# Triângulos dourados

**Henrique M. Guimarães e Paulo Abrantes**, Faculdade de Ciências de Lisboa

*Dois triângulos que tenham entre si cinco elementos iguais* — três lados e dois ângulos, ou três ângulos e dois lados — serão necessariamente iguais?*

Esta questão constitui um excelente exemplo de um problema. Não há dificuldade com os assuntos matemáticos envolvidos: lida-se com coisas simples e bem conhecidas, nomeadamente com a igualdade de triângulos. No entanto, como veremos, não se trata de uma questão trivial, e, muito menos, de um exercício de mera aplicação de qualquer propriedade, conceito ou teorema, acabados de estudar.

### Explorando o problema

Discutamos a questão. São bem conhecidos os casos de igualdade de triângulos que constituem condições suficientes para que dois triângulos sejam iguais e que mnemonicamente se representam: LLL, LAL e ALA. Em qualquer deles intervêm três elementos — três lados, dois lados e um ângulo, e dois ângulos e um lado. No entanto, nos dois últimos casos tem que verificar-se uma condicionante que, de alguma forma, relaciona os três elementos em jogo: no primeiro desses casos (LAL) os dois lados são os que «formam» o ângulo referido; no segundo (ALA) os dois ângulos são adjacentes ao lado que é dado.

No nosso problema há cinco elementos iguais (todos menos um, repare-se) e, à primeira vista, é-se talvez tentado a acreditar que os triângulos acabarão por ser necessariamente iguais. Mas vejamos, podemos considerar duas hipóteses quanto a esses cinco elementos iguais:

*a*) ou são três lados e dois ângulos — neste caso é evidente que os triângulos têm que ser iguais (caso de igualdade LLL);

*b*) ou são três ângulos e dois lados — neste caso... (ainda não se sabe).

Para respondermos à pergunta formulada no enunciado do problema, como tantas vezes sucede em Matemática, temos que apresentar uma prova de que os triângulos são necessariamente iguais ou, alternativamente, construir um contra-exemplo, isto é, determinar dois triângulos diferentes que tenham, entre si, cinco elementos iguais.

Optámos pela segunda via, explorando as possibilidades de encontrar dois triângulos diferentes obedecendo às condições do nosso problema. Como vimos, a única esperança está no caso em que os cinco elementos iguais entre os dois triângulos são os três ângulos e dois dos lados. Ora, com os três angulos respectivamente iguais, os dois triângulos serão semelhantes. Isto obriga-nos, para que os triângulos não sejam iguais, a desencontrar os lados que sabemos serem iguais, na correspondência respectiva. Isto é, designando as medidas dos lados por letras, terá que haver, entre elas uma correspondência do tipo:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & c & d \end{array} \quad \text{em que } a/b = b/c = c/d$$

(assim não corremos o perigo de cair num dos outros casos de igualdade LAL ou ALA).

Nestas circunstâncias, repare-se, os três lados, em cada triângulo, estão numa proporção em que um dos lados é meio proporcional dessa relação ($a/b = b/c$ e $b/c = c/d$). Quer dizer: um dos lados, em qualquer dos triângulos, tem que ser a média geométrica dos outros dois:

$$b^2 = ac$$

e também

$$c^2 = bd$$

Basta agora encontrarmos medidas para os lados dos triângulos que satisfaçam estas relações. Depressa descobriremos que há umas que não servem por não verificarem a desigualdade triangular (o maior lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois) por exemplo: $a = 12$, $b = 6$ e $c = 3$. Mas há outras que servem, por exemplo: $a = 9$, $b = 6$ e $c = 4$. Como $d = c^2/b$ teríamos ainda neste caso particular $d = 8/3$.

E pronto! Dois triângulos cujas medidas dos lados sejam 9, 6, 4 e 6, 4, 8/3 constituem o contra-exemplo procurado. Na verdade:

Têm, entre si, os três ângulos iguais pois são triângulos semelhantes uma vez que têm os lados correspondentes proporcionais;

Têm, entre si, dois lados iguais (os de medidas 6 e 4);

E, no entanto, os triângulos não são iguais.

### Concretizando

Mas será que é mesmo possível desenhar dois triângulos como os anteriores? Há qualquer coisa que nos deixa pouco satisfeitos com este final para o problema.

