

# Para um reforço do ensino da Geometria

A. J. Franco de Oliveira, Dep. Matemática, F.C.L.

1. Alguma experiência lectiva recente no campo da Geometria e uma já longa experiência noutros campos, ligados nomeadamente à lógica e fundamentos, bem como uma sensibilização crescente a questões de filosofia, história e didáctica das matemáticas são o ponto de partida das reflexões e propostas contidas nesta exposição, singularmente convergentes com muitas tendências e perspectivas emergentes dos textos e discussões presentes neste Seminário.

2. Olhando para o meu passado de aluno liceal nos anos 60, não posso deixar de constatar a importância que teve para a minha formação matemática a aprendizagem da Geometria Elementar (manual de Palma Fernandes) no antigo 2.º ciclo (7.º a 9.º anos de escolaridade), como uma das partes relativamente autónomas do currículo escolar e de constatar também, relativamente às gerações «matemática moderna» e, mais recentemente, nos meus próprios filhos, uma falha importante na sua formação matemática — na sua concepção (implícita embora) do que é a matemática e, fundamentalmente, da sua atitude para com a mesma, como elemento de cultura e como instrumento de aplicação na vida e nas outras ciências.

3. Não pretendo pregar um retorno aos currículos e práticas pedagógicas do passado, mas somente frisar que há algo nesse passado que se perdeu e que urge reencontrar, acarinhado e estimulado de novo. Caracterizar exactamente esse algo, em moldes compatíveis com os actuais objectivos e estratégias do ensino, aprendizagem e avaliação da matemática (como têm sido expostos e defendidos neste Seminário) é tarefa mais difícil. Mas direi, genérica e tentativamente, que tenho particularmente em vista os seguintes aspectos:

(i) o império do bom senso e do realismo que significa ter em conta a acessibilidade das matérias nas diferentes fases etárias dos alunos, bem como da sua extensão e da capacidade efectiva de leccionação por parte dos professores, sem pressas nem pressões de qualquer natureza (como as que adviriam da não familiaridade com novos currículos) — é sempre preferível dar menos matéria, com mais qualidade, que muita e mal;

(ii) uma perspectiva unificadora da matemática, que elimine a actual dispersão das matérias (particularmente grave no que concerne à Geometria), que tenha mais em conta as metodologias próprias da matemática em torno de determinados conteúdos fundamentais (ver adiante) e menos uma visão da matemática como sistema organizado de conhecimentos, segundo um esquema lógico impecável, copiado dos grandes tratados sistemáticos (vulgo Bourbaki);

(iii) uma concepção humanizada da matemática, como actividade intelectual criadora, objecto de experimentação e fonte de prazer, entrecortada por referências históricas e de motivação genética das ideias e técnicas.

4. Ora, a Geometria foi, no passado, e continuará sendo no presente e futuro um ramo privilegiado da matemática escolar, especialmente vocacionado para pôr em prática tais concepções e objectivos. Mas geometrias há muitas! Para fixar ideias, estamos pensando exactamente na Geometria Euclideana, apresentada segundo os moldes concebidos nos anos 30 por Birkhoff, isto é, baseada nos chamados *Postulados Métricos* (da *Régua e Transferidor*). Uma tal abordagem da Geometria é perfeitamente viável e particularmente adaptável à estratégia do «problem solving», como o mostram inúmeros textos correntemente em uso (e.g. nos E.U.A.). Como a própria designação indica, ela é baseada em postulados métricos, quer dizer, em que o conceito de **medição** ocupa um papel central — medição de segmentos e de ângulos — pressupondo, por isso, um conhecimento elementar dos números reais. Algumas vantagens do método métrico sobre o clássico método sintético (de Euclides — «sem números»):

(i) na vida real, ou em níveis básicos, a contagem e a medição são práticas comuns; a intuição geométrica pode contribuir, por sua vez, para melhor entender certos aspectos da álgebra e da aritmética;

(ii) a geometria métrica prepara melhor para estudos mais avançados, como a Geometria Analítica e o próprio Cálculo Infinitesimal;

(iii) o ponto de vista métrico permite evitar ou contornar certas dificuldades da abordagem sintética (nomeadamente, de certas questões que têm a ver com a noção «estar entre» e com a «continuidade»).

