Matemática do século XX: o século em breve revista[1]

Lawrence Shirley

O artigo que se segue constitui um breve sumário dos desenvolvimentos matemáticos recentes – Século XX –, ao nível da Matemática pura e aplicada e do contributo dos computadores para o estudo da mesma. Para além disso, é feita uma referência ao aparecimento da educação matemática como campo académico, à interacção da cultura com a matemática e à influência da história e da filosofia da matemática nos desenvolvimentos desta ciência.

Este artigo é da autoria de Lawrence Shirley (Shirley@towson.edu) que trabalha na Towson University, onde ensina educação matemática e história da matemática. Os seus interesses também se situam ao nível da etnomatemática.

Muitas vezes recomenda-se a discussão da história da matemática nas salas de aula como uma das maneiras para ajudar a mostrar que a matemática não passou inalterável das mãos de Deus (ou de Euclides!) para os cadernos dos alunos, mas que foi mudando e crescendo ao longo dos séculos. Esperamos que os alunos encarem a matemática como dinâmica e constantemente nova, e não como uma coisa antiga e assente que tem necessariamente que ser aceite como é. A maior parte dos livros de história e das notas laterais dos manuais concentra-se nos desenvolvimentos significativos da matemática feitos por egípcios, babilónicos, gregos, e europeus dos séculos dezasseis a dezanove. Estes manuais evitam frequentemente a evolução da matemática no século vinte, o que dá aos alunos a impressão que o progresso matemático parou há cem anos atrás.

Uma das razões para esta omissão é que não é fácil olhar para o passado recente com um olhar histórico; muita da *história* do século vinte ainda está a decorrer. Os livros de história têm de parar algures, e os autores hesitam muitas vezes em aproximar-se demasiado da data da publicação. Assim, a maioria dos manuais mais comuns sobre a história da matemática cobre pouco da segunda metade do século vinte. Agora que o fim do século está à vista, é apropriado os historiadores olharem para trás e os professores mostrarem que a matemática não só está viva e bem, como está no seu período mais produtivo de sempre. Os historiadores descobriram que mais de metade da matemática que se conhece foi desenvolvida desde 1900; e alguns diriam mesmo desde 1950 (fig. 1 e 2).

Outras duas razões para evitar a história recente: a maior parte da matemática escolar baseia-se em material mais antigo; e muita da matemática do século vinte é demasiado abstracta e difícil para poder ser usada no ensino básico. Mesmo que o conteúdo real possa ser difícil, as histórias excitantes sobre as pessoas, os desenvolvimentos, os resultados, e as aplicações merecem cobertura. Estas histórias podem dar vida à matemática escolar e encorajar os nossos alunos a juntarem-se ao divertimento! O que se segue é um breve sumário que dá ideia do sabor dos desenvolvimentos matemáticos recentes. Apresentam-se desde já desculpas pelas muitas omissões e simplificações. Este século viu demasiado para que tal caiba num pequeno artigo! As referências no final pretendem ser um guia na busca de mais detalhes.

Matemática Aplicada

Provavelmente, as proezas mais óbvias da matemática do século vinte são as suas aplicações. Mesmo que os alunos ainda não tenham estudado formalmente estes tópicos, eles já viram os resultados. A física moderna tornou-se quase um ramo da matemática; Einstein, Bohr, Dirac, Feynman, Gell-Mann, e muitos outros físicos notáveis fizeram muito do seu trabalho em matemática. A relatividade usa algumas das aparentemente estranhas geometrias teóricas abstractas do século passado e demonstra que aquelas são mais tangíveis do que os seus inventores sonharam. A mecânica quântica aplica a teoria das probabilidades e dos grupos à estrutura de partículas subatómicas. A física também desagua na astronomia e na cosmologia. Stephen Hawking, um físico e matemático que ocupa a mesma cadeira de professor em Cambridge que em tempos foi ocupada por Newton, está a trabalhar no desenvolvimento de uma "grande teoria unificadora" do universo. Hawking é especialmente interessante como um exemplo da luta e da perseverança porque o seu corpo foi atacado pela doença de Lou Gehrig mesmo quando a sua mente explorava o universo. Se a física é matemática aplicada, a engenharia é física aplicada. As muitas maravilhas da engenharia do século vinte sublinham o poder da matemática nos automóveis e nas auto-estradas; nos aviões nas naves espaciais; nos telefones e na televisão; e, claro, nos computadores.

Duas outras áreas importantes da matemática aplicada do século vinte são a estatística e as probabilidades. Ambas tinham uso limitado antes de 1900, especialmente no cálculo, mas matemáticos das duas áreas construíram fundamentos teóricos sólidos e encontraram muitas novas aplicações.

No princípio do século, estatísticos como Pearson, Fisher e Kendall desenvolveram análises e metodologias, algumas das quais têm agora o seu nome; mas os cálculos entediantes limitaram as suas aplicações. Os computadores vieram abrir enormemente esse campo, não apenas com velocidades de cálculo mais elevadas mas também com novos e poderosos tipos de análise, incluindo os métodos e simulações de Monte Carlo. Incidentalmente, do lado "menos tecnológico" da estatística, os alunos de níveis médios de escolaridade talvez se interessem por saber que as representações em diagramas de caule-e-folhas e diagramas de extremos-e-quartis são ambas produto da parte final deste século.