* Neste artigo, usa-se «iguais» no sentido de «congruentes» ou «geometricamente iguais»

Talvez ajude vermos com os nossos próprios olhos. Comecemos por desenhar um triângulo de lados 9, 6 e 4 e prolonguemos os dois lados maiores como se mostra na figura seguinte:

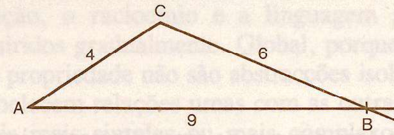


Fig. 1

Sobre o prolongamento de [CB] e [AB] marquemos dois segmentos de medidas 4 e 6, respectivamente. Deste modo obteremos o segundo triângulo:

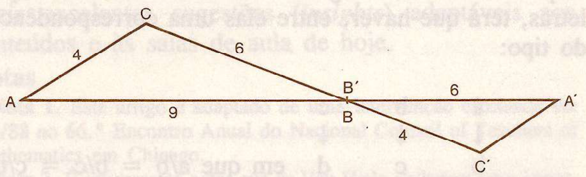


Fig. 2

Estes dois triângulos são semelhantes (e até homotéticos) visto que os ângulos de vértices em $B \equiv B'$ são verticalmente opostos e os lados que os formam são proporcionais $(9/6 = 6/4)$. Nestas circunstâncias os ângulos homólogos são iguais: $\measuredangle A = \measuredangle A'$; $\measuredangle B = \measuredangle B'$ e $\measuredangle C = \measuredangle C'$. Como, por construção, $\overline{AB} = \overline{B'C'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ os dois triângulos têm, entre si, cinco elementos iguais e não são iguais. O nosso contra--exemplo está, pois, agora desenhado.

Uma rotação do triângulo [A'B'C'] em torno de $B' \equiv B$ permitirá mesmo *ver* dois triângulos com cinco elementos iguais e que estão *um dentro do outro:*

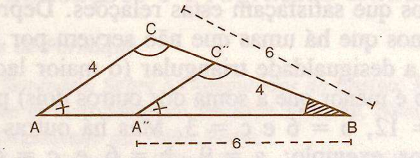


Fig. 3

## Generalizando

Encontrado um (contra-)exemplo, há evidentemente uma infinidade deles. Alguns resultam de sucessivas ampliações (ou reduções) a partir daquele que se encontrou. Outros correspondem a diferentes *famílias* de triângulos semelhantes. O passo seguinte poderá ser uma tentativa de generalização.

Sabemos, por conseguinte, que dois triângulos com cinco elementos iguais são, pelo *menos*, semelhantes.

Suponhamos que a sua razão de semelhança é **k**. Terá então que se verificar:

$$\begin{array}{lcll} \triangle_1 & & \triangle_2 & \\ a & \longrightarrow & ka & \\ ka & \longrightarrow & k^2\,a & \\ k^2\,a & \longrightarrow & k^3\,a & \quad \text{com } k > 0 \text{ e } k \neq 1 \end{array}$$

Ou seja, a um lado do triângulo 1, de medida **a**, corresponderá um lado **ka** no triângulo 2. Este valor, **ka** terá que ser a medida de um dos outros lados do triângulo 1 a que corresponderá, no triângulo 2, um lado de medida $\mathbf{k^2a}$. Por sua vez, $\mathbf{k^2a}$ terá que ser a medida do último lado do primeiro triângulo a que corresponderá um lado de medida $\mathbf{k^3a}$ no segundo triângulo. Tudo isto para garantir dois lados iguais entre os dois triângulos.

Como é forçoso verificar-se a desigualdade triangular, terá que ser para o triângulo 1, por exemplo:

(i) $k^2a < ka + a$ (considerando $k > 1$)

ou

(ii) $a < ka + k^2a$ (considerando $k < 1$)

A resolução destas condições considerando ainda que **k** é um número positivo, conduz-nos a:

(i) $1 < k < (1 + \sqrt{5})/2$

(ii) $(-1 + \sqrt{5})/2 < k < 1$

Podemos pois concluir que dois triângulos com cinco elementos iguais serão diferentes se as medidas dos lados de um deles forem **a, ka** e $\mathbf{k^2a}$ e as do outro **ka,** $\mathbf{k^2a}$ e $\mathbf{k^3a}$, com **k** pertencendo a:

$$](-1 + \sqrt{5})/2,\ 1[\ \cup\ ]\ 1,\ (1 + \sqrt{5})/2[$$

## Um número especial

Até aqui, desempenharam um papel importante dois números: $(1 + \sqrt{5})/2$ e $(-1 + \sqrt{5})/2$. Estes Estes números têm particularidades curiosas. Pegando numa calculadora verificaremos que

$(1 + \sqrt{5})/2 = 1.6180339...$ e,

$(-1 + \sqrt{5})/2 = 0.6180339...$

Efectivamente, a diferença entre esses dois números é um:

$$(1 + \sqrt{5})/2 - (-1 + \sqrt{5})/2 = 1$$

Além disso, o seu produto é também a unidade:

$$(1 + \sqrt{5})/2 \, . \, (-1 + \sqrt{5})/2 = 1$$

isto é, tanto o produto dos referidos números como a sua diferença são iguais a um. Por outras palavras: o inverso do número $(1 + \sqrt{5})/2$ difere dele em uma unidade! Esta particularidade, muito provavelmente, e o facto de em muitas e diversas situações da Matemática e da Natureza, este número — ou o seu inverso — aparecer com alguma frequência, às vezes inesperadamente, tornou-o famoso. É, inclusivamente, conhecido por **Número de ouro.**

