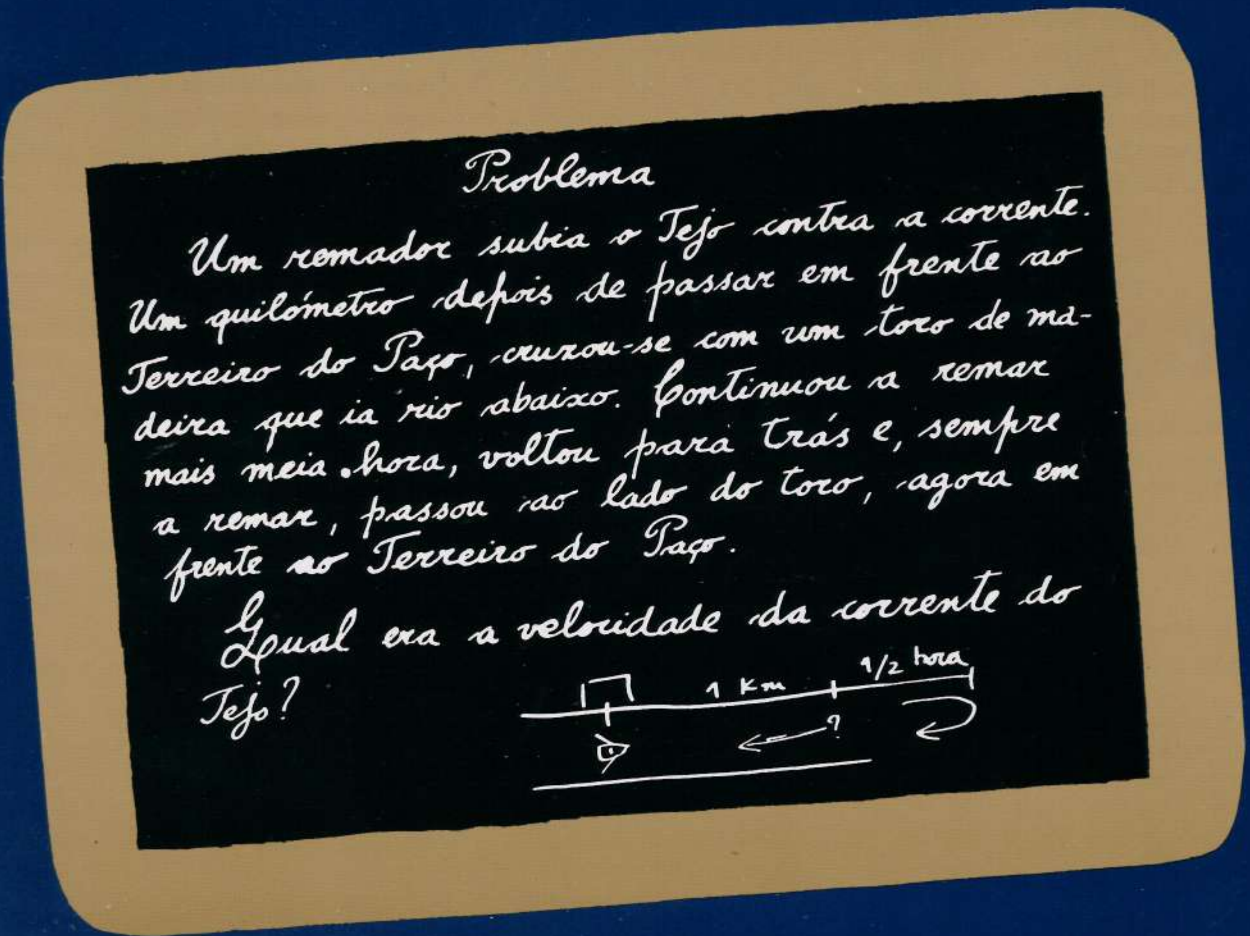
Educação e Matemática

N.º 8

4.º trimestre de 1988



250$00

Revista da Associação de Professores de Matemática

Sobre a nossa capa e o seu significado

O problema do trimestre

A resolução de problemas é o tema central deste número de *Educação e Matemática*. A nossa capa é significativa desse facto. Mas o enunciado escrito na ardósia tem uma outra intenção: ser uma iniciativa da redacção da revista, *O problema do trimestre*. Longe de nós a ideia de que a importância da resolução de problemas em Educação Matemática se possa reduzir à apresentação casual ou periódica (semestral ou trimestral) de problemas mais ou menos interessantes. Pensamos que o conteúdo deste número da revista prova isso sobejamente. Mas, parafraseando o título de um dos artigos, *um problema também é isto...* Por isso, a partir deste número será proposto trimestralmente aos nossos leitores um problema. No número seguinte publicaremos as melhores respostas que recebermos. Melhores, em quê? Bom, uma boa resposta a um problema, para além da solução ou soluções, pode envolver muita coisa, como por exemplo a análise de estratégias interessantes e inovadoras, as explorações em torno do enunciado e suas variantes, ou a indicação de outros problemas análogos.

Aqui deixamos portanto *o problema do remador*, que esperamos seja desconhecido da maior parte dos nossos leitores. Ao trabalho, pois, e boas descobertas.

Um remador subia o Tejo contra a corrente. Um quilómetro depois de passar em frente ao Terreiro do Paço, cruzou-se com um toro de madeira que ia rio abaixo. Continuou a remar mais meia hora, voltou para trás e, sempre a remar, passou ao lado do mesmo toro, agora em frente ao Terreiro do Paço.

Qual era a velocidade da corrente do Tejo?

Fotografia de Jorge Guerra

FICHA TÉCNICA

Título da publicação:
EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA
N.º 8, 4.º trimestre de 1988

Directora: Leonor Moreira

Redacção:
António Bernardes
Eduardo Veloso
Fernando Nunes
Henrique Guimarães
José Manuel Duarte
Paulo Abrantes

Colaboraram neste número:
Albano Silva, António Bernardes, Cristina Loureiro, Domingos Fernandes, Eduardo Veloso, Fernando Nunes, Leonor Moreira, Manuel Saraiva, Margarida Silva, Paulo Abrantes

Capa: concebida e executada por Eduardo Veloso

Entidade Proprietária:
Associação de Professores de Matemática

Periodicidade: Trimestral

Tiragem: 1500 exemplares

Fotocomposição, montagem e fotolito:
Execução e oferta da Texto Editora, Lda.

Impressão: Costa e Valério

N.º de Registo: 112807

Correspondência:
Associação de Professores de Matemática
a/c de Leonor Moreira
Av. 24 de Julho, 134, 4.º
1300 LISBOA

NOTA: Os artigos assinados são da responsabilidade dos seus autores, não reflectindo necessariamente os pontos de vista da Redacção da Revista.

Editorial

Mudam-se os tempos, mudar-se-ão as vontades?

Com alguma frequência ouvimos frases como: «Gostaria muito de resolver problemas com os meus alunos mas não posso, não tenho tempo, preciso de cumprir o programa!».

Mas não há memória de se ter ouvido dizer: «Gostaria de resolver mais exercícios de operações com polinómios mas não posso, não tenho tempo, preciso de resolver problemas para cumprir o programa!»...

Entretanto, se formos reler os programas — os nossos *actuais* programas — encontramos, em quase todos, referências explícitas à resolução de problemas, ao nível dos objectivos gerais. Por exemplo, no caso do 7.º ano de escolaridade, afirma-se que o aluno deverá:

> ...desenvolver a capacidade de matematizar problemas da vida corrente ou de outras áreas de estudo;...iniciar-se na elaboração de estratégias para resolver problemas novos;...

Que quer isto dizer? Que afinal os programas são *bons* mas os professores de Matemática preferem executar *maus* programas?

Certamente que não! Uma tal conclusão seria absurda. Responsabilizar apenas os programas seria um equívoco; mas ilibar esses programas e as orientações oficiais, e atribuir as culpas aos professores, seria um erro e uma injustiça enormes.

Os programas actuais, embora se refiram à resolução de problemas ao nível dos objectivos gerais, apresentam uma extensa e organizada lista de *conteúdos programáticos* seguida de objectivos comportamentais mínimos para se obter aprovação na disciplina. Estes objectivos mínimos pouco ou nada têm a ver com a resolução de problemas, limitada assim à aplicação de conhecimentos adquiridos nalguns capítulos — a um nível de desenvolvimento, para os melhores alunos.

Se acreditarmos que os objectivos gerais foram *sentidamente* escolhidos, não restam muitas explicações possíveis para justificar as opções dos programas:

(a) a convicção de que a acumulação de conhecimentos factuais e de técnicas de cálculo desenvolveria, a prazo, a capacidade de resolver problemas — esta capacidade seria a meta, aquela acumulação seria o meio para a alcançar;

(b) a convicção de que a resolução de problemas seria algo apenas acessível a alguns alunos e, portanto, exterior a um conjunto de aptidões básicas para todos;

(c) a intenção de que os conteúdos programáticos fossem interpretados como sugestões ou exemplos, que poderiam ser rearranjados e orientados pelos professores da forma que estes considerassem mais adequada para os seus alunos, face aos objectivos gerais da disciplina.

Haverá um pouco de verdade em todas estas possíveis explicações, embora a última pareça pouco credível (vejam-se os exames...). Não esqueçamos que os programas terão sido influenciados pelas ideias dominantes na época em que foram elaborados.

Hoje, porém, sabemos que as convicções expressas em (a) e (b) estavam erradas tanto no que se refere à aprendizagem como do ponto de vista das necessidades sociais e individuais; e que a intenção expressa em (c), mesmo que entendida da forma *mais favorável*, é profundamente irrealista.

Mudam-se os tempos. E as vontades?

Se entendermos a palavra *conteúdo* no sentido mais geral (o que está contido, a substância, o sentido) e não com a conotação que, no ensino, por vezes lhe damos (factos, tópicos, assuntos) — então a resolução de problemas deve ser não só um objectivo geral e uma metodologia privilegiada mas ainda um conteúdo essencial do programa de Matemática.

Isto é: conhecer e ensaiar estratégias de resolução de problemas, conjecturar, explorar situações, matematizar, argumentar, etc. — devem ser elementos obrigatórios do programa. Se não se proporcionarem aos alunos actividades numerosas e diversificadas em que, claramente, esses elementos constituam o fundamental, então não se está a cumprir o programa. Mas pode cumprir-se o essencial do programa mesmo que não haja tempo para ensinar como se resolvem inequações do tipo…

Esta é uma visão do programa muito diferente daquela que tem sido dominante. Que implica uma revalorização dos objectivos ao nível dos processos, e uma forte interligação entre diferentes tipos de objectivos e atitudes, métodos, temas a explorar e formas de avaliação. E que exige tempo — para que todos os alunos possam realizar actividades de resolução de problemas nas aulas de Matemática.

Se esta perspectiva não tiver expressão nos novos programas, se a referida interligação não for aí explícita, as melhores intenções de renovação arriscam-se a não passar de um novo fracasso. Não adianta muito *actualizar* os «conteúdos programáticos» mantendo-os incólumes à contaminação de umas quantas intenções preliminares ao nível dos objectivos gerais, das indicações metodológicas ou das formas de avaliação.

Afinal, não foi isso o que sempre se fez?

Estão a ser elaborados novos programas. A ideia de que a resolução de problemas não é apenas uma *meta longínqua*, e que, decididamente, não se reduz a um subcapítulo das equações ou dos sistemas de equações, terá ganho entretanto novos adeptos. Ter-se-á dado um passo em frente. Mas será esse passo suficiente?

As discussões preliminares sobre os novos programas mostram que a resolução de problemas poderá ocupar um lugar importante ao nível dos objectivos gerais e das indicações metodológicas. No entanto, as perspectivas sobre o que serão os *conteúdos* da nossa disciplina deixam no ar muitas interrogações. Admite-se com facilidade que a actualização dos programas impõe a entrada de temas como a Estatística ou de meios como o uso das calculadoras; mas não se aceita com a mesma facilidade que diversas matérias e metodologias terão (teriam) que ser postas de lado…

A resolução de problemas não é algo que se possa comparar com um tema ou com um meio. A Estatística pode entrar num programa centrado nos «conteúdos», as calculadoras podem ser usadas num ensino dominado por técnicas. Sem dúvida, ambos são elementos *potencialmente* favoráveis a um descentrar dos «conteúdos» para os processos, das técnicas de cálculo para a exploração dos conceitos, da matéria para o aluno. Mas a verdadeira mudança está neste *descentrar* e não naquela *actualização* .

Paulo Abrantes

Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de matemática

Domingos Fernandes, Escola Superior de Educação de Viana do Castelo

De acordo com recentes definições, a resolução de problemas em matemática envolve quatro aspectos diferentes: 1) Conhecimento de factos, de algoritmos, e de matemática em geral que um indivíduo possui; 2) Conhecimento de estratégias de resolução de problemas, também identificadas por muitos autores como estratégias heurísticas; 3) Conhecimento de estratégias de verificação (ou de controlo), que têm a ver com a forma como um indivíduo utiliza e gere a informação que está ao seu alcance; e 4) Pré-conceitos ou percepções (à falta de melhor palavra para o inglês «beliefs») que se relacionam com a visão que cada um tem de si próprio, da matemática, dos problemas, e do mundo em geral (Shoenfeld, 1985). Esta perspectiva implica que se quisermos ensinar a resolver problemas ou se quisermos explicar os resultados obtidos pelos alunos na sua resolução, teremos que lidar com os quatro aspectos referidos atrás. Além disso, confirma aquilo que já todos sabemos: a resolução de problemas é um **processo** muito complicado de se ensinar, de se estudar, e de se investigar.

Interessante na definição atrás apresentada é o facto de das quatro áreas mencionadas, três terem directa ou indirectamente a ver com o que vulgarmente se designa por metacognição: **Heurísticas, Verificação (controlo) e Pré-Conceitos (percepções)**. Isto seria já uma razão para nos preocuparmos com os aspectos metacognitivos no ensino/aprendizagem da resolução de problemas. Mas há algo mais para acrescentar. Na verdade, pode dizer-se que há pelo menos duas questões para as quais cientistas da cognição e investigadores da educação matemática continuam a procurar resposta. Uma questão (ou conjunto de questões) central é a de saber como é que as pessoas organizam, integram, e relacionam os conhecimentos e capacidades que possuem quando estão envolvidas na resolução de problemas. Outra questão é mais ligada ao nosso simples quotidiano de professores de matemática: Porque é que os alunos falham problemas para a resolução dos quais possuem os conhecimentos e as capacidades para o fazer?

Brown & Campione (1987) dizem que as respostas para estas e outras questões são agora investigadas no território das «meta-coisas»; concretamente, no campo da metacognição.

Agora que pelo menos já suspeitamos que as «meta-coisas» são mesmo capazes de ser importantes, interessa-nos encontrar respostas para três questões: 1) O que é a metacognição?; 2) Porque é que os aspectos metacognitivos são importantes para o ensino/aprendizagem da resolução de problemas?; e 3) Que podemos nós, professores de matemática, fazer no que respeita ao ensino dos aspectos metacognitivos? Investigadores em educação matemática, cognitivistas e psicólogos da educação têm dedicado a estas questões uma parte significativa das suas actividades científicas (Brown & Campione, 1987; Flavell, 1976, 1979; Garofalo, 1987; Garofalo & Lester, 1985; Shoenfeld, 1985, 1987). É fundamentalmente com base em trabalhos destes investigadores que aqui se procuram retirar ilações que possam constituir uma base para que os aspectos metacognitivos sejam consciente e **explicitamente** incluídos na prática pedagógica do professor de matemática que se interessa pelo ensino da resolução de problemas.

Definir Metacognição

De uma forma bastante simples poderemos dizer que um fenómeno psicológico é da esfera metacognitiva quando o sujeito está de algum modo envolvido em processos de pensamento àcerca da sua própria maneira de pensar. Assim, avaliar um plano que se elaborou para resolver um problema, seleccionar uma estratégia de resolução entre várias possíveis, ou gerir a aplicação de um plano ou estratégia são actividades tipicamente metacognitivas.

Lester & Garofalo (1985) identificam dois aspectos distintos na metacognição. Um, que podemos designar por **conhecimento dos conhecimentos**, refere-se aos conhecimentos do indivíduo àcerca das suas capacidades cognitivas, dos processos que domina, e dos recursos que pode utilizar para «enfrentar» os problemas a resolver bem como às ideias ou pré-conceitos que ele tem sobre a matemática, sobre si como utilizador de conhecimentos matemáticos, ou sobre tudo o que o rodeia. O outro, que podemos chamar de **gestão ou verificação de conhecimentos**, refere-se a um aspecto que tem vindo a ser reconhecido como tendo uma importância decisiva no processo de resolução de problemas; trata-se da forma como o indivíduo toma decisões para seleccionar e para gerir a aplicação de tácticas e estratégias que permitem resolvê-los. Abandonar uma certa estratégia por se reconhecer que ela é ineficaz ou por se pensar que há outra que poderá ser mais facilitadora é um exemplo típico deste aspecto da metacognição. Em suma, de forma muito simples poderemos dizer que a metacognição se refere ao que cada um sabe àcerca dos seus próprios conhecimentos e à forma como cada um gere tais conhecimentos durante qualquer actividade cognitiva.

Shoenfeld (1987) considera que a metacognição se baseia em três aspectos distintos: (a) Conhecimento de cada um acerca do seu próprio saber e dos processos que o integram e organizam; (b) Verificação e auto-regulação dos conhecimentos e dos processos que podem ser úteis na resolução de problemas; e (c) Pré-conceitos ou percepções àcerca da matemática e, em geral, àcerca do mundo que nos rodeia. A definição de Shoenfeld, embora nada de verdadeiramente novo acrescentando ao que já aqui se disse, destaca a importância dos pré-conceitos, percepções, ou intuições àcerca da matemática e a influência que estes podem ter na aprendizagem dos problemas e da matemática em geral. Esta perspectiva, baseada na investigação em resolução de problemas que o próprio Shoenfeld conduz há vários anos, indica-nos que os alunos possuem estruturas mentais que utilizam de forma sistemática para **interpretar** o que lhes ensinamos. Significa isto que o que se lhes ensina e o que eles apreendem não são necessariamente a mesma coisa; muito depende das tais estruturas mentais, dos tais pré-conceitos, ou percepções. Este é, segundo aquele investigador, um dos aspectos que dá mais dimensão e importância à metacognição e lhe confere lugar de relevo em educação matemática e, em particular, na resolução de problemas.

Importância da Metacognição

Parece não ser polémica a ideia de que muita da matemática que se ensina nas nossas escolas não é compreendida. Os alunos não compreendem o que fazem, não utilizam os conhecimentos que possuem de uma forma sistemática e «produtiva», não resolvem problemas para os quais possuem os conhecimentos e estratégias necessários. Tudo isto tem a ver com a já velha e dual questão do **fazer** versus **compreender**. Questão que afinal de contas se reduz ao problema de lidar ou não, no ensino que praticamos, com os aspectos metacognitivos e de lhes reconhecermos a devida importância. Na verdade, cada vez mais a comunidade de educadores ligados à matemática vem acentuando a importância de orientar o ensino da matemática de forma a que os alunos não se limitem a memorizar factos e procedimentos mecânicos mas, pelo contrário, possam **compreender** os conceitos e os **processos** que lhes procuramos transmitir. Que adiantará a um aluno do ensino básico conhecer de cor os algoritmos das quatro operações se, colocado perante uma situação problemática, é incapaz de seleccionar a operação apropriada para a resolver? Que vantagens terá um aluno que conhece de cor o teorema de Pitágoras se não tem consciência das potencialidades de tal resultado para resolver problemas da vida real envolvendo o cálculo de distâncias entre objectos?

