Transformações Afins, Sinusóides, Acústica

Daniela Gori Giorgi, Liceo Scientifico de Roma

O assunto que aqui se apresenta, largamente experimentado com alunos de 16-17 anos, faz parte dum trabalho conduzido com Emma Castelnuovo e Claudio Gori Giorgi com o fim de organizar um ensino integrado de Matemática e Física para alunos de 14-18 anos.

Trata-se, simplesmente, de um exemplo que, todavia, pode levar a reflectir sobre práticas de ensino muito difundidas. Acontece, frequentemente, que o ensino da acústica se apoie nas funções trigonométricas como uma ferramenta que permite descrever os fenómenos, mas é também muito comum que o professor de matemática introduza as mesmas funções de uma forma abstracta, com um pesado fardo de fórmulas... E os alunos cometem sempre os mesmos erros — confundem **2 sen x** com **sen 2x**, escrevem **2 sen (x/2) = sen x** — e ficam a ver a Física como qualquer coisa muito distante da sua vida.

Ora é justamente a integração da Matemática com a Física e, também, com a realidade que permite ultrapassar estas dificuldades. Vejamos, então, como proceder a partir de um interesse sempre muito vivo dos alunos: a música.

O *ponto de vista euleriano* é, na minha opinião, o mais expressivo para introduzir a acústica ligada à música: fixemos a nossa atenção sobre uma pequena porção de ar situada num ponto 0, próximo de um instrumento que produz música. Logo que o ponto 0 é atingido pelo som, a parcela de ar começa a percorrer a trajectória MN com um movimento periódico (fig. 1).

M ______ O ______ N

Fig. 1

Se o instrumento for uma flauta, a parcela de ar adquire um movimento periódico particular — o movimento harmónico descrito pela lei.

$$\mathbf{d = A\ sen\omega\ t}$$

onde:

d = distância variável da parcela de ar ao ponto **O**
A = elongação máxima **OM = ON**
$\omega = 2\pi f$ = pulsação, proporcional à frequência **f**
t = tempo variável

Chegámos, assim, à função sinusoidal, de que se pode traçar o gráfico num caso matematicamente simples: $A = 1$, $\omega = 1$ (Fig. 2).

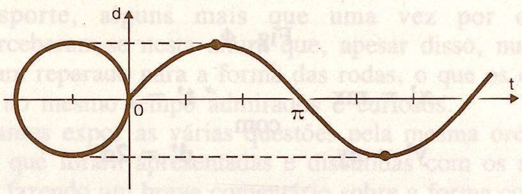


Fig. 2

Entre nós, há muitos jovens que tocam flauta e também é muito comum ter um osciloscópio no laboratório de Física. Assim sendo, é muito fácil e agradável organizar *lições musicais*: um aluno toca flauta e *vê-se o som* no osciloscópio.

No início, o aluno produz uma única nota, muito forte, forte, muito fraca e vêem-se, no osciloscópio, outras tantas sinusóides, com o mesmo período e diferentes amplitudes (fig. 3).

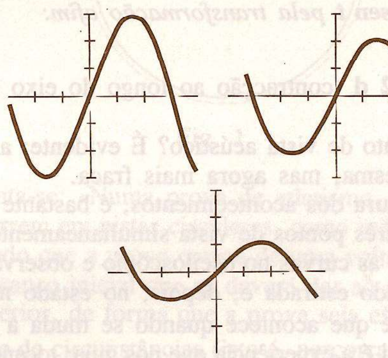


Fig. 3

Compreende-se, facilmente, esta variedade de curvas, porque a intensidade do som está ligada à amplitude A da oscilação descrita pela lei **d = A sen t.**

Ou, no caso mais simples, de partida:

d = sen t ($A = 1$ e $\omega = 1$)

e, por exemplo, se se duplicar a amplitude A, teremos:

d' = 2 sen t'

que descreve um som com a mesma frequência — trata-se da mesma nota — mas mais forte.

É extremamente interessante desenhar as duas curvas correspondentes e compará-las (Fig. 4). Desta forma, os alunos descobrem facilmente as relações entre os dois gráficos:

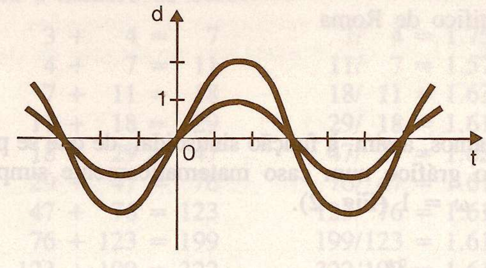


Fig. 4

$$x' = mx \qquad t' = t$$
com
$$y' = ny \qquad d' = 2d$$

Pode-se passar de uma curva à outra por uma transformação afim particular: dilatação ao longo do eixo **d**.

Os alunos lembraram-se, imediatamente, da *tela elástica* com que tinham trabalhado nos anos precedentes para estudar as transformações afins. Um deles exclamou: *Se desenharmos* **d = sen t** *sobre uma tela elástica e se estirarmos esta segundo o eixo* **d** *até as ordenadas duplicarem, vemos a curva* **d' = 2 sen t'**.

