Um exemplo de Didáctica da Geometria[1]

José Manuel Matos, Universidade da Geórgia

Este artigo pode parecer que vai um pouco contra a corrente. Afinal de contas uma das preocupações actuais dos educadores matemáticos do nosso país é o conteúdo das reformas curriculares que os poderes públicos se preparam para lançar. Aparentemente, um artigo abordando métodos de ensinar geometria parece não responder a este problema imediato. Mas recordemos que não só de uma reforma de conteúdos necessita o nosso ensino da matemática. Necessita também (e fundamentalmente) de uma alteração dos métodos. Neste artigo apresentamos a nossa perspectiva sobre a Teoria de Van Hiele focando a nossa atenção sobre a metodologia que Dina Van Hiele-Geldof usou na sala de aula.

Um pouco de história

Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele desenvolveram a sua teoria na Holanda quando, em meados dos anos 50 escreveram as suas teses de doutoramento sob a direcção de Hans Freudenthal. Pierre preocupava-se com a relação entre a aprendizagem da geometria e o fenómeno de *insight*, enquanto que Dina desenvolvia uma abordagem didáctica da geometria e a experimentava na sala de aula com alunos de 12-13 anos.

É interessante observar o contexto histórico da altura. Materiais que hoje são comuns tinham acabado de aparecer. Cuisenaire, por exemplo, tinha acabado de publicar um livro em que expunha o método para utilizar as suas barras (1952) e Gattegno, num artigo escrito em 1954, referia-se pela primeira vez ao geoplano. A Associação de Professores de Matemática inglesa estava ainda num processo de formação que envolvia muitos professores no desenvolvimento de processos de utilização de materiais nas aulas de matemática. A reunião de Royaumont, que desempenhou um papel decisivo no lançamento da Matemática Moderna em diversos países europeus, incluindo o nosso, realizar-se-ia apenas em 1959. Na Holanda, em particular, eram bastante populares discussões sobre o ensino da geometria e os Van Hiele estavam profundamente envolvidos (Hoffer, 1983).

Os Van Hiele produzem pois o seu trabalho num ambiente em que estavam a ser desenvolvidos novos materiais, novos métodos, novos objectivos, novos conteúdos para o ensino da Matemática, mas em que os traços essenciais da reforma curricular não estavam definidos. As suas investigações reflectem esta dualidade. Por um lado, foram efectuadas com um currículo baseado na geometria euclideana que está hoje ultrapassado na maior parte dos países do mundo. Por outro, propõem um modernismo na abordagem pedagógica. Os alunos trabalhavam com figuras de cartão, com geoplanos e com réguas e compassos, desenhavam, dobravam, discutiam, comparavam e observavam[2].

Foi preciso esperar mais de dez anos para que a teoria fosse aplicada por outros. Fizeram-no os soviéticos sob a direcção de Pyshkalo num currículo experimental desenvolvido em finais dos anos 60. No ocidente só em 1973 é que o modelo é parcialmente divulgado por Hans Freudenthal e mais tarde, em 1976, chega aos EUA com uma conferência proferida por Isaak Wirszup (Hoffer, 1983). No entanto, só em 1984 é que se tornaram acessíveis traduções para inglês de alguns dos seus trabalhos mais importantes (Fuys, Geddes, & Tischler, 1984) e, em 1986, Pierre Van Hiele publicou um livro *Structure and Insight* que clarificou alguns aspectos da teoria.

A teoria é hoje um poderoso auxiliar para quem se interessa pelo ensino e aprendizagem da geometria e tem servido de base a educadores de diversos países para investigações sobre as concepções geométricas de alunos e professores e para diversos projectos de desenvolvimento curricular, alguns deles em curso.