Investigações recentes acentuam que o **ensino explícito** de aspectos metacognitivos a alunos de vários níveis etários poderá ter um impacto significativo e positivo na compreensão e utilização de conceitos matemáticos e na resolução de problemas (Charles & Lester, 1984; Fernandes, 1988; Shoenfeld, 1979). Se aceitarmos os resultados destas e doutras investigações como credíveis poderemos inferir que tal impacto se verifica a três níveis: 1) os alunos tornam-se mais conscientes acerca dos seus conhecimentos e utilizam-nos de forma mais sistemática e organizada; 2) os alunos revelam-se mais capazes de utilizarem uma diversidade de estratégias de uma forma mais flexível e eficaz; e 3) os alunos podem corrigir pré-conceitos e ideias erradas que muitas vezes adquirem àcerca da matemática e dos problemas. A título de exemplo poderemos referir que é muito comum os alunos desenvolverem a ideia de que todos os problemas podem ser resolvidos em 10 minutos ou menos. Ora tais ideias podem e devem ser corrigidas através de um ensino que conscientemente reconheça a importância da metacognição e a influência que poderá ter no rendimento dos alunos. Ideias erradas como aquela estão cada vez mais a ser consideradas as causas principais do fraco rendimento dos alunos na resolução de problemas (Shoenfeld, 1985, 1987). Na verdade, de acordo com este investigador, o tipo de raciocínio ou meta-raciocínio que um indivíduo produz depende em larga medida do seu sistema de pré-conceitos ou da «epistemologia não-matemática» por ele desenvolvida ao longo do tempo.

Em suma, os aspectos metacognitivos são importantes e devem ser utilizados e ensinados abertamente na sala de aula para que, entre outras coisas, possamos contribuir para que os alunos 1) melhorem a qualidade das decisões que tomam quando estão a resolver problemas; 2) tomem consciência das estratégias, técnicas, conceitos e processos matemáticos que ajudam a resolvê-los; e 3) desenvolvam capacidades que lhes permitam uma utilização eficaz de tais conhecimentos e estratégias.

Resta-nos agora esboçar algumas ideias que sugiram concretamente o tipo de actividades que podemos desenvolver na sala de aula para que o ensino dos aspectos metacognitivos na resolução de problemas possa ser posto em prática.

O Ensino da Metacognição e a Resolução de Problemas

A primeira questão que se poderá colocar é a de saber se nós, professores de matemática, devemos, e podemos, ensinar aspectos da metacognição que possam de facto contribuir para uma melhoria de rendimento dos alunos na resolução de problemas. Há duas ideias que parecem ser geralmente aceites e que têm a ver com estas questões. A primeira é a de que se um indivíduo não possuir capacidades desenvolvidas ao nível da metacognição, tal poderá implicar falta de flexibilidade e desperdício de ideias válidas e originais que são aspectos muito importantes na resolução de problemas. Por consequência, **devemos** fazer tudo o que esteja ao nosso alcance para desenvolver tais capacidades. A segunda é a de que parece ser possível, embora bastante difícil, desenvolver as tais capacidades metacognitivas dos alunos; parece pois que **podemos** ter um importante papel a desempenhar no ensino da resolução de problemas.

Vários autores têm sugerido um certo número de técnicas ou estratégias que podem contribuir para consciencializar os alunos acerca das suas capacidades metacognitivas. Referiremos aqui sugestões feitas por Garofalo (1987) e Shoenfeld (1987).

Garofalo (1987), identifica três actividades que o professor poderá desenvolver: 1) Fazer perguntas que levem os alunos a reflectir sobre os seus conhecimentos de matemática e sobre os seus comportamentos e maneiras de pensar, a analisá-los, e a utilizá-los; 2) Transmitir aos alunos um conjunto de ideias, de factos, e conceitos inerentes ao ensino e à aprendizagem da matemática que parecem influenciar o rendimento nesta disciplina de forma significativa; e 3) Ajudar os alunos a avaliar e a regular os seus comportamentos e acções. No primeiro caso o professor pode pôr, entre muitas outras, questões do tipo:

— Quais as estratégias que mais utilizas para resolver este tipo de problemas?
— Qual o tipo de erros que usualmente fazes quando resolves problemas?
— Que poderás fazer para os evitar?
— Que é que fazes quando tentas resolver um problema de um género diferente do habitual?

No segundo caso, trata-se de procurar corrigir ideias incorrectas que os alunos possam ter. Ideias tais como as que se seguem devem ser transmitidas aos alunos de forma sistemática.

— Há problemas que não podem ser resolvidos pela simples aplicação de uma fórmula, operação, ou outro procedimento mecânico.
— Há problemas que se resolvem rapidamente, mas outros demoram muito tempo.
— Há problemas que podem ser resolvidos de várias maneiras diferentes.

Finalmente, no terceiro caso, interessa que o professor em vez de apresentar a solução de um problema, se empenhe na sua **resolução**. O que isto implica é que o professor ao demonstrar como se resolve um dado problema, deve **explicitar** as decisões que tomou e deve **explicitar** como avaliou e controlou tais decisões. Numa palavra, o professor deve explicitar aos alunos a forma como geriu e/ou organizou os seus conhecimentos na resolução do problema. (Quem não se recorda de professores de reconhecida competência que resolviam os mais complexos problemas no quadro sem que quase ninguém percebesse o que se estava a passar? Baseado no que hoje sabemos, podemos dizer que se tais professores **explicitassem** as estratégias, técnicas, e decisões que utilizavam, muitos mais alunos poderiam ter acompanhado as suas aulas.)

Shoenfeld (1987), refere quatro técnicas que poderão ser facilmente utilizadas na sala de aula e que facilitam o desenvolvimento de capacidades cognitivas. A primeira é a utilização da tecnologia vídeo para mostrar aos alunos gravações de outros alunos a resolverem problemas. Segundo Shoenfeld, esta actividade permite que os alunos tomem consciência de forma mais eficaz acerca das suas próprias capacidades e recursos metacognitivos.

Na segunda técnica o professor modela para os alunos o comportamento metacognitivo ideal. Isto é, o professor fala (pensa) alto enquanto apresenta a resolução dos problemas de forma a que os alunos se apercebam e tomem consciência dos aspectos metacognitivos envolvidos. Por exemplo, o professor poderá referir-se a várias estratégias de resolução de um problema e dizer porque é que optou por uma determinada estratégia em vez de outra. Pode também, durante uma resolução, referir-se a cada uma das fases do processo bem como identificar quais as principais acções a tomar em cada uma delas.

Na terceira técnica os problemas são discutidos por toda a classe com o professor servindo de moderador da actividade reguladora ou de controlo que deve sempre ter lugar quando se resolvem problemas. Neste caso, o foco da discussão é nas decisões a tomar, nos planos a elaborar, nas estratégias a utilizar, e nas actividades de gestão dos conhecimentos que se devem empreender. A actividade do professor é mínima; a sua preocupação deve ser a de contribuir para que os alunos aproveitem ao máximo o que já sabem. Este objectivo deve ser conseguido numa atmosfera em que os alunos se devem sentir muito à vontade para fazerem sugestões e em que, por isso, o professor não deve julgá-las mas sim estimulá-las.

Finalmente, Shoenfeld sugere a utilização de pequenos grupos de três ou quatro alunos que resolvem problemas enquanto o professor actua como um recurso sempre disponível para ajudar. Aqui o professor deve fazer perguntas em vez de dar respostas. Três perguntas devem estar sempre presentes nesta actividade: 1) O que estás a fazer?; 2) Porque estás a fazer isso?; e 3) Em que medida é que o que estás a fazer te ajuda a resolver o problema?. Estas perguntas, segundo Shoenfeld, asseguram o controlo da situação por parte dos alunos e contribuem para modificar o seu comportamento metacognitivo. Outros autores se têm referido às vantagens da utilização de pequenos grupos para resolver problemas. Do ponto de vista estritamente metacognitivo tais vantagens são evidentes. Um aluno ao explicitar, defender, ou discutir a sua linha de raciocínio junto dos colegas tem uma oportunidade única para reflectir acerca dos seus próprios processos de pensamento e também, evidentemente, para analisar criticamente os processos utilizados por outros. Neste tipo de ambiente de trabalho o professor está muito mais disponível para apoiar os alunos e para lhes dirigir as questões mais apropriadas.

Notas Finais

As ideias aqui descritas não são totalmente novas, apresentam é talvez uma face pouco discutida da resolução de problemas e procuram organizar e identificar coisas que no fundo todos nós, professores de matemática, já sabemos: é importante ensinar para a compreensão, é importante que os alunos participem activamente nas aulas, é importante **pensar** e **ensinar** a **pensar**...

Importa, porém, realçar os seguintes aspectos que estão inerentes a tudo o que aqui se disse.

1) Está nas nossas mãos, professores de matemática, fazermos a diferença no que respeita ao ensino da resolução de problemas.

2) Através da metacognição podemos contribuir para que os nossos alunos desenvolvam as suas capacidades para resolver problemas.

3) O ensino dos aspectos metacognitivos deve e pode ser feito de forma sistemática, organizada, e explícita - só assim contribuiremos de forma eficaz para que os alunos possam tirar proveito máximo dos seus recursos e para que os utilizem de forma consciente.

4) É possível organizar uma sala de aula para que tal aconteça.

Finalmente, numa altura de grande azáfama para que se alterem os planos curriculares, as ideias aqui expostas procuram contribuir para que a educação matemática dos nossos alunos seja planeada de forma a que se atinjam os elevados níveis de qualidade que as sociedades modernas exigem. Na verdade, podemos constatar com facilidade que nem a ênfase excessiva no vocabulário rigoroso e nos conceitos abstractos, que constituíram a pedra de toque da chamada Matemática Moderna, nem a redução da educação matemática ao mero ensino de um conjunto de técnicas e processos de cálculo mecânicos, apanágio de algumas orientações inspiradas no movimento norte-americano Back-to-Basics, produziram os efeitos que seriam desejáveis. A presente ênfase que se procura dar aos problemas e, idealmente, a uma abordagem da matemática que se ensina nas escolas através da resolução de problemas, é no fundo, mais uma tentativa para encontrar uma resposta para a crise que continua a afectar a educação matemática em todo o mundo. A metacognição não vai, por si só, vencer a crise, mas é um dos aspectos da resolução de problemas que não devemos ignorar.

Referências

Brown, A. & Campione, J. (1987). *On the importance of Knowing what you are doing: Metacognition and mathematics.* Manuscrito não publicado. Universidade de Illinois, Urbana.

Charles, R. & Lester, F. (1984). An evaluation of a process-oriented instructional program in mathematical problem solving in grades 5 and 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 1, 15-34.

Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L.B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231-237). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-development inquiry. *American Psychologist*, 34, 10, 906-911.

Fernandes, D. (1988). *Comparison of the effects of two models of instruction on the problem-solving performance of preservice elementary school teachers and on their awareness of the problem-solving strategies they employ.* Tese de doutoramento não publicada. Texas A&M University. College Station, Texas.

Garofalo, J. (1987): Metacognition and school mathematics. *Arithmetic Teacher*, 34, 9, 22-23.

Garofalo, J. & Lester, F. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3, 163-176.

Shoenfeld, A.H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A.H. Shoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Shoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York, NY: Academic Press.

Shoenfeld, A.H. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, *10*, 3, 173-187.

Agradeço ao Pedro Palhares, à Lina Fonseca, e à Teresa Cardoso, assistentes na Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, as sugestões feitas a versões anteriores deste trabalho.

Um (bom) problema (não) é (só) ...

Paulo Abrantes, Faculdade de Ciências de Lisboa

A resolução de problemas deve estar no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática, em todos os níveis escolares.

(APM, 1988, p.30)

Esta proposta, de colocar a resolução de problemas no primeiro plano da Matemática escolar, tem sido apresentada com insistência desde há alguns anos por algumas das mais prestigiadas figuras e associações da Educação Matemática — vejam-se por exemplo as recomendações do NCTM, 1980.

O reconhecimento de que a resolução de problemas é afinal o motor do desenvolvimento da Matemática e da actividade matemática, e a perspectiva de que um papel de relevo deve ser-lhe destinado na aprendizagem, não são ideias novas. O famoso livro de George Polya, *How To Solve It*, considerado como um marco de referência, foi publicado pela primeira vez em 1945(1). De então para cá, centenas de obras dos mais diversos tipos têm sido dedicadas à resolução de problemas, para não falar dos clubes e dos concursos de problemas que, nalguns países, têm uma tradição de quase um século.

A verdade, porém, é que a Matemática escolar parece ter assumido sempre a resolução de problemas como uma actividade complementar, paralela, geralmente destinada a estimular ou detectar alunos particularmente dotados, por vezes associada a propósitos de popularização da Matemática ou de motivação externa para o seu estudo. A resolução de problemas nunca terá sido assumida como o centro em volta do qual se processaria a aprendizagem da Matemática, a não ser em projectos isolados ou em estudos experimentais de ponta.

Os actuais debates sobre a renovação curricular trazem de novo para o primeiro plano a necessidade de questionar o lugar da resolução de problemas. Em Portugal, apesar de referências em momentos diversos(2), tem sido essencialmente na presente década que artigos, comunicações em Encontros, propostas de trabalho e mesmo experiências concretas sobre a resolução de problemas têm surgido a um ritmo crescente. Estamos longe — e, afinal, *tão perto...* — das posições defendidas no início dos anos 80(3). Hoje, podemos e devemos fazer um ponto da situação, analisar aquilo que se progrediu e aquilo que terá faltado.

Um pouco por todo o mundo, o relançamento de propostas de valorização do papel da resolução de problemas nos currículos de Matemática é acompanhado de um esforço no sentido de um *alargamento de perspectivas* sobre o que é um problema e sobre o que é a resolução de problemas (vejam-se, por exemplo, as propostas mais recentes do NCTM, 1987; e os documentos sobre a renovação do currículo de Matemática — APM, 1988).

Parece pois importante reflectirmos sobre aquilo que é (e não é) um (bom) problema, à luz de critérios educativos. Discutamos esta questão a partir de exemplos concretos.

Alguns exemplos

- Exemplo 0 (um *exercício*):

Calcular o valor de $x^2 - 3x$ para $x=2$.

- Exemplo 1 (um *problema «de palavras»*):

Um cliente comprou num dia 2.3 metros de fazenda. No dia seguinte, comprou mais 1.5 metros da mesma fazenda. Quantos metros de fazenda comprou no total?

- Exemplo 2 (um *problema «para equacionar»*):

O João tem metade da idade do pai. Sabendo-se que a soma das duas idades é 72, quantos anos tem o João?

- Exemplo 3 (um *problema «para demonstrar»*):

Usando os casos de semelhança, mostre que a altura relativa à hipotenusa divide um triângulo rectângulo em dois triângulos semelhantes.

- Exemplo 4 (um *problema «para descobrir»*):

Usando apenas 6 fósforos, formar quatro triângulos equiláteros geometricamente iguais.

- Exemplo 5 (um *problema da vida real*):

Construir uma planta de um estádio — um campo de futebol e uma pista de atletismo.

- Exemplo 6 (uma *situação problemática*):

O produto de três números inteiros consecutivos é sempre um número par múltiplo de 3. Comentar a situação se substituirmos *produto* por *soma*.

- Exemplo 7 (uma *situação*):

Considera uma página cheia de números:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
....	....	....	....

(APM, 1988, p. 47)

Problema versus exercício

O Exemplo (0) é uma questão idêntica a tantas outras que se propõem aos alunos do 7.º ano após o estudo das operações em Z. Não se trata de um problema mas sim de um exercício, se considerarmos que:

Um problema é uma situação que difere de um exercício pelo facto de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução.

(Kantowski, 1981)

Esta definição mostra desde logo o carácter *relativo* da noção de problema. Assim, por exemplo, calcular a soma dos primeiros 100 números naturais será um exercício se o aluno conhece a fórmula da soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética mas poderá constituir um problema no caso contrário (uma situação idêntica costuma ser apresentada como reveladora da capacidade matemática evidenciada por Gauss quando era ainda uma criança).

O valor educativo dos exercícios não será nulo mas é claramente limitado à prática de utilização de uma ou várias regras previamente conhecidas. Resolver muitos exercícios não contribui para desenvolver capacidades de raciocínio ou estratégias de resolução de problemas.

A tendência para não distinguir claramente um exercício de um problema corresponde a uma tradição bastante enraízada na Matemática escolar. Por vezes, estabelece-se uma distinção enganadora: no enunciado de um exercício haveria apenas números e operações enquanto o de um problema conteria alguma referência a um contexto concreto.

Os problemas de *palavras*

Questões como a do Exemplo (1) são muito frequentes no ensino primário tendo alegadamente a vantagem de atribuir um significado concreto às operações matemáticas.

No entanto, a excessiva repetição transforma rapidamente estes «word problems» (nome pelo qual são conhecidos na literatura inglesa) em *exercícios disfarçados* nos quais o «contexto» do enunciado acaba por ser irrelevante. O aluno procura munir-se de uns quantos *truques* que *funcionam* em várias situações — «este problema é de somar ou de multiplicar?» ou «...é de uma ou de duas operações?» ou «...é de pôr a vírgula debaixo da vírgula?» — ou então entrega-se simplesmente a *fazer contas* com os dados numéricos até atingir um resultado «satisfatório» mesmo que este não tenha uma relação lógica com os dados (veja-se Moreira, 1987).

A resolução de problemas deve ser um processo que envolva activamente os alunos na formulação de conjecturas, na investigação e exploração de ideias, que os leve a discutir e pôr em questão a sua própria maneira de pensar e também a dos outros, a validar resultados e a construir argumentos convincentes. Por isso mesmo, a resolução de problemas não acontece quando os alunos fazem uma página de cálculos, quando seguem o exemplo do cimo da página ou quando todos os problemas se destinam à prática do algoritmo apresentado nas páginas precedentes.

(NCTM, 1987)

De certo modo, o papel destes problemas de palavras no ensino primário tem um correspondente noutros níveis de escolaridade...

O *capítulo* dos problemas...

Não é invulgar ouvirmos alunos fazerem afirmações sobre os problemas revelando que estes não são encarados como algo inerente à própria natureza da Matemática mas vistos como se constituissem apenas uma *secção* especial de um dos capítulos de Algebra do programa — das equações ou dos sistemas de equações. O grande peso habitualmente atribuído às equações e aos problemas «para equacionar», como o do Exemplo (2) atrás apresentado, contribui certamente para essa concepção. Escolher a incógnita, designá-la por x, traduzir o enunciado por uma equação em x, resolver a equação — eis a estratégia!

Mas esta estratégia é apenas uma de entre muitas que se podem ensaiar para resolver problemas e nem sempre será a mais apropriada. Também aqui, a excessiva repetição pouco ou nada acrescenta do ponto de vista da aprendizagem, e parece contribuir para a formação de ideias limitadas sobre o que é a resolução de problemas. Muitas vezes, não se varia mais do que o grau de complexidade — «eu tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens...»

