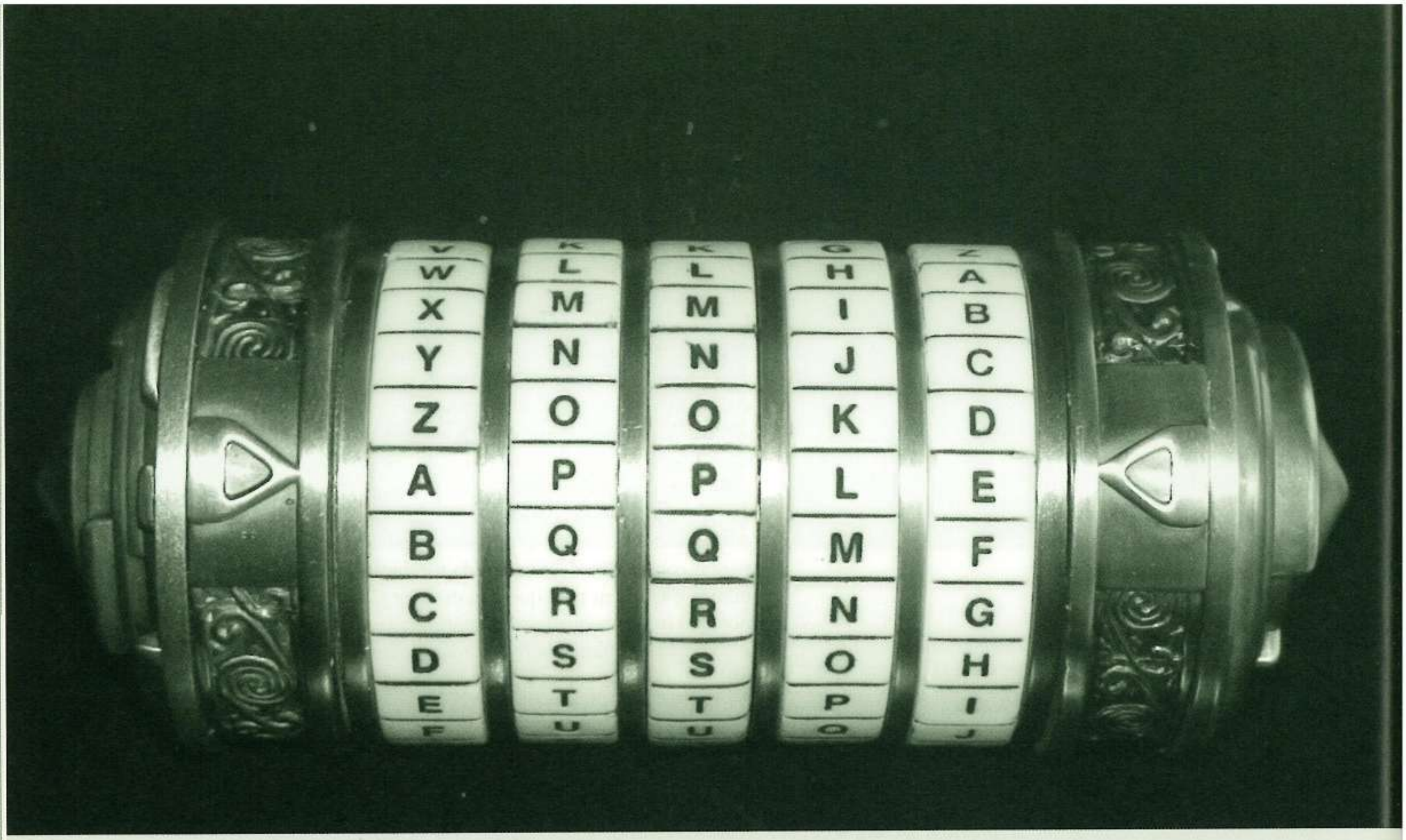
Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundários (1991). *Programa de Matemática Ensino Básico — 2.º Ciclo: Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem* (Vol. II). Lisboa: Ministério da Educação.



Carlos Miguel Ribeiro, ESE da Universidade do Algarve

Fernanda Joaquim, EB1 Lagoa

Ana Colaço, EB1 Carvoeiro



# Ler e Resolver Problemas

**Luciana Pereira de Brito**

Como professora, que avalia também através de testes/exames, observo nos alunos algumas estratégias de resolução: há aqueles que mal recebem o enunciado folheiam a prova por um todo, começando pelas questões onde se aplica o conteúdo que trazem mais latente na memória a curto prazo; outros apenas folheiam para conhecer o tamanho da prova e identificar o grau de dificuldade, e começam pela primeira questão. Após a leitura de um enunciado, apresentam uma resposta (ou esboçam algum raciocínio) se o mesmo despertou algum tipo de compreensão, ou avançam para a questão seguinte. Findas as questões, voltam ao início da prova à procura das questões em branco e fazem uma leitura mais atenta, até ao *nível máximo de concentração*[1] que cada um consegue imprimir à leitura em função dos conhecimentos ou capacidades que o leitor possui e que a leitura desperta. E gerindo o tempo: analisando e por vezes corrigindo as respostas dadas em outras questões.