A teoria

Os Van Hiele propõem que a aprendizagem da geometria se desenvolve numa sequência de cinco níveis que podem ser resumidos no quadro seguinte:

Os níveis de Aprendizagem de Geometria
Nível 1 (Visualização) — As figuras são entendidas de acordo com a sua aparência.
Nível 2 (Análise) — As figuras são o conjunto das suas propriedades.
Nível 3 (Ordenação) — As propriedades são ordenadas logicamente.
Nível 4 (Dedução) — A Geometria é entendida como um sistema axiomático.
Nível 5 (Rigor) — Os sistemas axiomáticos são estudados.

De acordo com Pierre Van Hiele (1986) um triângulo isósceles, por exemplo, é entendido diferentemente nos diversos níveis. No Nível 1, o aluno adquire imagens mentais de triângulos isósceles e é capaz de reconhecê-los entre outros triângulos. No Nível 2, a forma visual perde importância e um triângulo isósceles é reconhecido pelas suas propriedades. O aluno sabe que, por exemplo, um triângulo isósceles tem dois lados e dois ângulos iguais, a altura bissecta o lado comum aos ângulos iguais, tem um eixo de simetria. Neste nível os desenhos mal feitos já não constituem um problema. No

Nível 3, o objecto de estudo é a natureza das relações entre os teoremas. O aluno compreende que o facto de um triângulo isósceles ter dois lados iguais implica que ele tem dois ângulos iguais. Mas o estabelecimento destas relações é local, pois só no Nível 4 o aluno é capaz de relacionar as propriedades de um triângulo isósceles com os axiomas da geometria euclideana. No Nível 5, o aluno discute se uma determinada definição de triângulo isósceles é apropriada numa determinada geometria. Os Van Hiele consideravam que apenas os três primeiros níveis têm relevância para a geometria ensinada nas escolas, e os últimos níveis aplicar-se-ão ao trabalho dos matemáticos.

No exemplo anterior observamos que alguns elementos são mentalmente construídos, isto é, são novos conceitos que os alunos formam como resultado do processo de ensino. Outros elementos são mentalmente manipulados, isto é, são os objectos mentais de cuja manipulação resultam os primeiros. Durante o Nível 1, o aluno constrói uma imagem da figura. No final do nível seguinte, após ter manipulado essa imagem ele vai construir as propriedades da figura. No Nível 3, ele vai reflectir sobre as propriedades acabando por ordená-las, usando a lógica. Esta última formará a base de um sistema axiomático, no Nível 4. No último nível, o estudante reflectirá sobre os sistemas axiomáticos e compreenderá a lógica formal.

Esta relação entre os objectos construídos e os manipulados pode ser sistematizada no seguinte quadro:

	Objectos Manipulados	Objectos Construídos
Nível 1		Figuras
Nível 2	Figuras	Propriedades
Nível 3	Propriedades	Ordenação de propriedades
Nível 4	Ordenação de propriedades	Sistema axiomático
Nível 5	Sistema axiomático	Lógica

Esta relação entre objectos manipulados e construídos produz diversas implicações. Por um lado, o que era intrínseco num nível passa a ser extrínseco no nível seguinte. Por outro, cada nível possui os seus próprios símbolos linguísticos, a sua própria linguagem, o que torna difícil a comunicação entre pessoas funcionando em níveis diferentes. De facto, se o professor está a discutir propriedades procurando mostrar a sua relação lógica (Nível 3), mas a linguagem dos alunos ainda permite apenas a manipulação de figuras (Nível 2), a comunicação é impossível. No entender de Van Hiele, este problema explica a queixa frequente nas aulas de geometria de que os alunos não compreendem de que o professor está a falar.

Apesar desta separação entre a linguagem de cada nível, a aprendizagem é possível desde que o professor escolha uma abordagem pedagógica adaptada ao nível dos alunos[3]. A teoria de Van Hiele contém alternativas pedagógicas que ainda hoje nos podem sugerir algumas ideias. Observemos a proposta didáctica de Dina Van Hiele-Geldof para promover a transição dos seus alunos do Nível 1 para o Nível 3.