Uma vez mais, o «contexto» do enunciado acaba por não desempenhar qualquer papel de relevo. Por isso é frequente o recurso ao formato de problemas «de idades» ou de «pensar em números». A partir de certa altura, propor aos alunos que inventem um problema que possa traduzir-se por uma dada equação deixa de ser um apelo à criatividade — «somando o dobro de um número a...»

Este tipo de problemas terá, claro, algum valor educativo mas esse valor deve ser reduzido às suas devidas proporções.

Infelizmente, reduz-se muitas vezes a prática de resolução de problemas à tradução de enunciados em equações numéricas com uma incógnita ou em sistemas de duas equações com duas incógnitas. E, no entanto, muitos problemas — incluindo problemas algébricos — resolvem-se através de estraté-

gias diferentes que envolvem actividades como: listar, organizar e classificar dados; usar uma tabela, um diagrama ou um modelo; trabalhar do fim para o princípio; eliminar casos; experimentar e verificar; procurar um padrão; resolver um problema mais simples ou o mesmo problema para casos particulares; generalizar uma solução; encontrar um contra-exemplo; resolver de várias maneiras diferentes; etc.

(Abrantes, 1988, pág. 54)

Demonstrações e problemas

Uma demonstração pode constituir uma excelente actividade de resolução de problemas. Descobrir um caminho para provar uma conjectura ou uma proposição implica por vezes processos muito ricos que nem sempre estarão presentes noutros tipos de problemas. Esta perspectiva obriga-nos a fazer uma distinção: uma coisa é a decoberta do caminho e a argumentação; outra é a apresentação formal da demonstração. Não se discute aqui a importância relativa de uma e de outra mas chama-se a atenção para o facto de corresponderem a aspectos diferentes da actividade matemática e da aprendizagem.

Diz-se por vezes que terá havido nas últimas décadas um decréscimo muito acentuado na importância atribuída às demonstrações. Sem dúvida, nos antigos programas, a Geometria (então apresentada como um modelo de construção dedutiva) fornecia inúmeros exemplos de demonstrações. No entanto, do ponto de vista da resolução de problemas, aquela *conjectura* parece difícil de *provar*... Aprendia-se essencialmente *um formato de demonstração* que depois se repetia até à exaustão — e decorar ou reproduzir demonstrações não será uma actividade de resolução de problemas especialmente rica...

Seja como for, no ensino actual, as actividades de tipo demonstrativo estão praticamente limitadas a questões do tipo «utilizando... mostre que...», de que o Exemplo (3) constitui uma ilustração. Com muita frequência, caminhos inesperados para responder a questões desse tipo são desvalorizados, ou mesmo liminarmente rejeitados, o que mostra que a intenção não era descobrir um processo de provar uma proposição nova mas sim treinar a utilização de um dado teorema ou regra. A repetição e a pouca variedade vão acentuando o carácter de *exercício do tipo «mostre que»* que estas questões acabam por assumir.

Ao contrário, raramente se propõem aos alunos questões *em aberto*, conjecturas das quais não se sabe à partida se são verdadeiras ou não. A luta entre a procura de uma prova ou de um contra-exemplo é um aspecto da actividade matemática quase ignorado na escola (um exemplo de um problema deste tipo é discutido em Guimarães e Abrantes, 1988).

Na *vida real*, somos confrontados com problemas de que não podemos conhecer antecipadamente a solução, e muitas vezes não sabemos mesmo se essa solução existe. Ora, este é um tipo de situação que deveria inspirar actividades de aprendizagem no âmbito da Matemática escolar.

Eureka!

Um tipo de problemas que são propostos em concursos ou noutras iniciativas não curriculares, com o objectivo de despertar a curiosidade e o gosto pela Matemática, é sugerido pelo Exemplo (4). Estes «puzzle problems» são apaixonantes para os *entusiastas* (que não se encontram obrigatoriamente entre os matemáticos...). A sua resolução requer quase sempre uma percepção súbita do caminho certo, uma *ideia luminosa*.

O seu interesse educativo parece óbvio. Mas é preciso não esquecer que estes problemas têm geralmente enunciados contendo toda a informação relevante (e não mais do que essa) e perante os quais o contexto raramente precisa de ser explorado. Além disso, têm quase sempre uma solução única e bem determinada. Não são por isso especialmente *vocacionados* para discussões ou explorações em grupo sobre estratégias de resolução ou em torno da aplicação de modelos e métodos matemáticos.

Estes problemas são susceptíveis de interessar fortemente alguns alunos para os quais constituem um desafio intelectual, mas não têm o *mesmo efeito* sobre muitos outros alunos. Este facto, aliado às suas *características naturais* atrás apontadas, sugere que eles sejam encarados como uma fonte de actividades interessantes mas não como uma alternativa global à orientação da disciplina de Matemática.

Nos últimos anos, as recomendações para se dar relevo à resolução de problemas têm-se traduzido em iniciativas não curriculares, como «o problema da quinzena» e os concursos de âmbito local ou nacional, mas não parecem influenciar *o essencial* — a forma como se ensina e aprende Matemática, o trabalho na sala de aula. Os problemas surgem assim como um factor de *motivação externa* para o estudo da Matemática e não como algo que é inerente ao trabalho em Matemática.

Contrariamente ao que seria desejável, são por vezes os *vícios* do ensino da Matemática que parecem *contaminar* aquelas iniciativas. Há pouco tempo, os critérios de classificação para as respostas a um dos problemas de um conhecido concurso de âmbito nacional reservavam uma grande parte da cotação para a «correcta designação das incógnitas» quando se tratava de um problema que se resolvia, de uma forma mais prática e mais inteligente, sem o recurso explícito a equações. Já não bastava que os problemas «para equacionar» tivessem exercido uma tão grande influência na forma de pensar em problemas de tantas gerações, nas quais nos devemos incluir nós próprios, os professores de Matemática... (um exemplo de um problema em que estratégias alternativas são mais simples do que a habitual resolução algébrica é discutido em Veloso, 1987).

Matematizar situações reais

A *matematização* de situações constitui, em diversas actividades profissionais, uma tarefa complexa para a qual são muitas vezes requeridos variados conhecimentos e alguma experiência. No entanto, é possível encontrar sugestões de trabalho desse tipo adequadas à Matemática escolar — como o mostra o Exemplo (5). Abordar um problema como este implica: criar ou adaptar um modelo matemático da situação; aplicar diversos métodos matemáticos a esse modelo; verificar a sua validade perante a situação concreta.

A maneira «imprecisa» como o problema é enunciado não deve ser vista como uma fraqueza mas, pelo contrário, ela constitui uma forma *realista* de o apresentar. Aqui, é indispensável explorar o contexto do problema (incluindo os seus aspectos não matemáticos), obter informações que não são dadas à partida, formular com precisão *novos* problemas, proceder a algumas simplificações conscientes. Além disso, não existe uma solução única e as várias soluções aceitáveis nem sempre serão «rigorosas» mas sim aproximadas.

Classificar estes problemas como *problemas da vida real* não significa que eles tenham que abordar situações que surgem *obrigatoriamente* no dia-a-dia ou nas futuras profissões dos alunos. Usa-se aqui um critério ditado pela natureza do problema, das tarefas que se propõem aos alunos e das aptidões que estes poderão desenvolver.

Situações problemáticas

Propositadamente, o Exemplo (6) apresenta uma situação em que o contexto é a própria Matemática. A importância do contexto num problema não está dependente do facto de ele se referir a alguma questão *prática*. Como vimos, sucede muitas vezes que exercícios disfarçados *falem* de questões concretas.

O que se passa aqui é que o contexto, não só precisa de ser explorado, como é em si mesmo problemático. Um dos aspectos da abordagem deste tipo de situações é a necessidade de formular um ou vários problemas. Não existe uma solução única, e o enunciado vago — «comentar a situação se...» — *convida* o aluno a gerar questões, fazer conjecturas e, eventualmente, prová-las.

De facto, formular problemas parece ser uma actividade essencial numa situação problemática — mas que é, temos que admiti-lo, bastante rara nas aulas de Matemática.

Ao discutir o que é uma situação problemática, um dos exemplos que Borasi (1986) apresenta (citando um livro de J. Adams) é particularmente interessante: «Tens trinta e muitos anos, as crianças vão bem na escola, o teu marido progride na sua carreira profissional, e tu estás aborrecida». O primeiro passo para uma solução, talvez o principal passo, consiste em *definir* correctamente o problema, o que pode ser feito de várias maneiras.

Situações (ainda) não problemáticas

Uma das formas de estimular actividades de resolução de problemas na sala de aula consiste em criar condições favoráveis, através de ambientes potencialmente ricos. Em situações como a do Exemplo (7) não está formulado qualquer problema, nem mesmo implicitamente, mas há um convite claro à *exploração* do contexto. E...

Explorar tem aqui exactamente o sentido normal da palavra: entrar em terreno desconhecido, recolher dados, detectar diferenças, ser sensível às repetições e às analogias, reconhecer regularidades e padrões — ou porventura um sentido ainda mais forte — investigar, procurar encontrar, procurar descobrir. O espaço a explorar não é agora o Atlântico, mas por exemplo uma página cheia de números.

(APM, 1988, pág. 47)

Observações finais

Um modelo apresentado por Borasi (1986) para classificar diferentes tipos de problemas propõe a análise de quatro aspectos: (a) o contexto do problema; (b) a formulação; (c) a solução; (d) o método de abordagem. A tabela que se apresenta nesta página procura resumir a aplicação destes critérios aos oito exemplos atrás apresentados:

<table>
<tr><th>EX.</th><th>CONTEXTO</th><th>FORMULAÇÃO</th><th>SOLUÇÃO</th><th>MÉTODO</th></tr>
<tr><td>(0)</td><td>Inexistente</td><td rowspan="5">explícita e fechada</td><td rowspan="5">única e exacta</td><td rowspan="4">Uso de algoritmos previamente conhecidos …</td></tr>
<tr><td>(1)</td><td rowspan="4">totalmente explícito no enunciado</td></tr>
<tr><td>(2)</td></tr>
<tr><td>(3)</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>insight</td></tr>
<tr><td>(5)</td><td rowspan="3">só em parte no enunciado</td><td rowspan="2">implícita e aberta</td><td rowspan="3">várias</td><td rowspan="3">exploração do contexto criação de problemas …</td></tr>
<tr><td>(6)</td></tr>
<tr><td>(7)</td><td>inexistente</td></tr>
</table>

(continua na pág. 35)

Xeque Mate!

Leonor Moreira, Núcleo do Projecto Minerva do DEFCUL

Quantos quadrados há num tabuleiro de xadrez?

A resposta imediata (mas incorrecta) é sessenta e quatro quadrados, uma vez que o tabuleiro de xadrez é habitualmente visualizado como uma matriz de oito linhas e de oito colunas de cujas intersecções resultam sessenta e quatro quadrados, alternadamente brancos e pretos. Mas um exame mais atento do tabuleiro revela que outros quadrados de diferentes tamanhos se podem identificar.

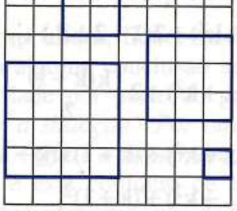


Figura 1

Uma forma de resolver o problema consiste em, pacientemente, contar todos os quadrados existentes no tabuleiro. Talvez não seja mau organizar, em tabela, os dados que formos obtendo. Começando pelos ''casos limite'', temos:

Tipo	Número
1×1	64
8×8	1

Tabela 1

A tabela 1 revela uma simetria curiosa: há 64 quadrados de área 1 e 1 quadrado de área 64. A confirmar-se, esta simetria evitará a contagem exaustiva dos quadrados. Mas continuemos.

Tipo	Número
1×1 (área 1)	64
2×2 (área 4)	49
....	.....
7×7 (área 49)	4
8×8 (área 64)	1

Tabela 2

De facto, a Tabela 2 sugere a existência de 36 quadrados do tipo 3x3 (área 9) e 9 quadrados do tipo 6x6 (área 36). A correcção desta previsão permite-nos concluir:

Tipo	Número
1×1 (área 1)	64
2×2 (área 4)	49
3×3 (área 9)	36
4×4 (área 16)	25
5×5 (área 25)	16
6×6 (área 36)	9
7×7 (área 49)	4
8×8 (área 64)	1
TOTAL	204

Tabela 3

Uma outra abordagem

Uma outra forma de abordar a questão consiste em imaginar tabuleiros de xadrez de menores dimensões. O menor tabuleiro de xadrez é do tipo 1x1 e, obviamente, contém um único quadrado. Num tabuleiro 2x2, há quatro quadrados do tipo 1x1 e um quadrado do tipo 2x2, num total de cinco quadrados. Se o tabuleiro for do tipo 3x3 há que considerar: 9 quadrados do tipo 1x1, 1 quadrado do tipo 3x3 e quatro quadrados do tipo 2x2, como se vê na Figura 2.

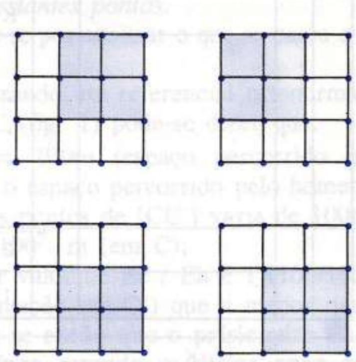


Figura 2

Na tabela 4, estão registados os resultados do problema para os quatro tabuleiros menores:

Tipo de Tabuleiro	N.º de Q. 1×1	N.º de Q. 2×2	N.º de Q. 3×3	N.º de Q. 4×4	N.º t. Q. quadrados
1×1	1				1
2×2	4	1			5
3×3	9	4	1		14
4×4	16	9	4	1	30

Tabela 4

Aqui chegados, é razoável conjecturar:

1) o número de quadrados de um determinado tipo é, sempre, um quadrado perfeito;

2) num tabuleiro de xadrez do tipo nxn o número de quadrados é $1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + n^2$

Provando a conjectura

Resta, agora, provar esta última conjectura. Vamos tentar fazê-lo, usando o método de indução matemática.

1.º passo. Seja $\mathbf{n=1}$. Num tabuleiro do tipo 1x1, há apenas, como já vimos, 1 quadrado. Como $1 = 1^2$, a conjectura é verdadeira para $n=1$.

2.º passo. Vamos admitir que a conjectura é verdadeira quando **n** é substituído por qualquer inteiro positivo **k**, isto é, vamos admitir que num tabuleiro do tipo **kxk** há $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2$ quadrados.

3.º passo. Vamos provar que a conjectura se verifica, ainda, para $\mathbf{n = k+1}$, isto é, num tabuleiro do tipo **(k+1)x(k+1)** há $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2$ quadrados.

A Figura 3 representa um tabuleiro do tipo **(k+1)x(k+1)**. Este é formado por um tabuleiro do tipo **kxk** a que se adicionaram uma linha e uma coluna complementares, cujos quadrados aparecem, na figura, numerados de **1** a **2k+1**.

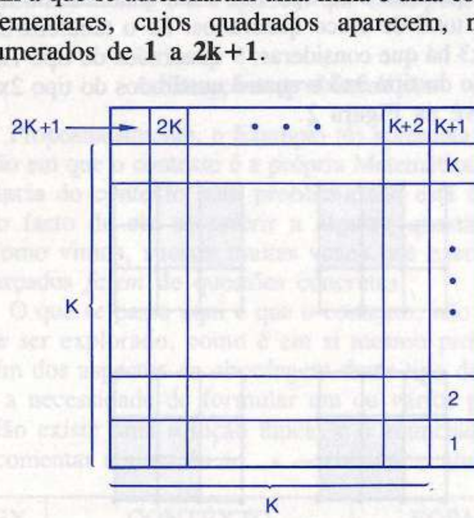


Figura 3

Os quadrados existentes neste tabuleiro podem ser agrupados em quatro categorias:

Categoria 1. Trata-se dos quadrados existentes no tabuleiro original — do tipo **kxk** — e, pelo segundo passo, o seu número é dado por:
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2$

Categoria 2. São os quadrados cujo topo está na linha adicional, sem que o lado direito ultrapasse o tabuleiro inicial. Há:

1 quadrado do tipo kxk
2 quadrados do tipo (k-1)x(k-1)
3 quadrados do tipo (k-2)x(k-2)
....
k quadrados do tipo 1x1

Nesta categoria, o número total de quadrados é, então,
$\mathbf{1 + 2 + 3 + \dots + k}$

Categoria 3. Trata-se, agora, dos quadrados cujo lado direito está no limite da coluna adicional, sem que o lado superior ultrapasse os limites do tabuleiro original. Tal como no caso anterior, o seu número é dado por:

$\mathbf{1 + 2 + 3 + \dots + k}$

Categoria 4. São os quadrados cujo vértice superior direito coincide com o canto superior direito do tabuleiro. Há, exactamente, **k+1** quadrados nesta categoria — um de cada um dos diferentes tipos, isto é, **1** do tipo **1x1**, outro do tipo **2x2**, ..., outro do tipo **kxk** e, finalmente, outro do tipo **(k+1)x(k+1)**.

O número total de quadrados do tabuleiro é, então:

$$(1^2+2^2+3^2+\dots+k^2)+2(1+2+3+\dots+k)+(k+1)$$
$$=(1^2+2^2+3^2+\dots+k^2)+2\,\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$=(1^2+2^2+3^2+\dots+k^2)+(k+1)x(k+1)$$
$$=(1^2+2^2+3^2+\dots+k^2)+(k+1)^2$$
$$=[1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2]$$

Está, assim, completo o passo 3 e, portanto, fica provada a conjectura.

Uma expressão mais elegante

O número total de quadrados de um tabuleiro do tipo nxn é, então:

$$N=1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2+n^2$$

ou, sintetizando:
$$N=\sum_{i=1}^{n} i^2$$

Podemos, ainda, traduzir este número por um polinómio. Para isso vamos atender ao teorema:

Toda a sucessão de números, cujas diferenças de ordem n+1 sejam nulas, é redutível a um polinómio de grau n:

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+z$$

Consideremos, então, os diferentes valores da função e respectivas diferenças:

$f(x)$	$\Delta_1 p$	$\Delta_2 p$	$\Delta_3 p$	$\Delta_4 p$
1	4	5	2	0
5	9	7	2	0
14	16	9	2	
30	25	11		
55	36			
91				

(continua na pág. 14)

O cão e o prisioneiro

Manuel Saraiva, Universidade da Beira Interior

Há uns meses atrás fui colocado perante o seguinte problema: *Um prisioneiro encontra-se no centro do pátio de uma prisão e é guardado por um cão que tem, em todos os momentos, uma velocidade π vezes a sua. O pátio tem a forma de um quadrado com 200m de lado. O cão desloca-se sempre ao longo dos lados do pátio, podendo mudar a direcção e o sentido do seu movimento. Inicialmente o homem está no centro do pátio, podendo deslocar-se no seu interior em qualquer direcção e sentido; por seu lado, o cão encontra-se num dos vértices e, como bom guarda, está atento a todos os movimentos do prisioneiro, procurando sempre a melhor trajectória para o apanhar.*

Nestas condições, terá o prisioneiro alguma hipótese de fuga?

Confesso que, na altura, fiquei motivado e com vontade de chegar a alguma conclusão acerca do alcance, ou não, da liberdade por parte do prisioneiro.

Como resolver a situação? Por onde começar? Que estratégia definir? Qual a Matemática necessária?