Dito de outra forma, no resultado de um inocente exercício de deleite (esquema 1).

```
Se faltam mais de X minutos para acabar a prova então
    {Para i=1 até nível máximo de concentração
        {Para n=1 até nº da última questão
            {Se a questão n ainda estiver por responder então
                {Ler o enunciado da questão com concentração de nível i
                Apresentar resposta mediante a compreensão processada}
        n=n+1}
    i=i+1}
Se a prova acaba dentro de X minutos então
    {Para n=1 até nº da última questão
        (Hipótese 1) {Se a questão n foi respondida então
            {Ler o enunciado da questão
            Ler resposta e corrigir se necessário}
    n=n+1}
```

**Esquema 1.**

O processo trunca quando o tempo acaba, e tudo depende da variável "$X$ = tempo disponível" e das características dos alunos: alguns preferem não deixar nada em branco e esboçar uma resposta qualquer; outros, quando sabem que só lhes restam mais 5 minutos com a prova, preferem nem começar a ler uma questão que deixaram em branco e rever com muita calma as respostas dadas às outras questões (hipótese apresentada no algoritmo). Outros não revêem nada e muito antes do fim do tempo (1 ou 2 de nível máximo de concentração?) já viraram a prova e relaxaram: "Já acabei". Fizeram o que sabiam, entendendo-se por "o que sabiam" o conceito ou processo matemático que a leitura lhes despertou.

Segundo o GAVE, nos Resultados do Exame de Matemática do 9° ano de 2005, 79% dos alunos não obtiveram classificação positiva, sendo que 25% deixaram em branco as questões de Resolução de Problemas.

Excluindo as hipóteses do tempo da prova ser curto e dos problemas terem sido mal formulados/enunciados, uma conclusão que retiro é a de que nossos alunos têm dificuldades em resolver problemas que lhes são apresentados por escrito. Se um problema se diz matemático envolverá um raciocínio lógico-matemático para a sua compreensão e resolução. Se 25% dos alunos nem sequer tentaram resolver os problemas, o nível máximo de concentração dos nossos alunos não é suficiente para a compreensão dos enunciados e esboço de algum raciocínio: a sua leitura não despertou conhecimentos adquiridos ou, de facto, não os adquiriram. Ou, ainda, não souberam como passar para o papel os seus raciocínios.

Inerente a esta conclusão coloca-se aos professores, pelo menos um problema:

*Como ensinar os nossos alunos a resolver problemas que lhes são apresentados por escrito?*

E, meta-cognitivamente falando, não temos conseguido resolvê-lo.

As discussões filosóficas — análise das variáveis, o que é pedido, quais são os dados disponíveis — têm-se conseguido com muito mérito em várias partes do mundo.

A solução não me parece estar à vista: é um problema aberto. Aberto demais, tão aberto quanto os portões da escola, o seu papel, as muitas exigências a que se sujeitou e as poucas a que sujeita os alunos. Os portões da escola devem estar abertos, sim, mas todos devemos entrar e sair de forma organizada, num equilíbrio entre as verdadeiras necessidades e as soluções que verdadeiramente podem ser oferecidas.

Não tenho, portanto, a menor pretensão de aqui apresentar uma solução. Mas como professora, que supostamente resolve (vários) problemas, pareceu-me interessante adoptar o método de Pólya: após identificá-lo, pesquisei um pouco mais para o compreender melhor e aqui apresento um pequeno ensaio sobre uma variável deste problema que me parece de grande importância.

## A leitura

Segundo Foucambert (citado por Mônica Garcia Barros em *As Habilidades de Leitura: Muito Além de Uma Simples Decodificação*), "ler é funcionar como uma agulha de um gira-discos que transforma vibrações de um certo tipo em sinais de um outro tipo". E parece-me que nossos alunos têm dificuldades em resolver problemas escritos pois a agulha está torta, ou não têm a sensibilidade para apreciar a melodia que ela produz.

Segundo Cabral (citado no mesmo artigo), "a habilidade de leitura não se resume a descodificar, traduzindo isoladamente sílabas ou palavras em sons. A boa leitura deve passar pelas seguintes etapas:

1° Descodificar;

2° Compreender;

3° Interpretar, e

4° Reter."