Mas — acrescentou um outro — podemos fazer o contrário: desenhar a curva **d = sen t** *sobre a tela já estirada e, depois, deixá-la voltar ao estado inicial; ver-se-á, então, a curva* **d'' = 1/2 sen t''** *ligada à curva* **d = sen t** *pela transformação afim:*

t'' = t
d'' = 1/2 d (contracção ao longo do eixo **d**)

E, do ponto de vista acústico? É evidente: a nota é, ainda, a mesma, mas agora mais fraca.

A esta altura dos acontecimentos, é bastante expressivo ter os três pontos de vista simultaneamente: ouvir os sons, ver as curvas no osciloscópio e observar a tela elática quando estirada e, depois, no estado normal.

E o que é que acontece quando se muda a nota?

Ainda aqui é a experiência que nos guia: tocando notas diferentes, mas mantendo mais ou menos a mesma intensidade do som, vêem-se no osciloscópio outras tantas curvas que têm a mesma amplitude mas com períodos diferentes (fig. 5).

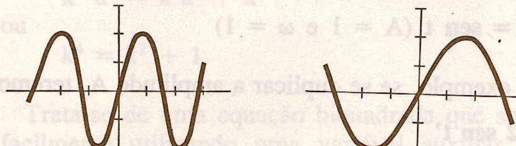


Fig. 5

Este caso explica-se também facilmente: emitir uma nota determinada corresponde a fixar a frequência **f** e, portanto, a pulsação $\omega = 2\pi f$. Se, por exemplo, passarmos de uma nota à mesma nota da oitava precedente (nota mais grave), divide-se por dois a frequência **f**.

Se se parte do caso

d = sen t ($A = 1$ e $\omega = 2\pi f = 1$) (*)

e se divide por dois a frequência **f**, tem-se:

d' = sen (t'/2)

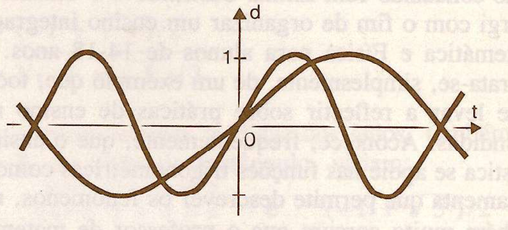


Fig. 6

ligada a (*) pelas relações:

d' = d
t'/2 = t ou **t' = 2t**

Portanto, passa-se da primeira à segunda curva ainda por uma transformação afim: uma dilatação ao longo do eixo dos tempos, bem visualizada com a tela elástica.

A partir deste ponto, os alunos procedem, sozinhos, à análise dos casos mais complexos, mas, também, mais comuns.

Passa-se de uma nota à mesma nota da oitava precedente, mas mais forte, dividindo por dois a frequência e duplicando a intensidade: é a passagem da lei (*) à lei **d' = 2 sent (t'/2)** (Fig. 7).

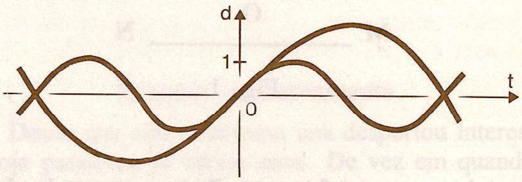


Fig. 7

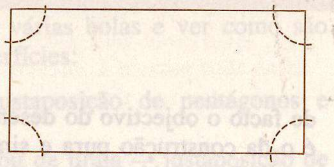
Trata-se, agora, da passagem da primeira à segunda curva por uma dilatação ao longo dos **dois eixos**, com os mesmos coeficientes: é uma semelhança.

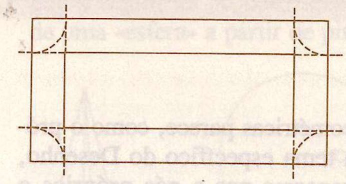
Da mesma forma, quando se passa de uma nota à mesma nota da oitava seguinte e emitida de modo mais fraco, trata-se de passar do som descrito por (*) ao descrito pela lei **d'' = 1/2 sen 2t''**.

E é, ainda, uma semelhança que permite passar de uma curva à outra.

(cont. pág. 24)

Desenhar outro rectângulo, dentro da esquadria e a igual distância dela.





A nova questão deste problema é que, para manter a distância entre os dois rectângulos, as suas diagonais não podem coincidir. Assim, não pode ser aproveitada a ideia que permitiu a construção da esquadria rectangular. Podem-se pôr questões interessantes acerca da semelhança de rectângulos a partir destas construções.

Transformações afins... *(continuação)*

Penso tratar-se de lições muito participadas pelos alunos: a trigonometria ganha vida, passa-se, sem muito esforço, para as fórmulas tradicionais e muitos dos erros habitualmente cometidos desaparecem.

Este pequeno exemplo mostra as vantagens de um ensino integrado da Matemática: facilita-se a aprendizagem dos conceitos, ganha-se tempo, dá-se a todos os alunos a oportunidade de ser «bom»... forma-se a personalidade global em lugar de compartimentar o seu cérebro.