Pavimentações com figuras geométricas

Dina Van Hiele-Geldof inicia o estudo da geometria com a observação de cubos. Os alunos, depois de contarem e observarem as suas faces, vértices e arestas, são postos perante o problema de construir um cubo. O mesmo tipo de trabalho é efectuado com outros poliedros regulares, por exemplo o octaedro e o tetraedro. É especialmente interessante observar a unidade didáctica «Pavimentações». Dina começa por pedir aos alunos que procurem uma forma de pavimentar um passeio com quadrados. Depois de os alunos terem produzido uma pavimentação, Dina conduz a discussão sobre o que vêem os alunos nessa pavimentação. É possível observar rectas, grupos de rectas a igual distância, grupos de rectas paralelas, outros grupos de rectas paralelas, ângulos rectos, quadrados, quadrados maiores (Figura 1).

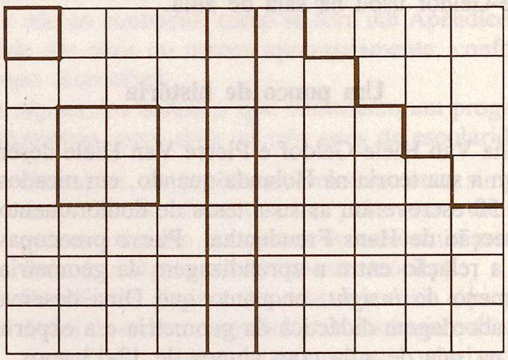

Figura 1. Uma pavimentação com quadrados.

Dina pretende que os alunos observem a pavimentação (o campo de percepção) segundo mais de uma perspectiva. Pretende depois que os alunos sejam capazes de reestruturar o seu campo de percepção de forma a «verem» outro tipo de organização, de estruturação[4]. Note-se que estamos a falar de percepção, já que este nível é essencialmente perceptivo (visual). O facto de um corte do cubo em diagonal produzir um rectângulo e não um quadrado, é obtido não através de um raciocínio dedutivo, mas efectuando uma observação e uma medição.

Esta preocupação com a construção inicial de uma estrutura geométrica e com a sua percepção global, depois com a sua progressiva diferenciação e, finalmente, com a sua reestruturação numa nova estrutura, é característica da psicologia Gestalt. Para os gestaltistas não existe um objecto isolado de um contexto ou de um *campo* segundo a terminologia de alguns autores. A nossa percepção é feita de totalidades, de estruturas mantidas por campos de forças. A aprendizagem é essencialmente uma diferenciação progressiva ou uma reestruturação deste campo, que conduz a novas e mais complexas estruturas (Wertheimer, 1945). Uma visão gestaltista permeia precisamente a abordagem pedagógica proposta pelos Van Hiele e, em particular, esta unidade didáctica[5].

Haverá outro processo de pavimentar o plano de forma que os quadrados estejam colocados noutra posição?

Claro, veja-se por exemplo a Figura 2. Para possibilitar que os alunos consciencializem as forças do campo, Dina discute o que aconteceu aos grupos de rectas paralelas. Discute-se depois qual dos dois tipos de pavimentação dos passeios é mais seguro para quem anda de bicicleta (lembrem-se que isto se passa na Holanda). O segundo tipo é mais seguro já que no primeiro há duas direcções em que há rectas paralelas e a estas podem corresponder desníveis perigosos para o ciclista.

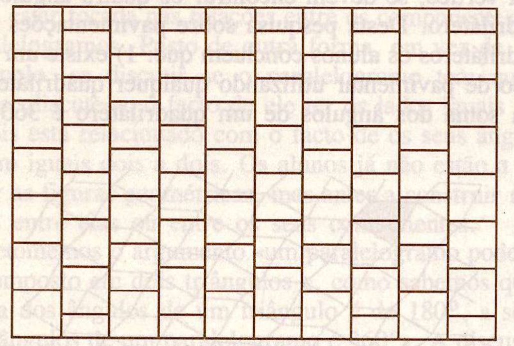

Figura 2. Outra pavimentação com quadrados.