Consideremos um segmento de recta [AC] (fig. 4.).


fig. 4

Se B for um ponto entre A e C de tal modo que:

$$\text{(i)}\quad \overline{AB}/\overline{BC} = \overline{BC}/\overline{AC}$$

(ou seja, de forma que a razão entre a *menor das partes* e a *maior* delas seja a mesma que a razão entre esta e o *todo*) diz-se, nestas circunstâncias, que os três pontos A, B e C constituem uma *secção de ouro*. Este «modo de dividir» um segmento, esta *secção* é também chamada de *divina proporção* (Warusfel, 1961).

Na verdade a *secção de ouro* está relacionada com o número de ouro que atrás referimos. Se fizermos, por simplicidade, a medida de $\overline{AB} = 1$ e designarmos a de $\overline{BC}$ por x a proporção (i) ficará:

$$1/x = x/(x+1) \qquad (\text{pois, } \overline{AC} = x + 1)$$

ou

$$x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$$

O valor de x que nos interessa é, pois, uma das raízes desta equação do segundo grau, que é:

$$x_1 = (1 + \sqrt{5})/2$$

ou seja, precisamente, o número de ouro (a outra raiz, que não consideramos por ser negativa, $x_2 = (1 - \sqrt{5})/2$, é, com sinal contrário, o inverso daquele número).

A *secção de ouro* obtida deste modo tem sido, desde os Gregos, «muitas vezes citada como a mais harmoniosa» (o.c., p. 99).

Igualmente considerado como o rectângulo mais *harmonioso* ou *equilibrado*, é todo o rectângulo em que as dimensões dos seus lados são tais que: o menor lado está para o maior, assim como este está para a soma dos dois (ou seja para o semiperímetro do rectângulo). Que relação haverá entre as dimensões deste rectângulo?

Façamos, por simplicidade, o menor lado de medida 1 e designemos por x a medida do outro lado (fig. 5).

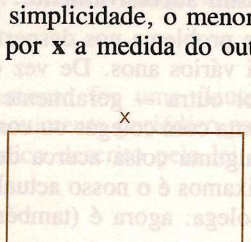


Fig. 5

Ter-se-á, assim:

$$1/x = x/(x+1)$$

ou

$$x^2 - x - 1 = 0$$

equação do segundo grau já nossa conhecida cuja solução útil (a positiva) é precisamente $(1 + \sqrt{5})/2$, ou seja, o número de ouro. Um rectângulo cujos lados estão nesta proporção é também conhecido por *rectângulo de ouro*.

Se *retirarmos* a este rectângulo um quadrado de lado 1 obteremos um novo rectângulo de dimensões 1 e $(1 + \sqrt{5})/2 - 1$ que é ainda um *rectângulo de ouro* (fig. 6). De facto:

$$(1 + \sqrt{5})/2 - 1 = (-1 + \sqrt{5})/2$$

Assim as dimensões deste rectângulo estão na razão

$$1/(-1 + \sqrt{5})/2$$

de onde se obtém, por racionalização, $(1 + \sqrt{5})/2$ o número de ouro.

Se, repetindo a operação, *retirarmos* a este segundo rectângulo um quadrado (agora de lado $(-1 + \sqrt{5})/2$) obteremos um terceiro rectângulo de ouro. E assim sucessivamente... (fig. 6)

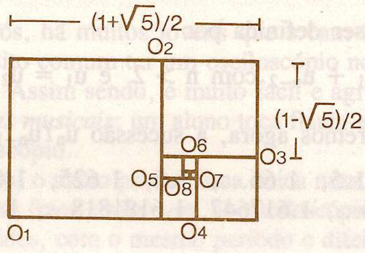


Fig. 6

Os pontos $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8$... estão situados numa curva: a espiral logarítmica (fig. 7). Esta curva aparece frequentemente, na natureza, em conchas de certos animais (fig. 8), nas sementes de algumas flores e em determinados cortes do mármore (Northrop, s.d.).