5. Não deixando de ter em conta que a proposta que aqui é feita tem em mente sobretudo os últimos três ou quatro anos do ensino pré-universitário, assinalamos algumas características do método postulacional em Geometria elementar:

(i) trata-se de um sistema dedutivo *concreto* (por oposição a abstracto, como o é uma boa parte da álgebra — grupos, grupóides, espaços vectoriais, etc. — mas não devia ser tanto), isto é, à clássica ou heterónoma maneira, como modelo matemático do mundo ou realidade física circundante, estudado dedutivamente;

(ii) integra de maneira natural a aritmética e a álgebra, e permite até motivar certas noções da Análise, como a de limite (para demonstrar, por exemplo, a exis-

tência de  $\pi$ , como razão constante entre o perímetro e o diâmetro das circunferências);

(iii) permite desenvolver a intuição espacial, a par do raciocínio justificativo (lógica em acção), bem como as capacidades de interpretação da realidade e aplicação prática dos resultados teóricos;

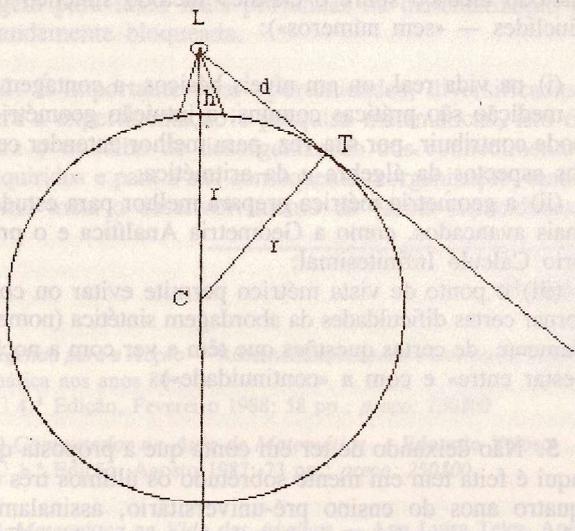
(iv) permitindo a utilização de instrumentos diversos (régua e compasso, transferidor e as próprias figuras geométricas), não deixa por isso de exigir cuidado, clareza e rigor na linguagem;

(v) não é incompatível com a técnica do «problem solving», muito pelo contrário, e é facilmente integrável com as modernas tecnologias (programas computacionais).

## 6. Exemplo

Trata-se de determinar a distância da lanterna de um farol ao horizonte (ou da cabina do Capitão de um navio ao horizonte), no mar, sendo  $h$  (metros) a altura do farol, e sabendo que o raio da Terra é aproximadamente 6500 km. Pretende-se somente um valor aproximado daquela distância.

Sem dificuldade se vê que o problema se pode reduzir à determinação da distância  $d$  da lanterna do farol (ponto L na figura 1) ao ponto T de tangência com uma circunferência representando um meridiano terrestre.



O problema resolve-se usando um dos dois resultados seguintes:

1) teorema de Pitágoras:

$$(r + h)^2 = d^2 + r^2$$

2) potência de um ponto relativamente a uma circunferência:

$$h(h + 2r) = d^2$$

Em qualquer dos casos obtemos:

$$d^2 = 2rh + h^2$$

donde, atendendo a que  $h$  metros =  $h/1000$  km,  $r = 6500$  km,

$$d = \sqrt{13h + (h/1000)^2}$$

mas  $(h/1000)^2$  é muito pequeno em comparação com  $13h$ , donde o valor aproximado para  $d = \text{apr} \sqrt{13h}$  km.

Fim do exemplo.

7. Em face de tudo o que foi dito, advogamos para a Geometria um papel **estruturante** nos currícula de matemática escolar; quer dizer, em que os assuntos de Geometria, em cada ano escolar, é que determinam a inserção das restantes matérias (álgebra, aritmética, análise) e não ao contrário, como se fora um Apêndice que se pode dar mais ou menos apressadamente, conforme o tempo disponível.

Eis alguns dos assuntos que constituem um programa de Geometria, para dois ou três anos de escolaridade:

1. Exemplos de problemas relativamente simples, uns solúveis, directamente, pelo senso comum, outros exigindo um pouco de raciocínio estruturado (ou algum conhecimento teórico).
2. Revisão da álgebra dos números reais e propriedades da ordem; postulados da distância e da colocação da régua; segmentos, semirectas, determinação de uma recta por dois pontos, etc.
3. Planos, postulados de separação, semiplanos.
4. Ângulos e triângulos, congruências e respectivos postulados; desigualdades geométricas (ângulo externo), etc.
5. Perpendicularidade de rectas e de planos no espaço; paralelismo.
6. Polígonos, regiões poligonais e suas áreas.
7. Semelhança, proporcionalidade.
8. Sistemas de coordenadas no plano e no espaço; círculos e esferas.
9. Construções geométricas diversas (com régua e compasso).
10. Áreas do círculo e de sectores circulares.
11. Elementos de trigonometria plana.
12. Simetria, transformações geométricas, vectores.
13. Sólidos e seus volumes (Princípio de Cavalieri).