Procuremos agora uma pavimentação com estrelas hexagonais. A Figura 3 sugere um processo de construir uma dessas estrelas. Divide-se a circunferência em seis partes iguais (utilizando a propriedade de que o lado do hexágono é igual ao raio da circunferência circunscrita, ou por tentativas), constroem-se os raios e, com compasso ou com régua e esquadro termina-se a figura.

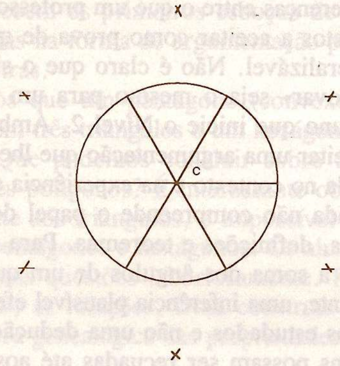

Figura 3. Construção de uma estrela hexagonal.

A mesma construção pode ser obtida utilizando papel ponteado isométrico ou então com um programa de Logo. A construção de uma nova estrela pode ser agora iniciada em cada um dos vértices da estrela inicial. O produto final está apresentado na Figura 4.

O que vêem os alunos nesta pavimentação? Porque não tenta o leitor fazer algumas conjecturas sobre o que vê antes de ler algumas das respostas possíveis? Há quem veja as estrelas que serviram para fazer a pavimentação, outros vêem losangos, hexágonos, e ainda outros hexágonos diferentes. Mas há também linhas em ziguezague e, mais interessante ainda, não há rectas paralelas.

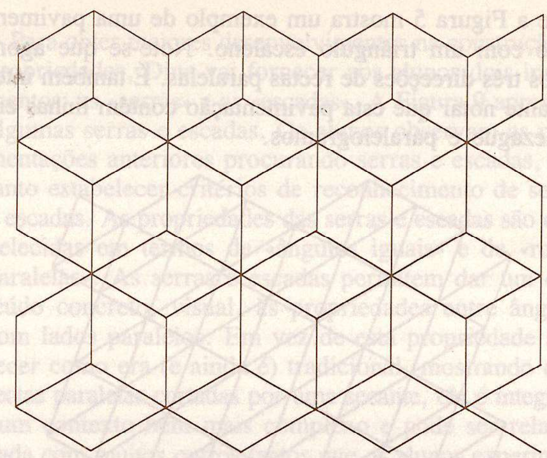

Figura 4. Uma pavimentaçao com estrelas hexagonais.

Tal como no caso dos quadrados, Dina está a procurar que os alunos explicitem o que vêem e que o discutam uns com os outros. Ela pretende que os alunos reestruturem o campo de percepção diversificadamente, vendo agora um conjunto de hexágonos, logo uma pavimentação com losangos, depois uma estrutura envolvendo linhas em ziguezague. Os alunos estão a relacionar umas estruturas com outras, visualizando umas dentro das outras e diferenciando pormenores distintos dos que inicialmente percepcionavam. Os gestaltistas diriam que ela procura que os alunos testem as forças que constituem o campo perceptivo e que o mantêm coerente, coeso. Sob um ponto de vista didáctico, ela está a construir uma base para uma intuição geométrica. É não só ver uma figura em vários contextos mas também observar o mesmo contexto de diferentes perspectivas.

Esta proposta, tal como a anterior que envolveu diversos poliedros, pressupõe que os alunos estão no Nível 1 e procura facilitar a passagem para o Nível 2. Os alunos discutem, manipulam figuras geométricas (ou sólidos, como vimos atrás) e o objecto das suas manipulações e interacções são as figuras como elas visualmente aparecem. Mas, ao colocar as figuras em diversos contextos, Dina está a preparar a construção das propriedades das figuras, tema que pertence já ao Nível 2. Para isso ela vai explorar pavimentações com diversas figuras, entre as quais pentágonos (consegue o leitor encontrar um pentágono que pavimente o plano?), hexágonos e octógonos. Vejamos este aspecto mais em pormenor no caso de uma pavimentação com triângulos.