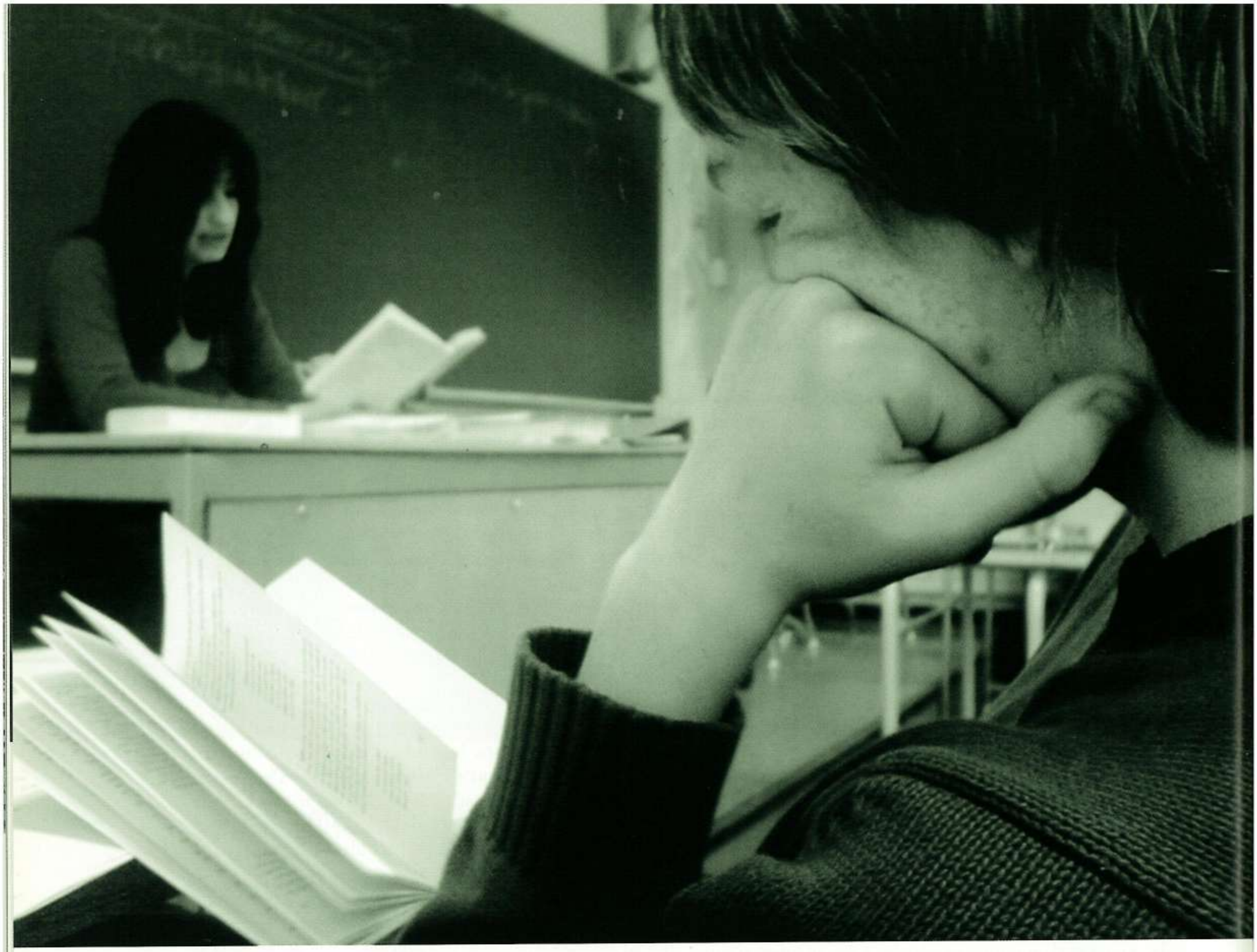
A minha infeliz experiência indica-me que alguns alunos em Matemática lêem o enunciado de um problema seguindo com os olhos (da esquerda para a direita) as palavras à procura de um número ("logicamente, a aula é de Matemática e não de Português"). Se a calculadora estiver à mão pois digitam-no. Seguem o enunciado à procura de outro número. Pensam na matéria que estiveram a "dar"... fazem então uma soma, ou produto. Ou seno, ou raiz quadrada, qualquer coisa que tenham aprendido nas últimas aulas. Já está, o resultado é a resposta ao problema, "fizeram o que sabiam". Como apresentar um triângulo rectângulo conhecidas as medidas dos catetos, e pedir "determina a área". Se o teorema de Pitágoras foi o último conteúdo abordado pois bem certo que esses alunos apresentarão como resposta à área o comprimento da hipotenusa. ("logicamente, a última vez que vi um triângulo rectângulo foi para calcular a medida de um cateto ou hipotenusa, e aqui é a da hipotenusa"). Os mesmos alunos tinham trabalhado algumas semanas atrás na determinação da área de um triângulo, com sucesso. Mas aqui não leram o enunciado. Descodificaram-no de forma primária, numa simples identificação visual e recurso à memória de curto prazo.

Quando esta não é suficiente para aceder ao conceito ou algoritmo que decoraram pois perguntam frequentemente "o que é para fazer aqui". Não compreenderam o que leram pois descodificaram as letras em palavras mas não reconheceram significado matemático em "área". "Aquilo do base vezes altura" teria sido a ajuda mais (des)esperada: um processo que interiorizaram por mecanização, deixando claro que, afinal, não houve sucesso na interiorização do conceito.

Aqui há tempos surgiu numa aula de 8° ano, na sequência dos casos notáveis da multiplicação, um exercício que pedia que se simplificasse a expressão $(x+1)^2-(x-3)^2$.

Todos os alunos haviam demonstrado na aula anterior dominar a técnica do desdobramento do quadrado de 1 binómio, mas nenhum foi capaz sequer de começar o exercício. Porquê? Porque não foram capazes de descodificar o enunciado: o sinal de − separa 2 quadrados de binómios, por isso ele pede que se desdobre o quadrado de 2 binómios, e que depois se determine a diferença entre os desdobramentos. Se o enunciado fosse $1^2-3^2$ assim o teriam feito conhecidas que são as prioridades das operações: primeiro o cálculo das potências, depois a diferença entre os seus valores.

Quando lhes é apresentado um enunciado do tipo "completa as lacunas" alguns alunos descodificam-no e apenas perguntam "o que quer dizer *lacuna?*" Outros tentam resolver esse problema, e observam o resto da questão. Descobrem o que é *lacuna*. *Lacuna* é palavra que muitos desconhe-



cem, uma também das muitas lacunas de nossos alunos, o domínio do vocabulário da língua materna. Outros, infelizmente muitos, voltam a perguntar "o que é para fazer aqui?". Outros não perguntam: simplesmente deixam a questão em branco ou procuram inspiração no teste do lado.

No 9° ano os alunos compreendem por simples observação e intuição que, numa circunferência, duas cordas paralelas definem dois arcos iguais. Se tal lhes for dito, tal como nos manuais, da forma "Arcos compreendidos entre duas cordas paralelas têm a mesma amplitude" muitos esbarram no Português e não descodificam os "arcos compreendidos entre". "As cordas paralelas é que têm a mesma amplitude" (!), logo desenham duas cordas paralelas e iguais.

Após descodificar, o aluno deveria captar o sentido do enunciado lido: saber do que se trata, compreender o que se pretende e ser capaz de explicá-lo por suas palavras. Para tal, as respostas podem ser encontradas literalmente no próprio texto ou escritas de outra forma, mas estão explícitas no texto. Como num longo enunciado, identificar os dados e saber dizer exactamente qual a questão que ele levanta.

No entanto, "a compreensão só ocorre se houver afinidade entre o leitor e o texto; se houver uma intenção de ler, a fim de atingir um determinado objectivo". (Menegassi, R. J.; Calciolari, citação de Mónica Barros)

Há essa intenção quando o aluno domina pelo menos razoavelmente os conteúdos matemáticos, e o objectivo a atingir é decifrar qual deles utilizar. Nessa tentativa de decifrar o aluno aumenta o seu nível de concentração[2].