É óbvio que, por exemplo no 10.º ano de escolaridade, se for este o primeiro ano em que se implementa um currículo como o descrito, a novidade de alguns dos assuntos acima está somente no facto de eles serem tratados de um ponto de vista postulacional ou dedutivo, de preferência ao meramente descritivo, já pressuposto.

8. Finalizando, é importante frisar que é indispensável para o sucesso de um tal programa (como de qualquer outro, aliás, o que se tem esquecido com frequência) pôr à disposição dos professores com a

(cont. pág. 36)

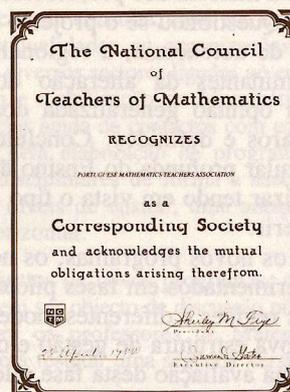
### Reunião internacional de Associações em Budapeste

A APM, através de diversos contactos realizados por alguns seus dirigentes desde o Verão passado, esteve na origem da ideia de se realizar uma reunião internacional de representantes de Associações de Professores de Matemática em Budapeste, durante o próximo ICME-6. Por isso, o Comité Internacional deste Congresso (o mais importante na área da Educação Matemática) convidou o actual vice-presidente da APM para organizar, em colaboração com o presidente da Associação da Alemanha Federal, aquela reunião.

### Acordo com o NCTM dos Estados Unidos

O National Council of Teachers of Mathematics — NCTM — é a Associação de Professores de Matemática dos Estados Unidos da América e constitui desde há muito tempo uma referência essencial para muitos daqueles que se preocupam com a renovação do ensino da matemática a todos os níveis. As suas posições e as suas revistas, nomeadamente o «Mathematics Teacher», são lidas em todo o mundo, havendo também em Portugal naturalmente diversas escolas e professores que as recebem periodicamente.

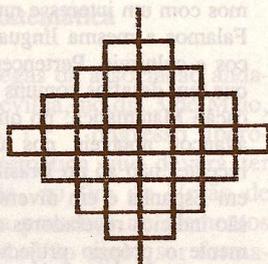
A APM, depois de uma série de diligências efectuadas pela Direcção, tornou-se agora uma «associação correspondente» do NCTM. Trata-se de um acordo que implica: (1) a troca oficial entre as respectivas revistas profissionais; (2) cada uma das associações informa os seus membros sobre os principais Encontros, publicações e revistas da outra associação; (3) cada uma das associações convida, para os seus Encontros, membros da outra associação que estejam no país onde esses Encontros se realizam.



### LOGO.MAT

(continuação)

```
to peano :k :d
if :k = 0 [fd :d stóp]
peano :k-1 :d/3 rt 90
peano :k-1 :d/3 lt 90
peano :k-1 :d/3 lt 90
peano :k-1 :d/3 lt 90
peano :k-1 :d/3 rt 90
peano :k-1 :d/3 rt 90
peano :k-1 :d/3 rt 90
peano :k-1 :d/3 lt 90
peano :k-1 :d/3
end
```



Partindo de outros módulos e recorrendo, também, a procedimentos recursivos, podem-se obter novos padrões igualmente interessantes.

Leonor Moreira

### Bibliografia

Klotz, F. (1987). Turtle Graphics and Mathematical Induction. *Mathematics Teacher*, vol. 80, n.º 8.

### Para um reforço...

(continuação)

devida antecedência textos de apoio contendo comentários à matéria, desenvolvimentos pontuais, resoluções completas de problemas, sugestões para testes de avaliação, e tudo o mais que informe, clarifique e lhe dê confiança na sua assaz delicada, importante e mal retribuída função. Sebastião e Silva compreendeu bem a necessidade de um tal tipo de apoio, ao elaborar os (esquecidos) *Guias* para o seu *Compêndio de Matemática*. Os textos de apoio cuja elaboração cuidadosa recomendamos são mais completos, porém, que aqueles *Guias*, no que respeita a questões práticas do dia a dia lectivo. Para exemplificação típico do que acabamos de propor veja-se

Moise & Downs — *Geometry, Teacher's Edition*, Addison-Wesley, 1982.

Nota: Este texto corresponde à intervenção do professor Franco de Oliveira no Seminário organizado pela APM sobre «Renovação do currículo de Matemática».

N.R. — Por absoluta falta de espaço não publicamos «A Dança das Circunferências» de A. Paula Natal. Pelo facto pedimos desculpa. O referido artigo será oportunamente publicado.