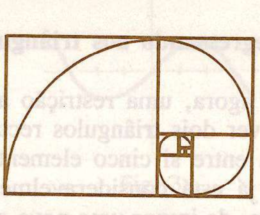

Fig. 7

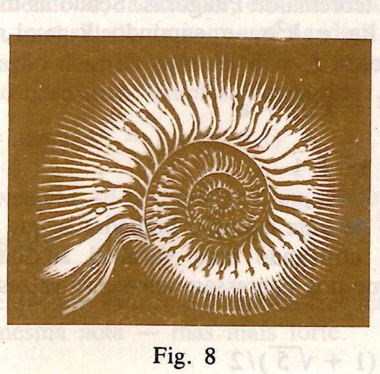

Fig. 8

Escolha, agora, dois números ao acaso, por exemplo, 3 e 4. À sua soma, 7, adicione o maior deles; obtém 11. A 11 adicione 7, e assim sucessivamente. O quociente entre os números sucessivos assim obtidos tende para o número de ouro:

| | |
|---|---|
| 3 + 4 = 7 | 7/ 4 = 1.75 |
| 4 + 7 = 11 | 11/ 7 = 1.5714285 |
| 7 + 11 = 18 | 18/ 11 = 1.6363636 |
| 11 + 18 = 29 | 29/ 18 = 1.6111111 |
| 18 + 29 = 47 | 47/ 29 = 1.6206896 |
| 29 + 47 = 76 | 76/ 47 = 1.6170212 |
| 47 + 76 = 123 | 123/ 76 = 1.61842 |
| 76 + 123 = 199 | 199/123 = 1.6178861 |
| 123 + 199 = 322 | 322/199 = 1.6180904 |
| 199 + 322 = 521 | 521/322 = 1.6180124 |
| 322 + 521 = 843 | 843/521 = 1.6180422 |

Algo de semelhante ocorre com a chamada sucessão dos números de Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...

que pode ser definida por

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ com } n > 2 \text{ e } u_1 = u_2 = 1$$

Consideremos agora, a sucessão $u_n/u_{n-1}$

1, 2, 1.5, 1.66..., 1.6, 1.625, 1.6153846..., 1.6190476..., 1.617647, 1.6181818..., 1.6179775..., 1.6180555...

Vemos que os termos de ordem ímpar *tendem* para o número de ouro por valores inferiores, enquanto que os de ordem par o fazem por valores sempre superiores. Esta sequência de números *aproxima-se* pois cada vez mais do número de ouro.

## Regressando aos triângulos

Imaginemos, agora, uma restrição ao problema inicial: poderá haver dois triângulos rectângulos diferentes que tenham entre si cinco elementos iguais?

O problema já está consideravelmente desbravado. Trata-se, apenas, de impor uma nova condição, a verificação do teorema de Pitágoras. Sendo as medidas dos lados **a, ka** e **k²a,** e supondo **k** > 1, terá que verificar-se:

$$k^4 a^2 = k^2a^2 + a^2$$

ou

$$k^4 = k^2 + 1$$

Trata-se de uma equação biquadrada que se resolve facilmente utilizando uma variável auxiliar $b = k^2$. Então, como nos interessam as raízes positivas, teremos:

$$b = (1 + \sqrt{5})/2$$

e, portanto,

$$k = \sqrt{(1 + \sqrt{5})/2}$$

valor com o qual o triângulo em questão será rectângulo. Fazendo, por simplicidade, a = 1 as medidas dos lados desse triângulo serão:

$$1, \quad \sqrt{(1 + \sqrt{5})/2} \quad \text{e} \quad (1 + \sqrt{5})/2$$

No caso de ser **k**< 1 a equação biquadrada seria:

$$1 = k^2 + k^4$$

$$b = (-1 + \sqrt{5})/2$$

$$k = \sqrt{(-1 + \sqrt{5})/2}$$

e as correspondentes medidas dos lados, também com **a = 1**, do triângulo rectângulo, viriam:

$$1, \quad \sqrt{(-1 + \sqrt{5})/2} \quad \text{e} \quad (-1 + \sqrt{5})/2$$

Todavia, estas medidas, reduzem-se às anteriores dividindo-as precisamente por $(-1 + \sqrt{5})/2$ que, como já se viu, é o inverso do número de ouro.

Conclui-se assim que, para triângulos rectângulos a solução é única, isto é, há uma única *família* de triângulos rectângulos que preenche as condições do nosso problema: a menos de um produto por uma constante as medidas dos lados terão pois que ser **1, k** e **k²** em que a hipotenusa, **k²**, é o número de ouro (fig. 9).

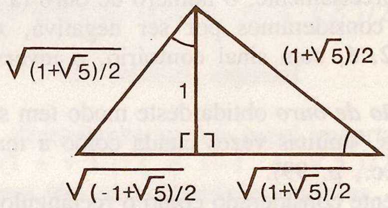


Fig. 9

## E assim sucessivamente...

Desde que este problema nos despertou interesse até hoje passaram já vários anos. De vez em quando, por uma razão ou por outra — geralmente a partir da discussão do problema com colegas ou com alunos — descobrimos mais alguma coisa acerca dele.

O que aqui deixamos é o nosso actual *ponto da situação*. Estimado colega: agora é (também) a sua vez de continuar...


**Referências:**

**Northorp** (s.d.). Curiosidades da Matemática. Lisboa: Pelicano

**Warusfel** (1961). *Les nombres et leurs mystères.* Bourges: Seuil.