Também há essa intenção e esse esforço de concentração quando o aluno está motivado e atribui importância ao objectivo, por exemplo na consequência para a sua vida escolar da classificação no teste. Daqui concluo, numa análise mais profunda do problema inicial, que a motivação é outra variável crucial; no entanto, e pelas inúmeras complexidades que a ela são inerentes, deve ser tema para outro ensaio.

Na interpretação o aluno não encontra facilmente as respostas no enunciado, pois apenas com uma boa compreensão conseguirá interpretar informações que não estão escritas literalmente. Se um texto descreve um triângulo equilátero de perímetro 12 cm, a muitos alunos escapa a interpretação desta informação, e a consequente tradução para outra forma que melhor se adeqúe a uma estratégia de resolução do problema: é um triângulo com 3 lados iguais (cada um com 4 cm de comprimento) e 3 ângulos iguais (cada um de 60° de amplitude). Se o problema tem medidas em metros e centímetros, talvez seja importante fazer uma conversão, para melhor compreender os dados.

A fase da interpretação aplica-se não só ao enunciado como também à solução matemática obtida, na verificação da sua possibilidade no contexto do problema. Frequentemente aparecem respostas como "Podem ir ao cinema 2,7 pessoas.", ou "O João tem 55 anos e seu avô tem 20." Observo que, no rasgo de actividade cerebral que se faz quando o aluno pensa ter interpretado correctamente o enunciado, rapidamente passa para o papel a ferramenta matemática que julga necessária, e, "como estamos em Matemática", nessa satisfação esquece do resto.

Esse esquecimento acontece, a meu ver, porque o aluno não reteve as informações trabalhadas nas etapas anteriores (descodificação, compreensão e interpretação) de leitura do enunciado. Não armazenou as informações mais importantes na memória de longo prazo. Os que o fazem não esquecem durante a resolução do problema que a idade do João nunca pode ser maior que a do seu avô, pois interiorizam o que o texto diz, fazem analogias, comparações, um paralelo com o seu quotidiano e procedem às suas próprias análises críticas.

Esta falha no armazenamento na memória de longo prazo é regularmente verificada pelos professores, por exemplo quando os alunos demonstram já ter esquecido uma regra ou conceito trabalhado na semana anterior. Constata-se portanto que não foram compreendidos e trabalhados nas várias formas de interpretação. Os alunos não se apropriaram deles, não os retiveram. Registaram a lápis, não a caneta. Na memória a curto prazo.

Penso que há em muitos alunos uma angústia inerente à Matemática, que é tão maior quanto a ausência de hábitos de leitura e de trabalho e de pré-requisitos e, quanto menor for a sua compreensão. Tal como estudam História decorando, muitos alunos apropriam-se de conceitos e procedimentos matemáticos para uso directo, numa aplicação clara: *calcula*, *resolve*. Angustiam-se quando uma questão começa com "Considera a seguinte figura", porque esta frase não lhes pede para fazerem nada do que "estudaram": rapidamente perguntam "o que é para fazer aqui" antes de, tranquilamente, lerem o resto do enunciado. Tendo a Matemática uma linguagem própria, interiorizam não as suas traduções (que em muitos casos são de aplicação simples do dia-a-dia) mas o aspecto visual (numa observação algo superficial) dos seus conceitos e procedimentos. Observo assim que muitos alunos têm dificuldades em criar e manter actualizada essa base de dados visual da Matemática: confundem polinómios com equações, aplicam a Propriedade Distributiva sempre que vêem parênteses, "simplificam números" (!) tal como simplificam fracções, generalizam o uso do Teorema de Pitágoras a todo o triângulo que se pareça rectângulo.

Num texto que enuncia um problema, procuram números para fazerem contas, em muitos casos, sem significado. O aluno que não domina o conceito e os cálculos com fracções sua frio quando vê o denominador em $2 = x/4$. Quando traduzo de "Matematiquês" para Português digo apenas "2 é o resultado da divisão de um número por 4. Que número é esse?", pelo que o semblantes relaxam e a resposta surge de imediato. Apresento novos exemplos, variados, pedindo que façam o mesmo tipo de tradução. Talvez alguns alunos retenham esse conhecimento e atribuam daí para a frente novos significados a signos matemáticos antes arrepiantes.

Tento transmitir aos meus alunos que há aulas de matemática em que somos todos... mecânicos de automóvel. Conhecemos uma ferramenta nova: como funciona, e em que situações podemos utilizá-la. Nos momentos de avaliação pois chega um carro à oficina. *Como verificar o nível do óleo sem abrir o capô? Vamos usar um abre-latas para tal? Uma chave-inglesa para desaparafusar? Podemos desaparafusar 4 parafusos ao mesmo tempo? E depois, podemos deitar fora os parafusos? Será que o carro não anda porque, simplesmente, não tem gasolina???...*

Por exemplo, no exercício do quadrado do binómio, explico que $(a + b)^2$ é o parafuso apertado, e com a chave de fendas certa desaparafusa-se, obtendo $a^2 + 2ab + b^2$. Apresento-lhes vários parafusos apertados e desapertam-nos; vários desapertados e voltam a apertá-los. Em $(x + 1)^2 - (x-3)^2$ apercebo-me que se atrapalham com o aspecto, apetece-lhes martelar aquilo tudo com a chave de fendas. Muitos alunos martelam com o que tiverem à mão tudo o que se lhes aparece à frente.

"Calma. São apenas dois parafusos apertados. Vamos começar, um de cada vez. Mas não os deitem fora!"

Esta metáfora do mecânico tem servido para que alguns alunos desmistifiquem a Matemática e evoluam na sua capacidade de resolver verdadeiros problemas.

Outros, infelizmente, nem sequer a compreendem.