Na realidade, é este conjunto de interrogações que torna aliciante estas situações, que as torna mesmo num desafio e num aguçar do espírito criativo e de iniciativa — é o não se saber, ao princípio, o que fazer, é o pôr a funcionar a nossa intuição, é o educar a nossa vontade e determinação em resolver as situações problemáticas que se nos deparam no dia a dia.

Começou-se por fixar o vértice onde se encontra o cão (ponto C da figura 1) — note-se que é indiferente a escolha de tal vértice pois a resolução do problema é independente desse facto; em seguida restringiu-se o movimento do homem a um movimento rectilíneo desde o centro do pátio (H) até cada um dos pontos dos lados do mesmo (nada de fintas ao cão!). Impostas estas condições (um caso particular do problema), a questão reside em saber se existirá algum «caminho», desde o centro do pátio até um determinado ponto de um dos seus lados, que o homem possa percorrer em menos tempo do que aquele que é gasto pelo cão a chegar a esse mesmo ponto, desde o seu vértice de partida.

Designando por:

Th — tempo gasto pelo homem em cada percurso
Tc — tempo gasto pelo cão em cada percurso
Eh — espaço percorrido pelo homem em cada percurso
Ec — espaço percorrido pelo cão em cada percurso
Vh — velocidade do homem
Vc — velocidade do cão

pretende-se saber se Th < Tc para algum «caminho». Como o movimento é uniforme (segundo o enunciado) pode-se escrever Th = Eh / Vh e Tc = Ec / Vc; logo, para que Th < Tc, virá Eh / Vh < Ec / Vc. Fazendo Vh = 1 vem Vc = π, chegando-se à relação Ec / Eh > π. **Pode-se então dizer que o homem conseguirá fugir ao cão (nas condições atrás indicadas) se a razão entre o espaço percorrido pelo cão e o espaço percorrido pelo homem (para cada caso, claro) for superior a π.**

Mas quando é que isso acontece? Será que se pode ter esperança?

Como o cão escolhe sempre o caminho óptimo, basta analisar o que se passa desde o ponto C até ao ponto E, «via» ponto D, por exemplo (ver figura 1).

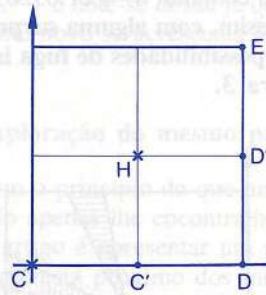


Figura 1

Surge, talvez, a tentação de ver o que se passa em E — o ponto mais distante do cão: Eh = $100\sqrt{2}$ m e Ec = 400m vindo Ec / Eh = $2\sqrt{2} < \pi$. **O cão chega primeiro do que o prisioneiro.**

Perante este facto poder-se-á já concluir que o cão apanha sempre o homem? Talvez não! Faça-se o estudo para os restantes pontos.

Começe-se por analisar o que se passa em [CC'] (ver fig. 1).

Considerando um referencial ortonormado com origem em C (fig. 1) pode-se dizer que:

1) $\overline{CC'}$ = 100m (espaço percorrido pelo cão de C a C') e o espaço percorrido pelo homem ao dirigir-se para os pontos de [CC'] varia de 100m (em C') a $\sqrt{100^2 + 100^2}$ m (em C);

2) o maior valor de Ec / Eh é 1 (100/100 correspondente à situação em C') que é menor que π.

Conclui-se então que o prisioneiro não tem hipóteses de fuga quando se dirige para os pontos de [CC'].

Um raciocínio idêntico leva a concluir que o homem não tem possibilidades de fugir se o tentar fazer por qualquer ponto de [C'D] ou de [DD']. Note-se que em D', Ec / Eh = 3 < π sendo, no entanto, um valor já bastante próximo de π. Este dado leva a acreditar na possibilidade de fuga do prisioneiro por pontos de [D'E]. *Mas será mesmo possível o homem fugir? Não se sabe já que o cão chega primeiro que o homem ao ponto E?*

Faça-se então o estudo para o caso dos pontos compreendidos entre D' e E.

Pretende-se saber se existe algum valor de x para o qual Th < Tc (ver fig. 2). Neste caso Ec = (200 + 100) + x (m) e Eh = $\sqrt{x^2 + 100^2}$ (m).

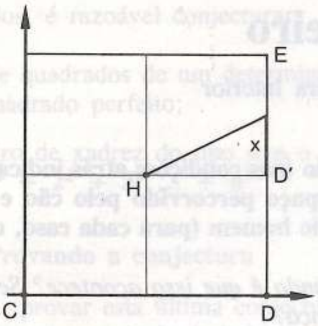


Figura 2

Então, e de Th < Tc, virá Ec / Eh > π, ou seja, a inequação $[(300 + x) / \sqrt{x^2 + 100^2}] > \pi$, cujo conjunto solução é o conjunto S=] 21.032092, 46.61894 [.

Constata-se assim, com alguma surpresa, que o prisioneiro tem as possibilidades de fuga indicadas a tracejado na figura 3.

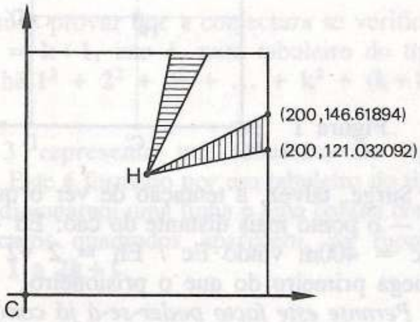


Figura 3

Note-se que a abordagem do problema apenas contemplou uma estratégia de fuga, talvez mesmo a mais simples, a mais linear; outras estratégias poderiam ter sido consideradas como, por exemplo, a hipótese do prisioneiro poder alterar a sua trajectória antes mesmo de chegar ao seu destino, ao ver que o cão ia chegar primeiro do que ele.

Quanto a mim, este problema só por si já é um bom problema a colocar aos alunos, não só pelo desafio que pode provocar quanto à procura de uma boa estratégia, mas também pelo conjunto de conhecimentos de Geometria e de Álgebra necessários para a sua resolução; porém, ele pode constituir ainda um belo exemplo da útil e vantajosa utilização do microcomputador na sala de aula -- como simulador de situações problemáticas. Creio mesmo que, se na simulação a apresentar aos alunos limitarmos os caminhos do prisioneiro (não deixarmos que o homem tome os caminhos que o conduzem à liberdade), ficaremos com um belíssimo começo de aula, onde os ingredientes de uma boa motivação estão associados a um bom problema para resolver.

Um problema, normalmente, tem várias formas de resolução e levanta sempre novas questões. Um problema dos problemas é mesmo tentar resolvê-los pelo processo mais simples e mais económico, bem como resolver as novas questões levantadas, porque mais complicadas e mais problemáticas. Relativamente a este problema do Cão e do Prisioneiro gostaria de deixar aqui a seguinte questão:

«Qual a velocidade que o cão precisa ter para que o homem, nas condições trabalhadas neste texto, não tenha hipóteses de fuga?».

Xeque Mate! (conclusão)

Pelo teorema anterior, conclui-se que:

$N = an^3 + bn^2 + cn + d$

Atendendo a que f(0)=0, f(1)=1, f(2)=5 e f(3)=14, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 5 \\ 27a + 9b + 3c = 14 \end{cases}$$

que conduzirá a:

$$\begin{cases} a = 1/3 \\ b = 1/2 \\ c = 1/6 \\ d = 0 \end{cases}$$

E, portanto, o número de quadrados de um tabuleiro do tipo nxn é:

$$1/3\ n^3 + 1/2\ n^2 + 1/6\ n = 1/6\ n\ (n+1)\ (2n+1)$$

Uma extensão do problema

Quantos cubos há num cubo do tipo nxnxn?

Imagine-se, por exemplo, um cubo construído com n_3 cubos de madeira, desses que se oferecem às crianças para fazerem construções e puzzles. Quantos cubos, de diferentes tamanhos, se podem identificar?

É quase irresistível adequar a fórmula anterior às três dimensões e conjecturar que há $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ cubos. De facto, a conjectura é verdadeira, como se pode concluir utilizando qualquer uma das abordagens anteriores ou provando-a pelo método de indução matemática seguindo um percurso paralelo.

Novas extensões do problema

No caso do tabuleiro de xadrez, contámos apenas os quadrados que são rectângulos especiais. E se contássemos todos os rectângulos?

Também no segundo caso, contámos apenas os cubos que são paralelipípedos especiais. E se contássemos todos os paralelipípedos?

Temos, assim, dois novos problemas que se podem considerar extensões dos anteriores.

Quem quer quebrar a cabeça? Ficamos a aguardar as vossas descobertas.

Travessia discreta do deserto

Eduardo Veloso, colaborador do Projecto Minerva

Antecedentes

Tudo começou com o problema *A Travessia do Deserto:*

Um homem tem de atravessar um deserto para entregar uma mensagem. Atravessar o deserto demora 9 dias. Um homem pode transportar consigo comida suficiente para 12 dias. No local onde será entregue a mensagem não existe hipótese de obter alimentos. Dois homens estão disponíveis para a missão.

Poderá a mensagem ser entregue e ambos os homens regressarem ao ponto de partida sem que lhes falte a comida? (Há possibilidades da comida ser enterrada na ida e desenterrada na volta). (in Bernardes, Odete e Teixeira, Paula. *Jogos, Enigmas, Problemas.* Associação de Professores de Matemática; Lisboa, 1987)

(Atenção: vou dar a solução do problema; se quer resolvê-lo, não leia já o parágrafo seguinte!)

A solução apresentada no fim do mesmo livro para este problema é a seguinte: partem os dois homens com 12 dias de comida cada um; ao fim de três dias, um deles regressa ao ponto de partida, e portanto apenas gasta ao todo seis dias de comida; dos restantes seis, entrega três ao companheiro e enterra os outros três; então o companheiro fica com 12 dias de comida, seis para ir até ao ponto onde tem de entregar a mensagem e seis para regressar; depois desenterra os três dias de comida e pode assim voltar ao ponto de partida.

Nos números 5 e 6 de Educação e Matemática apareceram dois artigos que abordavam este problema.

No primeiro, a nossa colega Ana Baltazar tentava generalizar o problema para um número de homens maior do que dois, para responder à variante 1 proposta no mesmo livro:

Qual poderá ser a extensão do deserto se 3 homens (4 homens, 5 homens, etc.) estiverem disponíveis para entregar a mensagem?

Ana Baltazar considerava que todos os homens *voltariam para trás ao mesmo tempo*, ligava o problema ao estudo das sucessões e concluía que, se o número de homens tendesse para $+\infty$, a extensão possível do deserto tendia para 12. A redacção de Educação e Matemática lançava, no fim do artigo, um desafio aos leitores: estudar o mesmo problema com outras estratégias para a utilização dos carregadores. As alunas do 12.º ano da Esc. Secundária de Benfica Cláudia Peça e Ana Santos, sob sugestão da professora Leonor Vieira, estudaram o problema, procuraram uma estratégia mais conveniente e, utilizando ainda as sucessões, chegaram à seguinte conclusão, que expõem no seu artigo *o deserto pode ter qualquer extensão desde que haja um número suficiente (sempre finito) de homens.* Por meio de um programa em BASIC, apresentado no mesmo artigo, torna-se possível e prático calcular o número de acompanhantes que o mensageiro deve ter para realizar uma travessia de determinado número de dias.

Ficou assim completamente resolvido o problema e a sua variante n.º 1 e note-se desde já que, neste artigo, nada de realmente novo se acrescenta à solução encontrada.

Nova exploração do mesmo problema

De acordo com o princípio de que um problema não se esgota quando apenas lhe encontramos a solução, o objectivo deste artigo é apresentar um modo de atacar este problema que está próximo dos métodos próprios da Matemática Discreta, isto é, da Matemática do finito, dos conjuntos finitos, por oposição à Matemática do contínuo, em que se torna necessário recorrer em geral aos métodos poderosos da Análise. Na realidade, o que este problema nos põe é uma simples (?) questão de organização de um número finito de operações (caminhar, trocar comida, enterrar comida), efectuadas por um número finito de homens, de modo a optimizar a sua sequência com o objectivo de que um dos homens possa caminhar o maior número possível de dias.

Simplificação do enunciado

A possibilidade de enterrar comida para o regresso é, sem dúvida, uma condição essencial no enunciado do problema. Mas será possível enunciar o problema de outra forma equivalente mas sem essa complicação adicional? Em termos mais precisos, o que quero dizer é o seguinte: será possível encontrar um 'modelo matemático' mais simples para a mesma situação concreta?

A minha proposta é que se substituam as três condições:

(i) cada homem só pode carregar em cada momento comida para doze dias

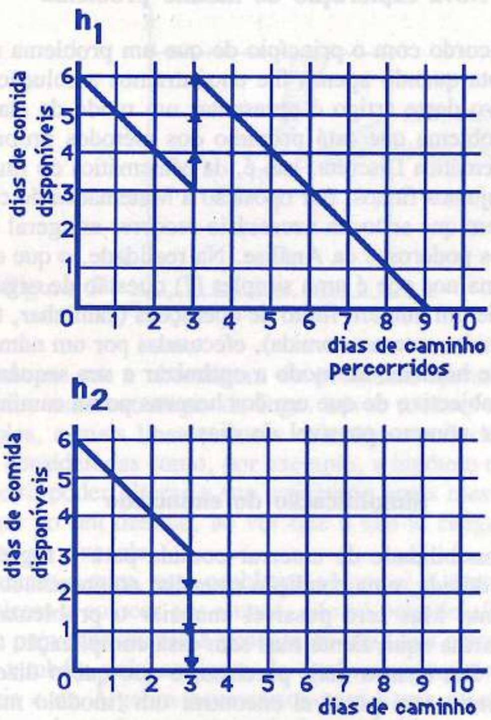
(ii) pode enterrar comida para a volta

(iii) tem que regressar ao ponto de partida, pelas duas condições equivalentes:

(j) cada homem só pode carregar em cada momento comida para seis dias

(jj) não tem que regressar ao ponto de partida

Mas serão mesmo equivalentes? Equivalentes aqui significa *darem as mesmas possibilidades de percorrer distâncias no deserto.* Note-se que, *em cada momento*, tanto dá que um homem tenha comida para avançar um dia e recuar outro ou para apenas avançar um dia, *desde que a comida para avançar um dia, no segundo caso, seja igual, do ponto de vista das possibilidades de transporte, à comida para andar dois dias no primeiro caso.* Mas isto é precisamente o que implica a condição (j), ao permitir apenas o transporte de comida para seis dias e não para doze, como (i). Por outro lado, quando um homem, no primeiro conjunto de condições, dá dois dias de comida a outro, um para caminhar para a frente, outro para enterrar para a volta, isso é precisamente equivalente a dar-lhe um dia de comida no segundo conjunto de condições, que lhe permitirão avançar um dia, pois agora ele não tem que regressar. Note-se ainda que a vantagem de, no primeiro conjunto de condições, a comida estar mais desdobrada, em doze partes e não apenas em seis, é apenas aparente, pois no primeiro caso o gasto de um dia de comida *implica necessariamente o gasto de outro para o regresso*, pelo que a comida é sempre gasta *aos pares de dias.*

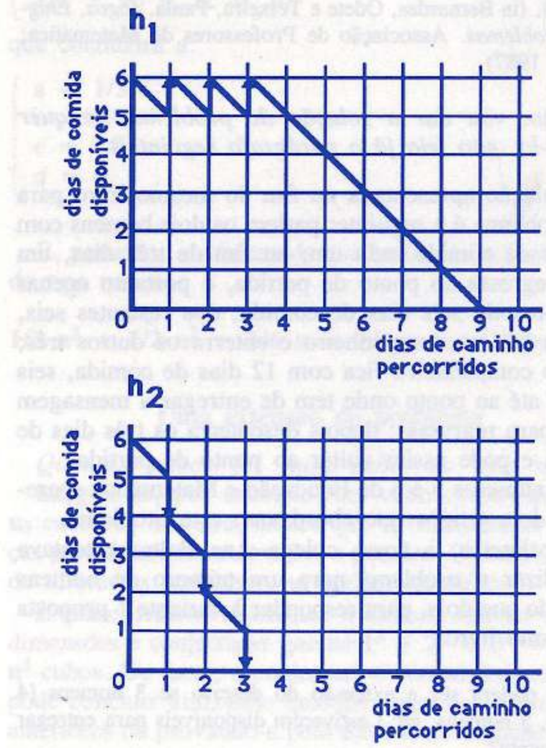


estratégia α

Pois bem, sendo os dois conjuntos de condições equivalentes (1), o segundo é preferível porque conduz a um raciocínio bem mais simples e uniforme: se um dos homens tem $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n} \leqslant 6$) dias de comida em dado momento, então poderá avançar $\mathbf{n}$ dias ou dar $\mathbf{m}$ ($\mathbf{m} \leqslant \mathbf{n}$) dias a outro e avançar $\mathbf{n}$-$\mathbf{m}$ dias.

No caso do problema posto inicialmente, uma solução (estratégia α) pode ser apresentada de modo muito claro: havendo dois homens ($\mathbf{h}_1$ e $\mathbf{h}_2$), ao fim de três dias ambos têm três dias de comida; $\mathbf{h}_2$ dá os seus três dias a $\mathbf{h}_1$ e pára, enquanto $\mathbf{h}_1$, agora com seis dias de comida, pode ainda andar mais seis dias, completando os nove necessários. Note-se que outra solução (estratégia β) conduzindo ao mesmo resultado consiste em $\mathbf{h}_2$, no fim de cada dia, dar sempre um dia de comida a $\mathbf{h}_1$: nestas circunstâncias, $\mathbf{h}_1$ parte sempre em cada dia com seis dias de comida, mas ao fim do terceiro dia $\mathbf{h}_2$ dá-lhe o seu último dia de comida e é obrigado a parar. Usaremos um esquema para facilitar a visualização destas duas estratégias.

Adoptaremos a estratégia β, pois é aquela que é facilmente generalizável a mais do que dois homens. Designaremos os homens por $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$, ..., $\mathbf{h}_j$, ... (sendo em todos os casos $\mathbf{h}_1$ aquele que entrega a mensagem). Ao fim de cada dia são feitas *todas as transferências de comida possíveis*. As transferências executam-se sempre do carregador $\mathbf{h}_i$ para o carregador $\mathbf{h}_{i\text{-}1}$ (com $i>1$). Assim, como se pode constatar num dos esquemas seguintes, quando há três homens, ao fim do primeiro dia de marcha existem 15 (3x(6–1)) dias de comida disponíveis, e as transferências possíveis a fazer são:



estratégia β

— $\mathbf{h}_2$ dá um dia de comida a $\mathbf{h}_1$ (que fica com seis dias de comida);

— $\mathbf{h}_3$ dá dois dias de comida a $\mathbf{h}_2$ (que fica com seis dias de comida);

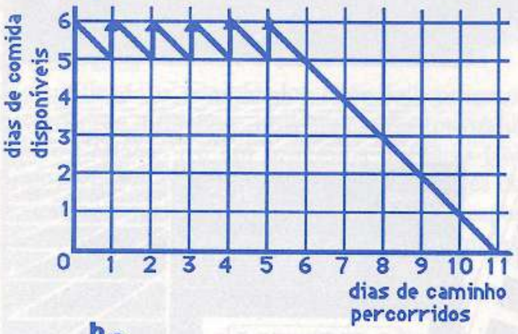
— $\mathbf{h}_3$ ficará então com dois dias de comida.