As propriedades das figuras

Se acrescentarmos à pavimentação anterior (Figura 4) a diagonal menor dos losangos, obtemos uma pavimentação com triângulos equiláteros. Será possível obter uma pavimentação com qualquer triângulo? É sempre possível e a Figura 5 mostra um exemplo de uma pavimentação com um triângulo escaleno. Note-se que agora temos três direcções de rectas paralelas. É também interessante notar que esta pavimentação contém linhas em ziguezague e paralelogramos.

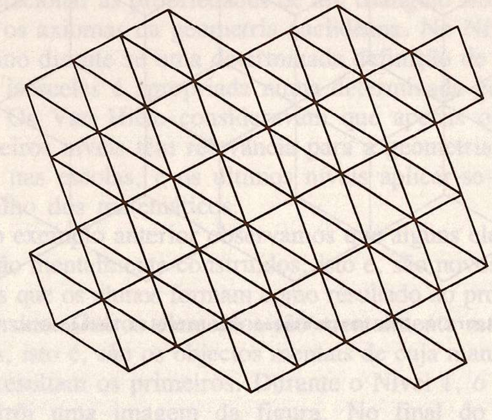

Figura 5. Uma pavimentação com triângulos escalenos.

Pintemos de cores diferentes os ângulos do triângulo e observemos os vértices. Em cada vértice os três ângulos do triângulo estão representados duas vezes. Mas se com um segmento de recta dividirmos estes ângulos em dois semi-planos, cada um contém os três ângulos do triângulo (Figura 6). Que podemos dizer sobre os ângulos de um triângulo?

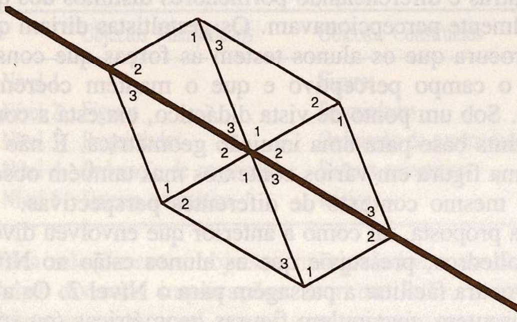

Figura 6. Os ângulos do triângulo estão representados duas vezes em cada vértice da pavimentação.

Façamos uma pausa. Nesta altura os alunos manipularam triângulos e Dina está a procurar que eles construam uma propriedade dos triângulos. A pavimentação além da sua parte visual tem agora uma outra estrutura relacionada com a soma dos ângulos daquele triângulo, que tem que ver com a forma como as componentes das figuras e as próprias figuras estão organizadas. Tratou-se de uma reestruturação do campo de percepção. Os alunos estão a iniciar o seu Nível 2 e o foco da linguagem está agora nas propriedades das figuras.

Com as próximas actividades, Dina vai procurar que os alunos investiguem a soma dos ângulos internos noutros quadriláteros. Os alunos já viram que é possível pavimentar com quadrados e não é difícil imaginar uma pavimentação com rectângulos. Vimos que, no exemplo anterior, podíamos imaginar paralelogramos e, no caso da pavimentação com estrelas hexagonais, alguém observou losangos. Será possível pavimentar com qualquer quadrilátero? Convidamos o leitor a experimentar pavimentar com um quadrilátero qualquer. É sempre possível e obteremos uma pavimentação semelhante à da Figura 7. Colorindo os ângulos tal como procedemos com os triângulos, concluiremos que a soma dos ângulos é 360°. Nos casos anteriores a soma também era de 360°. Mas será possível pavimentar no caso de um quadrilátero côncavo? O segredo reside em que, em cada vértice, se devem encontrar os quatro ângulos do quadrilátero. Desta pesquisa sobre pavimentações com quadriláteros os alunos concluem que: 1) existe um processo de pavimentar utilizando qualquer quadrilátero e 2) a soma dos ângulos de um quadrilátero é 360°.