Ao compreenderem melhor as ferramentas os alunos apropriam-se melhor do seu uso, e mais facilmente a associam a um determinado raciocínio subjacente a uma parte de um problema, potenciando assim os seus níveis de concentração.

Claro, há ainda a outra angústia que advém do contexto de exame escrito. No silêncio da procura. Sem a voz conhecida de há 100 ou 120 aulas que traduzia e dava significado a muito do que estava escrito. Que dizia "atenção, isto não é uma equação, é um polinómio", ou "se cada rebuçado custa 0,2€ então por $x$ rebuçados paga-se...? $0{,}2x$ €." ou apenas "*Considera a figura* significa que a deves ter em consideração, pois mais adiante são postas questões sobre essa mesma figura".

Têm que, sozinhos, descodificar e compreender, interpretar e reter, num espaço de tempo limitado.

Educar na verdadeira concepção é paradigmático: é ajudar o educando a não necessitar de nossa ajuda.

Se a escola, a formação e a avaliação passam e passarão em grande escala pelo registo escrito, essa autonomia não será conseguida enquanto o aluno não atribuir significado e for crítico em relação ao que lê.

Esse é o espírito pretendido. Como tal, partindo dos resultados do exame do ano passado, e da análise ao problema inicial que aqui apresentei deparo-me com outro: se os alunos têm que, sozinhos, descodificar, compreender, interpretar e reter informação escrita num tempo limitado, como ensiná-los a tal, num tempo também limitado?

E aqui jaz uma segunda variável: o tempo. O Professor, os alunos; a autonomia pretendida e o tempo disponível.

Em última análise, podemos comparar a situação do aluno frente ao exame com a situação do professor, hoje, frente a uma turma. Há várias questões a resolver, como vários tópicos a abordar. Os alunos folheiam a prova para a conhecerem e identificarem superficialmente conteúdos mais fáceis/difíceis; os professores fazem um diagnóstico das competências que os alunos revelam e que são necessárias para as aprendizagens a realizar. O nível máximo de concentração equivale ao nível máximo de aprofundamento que o professor imprime aos conteúdos a leccionar em função dos conhecimentos ou capacidades que os alunos possuem e que o conteúdo em si potencialmente desperta.

E há tempo limite para a realização de ambas as tarefas. E ambas dependem da motivação dos intervenientes.

Arrisco um cenário: no exame, os alunos leram os problemas 1, 2, quem sabe 3 vezes. Não os compreenderam. Olharam para o relógio, e para outras questões em branco. "Não insisto, este não sei fazer" ou "Vou escrever qualquer coisa e já está.". Avançaram para outras questões. Arrisco também dizer que assim fazemos nós, professores: planificamos leccionar um sem número de conteúdos num calendário rígido. Quando um número considerável de alunos finalmente começa a descodificar e compreender um conceito ou ferramenta matemática olhamos para o relógio, e para o resto do programa: "não insisto, eles têm muitas dificuldades em compreender os problemas. Traduzo o enunciado deste problema, resolvo-o e já está". E avançamos para novos conteúdos a, infelizmente, obrigatoriamente sumariar. Ficamo-nos pela criação e árdua manutenção da base de dados visual; ficamo-nos pelo "*calcula e resolve*".

Não temos tempo ou condições para um nível mais elevado de aprofundamento que, quem sabe até linearmente, poderia conduzir a níveis mais elevados de concentração nas leituras que propomos aos nossos alunos.

Costumo dizer aos meus alunos que para os ajudar na sala de aula podem contar com os colegas, comigo e com o autor do manual adoptado. Só que este não pode estar presente, e envia todos os seus conhecimentos pelo livro. Que quando proponho alguma actividade do livro é, na verdade, o autor que lhes está a falar. *Ouçam o que diz, percebam o que ele pretende. Façam-lhe perguntas, as respostas devem estar lá, é só saber procurá-las.*

Parece-me fundamental criar nos alunos essa intimidade com os livros, com o mundo de informação importante e interessante que ali está, escrita. E motivá-los para a escrita dos seus pensamentos, num silêncio de diário. Peço que escrevam composições sobre o que entenderam e não entenderam, gostaram e não gostaram, explicando os porquês. Como aqui fiz.

Há, pois, dado o nosso problema inicial e segundo Pólya, a necessidade de elaborarmos uma estratégia para a sua resolução que passe, dentre muitas outras situações, por ensinar os alunos a descodificar, compreender, interpretar e reter informação escrita, rentabilizando este processo ao longo de toda a escolaridade:

- Incutindo, desde o 1° ciclo, hábitos de leitura;
- Trabalhando continuamente, desde o 1° ciclo, a interpretação oral e escrita de textos escritos, sendo o papel do professor fundamentalmente de dinamizador de debate — compreensão, reflexão, formulação de hipóteses;
- Fomentando a expressão de ideias/opiniões, hipótese/conjecturas, na língua materna e em linguagem matemática;
- Trabalhando o significado da linguagem matemática, traduzindo e interpretando de forma oral e escrita textos de linguagem corrente para matemática e vice-versa.

Outras variáveis aqui surgiram, outras estratégias de resolução podem e devem ser implementadas.

Não sendo possível alterar o passado, o Plano de Acção para a Matemática que hoje implemento foca essencialmente esse problema: ajudar os alunos a resolver problemas. Pois, fundamentalmente, devem os professores (de)mo(n)strar que também são capazes de o fazer.

**Notas**

1 Para exemplificar o conceito de *nível máximo de concentração*: se me é apresentada uma frase em chinês, sendo esta uma língua sobre a qual não possuo qualquer conhecimento, não repetirei a leitura pois sei que não sou capaz de descodificar os símbolos, pelo que o nível máximo de concentração é 1. Em francês, apesar de não dominar de todo a língua, tentarei uma 2ª leitura, ou 3ª, ou 4ª em função do tempo de que disponho e da minha motivação, pois sei que posso encontrar algumas palavras que conheça e, a partir delas, tentar atribuir algum sentido à frase e assim responder à questão apresentada.