Numa certa altura, a probabilidade parecia ser pouco mais que uma ferramenta útil para os jogadores. No século vinte, porém, foi aplicada na mecânica quântica para a localização de electrões, como foi referido anteriormente e, através da teoria do jogo de John von Neumann, para a análise estratégica em negócios, na economia, na política, e na guerra. John Nash e Reinhard Selten, ambos matemáticos, até partilharam o prémio Nobel da economia em 1994 pelo seu trabalho nesta área.

De facto, a matemática tem contribuído em muitas áreas de negócios, muito para além dos dados pelos livreiros de Dickens do século dezanove. Alguns consideram o desenvolvimento, em 1947, por George Dantzig, do método simplex de programação linear, uma poderosa ferramenta de optimização nos negócios, como uma das mais importantes descobertas matemáticas do século. Por volta de 1970, a teoria do caos, desenvolvida por René Thom e Christopher Zeeman, considerou resultados abruptos, não contínuos, de acções contínuas. A teoria tem aplicações nas áreas financeira e empresarial, bem como na biologia e noutros campos que anteriormente não tinham relação estreita com a matemática.

As complexidades da economia, biologia, e outros campos "confusos", tais como a metereologia e a ecologia, estão agora a ser apetrechados pela matemática da teoria do caos e dos sistemas dinâmicos. Os alunos podem ter ouvido falar da teoria do caos no filme *O Parque Jurássico*. O mais famoso exemplo é o "efeito borboleta" de Edward Lorentz, no qual ele sugere que o bater de asas de uma borboleta no Brasil pode provocar uma cadeia de acontecimentos que causem um tornado no Texas!

Computadores na Matemática

Alguns diriam que a história dos computadores não faz parte da história da matemática, mas os computadores têm interagido de perto com a matemática ao longo deste século. Somos tentados a começar a história com Charles Babbage, frequentemente considerado o pai dos computadores. Apesar de ter ideias do século vinte, a vida de Babbage (1702 – 1887) decorreu cem anos mais cedo! O mundo teve de esperar até à década de trinta para haver um trabalho significativo na área dos computadores.

Década	Aplicada	Computadores	Pura	Educação e Sociedade
1900	*Design* de aviões Relatividade	Babbage? (Oops! Século errado!)	Os 23 problemas por resolver de Hilbert	Os "primeiros" educadores matemáticos
1910	Sistemas eléctricos e telefónicos, com fios		*Principia Mathematica*	
1920	Mecânica quântica		Fundamentos e lógica Teoria dos anéis Análise funcional	Fundação do NCTM
1930	Teoria dos jogos Física atómica	Teoria da computabilidade Máquina de Turing *Design* de circuitos	Teorema da não completude de Gödel Bourbaki Topologia	Matemática "significativa"
1940	Criptologia Projecto de Manhattan Método Simplex	ENIAC Programação		*How to Solve it*
1950	Economia matemática Sistema interestadual de auto-estradas	UNIVAC Linguagem FORTRAN	Números primos	Preocupação com o currículo
1960	Engenharia aeroespacial	Linguagens COBOL e BASIC	Solução para a hipótese do contínuo	Revisão do currículo para uma "nova" Matemática
1970	Uso dos computadores na estatística			Filosofia de Lakatos
	Teoria do caos	Teorema das quatro cores, demonstrado com ajuda de computadores		
1980	Sistemas dinâmicos			
		Fractais		
		Uso mais alargado dos computadores na matemática	Teorema do empacotamento das esferas	Etnomatemática
1990	Cosmologia — teoria das cadeias	Redes de computadores ajudam a encontrar mais números perfeitos	Demonstração do último teorema de Fermat	Normas do NCTM

figura 1. Uma tabela cronológica da matemática do século vinte

A teoria da computabilidade de Alan Turing e as ideias de Claude Shannon sobre a troca de circuitos deram suporte teórico ao desenvolvimento da programação. As ideias de John von Neumann puseram a entrada da programação no mesmo formato que a entrada de dados, o que tornou o design de computadores muito mais flexível. As décadas de cinquenta e de sessenta viram as primeiras linguagens de computador, tais como FORTRAN, BASIC, e COBOL — a última desenvolvida por Grace Hopper, que também criou o termo *bug* quando uma traça causou uma avaria no seu computador. Estas linguagens ajudaram a que o uso do computador se tornasse vulgar entre os cientistas, engenheiros e homens de negócios. Entretanto, os matemáticos continuaram a influenciar a teoria da ciência computacional e a tecnologia em áreas como a teoria dos códigos da álgebra e a análise de redes da topologia.