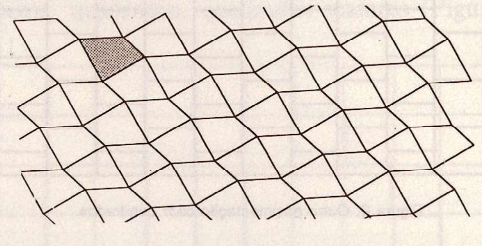

Figura 7. Pavimentaçao com quadrilâteros.

A pergunta inevitável que alguns leitores estarão já a formular é «Será *sempre* assim?» e, de facto, em muitas aulas de matemática, é essa a dúvida metódica que os professores colocam aos alunos. Se a preocupação com a generalização dos resultados está na raíz do pensamento matemático, é no entanto importante reflectirmos nas diferenças entre o que um professor e um aluno estão dispostos a aceitar como prova de que um resultado é generalizável. Não é claro que o significado da palavra «provar» seja o mesmo para um professor ou para um aluno que inicie o Nível 2. Ambos estão dispostos a aceitar uma argumentação que lhe pareça plausível baseada no contexto e na experiência anterior. Mas o aluno ainda não compreende o papel desempenhado por axiomas, definições e teoremas. Para ele, a proposição sobre a soma dos ângulos de um quadrilátero é, essencialmente, uma inferência plausível efectuada a partir dos casos estudados e não uma dedução matemática cujas origens possam ser recuadas até aos axiomas. O primeiro, pelo contrário, está a pensar em termos de uma demonstração de acordo com os níveis de rigor lógico aceites pelos matemáticos. Como vamos ver a seguir só no Nível 3 é que a primeira tentativa de organização das propriedades começa a ser efectuada.

As relações entre as propriedades das figuras

Já atrás, na pavimentação com triângulos, tínhamos encontrado paralelogramos. Vamos pavimentar com paralelogramos e investigar o que podemos «ver». Será que poderemos converter uma pavimentação de paralelogramos numa outra com triângulos? Podemos, se desenharmos uma das diagonais do paralelogramo. Mas se todos os paralelogramos podem ser decompostos em dois triângulos e se a soma dos ângulos de cada triângulo é de 180°, então a soma dos ângulos de um paralelogramo é de 360°. Atrás este resultado foi obtido colorindo os ângulos, mas agora ele pode ser obtido como uma consequência de duas proposições.

Na discussão desta pavimentação o objecto da percepção deixou de ser um paralelogramo específico e passou a ser um paralelogramo genérico e a linguagem deixou de estar focada nos elementos do paralelogramo, para estar focada nas relações entre os componentes dos paralelogramos. Posto de outra forma, em vez de, por exemplo, se discutir se o paralelogramo tem quatro lados, discute-se o facto de ele ter os lados iguais dois a dois está relacionado com o facto de os seus ângulos serem iguais dois a dois. Os alunos já não estão a discutir as figuras geométricas, mas antes a construir relações entre elas ou entre os seus componentes.

Retomemos o argumento «um paralelogramo pode ser decomposto em dois triângulos e, como sabemos que a soma dos ângulos de um triângulo é de 180°, a soma dos ângulos de um paralelogramo é 360°». A discussão prossegue agora tentando verificar se um argumento semelhante pode ser aplicado a outros quadriláteros. O argumento é aplicável no caso de quadrados e rectângulos, assim como no caso de qualquer quadrilátero convexo. O caso do quadrilátero côncavo é um pouco mais complicado, mas pode ser demonstrado que também se aplica. Repare o leitor que utilizámos agora pela primeira vez a palavra «demonstrado». Para um aluno no Nível 1 ou 2, a discussão sobre as relações lógicas das propriedades das figuras é ininteligível. Somente neste Nível 3 aparecem os primeiros esboços de demonstrações entendidas na forma de argumentação plausível que abordámos atrás.