2 Em suma, o *nível máximo de concentração* depende em primeiro lugar da motivação do aluno para atingir o produto final, que é apresentar a resposta (que considera) certa ao problema que lhe é apresentado. Tentará concentrar-se mais se considerar que "vale a pena o esforço", numa complexa gestão da autoconfiança nas suas capacidades, do tempo disponível e da importância que atribui ao sucesso na tarefa naquele momento. A partir daí — da sua motivação — tentará aumentar o nível dessa concentração se sentir que tem sucesso na passagem para a etapa seguinte do processo de leitura: se após algumas leituras achar que descodificou tentará compreender, se acha que compreendeu tentará interpretar.

**Luciana Pereira de Brito**
**EB 2.3 de António Feio**

# Os Novos Programas já estão a dar que falar...

Maria José Delgado

A primeira oficina de formação dos Novos Programas de Matemática para professores do 2° e 3° Ciclos, decorreu ao longo de 6 sessões, num total de 50 horas, entre 1 de Março e 7 de Junho, em todo o país.

É acerca do trabalho realizado no grupo de formação do 2° Ciclo *Números, Operações e Álgebra*, que decorreu na região do Alentejo, em Moura, que venho trazer notícias.

*1ª sessão*. A expectativa era muita! Assim, mal terminou a apresentação do Novo Programa, toda a atenção dos professores foi dirigida para a procura do que havia de novo e do que já existia no programa antigo, e a partir daí surgiram as diferenças de fundo, as linhas de força, as finalidades e os objectivos.

E passou-se à prática. Atendendo à escola onde trabalhavam ou à proximidade de escolas, os professores formaram grupos de trabalho tendo logo em vista a elaboração do trabalho final. Foram distribuídas várias tarefas, uma por grupo, todas elas no âmbito dos *Números, Operações e Álgebra*. Uma vez analisada e resolvida a tarefa, foram identificados os objectivos (objectivos gerais do ensino da Matemática, objectivos gerais de aprendizagem do ciclo/tema e objectivos específicos) que os alunos poderiam perseguir com a actividade, debateram-se as razões que teriam presidido à escolha das tarefas, a sua implementação na sala de aula e a forma como era esperado que os alunos a resolvesse. Foi então acordado que as tarefas trabalhadas pelos diferentes grupos iriam ser aplicadas na sala de aula.

*2ª sessão*. Os trabalhos começaram com o relato da aula em que foi implementada a tarefa. Pelo facto de dentro do mesmo grupo todos terem aplicado a mesma tarefa, tornou-se possível confrontar e discutir, com base na experiência vivida, as suas potencialidades em termos da aprendizagem da Matemática, os aspectos relevantes do trabalho na sala de aula, as produções e as intervenções dos alunos, o empenho e entusiasmo por eles manifestados e ainda as dificuldades sentidas e a forma como foram ultrapassadas.

E voltando ao Novo Programa, a atenção foi então dirigida para a análise e discussão das capacidades transversais, sendo dado especial relevo à comunicação, nomeadamente à importância de desenvolver nos alunos, desde muito cedo, a comunicação escrita e oral, de modo a serem capazes de explicitar os seus raciocínios, descrever como pensaram, o que fizeram e como fizeram. Nesse âmbito, foram apresentados alguns slides sobre o *Congresso matemático*, como forma dos alunos apresentarem as suas produções à turma. Discutiu-se ainda as vantagens da existência de rotinas na sala de aula, momentos previamente calendarizados, com objectivos bem definidos, como é o caso do espaço destinado ao *Congresso matemático*.

*3ª sessão*. Chegou a altura de pensarmos no trabalho final de forma mais efectiva. Passou-se à fase da consulta de livros, revistas e documentos sobre assuntos de realce no *Novo Programa*. E uma vez as escolhas feitas relativamente aos temas a trabalhar, os professores começaram a pensar na(s) tarefa(s) a pôr em prática na aula, que iria(m) constituir o ponto de partida do trabalho final.

Um dos grupos optou por desenvolver nas suas aulas o Cálculo Mental. Várias dúvidas se puseram desde logo: vamos ensinar diferentes estratégias de cálculo mental? Vamos deixar que os alunos utilizem as estratégias que preferirem? Vamos programar aulas exclusivamente destinadas ao cálculo mental? Vamos considerá-lo como uma rotina da aula, trabalhando todos os dias alguns minutos?

Um outro grupo decidiu trabalhar a compreensão da operação divisão, com o auxílio da calculadora.

Outro grupo optou por desenvolver nos alunos a capacidade de formular problemas. Partindo de uma conversa entre dois alunos sobre um tema de grande actualidade, o preço dos combustíveis, os alunos formularam e resolveram problemas muito pertinentes. Será que pelo facto do gasóleo ser mais barato do que a gasolina é sempre mais conveniente ter um carro a gasóleo?... Mais e mais questões foram surgindo, para às quais foram sendo procuradas respostas.

E ainda outro grupo, tomando como ponto de partida um quebra-cabeças retirado de um jornal semanário, decidiu construir uma tarefa no âmbito de *Padrões e Regularidades*.

Em todos os grupos, procedeu-se ao enquadramento curricular da tarefa e à construção de um guião, que posteriormente serviu de orientação e apoio à sua aplicação na sala de aula.