Visto de outro modo, o processo consiste simplesmente em dividir, ao fim de cada dia, o número total de dias de comida disponíveis por 6 (obtendo $\mathbf{q}$ por quociente e **r** por resto), e distribuir seis dias de comida a $\mathbf{h_1}, \mathbf{h_2}, \ldots, \mathbf{h_q}$ e **r** dias de comida a $\mathbf{h_{q+1}}$. Mais nenhum homem tem comida para prosseguir a marcha, e mesmo só interessa que $\mathbf{h_{q+1}}$ prossiga se **r** for maior do que um.

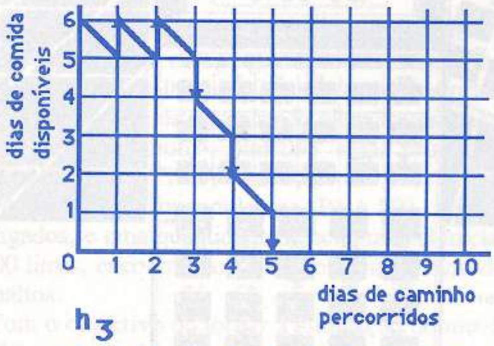
Nos esquemas seguintes estão exemplificados os casos referentes a três e quatro homens.

Três homens

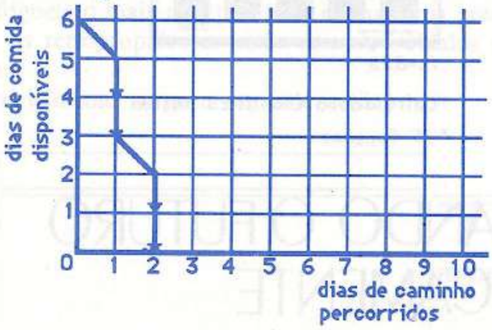
h_1



h_2

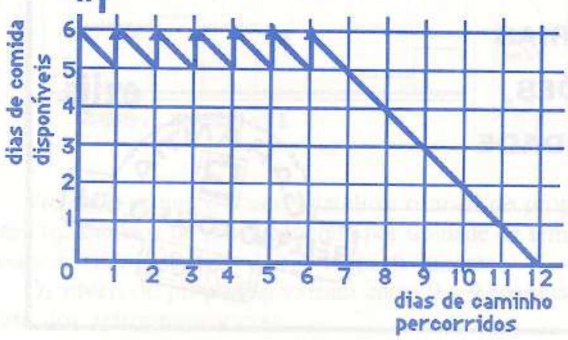


h_3

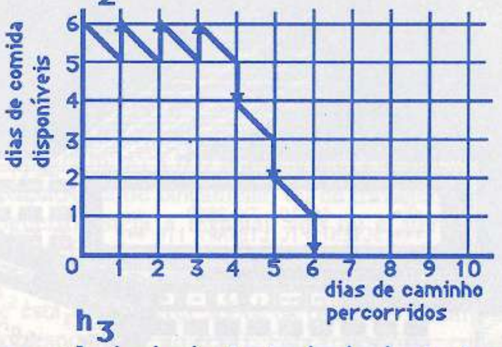


Quatro homens

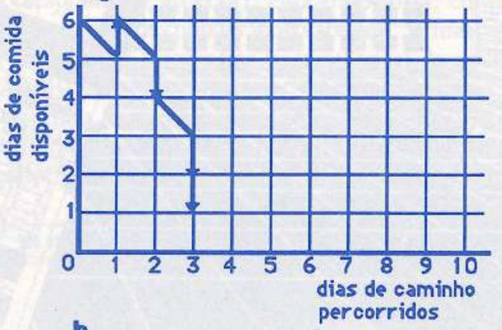
h_1



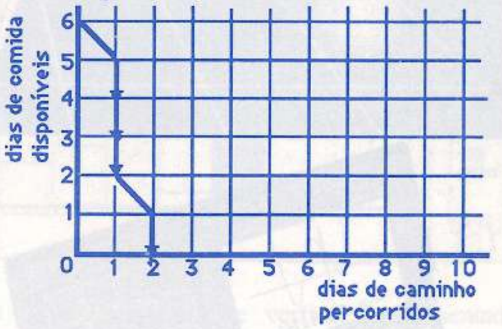
h_2



h_3



h_4



Vê-se imediatamente que com esta estratégia quatro homens chegam para levar a mensagem a doze dias de distância — conclusão de resto perfeitamente coincidente com a das alunas da Escola Secundária de Benfica.

Com paciência e perseverança poderemos determinar, através de esquemas ou cálculos análogos, a distância, em dias de marcha, a que um dado grupo de homens poderá levar uma mensagem. Mas como muito bem mostraram, perder a paciência e não ter perseverança são por vezes «virtudes» que levam a bons resultados — naquele caso dois programas em BASIC. Como não morro de amores pelo BASIC, fiz um programa em LOGO a partir do algoritmo que descrevi para a resolução do problema geral da travessia do deserto. Quem estiver interessado, encontra-o na secção LOGO.MAT desta revista.

(1) Tudo leva a crer que os dois conjuntos de condições são equivalentes, mas ignoro como poderia ser feita uma demonstração mais convincente.

CASIO
*** CASIO FX-850P ***
*** SCIENTIFIC LIBRARY 116 ***
fx-5000F
*128 Fórmulas incorporadas
*Programável
fx-82B
*Calculadora Científica Básica
*75 Funções
CALCULANDO O FUTURO CIENTIFICAMENTE
fx-7500G
*Calculadora Científica
*Programável c/ gráficos
*Visor Gráfico
CALCULADORAS PARA O ENSINO
MAIS MEMÓRIAS
MAIS FUNÇÕES
MAIS QUALIDADE
exija
GARANTIA
BELTRÃO COELHO, LDA.
2 ANOS
CASIO
LIDER MUNDIAL EM CALCULADORAS

Função quadrática e movimento de projécteis

Margarida Cristina Silva, Escola Secundária D. Pedro V

O presente artigo refere uma experiência de trabalho extra-aula, realizada com um grupo de alunos do 9.º ano de escolaridade.

Pretendia-se estudar o movimento de foguetões no campo gravítico terrestre e relacionar este estudo com um assunto de natureza puramente matemática: a função quadrática.

Foi utilizado o computador com dois programas de características diferentes: uma simulação construída para o efeito (''Nave'') e um programa utilitário (folha de cálculo). Não se pretendia dirigir as actividades dos alunos para a aprendizagem de qualquer tópico específico, mas sim criar situações abertas, com bastante «espaço de manobra».

Descrição do programa «Nave»

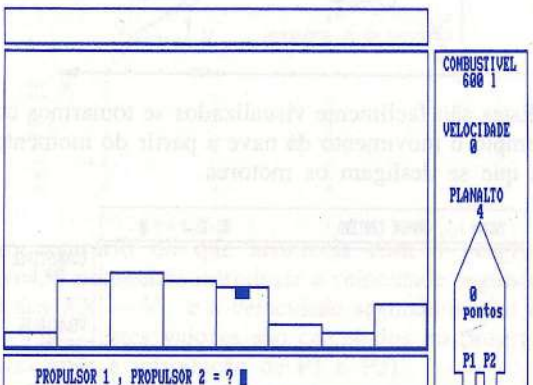
O programa «Nave» simula graficamente o movimento de um foguetão no campo gravítico terrestre, sobre uma zona de oito planaltos de altura gerada aleatoriamente.

O foguetão tem de descolar do planalto onde se encontra e aterrar noutro planalto sem provocar uma «GRANDE CRATERA» no solo.

Possui dois retropropulsores (P1 e P2), inicialmente desligados, e uma quantidade de combustível inicial igual a 600 litros, encontrando-se aleatoriamente num dos oito planaltos.

Com o objectivo de tornar a simulação do movimento do foguete o mais real possível, o programa pressupõe que os retropropulsores estão sempre voltados para o solo.

Inicialmente surge o seguinte ecrã:



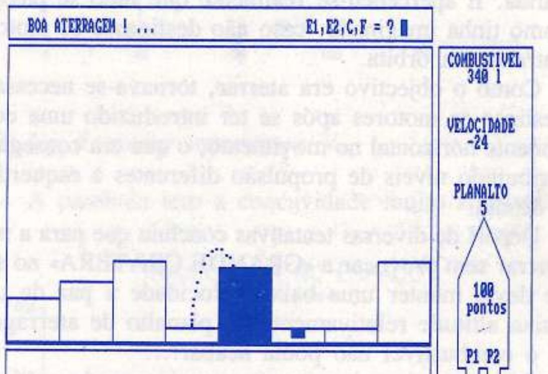
Pretende-se que o aluno introduza o nível de propulsão (quantidade de gases expelida por unidade de tempo) para o retropropulsor 1 e 2 respectivamente.

Os níveis de propulsão variam entre 0 e 9 (para cada um dos retropropulsores).

O nível 0 0 corresponde a ter os propulsores desligados (queda livre) e 9 9 corresponde à potência máxima (máxima força de lançamento ou de travagem, conforme o foguetão esteja a levantar voo ou a aterrar).

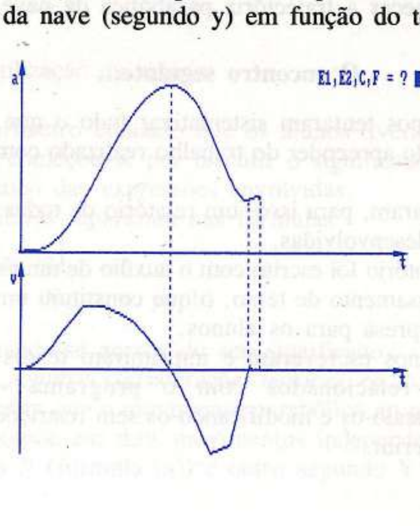
Assim, depois de experimentar vários valores de nível de propulsão, o aluno apercebe-se da trajectória que a nave está a descrever sobre os planaltos (num plano X Y correspondente ao ecrã). Esta trajectória, constituída por uma série de pontos corresponde, afinal, a uma sobreposição de fotografias (instantâneos) da nave, tiradas de 10 em 10 segundos.

O gráfico seguinte representa a trajectória do movimento de uma nave que parte do planalto 4 e aterra no planalto 5.



O valor da velocidade vertical é apresentado na «janela» da direita, sendo positivo se a nave está a subir e negativo se a nave está a descer, tomando obviamente o valor zero no «topo» das trajectórias.

Depois de construída a trajectória do movimento da nave, o aluno pode visualizar, simultaneamente num segundo ecrã, dois gráficos, um respeitante à altura da nave em função do tempo e outro representando a velocidade da nave (segundo y) em função do tempo:

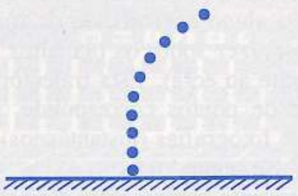


O primeiro contacto com o programa «Nave»

Os alunos trabalharam em grupos de dois, tendo cada um usado estratégias diferentes para levantar vôo e aterrar.

Bastante interessante foi o procedimento de uma aluna que antes tinha feito a seguinte conjectura sobre a trajectória do movimento da nave:

«Se este pontinho for a nave, a sua trajectória deve ser assim:»



O seu primeiro contacto com o programa foi exactamente no sentido de averiguar se tal hipótese era ou não válida. E apercebeu-se realmente que tudo se passava como tinha imaginado: caso não desligasse os motores entraria em órbita.

Como o objectivo era aterrar, tornava-se necessário desligar os motores após se ter introduzido uma componente horizontal no movimento, o que era conseguido atribuindo níveis de propulsão diferentes à esquerda e à direita.

Depois de diversas tentativas concluiu que para a nave aterrar sem provocar a «GRANDE CRATERA» no solo se devia manter uma baixa velocidade a par de uma baixa altitude relativamente ao planalto de aterragem. E o combustível não podia acabar!...

Outro momento interessante surgiu quando os alunos se aperceberam que se desligassem os propulsores (o que correspondia a introduzir os níveis 0 0), a nave continuava a subir com decréscimo de velocidade.

Este facto provocou algum espanto:

«Então se introduzirmos 0 0 a nave não desce?»

Depois de experimentarem outros valores, concluiram que isso se devia ao facto da nave «levar» uma grande velocidade.

Foi nesta altura que os alunos tiveram oportunidade de reconhecer a trajectória parabólica da nave.

O encontro seguinte...

Os alunos tentaram sistematizar tudo o que tinham conseguido apreender do trabalho realizado com o programa.

Elaboraram, para isso, um relatório de todas as actividades desenvolvidas.

Tal relatório foi escrito com o auxílio de um programa de processamento de texto, o que constituiu uma agradável surpresa para os alunos.

Os alunos escreveram e imprimiram textos da sua autoria, relacionados com o programa «Nave», aperfeiçoando-os e modificando-os sem restrições numa fase posterior.

O segundo contacto com o programa «Nave»

Os alunos tentaram novamente aterrar nos planaltos com êxito. Em seguida foi-lhes proposto a visualização dos dois gráficos, altura em relação ao planalto em função do tempo, velocidade vertical em funcão do tempo.

Foi sugerida a interpretação isolada de cada um dos gráficos, ao que os alunos reagiram da melhor forma, na medida em que tiraram informações dos próprios gráficos para melhorarem estratégias de aterragem.

Contudo, o que se mostrou mais significativo foi a interpretação conjunta dos gráficos. Alguns dos alunos aperceberam-se quase instantaneamente que, por exemplo, a altura é máxima quando a velocidade se anula.

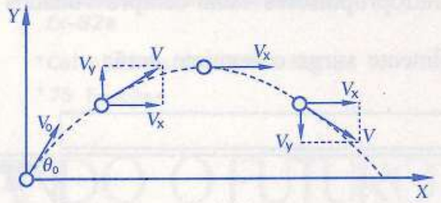
Após a anterior constatação surgiu a ideia de tentar relacionar a curvatura do primeiro gráfico com o andamento do gráfico da velocidade. Não foram imediatas as conclusões dos alunos, mas após algumas tentativas estes aperceberam-se que, quando o sentido da concavidade do primeiro gráfico se invertia a velocidade passava de crescente a decrescente ou vice-versa.

A folha de cálculo

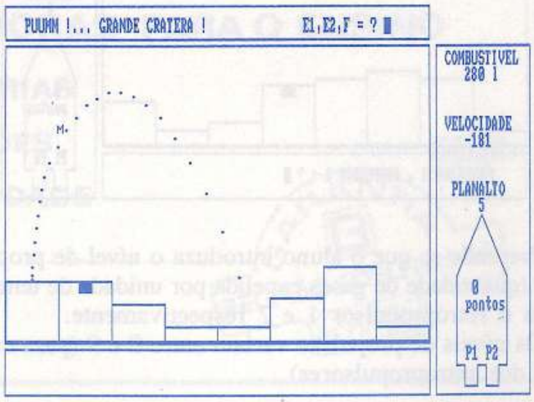
Após o estudo do movimento de uma nave no campo gravítico terrestre, através do conjunto de actividades com o programa «Nave» (e não só) anteriormente referidas, passou-se a um estudo generalizado do movimento de projécteis com o apoio de um programa elaborado na folha de cálculo (SC4).

1. Considerações teóricas

O movimento de um projéctil (no plano X-Y) pode ser substituído por dois movimentos independentes.



Estes são facilmente visualizados se tomarmos como exemplo o movimento da nave a partir do momento M em que se desligam os motores.



A coordenada x da nave é igual, em qualquer instante, à distância percorrida na horizontal, enquanto a coordenada y pode ser obtida como se a nave se deslocasse ao longo de uma linha vertical.

Movimento horizontal - uniforme

$x'' = 0$ (aceleração nula)
$x' = V_{x_0}$ (velocidade constante)
$x = V_{x_0} \cdot t + X_0$

Movimento vertical — uniformemente acelerado

$y'' = -g$ (aceleração da gravidade)
$y' = -g.t + V_{y_0}$
$y = -1/2gt^2 + V_{y_0} \cdot t + Y_0$

O modelo matemático atrás referido, dado que descreve um dos fenómenos físicos mais conhecidos (a queda de objectos é uma constante do dia a dia...) é sem dúvida uma boa escolha para sensibilizar os alunos para a estreita ligação entre o mundo físico e a Matemática e simultaneamente explicar como foi elaborado o programa «Nave».

No entanto, tornava-se necessário arranjar uma forma de analisar este modelo sem os alunos se sentirem «esmagados» pela sua dificuldade.

A folha de cálculo electrónica oferece ao utilizador a possibilidade de participar na construção do modelo matemático. Por isso se optou pela sua utilização.

2. Matriz programada

O ponto de partida consiste em colocar os alunos face a uma matriz construída do seguinte modo:

```
    ! B  !! C  !!D !!   E    !! F !!    G    !! H. !!  I  !!   J   !!   K   !
1
2                                    MOVIMENTO DE UM PROJECTIL
3
4
5                        TEMPO     Vxo.t + Xo      -1/2.g.t^2 + Vyo.t + Yo
6     Vxo =      0
7     Vyo =      0         0            0                     0
8                          0            0                     0
9     Xo =       0         0            0                     0
10    Yo =       0         0            0                     0
11                         0            0                     0
12     a=     -4.9         0            0                     0
13     b=        0         0            0                     0
14     c=        0         0            0                     0
```

Ao contrário do que acontecia com o programa «Nave», é necessário introduzir a velocidade segundo o eixo dos XX — V_{x_0} e a velocidade segundo o eixo dos YY — V_{y_0} (estes valores são calculados no programa «Nave» após a introdução de P1 e P2).

É necessário também introduzir x_0 e y_0 que representam as coordenadas do ponto donde é lançado o projéctil (no caso do programa «Nave» — o planalto de partida).

Em seguida visualizam-se três tipos de gráficos:

1) X - Y (trajectória no espaço)
2) X - t (espaço percorrido na horizontal/tempo)
3) Y - t (espaço percorrido na vertical/tempo)

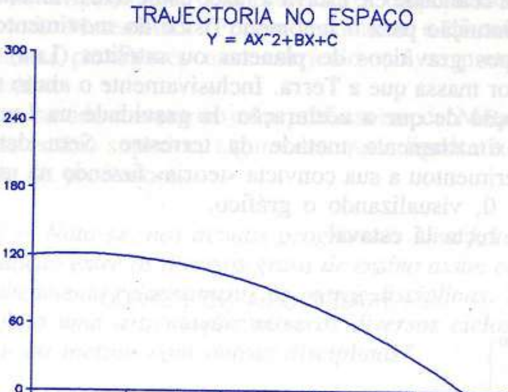
Repare-se na influência dos valores atribuídos a V_{x_0} e V_{y_0} na forma final da parábola:

A) V_{x_0} é «muito superior» a V_{y_0}

— A parábola tem a concavidade pouco acentuada

B) V_{y_0} é «muito superior» a V_{x_0}

— A parábola tem a concavidade muito acentuada



3. Utilização da matriz

No primeiro contacto que os alunos tiveram com a matriz, começou-se por discutir o significado físico e matemático das expressões envolvidas.

Os alunos repararam nas fórmulas

$V_{x_0} + x_0$ (a)
$-1/2gt^2 + V_{x_0} \cdot t + y_0$ (b)

interrogando-se acerca do seu significado.

Após algumas considerações teóricas, os alunos compreenderam que o movimento parabólico no plano X-Y se decompõe em dois movimentos independentes, um segundo X (fórmula (a)) e outro segundo Y (fórmula (b)).