Observemos que um pentágono (convexo) pode ser decomposto em três triângulos e um hexágono (convexo) em quatro. Que podemos concluir sobre a soma dos ângulos destes polígonos? É interessante observar que, contrariamente aos triângulos, é impossível pavimentar com alguns pentágonos e hexágonos. Os alunos de Dina discutiram estas questões laboriosamente. Para clarificar (explicitar) as relações, Dina construía o que chamava de árvore genealógica das propriedades (Figura 8).

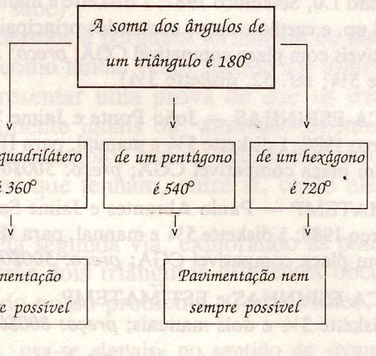

Figura 8. Uma árvore genealógica de Dina Van Hiele-Geldof.

Para obter maiores desenvolvimentos na construção de propriedades, Dina vai fornecer aos alunos dois instrumentos: as «serras» e as «escadas». A Figura 9 apresenta algumas serras e escadas. Os alunos observam as pavimentações anteriores procurando serras e escadas, tentanto estabelecer critérios de reconhecimento de serras e escadas. As propriedades das serras e escadas são estabelecidas em termos de «ângulos iguais» e de «rectas paralelas». As serras e escadas permitem dar um conteúdo concreto, visual, às propriedades entre ângulos com lados paralelos. Em vez de esta propriedade aparecer como era (e ainda é) tradicional, mostrando duas rectas paralelas cortadas por uma secante, ela é integrada num contexto bem mais complexo e pode ser relacionada com muitos outros factos que os alunos experimentaram. Esta relação deixa assim de ser uma proposição formal e passa a ter, para os alunos, um significado geométrico.

Com o recurso constante às árvores genealógicas, as serras e escadas vão depois servir de base para o desenvolvimento de muitas propriedades das figuras.

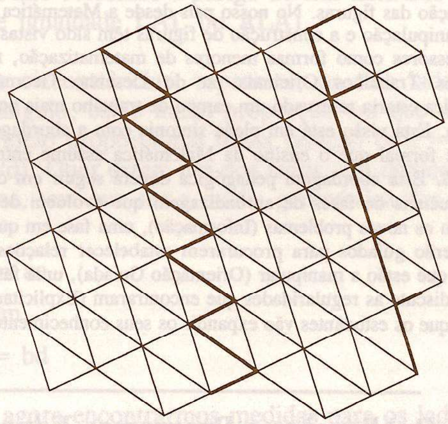

Figura 9. Uma serra à esquerda e uma escada à direita.

Para terminar

Hoje, no estrangeiro, questiona-se qual o conteúdo de um currículo de geometria. Em contraste com a aritmética, não existe um currículo comumente aceite mas parece essencial que a geometria seja uma das formas privilegiadas de adquirir uma intuição e uma orientação espacial crucial para o mundo moderno. Para tal, é fundamental uma metodologia que parta da visão do aluno e que lhe proporcione os meios e o ambiente para que ele próprio desenvolva os seus conhecimentos. Há grandes linhas de concordância sobre o que deve ser a geometria nas escolas que passam por um reforço da intuição espacial, por um forte recurso à utilização dos computadores, por exemplo com o Logo, e por uma manipulação das figuras elementares com a consequente investigação de algumas das suas propriedades. Propõe-se ainda a inclusão de tópicos como uma ligação da geometria com as matrizes, ou teoria de grafos.