*4ª sessão.* O trabalho começou com o relato das aulas em que foram postas em prática as tarefas criadas por cada um dos grupos, tendo a reflexão incidido essencialmente na análise das produções dos alunos e na procura de respostas às questões: O que é que os alunos aprenderam? Quais foram as evidências dessas aprendizagens? O que é que o professor aprendeu? Foi ainda equacionada a possível necessidade de reformulação das tarefas e a forma de o fazer. Nesse sentido, foi feito o levantamento de aspectos que poderiam ser modificados, desenvolvidos ou mais trabalhos, como foi o caso do trabalho no âmbito do Cálculo Mental. Não só foi considerado necessário prolongar o tempo de trabalho efectivo com os alunos, mas houve ainda consenso no sentido de trabalhar diferentes estratégias, criar situações em que não estivesse definido à partida a estratégia a utilizar, mas que fossem os próprios alunos a escolher a que considerassem mais adequada.

O grupo que tinha escolhido trabalhar a compreensão da divisão, optou por não usar calculadora, apresentando aos alunos diversas situações que permitiriam trabalhar os diferentes sentidos desta operação.

Uma das tarefas criadas a partir do quebra-cabeças de um jornal semanário, no âmbito do tema *Padrões e Regularidades*, também foi objecto de reformulação, de modo a permitir a generalização de relações matemáticas e a sua representação por meio de símbolos, actividade considerada como o cerne de "fazer matemática". Foi assim substituída por uma nova sequência em que o contexto geométrico promove a visualização e a generalização da relação entre a medida da área e a medida do perímetro de uma série de triângulos, construídos com fósforos, e que crescem de acordo com uma dada regra .

As tarefas realizadas por este grupo aparecem em anexo e pretendem ilustrar o tipo de materiais que foram construídos no âmbito desta oficina de formação e que constituíram o ponto de partida para o trabalho final.

Na *5ª e 6ª sessão* foram apresentados os trabalhos finais dos diferentes grupos, tendo sido dado especial ênfase às produções dos alunos e às aprendizagens realizadas pelos alunos e pelo professor.

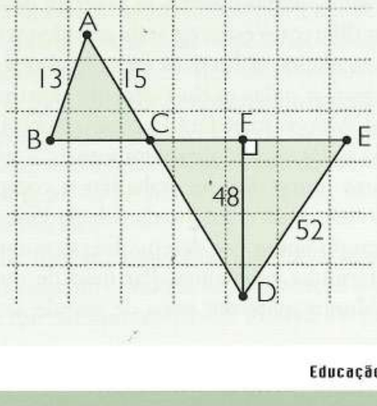
A avaliação da formação feita pelos formandos, na última sessão, permite-nos concluir que foi de encontro às suas expectativas. Este facto está bem evidenciado na reflexão de um professor: "Esta formação posso traduzi-la com 4 "RRRR" e 4 "PPPP": reflecti sobre o novo programa, reciclei alguns métodos e técnicas, reproduzi na aula novas estratégias de cálculo mental, recriei situações facilitadoras de aprendizagem, partilhei com os colegas intragrupo/ intergrupo e com a formadora, participei activamente, quer nas sessões quer na sala de aula, pesquisei em volta do assunto do trabalho a realizar... e tudo isto foi feito com prazer."

**Maria José Delgado**
**EBI de Mourão**

## Materiais para a aula de Matemática

### Errata

**O Problema dos Materiais para a aula de Matemática da revista 98 tem falta de dados. A figura correcta é a seguinte:**




**Pelo lapso pedimos desculpa.**
**Redacção da EM**

As actividades *Sequências com fósforos* e *Sequências com fósforos formando triângulos* resultam da reformulação de tarefas elaboradas a partir do quebra-cabeças de um jornal semanário, numa oficina de formação dos Novos Programas de Matemática para professores do 2° e 3° ciclos. As criadas, no âmbito do tema *Padrões e Regularidades*, foram objecto de reformulação de modo a permitir a generalização de relações matemáticas e a colocar o enfoque da actividade dos alunos no "fazer" matemática. Pretendem ilustrar o tipo de materiais que foram construídos no âmbito desta oficina de formação e que constituíram o ponto de partida para o trabalho final.

**Maria José Delgado**
**EBI de Mourão**

# Sequências com fósforos

1. Observa a sequência em que os triângulos são construídos com fósforos.

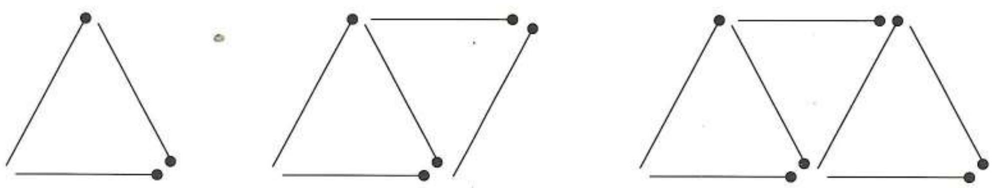


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

2. Reproduz as figuras, usando os fósforos necessários.

3. Que semelhanças observas entre as figuras?

4. Que diferenças observas?

5. Constrói o 4º e 5º termos da sequência.

6. Completa a tabela seguinte:

| Número de triângulos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de fósforos utilizados | | | | | | |