Analisando mais detalhadamente a fórmula (b) os alunos concluiram que, visto **g** ser uma constante igual a 9,8 (aceleração da gravidade em ms^{-2}) então a referida fórmula assemelha-se ao primeiro membro de uma equação do segundo grau $\mathbf{at^2+bt+c}$ em que

$$a = -4{,}9 \; ; \; b = V_{y_0} \; ; \; c = y_0$$

A propósito do valor de **g**, gerou-se uma discussão bastante viva em que os alunos mostraram admiração pelo facto de todos os corpos independentemente da sua massa cairem com a mesma aceleração. Ficaram convencidos quando se falou na célebre experiência de Galileu que deixou cair do alto da Torre de Pisa duas esferas com o mesmo volume (para sofrerem igual atrito) e massas diferentes tendo verificado que atingiram o solo exactamente no mesmo instante.

Finalmente os alunos começaram a introduzir valores (diferentes) para V_{x_0} e V_{y_0}, visualizando em seguida o gráfico 1 (X-Y).

As expectativas confirmaram-se.

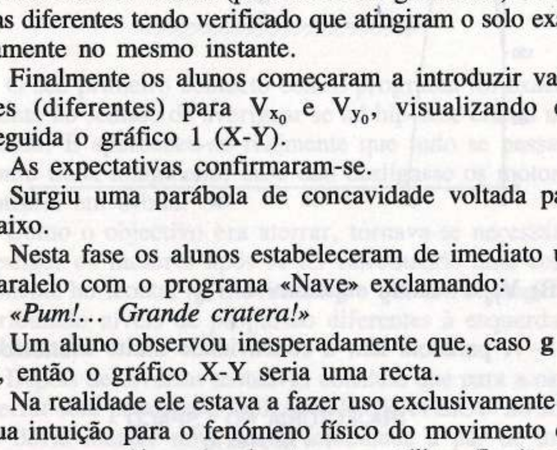
Surgiu uma parábola de concavidade voltada para baixo.

Nesta fase os alunos estabeleceram de imediato um paralelo com o programa «Nave» exclamando: *«Pum!... Grande cratera!»*

Um aluno observou inesperadamente que, caso **g = 0**, então o gráfico X-Y seria uma recta.

Na realidade ele estava a fazer uso exclusivamente da sua intuição para o fenómeno físico do movimento em campos gravíticos de planetas ou satélites (Lua) com menor massa que a Terra. Inclusivamente o aluno tinha a noção de que a aceleração da gravidade na Lua era aproximadamente metade da terrestre. Sem demora experimentou a sua convicta «teoria» fazendo na matriz a = 0, visualizando o gráfico.

A recta lá estava!



Tornámos a fazer **a = –4,9** para continuar no campo gravítico terrestre.

Os alunos demonstraram grande convicção quando previam o tipo de gráfico que iria surgir para cada um dos novos pares de valores (X_0, Y_0), (V_{x_0}, V_{y_0}) que iam introduzindo.

Os gráficos X(t) — linear (2) e Y(t) — parabólico (3) não suscitaram quaisquer dúvidas e tornou-se óbvio para os alunos que a composição vectorial dos movimentos que estes gráficos representavam (segundo duas direcções perpendiculares) correspondia de facto ao movimento real de um projéctil.

Balanço final

Em todas as actividades desenvolvidas, o aspecto mais relevante foi o elevado grau de interesse e motivação que os alunos sempre demonstraram.

Começando com um problema clássico da Física — movimento de foguetões — os alunos formularam hipóteses sobre a trajectória descrita por um foguetão no campo gravítico terrestre e testaram tais hipóteses através da utilização do programa «Nave».

Experimentaram valores, analisaram os resultados dessas experimentações e tentaram de novo.

Esta actuação, tentativa — erro, tem em si mesmo um alto valor educativo. Além disso, na situação em estudo, o aluno não era «obrigado» a encontrar uma única solução para um determinado problema, uma vez que várias soluções eram admissíveis.

Um outro aspecto que se mostrou relevante no decorrer do trabalho foi a iniciativa que os alunos tomaram em determinadas situações, nomeadamente quando consideraram importante redigir um relatório sobre o programa «Nave» e sobre a melhor estratégia de aterrar com sucesso. Passaram então a utilizar o processamento de texto por sua livre vontade e no momento considerado por eles como o mais apropriado (quando não tinham aulas, ou quando saíam mais cedo ou até mesmo nos intervalos).

Por outro lado, a utilização da folha de cálculo electrónica (SC4) possibilitou o estudo comparativo do modelo matemático de um fenómeno físico e de um tema matemático (movimento de projécteis e função quadrática).

Esta fase do trabalho foi talvez uma das mais ricas, na medida em que os alunos viveram uma experiência matemática, num ambiente estimulante (a utilização de um programa profissional como a folha de cálculo constitui por si só um estímulo...).

Tiveram oportunidade de percepcionar a Matemática como uma ciência que se constrói ao alterarem determinados parâmetros e observarem de imediato os resultados dessas alterações.

Os alunos tomaram contacto com problemas reais. Investigaram e descobriram. Discutiram ideias. Formularam e testaram hipóteses. Elaboraram textos e relatórios sobre o assunto. Colaboraram na construção de modelos matemáticos.

Em suma, o processo de aprendizagem desenvolveu-se numa atmosfera estimulante e socialmente saudável despertando nos alunos o sentido de responsabilidade e auto-confiança.

Segundo a opinião dos próprios alunos a Escola deveria proporcionar actividades deste tipo frequentemente.

Quisemos saber...

Da Matemática nos novos programas

A Dra. Brigite Tudichum é a responsável pela coordenação dos novos programas de Matemática, do 5.º ao 12.º de escolaridade, a convite do Grupo de Trabalho (Professor Fraústo da Silva, Dr. Marçal Grilo e Dr. Tavares Emídio). A transcrição seguinte resultou de uma conversa acerca dos programas de Matemática futuros e presentes. A compilação é de Fernando Nunes.

Da equipa fazem parte sete elementos, além de mim própria: dois estão responsáveis pela elaboração dos programas do 2.º ciclo (actual preparatório), três do futuro 3.º ciclo (actual unificado) e dois do futuro ensino secundário (actual complementar). A equipa foi constituída em Março de 1988 mas só começámos a funcionar em Maio com trabalhos preliminares: acertar estratégias, encontrar linhas de trabalho e arranjar grupos de consulta.

FN — Elaborar programas é com certeza uma tarefa que depara com várias dificuldades. Como partiu para esse processo e quais as principais dificuldades que tem encontrado?

BT — A minha anterior experiência na Direcção Geral do Ensino Secundário, onde fui durante quatro anos coordenadora dos programas, facilitou-me um bocado permitindo-me um conhecimento razoável do que se passava quanto à aplicação dos programas e de professores interessados e experientes espalhados pelo país. Já tinha feito duas avaliações sobre a aplicação dos programas durante dois anos e recebi, nessa altura, através do inquérito enviado a todas as escolas, a opinião de todos os professores de Matemática que se quiseram exprimir. Tinha portanto uma recolha acerca das dificuldades de aplicação do programa, das opiniões sobre ele e sugestões para novos programas. Na sequência desta avaliação foi iniciada uma reformulação dos programas do ensino unificado, que foi interrompida quando da criação do grupo para fazer a Reforma Educativa. Achámos que não valia a pena reformular programas que iriam ser estruturados de raíz.

Em relação ao que tenho encontrado posso afirmar que tenho tido liberdade de trabalho. A principal dificuldade que temos sentido é devida a uma indefinição dos planos curriculares e da avaliação. Apesar de até agora não ter sido obstáculo, já que havia muita coisa a resolver dentro da própria disciplina. A partir deste momento vai ser com certeza uma dificuldade séria a não aprovação dos planos curriculares. Enquanto a Matemática no futuro ensino básico, nesta perspectiva, se apresenta pacífica, no ensino secundário depende da proposta de planos curriculares que irá ser aprovada.

FN — Como está constituída a equipa responsável pela elaboração dos programas e qual a metodologia de trabalho utilizada?

BT — Dado que o tempo era curto e não havendo estudos conhecidos feitos a nível de elaboração de programas em Portugal, tive que me socorrer da experiência de pessoas que a tinham, que já tinham trabalhado em programas, com grande experiência de ensino e de formação de professores.

FN — Falou de consultas a grupos de professores. Como se processam?

BT — Desencadeámos o trabalho para a elaboração dos programas com quatro consultas alargadas, feitas a professores do Sul, de Lisboa, do Porto e de Coimbra. A primeira efectuou-se em Évora no mês de Maio aproveitando uma acção de formação. As três últimas decorreram durante o mês de Julho e tiveram um segundo momento em Setembro.

Estive presente no Seminário de Vila Nova de Milfontes, organizado pela APM, que foi um espaço importante de reflexão feita com professores empenhados no ensino da Matemática. Foram levantados e discutidos problemas pertinentes num currículo que se pretende renovado.

Tem havido encontros com professores de Matemática do ensino superior, alguns dos quais ligados à formação de professores.

FN — Nota-se, nos actuais programas, uma falta de articulação entre os diversos graus de ensino assim como um alheamento relativamente às outras disciplinas. Tem sido feita uma articulação entre os diversos ciclos de ensino ou mesmo com outras disciplinas?

BT — Em relação à articulação vertical, pela qual sou directamente responsável, há uma forte interacção entre os ciclos. A definição dos objectivos para os ensinos básico e secundário foi feita por toda a equipa, sob proposta dos subgrupos que trabalham os diferentes ciclos. Esta articulação será continuada a nível dos conteúdos, metodologias e avaliação.

Estamos agora numa fase em que os elementos da equipa se dividiram para escrever a sequência de ensino-aprendizagem, mas as propostas serão discutidas por todos.

Em relação ao 1.º ciclo é diferente porque eu não tenho que coordenar a Matemática nesse nível. Há uma equipa para isso. Tem havido encontros onde temos tentado fazer ajustamentos.

A articulação horizontal também está a ser tentada. Há três coordenadores de ciclo (um deles acumula o 3.º ciclo do ensino básico com o ensino secundário) que têm por missão proceder a essa articulação. Já houve reuniões com os coordenadores das disciplinas, onde se procurou encontrar uma organização comum para os vários programas e uma formulação semelhante dos objectivos gerais. Pela primeira vez, os objectivos por disciplina deverão contemplar o nível das atitudes, o nível das aptidões e o nível dos conhecimentos. Umas disciplinas explicitam estes três níveis separados enquanto outras os integrarão. Na Matemática separámos os níveis para facilitar a articulação vertical e para evidenciar a vertente formativa.

Dado que a Língua Materna e a Matemática têm um papel preponderante na estruturação do indivíduo, uma no campo da palavra outra no do pensamento, têm procurado os coordenadores destas disciplinas proceder a uma articulação mais estreita.

FN — Como caracteriza as diferenças fundamentais entre os programas em vigor e os que irão ser propostos?

BT — É nosso objectivo que os futuros programas valorizem a educação matemática, no que diz respeito a processos, métodos e hábitos de trabalho que é o que permanece num mundo em mudança.

Outra diferença fundamental é que os programas do ensino básico serão apresentados por ciclo, revelando coerência neste nível de ensino. As finalidades do ensino básico são para todo o ensino básico, do 1º ao 9º ano de escolaridade.

FN — Entre um programa que apresenta grandes temas, concedendo maior liberdade de escolha das actividades ou mesmo dos conteúdos por parte do professor e um outro com conteúdos específicos, apontando para actividades obrigatórias, existem várias gradações. Onde situaria, nesta perspectiva, a concepção que informou os futuros programas?

BT — Em relação aos dois extremos que definiu, procura-se o meio termo. Só grandes temas orientadores parece-me utópico. Era necessário haver um acompanhamento de professores, belíssimas escolas e alunos sem problemas. Os programas têm que ser adequados à nossa realidade. Neste sentido os programas integrarão conteúdos e objectivos específicos obrigatórios e sugestões de metodologias e de estratégias. A parte obrigatória não constitui um programa mínimo.

FN — Haverá também a inclusão de instrumentos de avaliação?

BT — Se a tónica é mudar os processos tem que se mudar a avaliação, já que esta pode ter efeitos perversos sobre a pedagogia e é capaz de subverter uma nova proposta pedagógica. Esta é a razão da existência de sugestões quanto à avaliação.

FN — Há objectivos mínimos indicados no programa?

BT — Esse é um problema que tem a ver com a avaliação, questão que como referi não está ainda resolvida. Penso no entanto que não terão objectivos mínimos mas têm que definir conhecimentos e aptidões básicas.

Em relação à Matemática, penso que há metas a definir rigorosamente, embora tentemos uma abordagem diferente do que tem sido feito até agora, porque é uma disciplina sequencial. É necessário haver metas a atingir no fim de cada ciclo, que são os pré-requisitos para o ciclo seguinte.

FN — Actualmente, quando se fala de Educação Matemática, há um tema que desperta grande interesse que é a resolução de problemas (problem solving). Acha que os programas irão reflectir esse interesse?

BT — Penso que o interesse tem obviamente reflexo. Seleccionámos três capacidades a desenvolver, que atravessam o currículo de Matemática do 1º ao 12º ano, que são as capacidades de resolver problemas, de raciocionar e de comunicar. Portanto para nós é extremamente importante desenvolver a capacidade de resolver problemas. De qualquer maneira o programa não é centrado na resolução de problemas, até porque seriam necessários estudos e experiências que não foram feitos, mas é preocupação fundamental do programa a resolução de problemas. A Matemática deve aparecer e ser explorada a partir de problemas.

FN — Os defensores da introdução da resolução de problemas nos currículos acham-na mais uma atitude que os deve atravessar que um conteúdo específico a tocar durante algumas aulas. Como pensa conseguir, de facto, essa introdução?

BT — A resolução de problemas é um processo decorrente de uma teoria de aprendizagem e também uma capacidade. Como processo de aprendizagem vai ter implicações, pois tem como pressuposto que o aluno é agente de aprendizagem e o professor será orientador e facilitador. A aprendizagem escolar deverá ser um processo de resolução de problemas, a partir de princípios e técnicas que põem em acção esse processo.

FN — Qual o papel das calculadoras e dos computadores ou, generalizando, das novas tecnologias de informação?

BT — Quanto ao papel das calculadoras, parece-nos que é pacífico, nesta altura. Não faz sentido que não sejam generalizadas nas escolas. As calculadoras hão-de aparecer já no final do 1º ciclo, para serem utilizadas no desenvolvimento do cálculo mental, nos cálculos morosos e na comprovação de resultados. Para nós, nos 2º e 3º ciclos, elas fazem já parte do currículo propriamente dito, aliás há itens e objectivos que apontam para o uso de calculadoras. Elas já foram determinantes na selecção de objectivos e de conteúdos.

Quanto aos computadores a situação é diferente. Deverão ser deixadas sugestões de utilização e «espaços» no programa para que essa utilização seja crescente. Enquanto todas as escolas não estiverem equipadas não se poderão ter programas de ensino dependentes desse meio auxiliar. No entanto terão de ter flexibilidade que permita a sua utilização e mais, que a incentive como já disse.

FN — Há temas que, em comparação com outros, têm sido pouco explorados ou mesmo não incluídos nos programas. Estou-me a lembrar, respectivamente, da Geometria e da Estatística. Haverá um maior reconhecimento da sua importância?

BT — A Geometria tem sido a grande preocupação desta equipa. Por esse motivo tem sido um tema presente para reflexão nas reuniões que temos feito com professores de todos os graus de ensino, inclusive o universitário. Efectivamente, nos últimos anos, os alunos saiem do ensino secundário com uma débil preparação em Geometria.

A Geometria é um domínio de estudo que atravessa uma crise, tanto no nosso país como além fronteiras. Não há internacionalmente consensos quanto ao seu ensino. No entanto as teorias da aprendizagem ligadas a teorias do desenvolvimento curricular auxiliam-nos a esboçar alguns caminhos, a nível do ensino básico: um estudo intuitivo da Geometria precedendo um estudo racional da mesma, com uma fase de transição que vai dando lugar progressivamente à dedução. Tendo estes pressupostos o ensino da Geometria na escolaridade básica terá de estar eminentemente voltado para as aplicações práticas.

Por outro lado, nos últimos anos, a extensão e organização dos programas fazia relegar a Geometria sistematicamente para segundo plano, dado encontrar-se quase sempre na última parte dos programas que são extensos. Não era leccionada ou era tratada «a correr» com recurso à aula centrada no professor e não na actividade do aluno. Por este motivo a nossa proposta irá ser para a interligação entre temas de cálculo e da Geometria.

A Estatística não tem nos nossos programas uma tradição de ensino, até porque eles já têm bastantes anos. Aparece apenas no 11.º ano e no final do programa e como tal não é leccionada na generalidade das escolas. Considerando que, presentemente, a escolaridade básica coincide praticamente com a escolaridade obrigatória e o cidadão comum terá de saber interpretar informações veiculadas nomeadamente pelos meios de comunicação social, vão ser introduzidas noções elementares de Estatística no ensino básico que permitam interpretar as informações estatísticas que aparecem no dia a dia.

FN — Há com certeza uma preocupação da equipa que dirige, quanto à fase inicial de funcionamento dos novos programas, bem como quanto ao seu futuro. Está prevista uma fase experimental? Generalizada ou limitada a turmas/escolas?

BT — Está prevista uma fase experimental limitada a dois anos de escolaridade, o 1.º e o 5.º. Se essa experiência depois de avaliada vai ser alargada a um conjunto de escolas maior ou se é imediatamente generalizada não é do meu conhecimento.

FN — Como irá ser integrada qualquer reformulação proveniente da fase experimental?

BT — Se a fase experimental não conduzir a reformulações do programa de pouco servirá. Como serão integradas as alterações é uma questão a definir.

FN — Quando pensa que os programas estarão generalizados a todo o país?

BT — Não sei. Se os programas dos 1.º e 5.º ano estiverem em experiência apenas um ano, serão generalizados em 90/91. Se a experiência for em duas fases, estarão generalizados em 91/92.

FN — Deduzo, pelas últimas respostas, que provavelmente não sabe se haverá ou não fases periódicas de avaliação/reformulação, depois de ultrapassada a fase inicial. Pode dar-nos a sua opinião acerca da existência destas avaliações?

BT — Acho-as indispensáveis. Permitem fazer ajustamentos de forma a evitar situações de ruptura como as que existem actualmente. Está prevista uma periocidade para a revisão e aprovação dos manuais, o que abre a possibilidade de fazer revisões periódicas dos programas.

FN — Já referiu a contribuição de professores de Matemática ao longo de todo o processo. Acho que os programas novos só estarão realmente implantados quando os professores os fizerem seus. É necessária a sua adesão. Qual a contribuição que os professores ainda poderão ter?

BT — Na realidade tentámos criar uma estrutura o mais participada possível. Há limitações de tempo com consequentes dificuldades nas consultas e tratamento da informação.

Além do grupo de oito pessoas responsável pela elaboração dos programas há um grupo consultor restrito, formado por professores experientes dos vários níveis de ensino e um grupo de consulta mais alargado, formado pelos professores de Lisboa, Porto e Coimbra, que ouvimos em primeiro lugar. Foi a partir da auscultação a este grupo, que definimos as grandes linhas para a renovação dos programas. Estes professores serão consultados mais vezes e esperamos que alguns deles possam experimentar os programas, além de serem chamados a dar pareceres e sugestões sobre os nossos trabalhos em diversas fases. Este grupo foi alargado a outros professores de modo que em todos os distritos haja professores que possam dar parecer sobre os trabalhos.