Neste artigo procurou-se descrever um modelo de aprendizagem assente numa visão que valoriza a aprendizagem da geometria como um fenómeno gradual, global e construtivo. Gradual, porque pressupõe que a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica são adquiridos gradualmente. Global, porque uma figura ou uma propriedade não são abstracções isoladas mas, antes estabelecem relações umas com as outras e pressupõem níveis mais simples ou mais complexos que lhes dão outros significados. Construtivo, porque pressupõe que não existe transmissão de conhecimentos mas antes que o aluno deverá construir ele próprio os seus conceitos. Apesar de o conteúdo curricular (a geometria euclideana) já não fazer parte do currículo, pensamos que a metodologia seguida por Dina Van Hiele-Geldof pode produzir excelentes sugestões (*insights*) adaptáveis aos conteúdos e às salas de aula de hoje.

Notas

Nota 1. Este artigo é adaptado de uma intervenção efectuada em 8/4/88 no 66.º Encontro Anual do Nacional Council of Teachers of Mathematics em Chicago.

Nota 2. É interessante notar que os Van Hiele atribuíam uma importância muito grande às construções geométricas, como uma forma de manipulação das figuras. No nosso país desde a Matemática Moderna que a manipulação e a construção de figuras têm sido vistas por muitos professores como formas menores de matematização, mais próprias dos Trabalhos Oficinais ou do Desenho Geométrico. À Matemática estaria reservado um campo de trabalho mais nobre, mais abstracto. Esta visão está em plena sintonia com a abordagem extremamente formal que o ensino da Matemática assume entre nós.

Nota 3. Esta abordagem pedagógica deverá seguir em cada nível uma sequência de fases de aprendizagem que evoluem de um contacto com os novos problemas (Informação), uma fase em que os estudantes serão guiados para procurarem estabelecer relações entre os objectos que estão a manipular (Orientação Guiada), uma fase em que a classe discute as regularidades que encontraram (Explicitação), uma fase em que os estudantes vão expandir os seus conhecimentos de uma forma aberta (Orientação Livre) e uma fase final em que se retira uma conclusão do que foi aprendido (Integração).

Nota 4. Na altura da introdução da Matemática Moderna, o nosso programa de geometria procurava estruturar o espaço. Esta estruturação era entendida como a capacidade de abstrair pontos, rectas, planos ou classes de equivalência de vectores. A estruturação entendida pelos Van Hiele está muito mais ligada à percepção e é, essencialmente, a estrutura que o sujeito mentalmente põe no desenho geométrico e não uma estrutura matemática pré-existente que os alunos apenas têm de assimilar. No primeiro caso, havia uma estrutura verdadeira, objectiva, matemática, com origem nas investigações dos matemáticos da escola bourbakista. No segundo, há diversas estruturas concorrentes, todas elas disputando o lugar de verdadeira estrutura geométrica e todas elas tendo as suas raízes na percepção visual dos alunos.

Nota 5. Os Van Hiele distanciam-se da psicologia e, consequentemente, da Teoria de Gestalt, afirmando que os estudos psicológicos costumam ser efectuados em adultos, negando pois a existência de um desenvolvimento mental (Van Hiele-Geldof, 1984, p. 63, p. 177). No caso particular de Piaget, Pierre Van Hiele critica-lhe a visão demasiadamente biológica sendo, portanto, inevitável que minimize a influência que o professor pode ter no desenvolvimento (1986).

Referências

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics an an educational task.* Dordrecht, Holanda; Reidel.

Fuys D., Geddes, D., & Tischler, R. (Eds.). (1984). *English translation of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele.* Brooklyn, Nova Iorque: School of Education, Brooklyn College.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele-based research. Em R. Lesh (Ed.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 205-227). Nova Iorque: Academic Press.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight.* Nova Iorque: Academic Press.

Van Hiele-Geldof, D. (1957/1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. Em D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.) *English translation of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele* (pp. 1-206). Brooklyn, Nova Iorque: School of Education, Brooklyn College.

Wertheimer, M. (1945). *Produtive thinking.* Nova Iorque: Harper & Brothers.