7. Explica como podes obter qualquer termo da sequência, a partir do termo anterior.

8. Qual é o número de fósforos do 15º termo da sequência?

9. Utilizando 80 fósforos, consegues construir uma figura que faça parte desta sequência? Sobram-te alguns fósforos?

10. Descobre uma regra que te permita conhecer rapidamente qualquer termo da sequência.

# Sequências com fósforos formando triângulos

1. Observa a sequência de triângulos equiláteros construídos com fósforos.

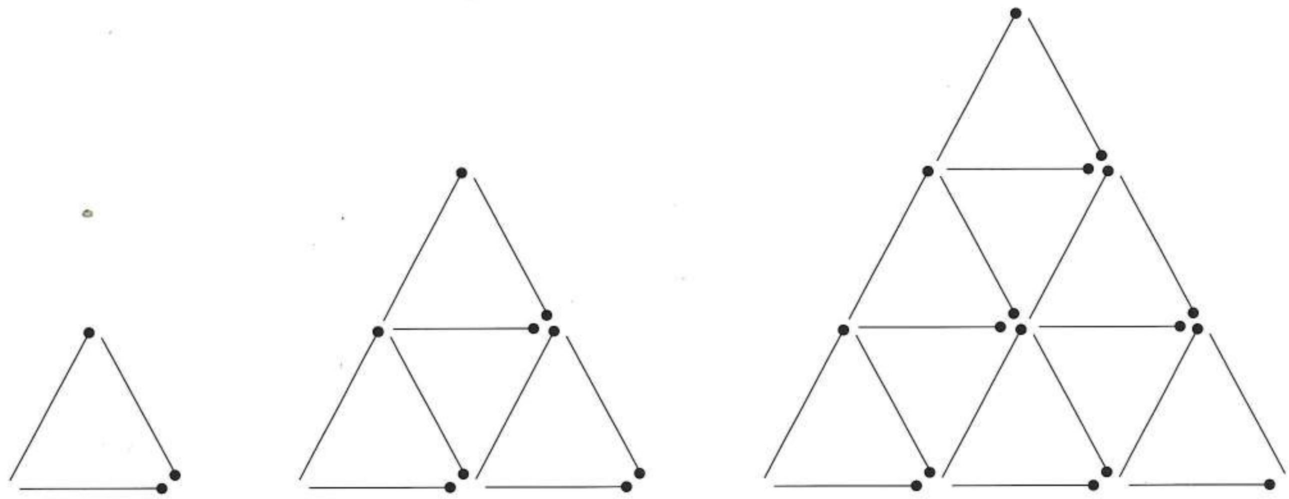


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

2. Reproduz as figuras, usando os fósforos necessários.

3. Que semelhanças observas entre a figura 1, a figura 2 e a figura 3?

4. Que diferenças observas entre a figura 1, a figura 2 e a figura 3?

5. Constrói os 4º e 5º termo da sequência.

6. Explica como podes obter qualquer termo da sequência, a partir do anterior.

7. Completa a tabela seguinte:

| Nº da figura | Medida do perímetro da figura, tomando como unidade o comp. do fósforo | Medida do área da figura, tomando como unidade a área do triângulo formado por 3 fósforos. |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 |
| 2 | 6 | 4 |
| 3 | 9 | 9 |
| | | |

8. Observando a tabela, o que podes dizer acerca da relação entre o número da figura, e a respectiva medida de perímetro e de área? Consegues descobrir uma regularidade?

9. Qual será a medida da área e do perímetro da 10ª figura? Explica como descobriste.

10. És capaz de construir um triângulo com a medida de perímetro 35? Como podes saber se é ou não possível?

11. Descobre uma regra que te permita conhecer rapidamente qualquer termo da sequência.

# APM — 2008

## Modalidades de associado, preços de quotas e de assinaturas das revistas

A Associação de Professores de Matemática (APM) é uma instituição de utilidade pública, sem fins lucrativos, ligada ao ensino da Matemática, de todos os níveis de escolaridade. Um dos objectivos principais é contribuir para a melhoria e renovação do ensino da Matemática, promovendo actividades de dinamização pedagógica, formação, investigação e intervenção na política educativa. A APM disponibiliza aos professores de Matemática e outros educadores uma grande diversidade de recursos, cuja divulgação e utilização pretendemos alargar cada vez mais.

### Modalidades de associado e seus direitos

#### Publicações periódicas

Todos os associados têm direito aos cinco números anuais da revista *Educação e Matemática* e ao boletim informativo APM*informação*. Os @-sócios só poderão aceder aos ficheiros em formato PDF destas publicações no nosso portal, todos os outros terão direito também a receber pelo correio as edições impressas. Todos os associados poderão usufruir de preço especial na assinatura da revista *Quadrante*.

#### Preços especiais na loja

Todos os associados usufruem de um desconto entre 15 e 25% na aquisição de artigos na loja, quer seja na sede ou *on-line*.

#### Requisição de materiais, exposições ou outros recursos

Todos os associados poderão ainda requisitar materiais, publicações, exposições ou outros do Centro de Recursos.

#### Outros direitos dos associados individuais

Os associados individuais terão ainda acesso aos conteúdos privados do portal da APM na Internet, a beneficiar de descontos em encontros da APM ou de outras instituições com as quais a APM tem protocolos (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Associações da Federação Iberoamericana das Sociedades de Educação Matemática, e outras) ou noutros eventos em que a APM venha a colaborar, a participar da vida da associação através dos grupos de trabalho, dos núcleos regionais ou por outras formas e a divulgar o seu trabalho através da APM.

#### Associados institucionais

Os associados institucionais terão ainda direito a um exemplar das actas do ProfMat.

### Preço da quota anual em 2008

| Modalidades de associado individual | |
|---|---|
| Professor | 50,00 € |
| Estudante s/vencimento | 35,00 € |
| Aposentado | 38,50 € |
| @-sócio | 38,50 € |
| Residente no estrangeito | 53,50 € |

| Modalidade de associado institucional | |
|---|---|
| Modalidade 1 [1 exemplar EeM] | 50,00 € |
| Modalidade 2 [2 exemplares EeM] | 70,70 € |
| Modalidade 1 + *Quadrante* | 65,50 € |
| Modalidade 2 + *Quadrante* | 86,20 € |

Para efectuar a sua inscrição, ou da sua escola, como sócio da APM, faça *download* da ficha no endereço `http://www.apm.pt`

### Assinaturas das revistas para 2008

| | | *Educação e Matemática* (inclui actas ProfMat) | *Quadrante* |
|---|---|---|---|
| Sócio individual | Portugal | | 11,50 € |
| | Estrangeiro | | 14,70 € |
| Instituições | Portugal | 38,00 € | 22,30 € |
| | Estrangeiro | | 26,70 € |

# índice

## Editorial



## Artigos



## Secções