Igualmente serão consultados os Departamentos de Educação e Científicos das Faculdades, as Escolas Superiores de Educação, Associação de Professores de Matemática e Sociedade Portuguesa de Matemática.

Neste momento estão prontos os objectivos dos 2.º e 3.º ciclos e os conteúdos e competências do 5.º ano.

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado

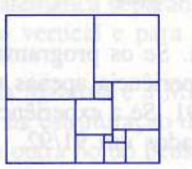
JANEIRO

2

O rectângulo da figura está dividido em onze quadrados de vários tamanhos. O quadrado mais pequeno tem 9 cm de lado.

Quais são as dimensões do rectângulo?

3

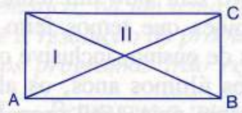


4

Quanto é metade de 2^{40}?

5

[ABCD] é um rectângulo. Qual é a razão entre as áreas das regiões I e II?



6

7

Para que valores de n o número

$$2^{11} + 2^{8} + 2^{n}$$

é um quadrado perfeito?

9

Na sucessão 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47,... qualquer termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos anteriores.

Prove que nenhum dos termos da sucessão é divisível por 5.

10

11

Calcule

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\ldots$$
$$\ldots+199^2$$

12

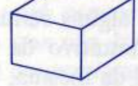
Existe algum termo pitagórico (a, b, c inteiros tais que $a^2+b^2=c^2$) em que os números sejam todos ímpares?

13

14

As áreas dos lados de uma caixa rectangular são 24, 32 e 48 cm^2.

Qual é o volume da caixa?



16

De quantas maneiras é possível trocar uma nota de 100$00?

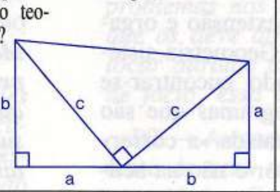
17

Descubra todos os quadrados menores que 1000 que são palindromos, isto é, que se lêem da mesma maneira, quer seja da esquerda para a direita, quer da direita para a esquerda.

18

Como poderá o quadrilátero da figura ser utilizado para demonstrar o teorema de Pitágoras?

19



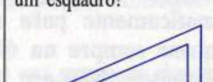
20

Descubra os quatro menores números inteiros diferentes a, b, c, d, tais que

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

21

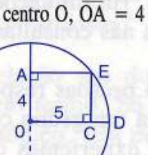
Como se poderá achar o centro de uma circunferência utilizando apenas um esquadro?



23

Na circunferência de centro O, $\overline{OA} = 4$ e $\overline{OC} = 5$. Determine $\overline{CD}$.

24



25

O número de subconjuntos de um conjunto A excede em 24 o número de subconjuntos de um conjunto B.

Quantos elementos tem o conjunto A?

26

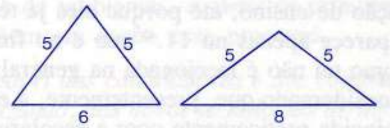
Qual é o único par de números inteiros que verifica a igualdade

$$a^b = b^a$$

27

Qual dos triângulos tem maior área?

28



30

O João é 25 cm mais alto que o Carlos, que não é o mais baixo do grupo. O Carlos é 16 cm mais baixo que o Manuel. A Alexandra é 56 cm mais alta que o Luís, que é o mais baixo de todos. Se o Luís tem 1,46 m de altura e menos 38 cm que o João, que altura tem o Manuel?

31

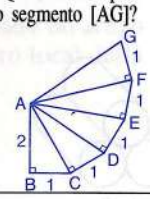
DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado

FEVEREIRO

1

Qual é o comprimento do segmento [AG]?

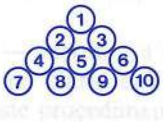


2

Dez bolas de pinguepongue são numeradas de 1 a 10.

Se duas bolas forem escolhidas ao acaso, qual é a soma mais provável de obter a partir dos números nelas escritos?

3



4

Qual é o 117.º número natural ímpar?

6

7

CARNAVAL

8

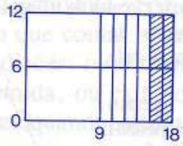
9

Quantas almôndegas de raio 2 se podem cozinhar a partir de uma almôndega de raio 8?

10

Que fracção do rectângulo maior está sombreada?

11



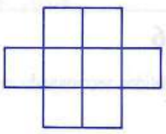
13

Decubrar o menor inteiro positivo cujo cubo termina em 888.

14

Descubra como se deve preencher os oito quadrados com os oitos primeiros naturais de tal forma que nunca dois números consecutivos fiquem em quadrados adjacentes.

15



16

$$\begin{array}{rrr} \boxed{?} & 6 & 3 \\ 7 & \boxed{?} & 2 \\ + \; 5 & 8 & \boxed{?} \\ \hline \boxed{?} \; 0 & 4 & 2 \end{array}$$

17

Uma caixa com 12 postais custa 250$00, uma embalagem com 3, 125$00 e cada postal 50$00.

Qual é o maior número de postais que se pode comprar com 1490$00?

18

As medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo são 10, 9 e 6.

Qual é a amplitude do menor ângulo?

20

21

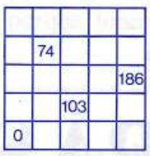
Uma piscina de forma rectangular tem 25 m de comprimento e 15 m de largura. O fundo da piscina é inclinado sendo 2 m a profundidade junto aos blocos de partida e 4 m no extremo oposto.

Quantos litros de água são necessários para a encher?

22

Será possível preencher os espaços vazios do quadrado com inteiros positivos de modo que os números em cada coluna e linha formem progressões aritméticas?

23

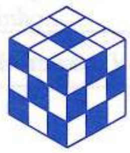


24

Cada face do cubo maior e a sua oposta estão sombreadas da mesma maneira.

Qual é o número total de cubos mais pequenos que têm pelo menos uma face sombreada?

25

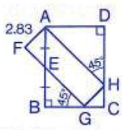


27

Qual é o menor número divisível pelos primeiros nove números naturais?

28

Determine as áreas dos rectângulos [ABCD] e [AFGH].



DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado

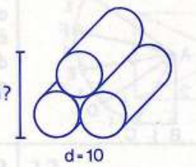
MARÇO

1

Três tubos com 10 cm de diâmetro estão empilhados como mostra a figura.

Qual é a altura da pilha?

2



3

Cinco gatos apanham cinco ratos em cinco minutos.

Quantos gatos são precisos para apanhar 100 ratos em 100 minutos?

4

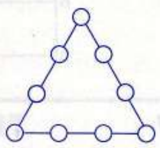
Use nove palitos para formar cinco triângulos equiláteros.

6

Preencha os nove círculos do triângulo com os nove primeiros naturais de modo que a soma de cada lado seja 20.

Preencha o mesmo triângulo com os mesmos números, mas de forma que a soma de cada lado seja 17.

7



8

Desenhe 3 rectas de modo que cada ponto fique numa região diferente do rectângulo.

9

Com oito fósforos podem construir-se vários polígonos.

Qual é a figura com área máxima?

10

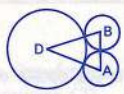
$1\times1!+2\times2!+3\times3!+4\times4!+...+n\times n!=?$

11

Descubra um quadrado em que os últimos dois algarismos são a sua raiz quadrada.

13

Os perímetros das circunferências são $C_A=8\pi$, $C_B=8\pi$ e $C_D=12\pi$. Qual é a área do $\triangle$ = [ABD]?



14

Escolha cinco termos consecutivos da sucessão de Fibonacci.

Qual é a relação que existe entre o quadrado do termo médio e o produto do primeiro pelo último termo?

15

Que polígonos podem ser obtidos seccionando um cubo?

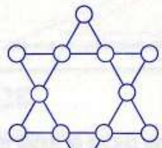
A figura mostra um corte que produziu um triângulo isósceles.

16

17

Preencha os círculos com os doze primeiros naturais de modo que a soma dos quatro números de cada lado dos triângulos seja 26.

18



20

21

22

23

24

25

PÁSCOA

27

28

29

30

31

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA

Programa para resolver o problema da travessia do deserto

Segue-se a listagem do programa anunciado no artigo «Travessia Discreta do Deserto» (ver noutro local desta revista):

```
to lista.6 :m
op lista1.6 1 :m
end

to lista1.6 :p :m
if equalp :p :m+1 [op [ ] ]
op fput 6 lista1.6 :p+1 :m
end

to soma :lista
if emptyp :lista [op 0]
op sum first :lista soma bf :lista
end

to dia.deserto :lista
if emptyp :lista [op [ ] ]
if equalp 0 first :lista [op fput 0 dia.deserto bf :lista]
op fput difference first :lista 1 dia.deserto bf :lista
end

to ajustar :lista
op ajustar1 soma :lista :lista
end

to ajustar1 :n :lista
if emptyp :lista [op [ ] ]
if equalp 0 :n [op fput 0 ajustar1 :n bf :lista]
if or :n<6 :n=6 [op fput :n ajustar1 0 bf :lista]
op fput 6 ajustar1 :n-6 bf :lista
end

to lista.final? :lista
if equalp count :lista 1 [op equalp 6 first :lista]
op and equalp 6 first :lista or equalp 1 first bf :lista
equalp 0 first bf :lista
end

to distancia :n.homens
pr distancia 1 0 lista.6 :n.homens
end

to distancia1 :n :lista
if lista.final? : lista [op :n+6]
distancia 1 :n+1 ajustar dia.deserto :lista
end

to distancias :n1 :n2
if equalp :n1 :n2 [stop]
distancia :n1 distancias :n1+1 :n2
end
```

Notas sobre os procedimentos:

lista.6 :m — este procedimento constrói uma lista de **:m** dígitos, todos iguais a 6; serve-se da recursão **lista1.6 :p :m**. A lista construída será depois transformada dia a dia, representando no início de cada dia a quantidade de comida que cada um dos **:m** homens transporta.

soma :lista — este procedimento auxiliar dá como resultado a soma dos elementos (supostos números) de uma lista.

dia.deserto :lista — subtrai 1 a cada elemento da lista (significa o consumo diário em cada dia de marcha).

ajustar :lista — este procedimento corresponde às trocas de comida que os carregadores fazem ao fim de cada dia, na estratégia utilizada na resolução do problema; através da recursão auxiliar **ajustar1 :n :lista**, transforma por exemplo a lista **[5 5 5]** na lista **[3 6 6]**.

lista.final? :lista — este procedimento verifica se, a partir daqui, o mensageiro tem que contar apenas consigo; isto dá-se nas seguintes condições: ou o mensageiro está sozinho e tem 6 dias de comida, ou está acompanhado por um carregador que tem quando muito um dia de comida.

distancia :n.homens — este é o procedimento principal. A partir da lista inicial (produzida por **lista.6**), vai-a transformando até chegar à lista final, e conta o número de dias necessário para isso; depois, basta somar 6, isto é, o número de dias que o mensageiro pode andar sozinho se partiu, como é o caso, com seis dias de comida.

Quanto a saber se o programa funciona bem, não há como experimentar. Até agora não descobri nenhum bug e os resultados coincidem com os de Cláudia e Ana e dão soluções inteiras, como é próprio de um problema da Matemática Discreta (forçando um pouco, podia-se ainda dizer que o LOGO não corta os carregadores às décimas e centésimas, como o BASIC). Quanto à razão porque funciona, é pensar um bocadinho...

Eduardo Veloso

Um procedimento de cada vez

Thing, esse desconhecido!

Thing é um procedimento que existe em todos os LOGOS... até prova em contrário... Mas quando alguém fala nele, é certo e sabido que se levantam algumas caras espantadas e se ouve uma exclamação do tipo: «nunca ouvi falar, isso existe?!»

Bom, não é preciso mais para compreender que é possível viver muito tempo a programar em LOGO sem nunca recorrer ao **thing**. Mas chega um dia em que é preciso, e possivelmente o que tem acontecido é que muitos projectos interessantes já foram abandonados por desconhecimento do **thing**.

Para compreender o funcionamento de **thing**, criemos uma variável com o procedimento **make**:

make "polígono "pentágono

Então, se teclarmos

pr thing "polígono

o computador responde

pentágono

Isto é, o procedimento **thing** é uma operação que aplicada ao nome de uma variável dá como resultado o seu valor. Como sabemos, obteríamos a mesma resposta do computador se tivéssemos teclado

pr :polígono

Pode assim dizer-se que o prefixo : é uma abreviatura de **thing**. Porque não usar então sempre o prefixo : em vez de **thing**? Para o compreendermos, criemos outra variável com o nome "pentágono

make "pentágono "penta1

Assim, a variável de nome "polígono tem como valor a palavra "pentágono, que é por sua vez o nome de uma variável de valor "penta1. Se quisermos saber directamente *qual é o valor da variável cujo nome é o valor da variável de nome "polígono* (leia outra vez mais devagar...), não poderemos teclar **pr ::polígono** pois obteremos uma mensagem de erro. Mas podemos teclar **pr thing :polígono** e o computador responde **penta1**.

Então afinal para que serve o procedimento **thing**? Para podermos usar variáveis que tenham como valores nomes de variáveis. E por sua vez para que pode ser isso útil? Por exemplo, para fazermos um programa que calcule a derivada de uma função (derivadas com o LOGO!!!?). Um exemplo pessoal e mais comezinho: sem o **thing** o LOGO GEOMETRIA teria sido muito difícil, senão impossível, de programar...

Eduardo Veloso

Materiais para a aula de Matemática

Todas as máquinas de calcular, mesmo as mais simples, têm uma tecla **M**, a tecla de memória.

A função da memória é conhecida de todos, ela permite guardar números para posterior utilização. Mas será esta a sua única potencialidade? Como os guarda ela?

Exploremos a memória da nossa máquina de calcular!

Teclas

MRC	→	Traz ao visor o número guardado na memória.
M-	→	Subtrai o número indicado no visor ao número guardado na memória
M+	→	Adiciona o número indicado no visor ao número guardado na memória.

Visor

M	→	Indica que um número está guardado na memória. Quando não assinalado, a memória encontra-se a zero.

Estas são funções fundamentais das teclas de memória que interessa conhecer em cada máquina porque a sua apresentação varia de modelo para modelo.

O pior é, quase sempre, descobrir como «apagar» a memória, isto é, como pô-la de novo a zero. Nalguns modelos há uma tecla própria para essa função mas noutros não há. Que fazer neste caso?

Não ... desligar a máquina não «apaga» a memória! Num modelo em que apareçam as 3 teclas de memória aqui indicadas (MRC, M-, M+) é um pequeno problema descobrir uma forma de «apagar» a memória, sem recorrer às instruções da máquina, é claro!

Agora, que já explorámos um pouco da memória da nossa máquina, utilizemo-la.

O cálculo de somatórios ou a estimação de valores de somatórios com um número infinito de termos pode ser um campo com várias possibilidades.

Estimemos $1+1/2+1/4+1/8+\ldots$

Utilizando a memória podemos ir acumulando os termos, à medida que são calculados, com a possibilidade de, em qualquer momento, conhecer o valor do somatório.

Será que não poderíamos ter simplesmente somado $1+1/2+1/4$ utilizando a tecla da adição?

$1+1/2+1/4+ \;\ldots\ldots\; +1/1024 = 1{,}9990233$

$1+1/2+1/4+ \;\ldots\ldots\; +1/16384 = 1{,}9999386$

Destes cálculos podemos inferir que

$1+1/2+ \ldots +1/2^{n-1}+ \ldots = 2.$

Este tipo de inferências, facilitadas pela máquina de calcular, permitem resolver exercícios e problemas interessantes.

Mas uma pergunta se apresenta. Será que $1+1/2+ \ldots + 1/2^{n-1}+ \ldots$ é mesmo igual a 2? Não ultrapassará 2?

Há níveis em que esta dúvida permanecerá, há níveis em que poderão ser dúvidas destas que conduzam à necessidade de demonstrações e generalizações. E quantas vezes não há maneiras de esclarecer algumas destas dúvidas sem utilizar todo o formalismo matemático dos anos terminais do ensino secundário.

Mas mesmo quando a dúvida tem de permanecer será razão para banir situações deste tipo? Não serão elas suficientemente ricas dos pontos de vista matemático e pedagógico para surgirem bastante cedo?

Cristina Loureiro

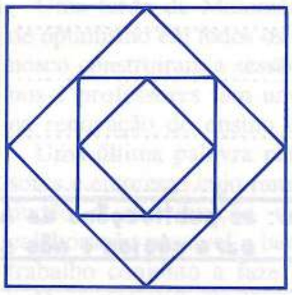
EXERCÍCIOS E PROBLEMAS SEM FALTA DE MEMÓRIA

A. Se cada uma destas somas continuar indefinidamente, qual poderá ser o valor de:

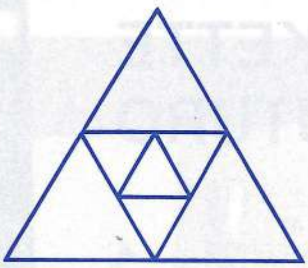
$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$
$1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + \ldots$
$1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + 1/16 + \ldots$
$1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + \ldots$
$1/5 + 1/25 + 1/125 + 1/625 + \ldots$

B. Em cada uma das sequências de figuras a lei de formação vai repetir-se indefinidamente, obtendo-se, em cada caso, figuras cada vez mais pequenas.
Calcula:

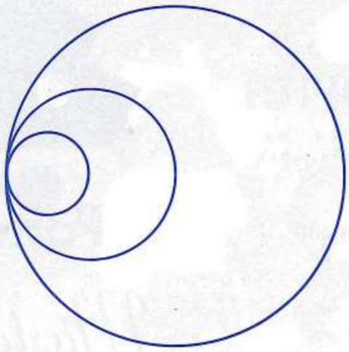
1. A soma das áreas de todos os quadrados.



2. A soma das áreas de todos os triângulos.



3. A soma das áreas de todos os círculos.



Títulos publicações ou software	nº de ex.	preço unitário (*)	custo publicações	custo software

SÓCIO DA APM ☐ Nº ☐		subtotais →		
NÃO SÓCIO ☐	portes do correio	pub. 15%	+	
(assinalar com uma cruz)		software fixo 120$00		+
Nome		totais parciais	(1)	(2)
Morada		valor total ((1) + (2)) →		
Código Postal		Para uso da APM	Pedido recebido em	
Data do pedido		ass.:	Respondido em	

(*) note bem: as publicações da APM têm custos unitários diferentes para sócios e não sócios da APM

SEMINÁRIO

As Calculadoras na Escola

Na tarde de 17 de Novembro de 1988, numa sala do Forum Picoas, a APM dinamizou uma sessão sobre *Calculadoras na Escola e no Ensino da Matemática*, a convite da empresa, patrocinadora do seminário, Beltrão Coelho, Lda., representante em Portugal das calculadoras Casio.

Este seminário contou com a presença de uma centena de alunos e dos respectivos professores de diferentes escolas secundárias da zona de Lisboa.

Evidenciar a calculadora como um poderoso instrumento de cálculo na exploração de diferentes situações matemáticas e problematizar o seu papel na Educação Matemática, foram os nossos objectivos neste seminário.

A primeira parte da sessão foi preenchida com três intervenções, precedidas de um pequeno filme.

—«História e relevância da Matemática e dos instrumentos de cálculo»;

— «Exploração de um problema», reflectindo a importância da Calculadora em diferentes fases da sua resolução;

— «Uma perspectiva do papel da Calculadora num ensino de Matemática mais formativo».

Na segunda parte, que se seguiu a um curto lanche, os alunos (e professores) presentes exploraram algumas actividades de um caderno fornecido, «Actividades com Calculadoras». As situações estavam organizadas em 5 grupos — regularidades, potências, descoberta de números, problemas de optimização e somatórios — havendo para cada grupo instruções úteis para utilização dos diferentes modelos de calculadoras distribuídas.

Nesta fase do trabalho, os alunos de diferentes anos de escolaridade (do 9.º ao 12.º) arregaçaram as mangas na resolução das actividades que eles próprios escolheram, numa situação diferente do contexto habitual da aula, trabalhando livremente com colegas e professores e utilizando um poderoso instrumento de cálculo como auxiliar.

Os resultados de problemas e actividades não foram o mais importante, mas o processo deixou claro que é possível os alunos construírem a sua própria experiência matemática envolvendo-se nela com entusiasmo.

Uma tarde de Matemática diferente! Uma sensação de optimismo em todos os Alunos e Professores que connosco construiram a sessão! Uma convicção de que alunos e professores têm um papel importante e decisivo na renovação do ensino da Matemática.

Uma última palavra para a cooperação entre professores e empresas cujo ramo de actividades se liga à produção e distribuição de material didáctico. Uma colaboração possível e benéfica e uma certeza de muito trabalho conjunto a fazer!

Dinamizaram este Seminário: Paulo Abrantes, Graciosa Veloso, Cristina Loureiro e Albano Silva.

Iniciativas Regionais em 1989

(promovidas ou apoiadas pela APM)

Funchal. I Encontro Regional de Professores de Matemática — Madeira 89. De 8 a 11 de Fevereiro, na Escola Superior de Educação do Funchal.
Évora. Conferência-debate sobre a Renovação do Currículo de Matemática. 1 de Março, 11 horas, na Escola Secundária Gabriel Pereira.
Torres Vedras. Sessão sobre Geometrias Não-Euclideanas. 1 de Março, 15 horas, na Escola Secundária Madeira Torres.
Lisboa. Conjunto de sessões:
— Clubes de Matemática. 24 de Janeiro, 15 horas, na Escola Secundária Camões;
— Matemática na Animação Escolar. 18 de Fevereiro, 10 horas, na Escola Preparatória Marquesa de Alorna;
— Calculadoras na Educação Matemática. 22 de Fevereiro, 15 horas, na Escola Secundária Marquês de Pombal;
— Puzzles, Jogos e Quebra-cabeças. 8 de Abril, 10 horas, na Escola Secundária da Amadora;
E ainda, com datas a confirmar, sessões sobre:
— O uso do Geoplano — Escola Secundária Seomara da Costa Primo (Venteira-Amadora), 27 de Abril, 15 horas;
— A folha de cálculo — Escola Secundária Veiga Beirão, Maio;
— Resolução de problemas — Escola Secundária da Falagueira (Amadora), Maio.
Faro. I Encontro Regional de Professores de Matemática — Algarmat 89. Dias 7 e 8 de Abril.
Porto. Com datas a confirmar:
— Debate sobre a Renovação do Currículo de Matemática — 4 de Maio, 15 horas, na Escola Secundária Rodrigues de Freitas.
— Feira de Ideias e Materiais. De 4 a 6 de Maio. Exposição relativa ao ensino e aprendizagem da Matemática, incluindo sessões especiais sobre: a linguagem LOGO; as calculadoras; os jogos. Em princípio, na Escola Superior de Educação.

PROFMAT 89

Conforme anunciámos no último número da Revista, o próximo Encontro Anual dos Professores de Matemática - **PROFMAT 89** - decorrerá em Viana do Castelo. A data fixada para o Encontro é de *10 a 14 de Outubro* - recepção no dia 10, terça-feira à noite e encerramento ao fim da manhã do dia 14, sábado. O Encontro será precedido, como habitualmente, por dois dias (segunda e terça) de cursos, versando temas variados e correspondentes a diferentes níveis de ensino, e nos quais se poderão inscrever os professores de Matemática interessados.

O PROFMAT 89 vai realizar-se numa época de grande importância para a Educação Matemática em Portugal. Na realidade, no ano lectivo 89/90 começarão a funcionar as primeiras turmas experimentais relativas aos novos programas, actualmente em elaboração. De acordo com as suas responsabilidades, a APM tem procurado intervir e desenvolver acções com o objectivo de que o novo currículo de Matemática corresponda às exigências de uma renovação profunda e real, sentidas pela generalidade dos professores. O Seminário de Vila Nova de Milfontes sobre a Renovação do Currículo de Matemática e os textos para discussão que daí resultaram — e de que foi necessário fazer uma segunda edição, já disponível — são uma referência importante dessa acção da APM. Os Encontros regionais em preparação e o PROFMAT 89 serão ocasiões privilegiadas para uma *renovação do currículo em acção*, para citar a fórmula feliz encontrada pelos colegas do núcleo de Lisboa para os seus Encontros.

É desde já que o PROFMAT 89 deve começar a ser preparado. Não apenas pela comissão organizadora, no que diz respeito ao programa, aos alojamentos e a outros problemas organizativos. Mas sobretudo por todos os professores que tencionam participar, e cujo trabalho, experiência, preocupações e reflexões deverão estar presentes no Encontro, sob a forma de comunicações orais ou em cartazes, sessões práticas, participação em grupos de trabalho e/ou na feira de ideias e materiais.

Não perca tempo: assim que receber o primeiro aviso do PROFMAT 89, preencha a ficha de inscrição e devolva-a imediatamente.

A APM na Guarda

No passado mês de Dezembro realizaram-se na cidade da Guarda duas reuniões de informação sobre a APM. As reuniões foram orientadas por um membro da direcção da APM e nelas participaram respectivamente professores de Matemática da Escola Secundária Afonso de Albuquerque e da Escola Secundária da Sé. Nesta última reunião esteve também presente uma sócia da APM, no momento presente destacada na Escola Superior de Educação da Guarda. Além de uma troca de impressões sobre os objectivos e actividades correntes e futuras da APM, foram também abordadas questões relativas ao desenvolvimento da APM nesta região e dos apoios que poderiam ser prestados pelos orgãos centrais da APM às actividades que serão organizadas localmente. Foram apresentados exemplares da «Educação e Matemática» e de outras publicações da APM.

Encontros sobre o Ensino da Matemática em 1989

ICTMA 4 — Roskilde, 3 a 7 de Julho

Fourth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA). Realiza-se na Universidade de Roskilde, Dinamarca, de 3 a 7 de Julho de 1989. Esta Conferência é essencialmente dedicada aos níveis secundário (incluindo a formação vocacional) e terciário (Universidades e Institutos Politécnicos, incluindo a formação de professores).

* Morada da Comissão Organizadora: Mogens Niss. IMFUFA, Roskilde University Centre, P.O. Box 260, DK 4000 — Roskilde, Denmark.

Jornadas da APMEP — Paris, 28 a 31 de Outubro

As Jornadas Anuais da *Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (APMEP) realizam-se em Paris, de 28 a 31 de Outubro de 1989. O tema central será «Matemática em Revolução».

* Morada: APMEP, 26 rue Duméril, 75013 Paris, France.

Um bom problema... (conclusão)

Nas aulas de Matemática, predominam claramente questões idênticas às dos Exemplos (0), (1), (2) e (3). Nos concursos de problemas, encontram-se com alguma frequência questões do tipo do Exemplo (4).

Problemas e situações como aqueles que são ilustrados pelos Exemplos (5), (6) e (7) são praticamente ignorados no Ensino da Matemática. No entanto, eles têm características únicas que não se encontram nos anteriores e a sua ausência torna a experiência matemática dos alunos consideravelmente limitada e pouco significativa.

A definição de «bom problema» é uma noção relativa não só porque depende, como vimos, dos conhecimentos prévios de que o aluno dispõe mas também por outras razões de natureza educativa. Por um lado, é preciso que o aluno tenha interesse em resolvê-lo — como diz Polya (1981), só há um problema quando há uma dificuldade que se *deseja* vencer ou contornar. Por outro lado, há que ter em conta a *variedade* das experiências de aprendizagem proporcionadas ao aluno.

A resolução de problemas consiste numa larga variedade de processos, actividades e experiências, e o Ensino da Matemática deveria reflectir essa diversidade. Por alguma razão, um documento recente do NCTM (1987) define problema como «uma *situação* na qual, para o indivíduo ou grupo a que se refere, uma ou mais estratégias têm ainda que ser desenvolvidas».

O alargamento de perspectivas sobre o que é um problema e a clarificação de ideias sobre o que é a resolução de problemas no contexto escolar são aspectos decisivos de uma imperiosa renovação do Ensino da Matemática. Proporcionar oportunidades aos alunos para resolverem, explorarem, investigarem e discutirem problemas, numa larga variedade de situações, é uma ideia-chave para que a aprendizagem da Matemática constitua uma experiência positiva significativa.

Notas:

(1) A primeira edição de *How To Solve It*, datada de 1945, é da Princeton University. Existe uma tradução em português, de 1977, intitulada *A arte de resolver problemas*, da Editora Interciência (Rio de Janeiro).

(2) Por exemplo, o Compêndio de Algebra para os antigos 6.º e 7.º anos do liceu, da autoria de Sebastião e Silva e de Silva Paulo, na sua edição de 1958, incluia o livro clássico de Polya na bibliografia recomendada, o que curiosamente deixou de suceder em edições posteriores.

(3) Vejam-se, por exemplo: a proposta de realização de umas Olimpíadas da Matemática em Portugal (Duarte, Silva e Queiró — Inflexão n.º 2, 1981); uma comunicação sobre resolução de problemas (Ponte e Abrantes — Actas do Encontro «O Ensino da Matemática nos Anos 80», 1982); uma comunicação sobre uma experiência concreta de resolução de problemas (Lopes, Matos e Mestre — idem).

Referências

Abrantes, P. (1988). *Viagem de ida e volta*. APM.

APM (1988). *A Renovação do Currículo de Matemática*. APM.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics vol 17 (2)*, p.125-141.

Guimarães, H. e Abrantes, P. (1988). Triângulos dourados. *Educação e Matemática 6*, p.11-14.

Kantowski, M. G. (1981). Problem solving. Em Fennema (Ed.), *Mathematics Education Research — implications for the 80's*, p.111-126.

Moreira, L. (1987). A resolução de problemas. *Educação e Matemática 1*, p.10-12.

NCTM (1980). *An Agenda for action*. NCTM.

NCTM (1987). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery. New York: Wiley.*

Veloso, E. (1987). Quantas maçãs tinha a Maria? Educação e Matemática 2, p.5-8.

Publicações e Programas Educacionais do Projecto Minerva, Núcleo da FCUL

1. *Materiais de Formação*

- *Actas do Seminário Sobre o Computador no Ensino: Relatório do 1.º Ano de Actividade do Projecto Minerva, Núcleo DEFCUL* — Organizado por João Ponte
☐ 2.ª Edição, Fevereiro 1988: 112 pp.; *preço 300$00*
- *Vamos Trabalhar com a Folha de Cálculo* — Eduarda Fonseca
☐ 2.ª Edição, Junho 1987: 112 pp.; *preço: 100$00*
- *Sistemas Operativos para Microcomputadores* — João Ponte
☐ 1.ª Edição, Fevereiro 1987: 18 pp.; *preço 100$00*
- *LOGO Português: Manual de Utilização e Sugestões de Actividades* — João Filipe Matos e João Ponte
☐ Versão 5, Fevereiro 1988: 110 pp.; *preço: 300$00*
- *Actas da Semana do LOGO, Portalegre 87* — Organizado por João Ponte
☐ 1.ª Edição, Abril 1987: 48 pp.; *preço: 200$00*
- *A Música e o LOGO* — João filipe Matos
☐ 1.ª Edição, Abril 1987: 24 pp.; *preço 100$00*
- *O Computador e o Trabalho de Projecto* — João Ponte
☐ 2.ª Edição, Fevereiro 1988: 32 pp.; *preço: 200$00*
- *O Computador como Instrumento de Mudança Educativa. Intervenção na Sessão de Encerramento do Dia do Computador na Escola Sec. Josefa de Óbidos* — João Ponte
☐ 1.ª Edição, Setembro 1988: 13 pp.; *preço: 100$00*
- *Consulta e Classificação como Actividades Educativas. Utilização de Bases de Dados* — Maria de Lurdes Serrazina
☐ 1.ª Edição, Março 1988: 23 pp.; *preço: 200$00*
- *Relatório do 2.º Ano de Actividade do Projecto Minerva, Núcleo DEFCUL* — Organizado por João Ponte
☐ 1.ª Edição, Abril 1988: 88 pp.; *preço: 300$00*
- *Processamento de Texto. Para desenvolver o gosto pela escrita* — João Ponte
☐ 4.ª Edição, Fevereiro 1988: 26 pp.; *preço: 100$00*
- *Actas do Encontro LOGO 88, Castelo Branco* — organizado por João Filipe Matos
☐ 1.ª Edição, Julho 1988: 113 pp.; *preço: 300$00*

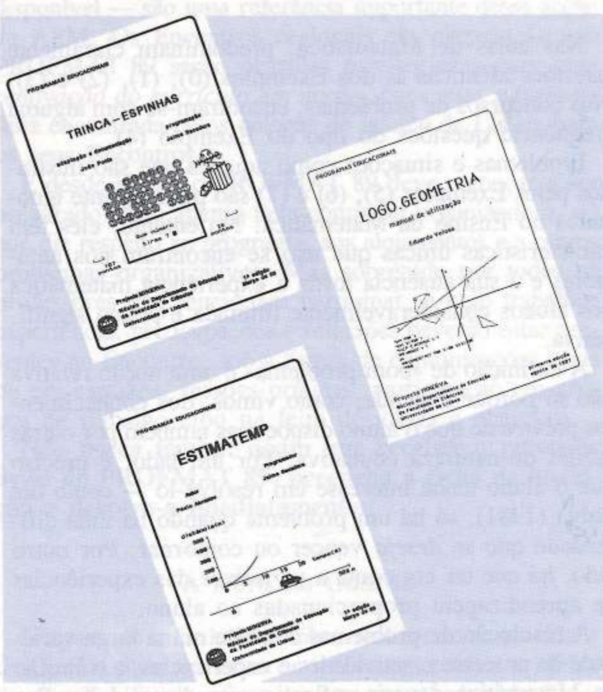
2. *Investigação*

- *A Natureza do Ambiente de Aprendizagem Criado com a Utilização da Linguagem LOGO no ensino Primário e as suas Implicações na construção do Conceito de Variável* — João Filipe Matos
☐ 1.ª Edição, Junho 1987: 219 pp.; *preço: 500$00*

3. *Programas Educacionais*

- *LOGO.GEOMETRIA* — Eduardo Veloso
☐ Versão 2,0, Setembro 1988; 1 diskette, manual de utilização e cartão com os comandos principais, para IBM PC compatíveis com placa compatível CGA; *preço: 1300$00* (ref. 51, diskette 5¼; ref. 52 diskette 3½)
- *LOGO.GEOMETRIA — Problemas e Actividades; preço: 200$00*
- *TRINCA-ESPINHAS* — João Ponte e Jaime Sacadura
☐ Março 1988; 1 diskette 5¼ e manual, para IBM PC compatíveis com placa compatívell CGA; *preço: 500$00* (ref. 53)
- *ESTIMATEMP* — Paulo Abrantes e Jaime Sacadura
☐ Março 1988; 1 diskette 5¼ e manual para IBM PC compatíveis com placa compatível CGA; *preço: 500$00* (ref. 54)
- *TRINCA-ESPINHAS e ESTIMATEMP*
☐ 1 diskette 3½ e dois manuais; *preço: 800$00* (ref. 55)

Todos estes materiais podem ser pedidos pelo correio, utilizando a ficha da página 32.



Centro de recursos — APM

Correspondendo a um interesse manifestado frequentemente pelos sócios, a direcção da APM decidiu começar a organizar um centro de recursos, que reúna materiais úteis aos professores de Matemática dos vários níveis de ensino.

Esses materiais podem ir desde uma simples ficha de trabalho para ser utilizada na aula, até filmes, jogos, materiais manipulativos ou mesmo livros e revistas.

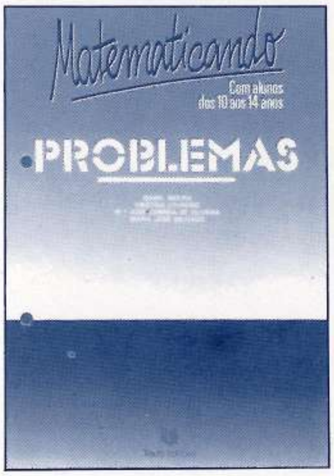
Pretende-se assim criar na sede da APM uma feira de ideias permanente, onde os sócios possam permutar, consultar e requisitar materiais.

Para que esta iniciativa se concretize, é importante que cada sócio envie tudo o que lhe possa parecer útil. Poderá enviar apenas uma descrição de material que conheça, para que possamos apreciar o seu interesse e adquiri-lo ou reproduzi-lo.

Texto Editora

Adoptar um bom manual é combater o insucesso escolar

PUBLICAÇÕES PARA A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA-88/89



NOVO

5.° e 6.° ANOS
MATEMATICANDO
PROBLEMAS

Isabel Moura
Cristina Loureiro
M.ª José Correia de Oliveira
Maria José Delgado

5.° ANO
MATEMÁTICA 5

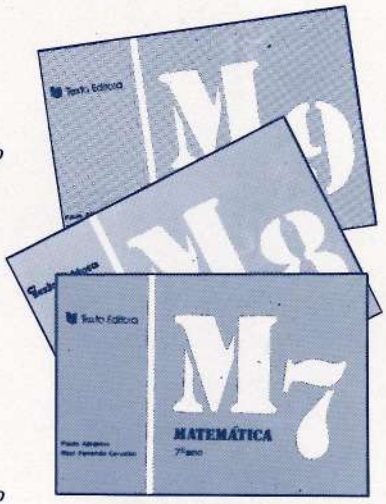
Leonor Filipe
Leonor Moreira

6.° ANO
MATEMÁTICA 6

Leonor Filipe
Leonor Moreira

7.°, 8.° e 9.° ANOS
M 7, M 8 e M 9

Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho



EXERCÍCIOS
M 7, M 8 e M 9

Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

10.°/11.° ANOS
M 10 e M 11
Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho
12.° ANO
M 12
Armando Machado
Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho
EXERCÍCIOS
M 10, M 11 e M 12
Inês dos Santos
Judite Barros
Paulo Abrantes
Raul Fernando de Carvalho

MATERIAL DIDÁCTICO PARA A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Colecções de transparências — 7.°, 8.° e 9.° anos
Software — Equações/Núm. int. relativos — 7.° ano
Utilidades I — 7.° ano
Geometria Analítica — 10.° ano
Gráficos de funções — 10.°/11.° anos

Esteja atento ao promotor Texto.
Em breve ele estará na sua escola com as novas publicações.

RIGOR E QUALIDADE... TEXTO A TEXTO

ÍNDICE