Os matemáticos hesitavam em adoptar o computador, argumentando que a matemática é um esforço da mente, e não um cálculo mecânico dos computadores. Em 1976, no entanto, Wolfgang Haken e Kenneth Appel anunciaram uma demonstração do famoso teorema das quatro cores, sem solução desde há mais de 100 anos. Apesar da demonstração ser difícil, os alunos de níveis de escolaridade média conseguem perceber o problema: em qualquer mapa colorido de forma a que dois países vizinhos não tenham a mesma cor ao longo da sua fronteira, quatro cores são suficientes. Uma chave para a solução de Haken e Appel foi uma análise detalhada de perto de dois mil casos de configuração, encontrados pelo computador. Mesmo usando computadores, a verificação demorou mais de seis meses; sem computadores, poderia levar décadas. Filosoficamente, o anúncio reabriu a velha questão do que é que constitui uma demonstração.

Os computadores também desempenharam um papel principal no desenvolvimento de fractais. O conceito de fractal envolve objectos geométricos que são feitos de padrões infinitos de réplicas cada vez menores deles próprios. Na prática, os fractais eram difíceis de compreender sem a ajuda dos computadores gráficos, que faziam ampliações cada vez mais profundas nas suas estruturas. A mais famosa é a representação de Mandelbrot, que foi apelidada do objecto matemático mais complexo que foi visionado.

Matemática Pura

Embora as aplicações e o trabalho com computadores possa ser mais visível para o público, os matemáticos puros argumentariam que a matemática abstracta tem sido a área de mais importante crescimento deste século. O século começou com um "trabalho de casa" para matemáticos quando David Hilbert, no Congresso Internacional de Matemáticos de 1900, fez a sua célebre intervenção.

Kenneth Appel	1932 —	teorema das quatro cores
Stefan Banach	1892 — 1945	análise funcional, topologia dos espaços vectoriais
Edward Begle	1914 — 1985	currículo escolar, "nova Matemática"
"Nicolas Bourbaki"		álgebra abstracta, topologia, rigor dedutivo
Paul Cohen	1934 —	fundamentos, hipóteses do contínuo
Ubiratan D' Ambrosio	1933 —	etnomatemática, assuntos socio-políticos
George Dantzig	1914 —	programação linear, método simplex
Jean Dieudonné	1906 — 1992	topologia, álgebra abstracta, parte do grupo Bourbaki
Albert Einstein	1879 — 1955	física, relatividade
Paul Erdös	1913 — 1996	teoria dos números
Kurt Gödel	1906 — 1978	fundamentos, não completude da matemática
Wolfgang Haken	1928 —	teorema das quatro cores
G. H. Hardy	1877 — 1947	teoria dos números, outra matemática pura
Stephen Hawking	1942 —	cosmologia
David Hilbert	1862 — 1943	geometria, fundamentos, relatividade
Grace Hopper	1906 — 1992	computadores, COBOL
Imre Lakatos	1922 — 1974	filosofia da matemática
Henri Lebesgue	1875 — 1941	teoria da medida, generalização de integral
Benoit Mandelbrot	1924 —	fractais
John Nash	1928 —	economia, equilíbrio
Emmy Noether	1882 — 1935	relatividade, álgebra abstracta, teoria dos anéis
George Pólya	1887 — 1985	resolução de problemas
Srinivasa Ramanujan	1887 — 1920	teoria dos números, teoria das funções
Bertrand Russell	1872 — 1970	filosofia, fundamentos, lógica
Atle Selberg	1917 —	teoria dos números
Reinhard Selten	1930 —	economia, equilíbrio
Claude Shannon	1916 —	teoria de circuitos
David E. Smith	1860 — 1944	educação matemática
René Thom	1923 —	teoria do caos
Alan Turing	1912 — 1954	teoria dos computadores, computabilidade
John von Neumann	1903 — 1957	teoria dos jogos, programas de computador
André Weil	1906 — 1998	geometria algébrica, parte do grupo de Bourbaki
Andrew Wiles	1953 —	último teorema de Fermat
Grace Chisholm Young	1868 — 1944	teoria dos conjuntos
Christopher Zeeman	1925 —	aplicação da teoria do caos, sistemas dinâmicos

figura 2. Alguns matemáticos importantes do século vinte

listou vinte e três problemas sem solução que requeriam atenção. Alguns deles ainda permanecem por resolver! Muitos dos desafios de Hilbert lidavam com os fundamentos da matemática, especialmente uma tentativa de organizar toda a matemática numa estrutura lógica de um sistema de axiomas. Esse projecto foi posto na mesa em 1931, contudo, quando Kurt Gödel provou que qualquer sistema matemático axiomático era "incompleto" — isto é, afirmações verdadeiras poderiam existir sem que pudessem ser provadas ou refutadas. De facto, utilizando um complexo sistema para numerar sistemas lógicos e afirmações, Gödel produziu uma afirmação verdadeira que diz essencialmente, "esta afirmação não pode ser provada". Compare esta frase com a afirmação "eu estou a mentir". A ideia da auto-referência reapareceu mais tarde nos fractais e na teoria da recursividade. As ideias de Gödel também contribuíram para a teoria da computabilidade de Turing.

Outro acontecimento importante foi a solução para a hipótese do contínuo. Georg Cantor mostrou que a cardinalidade — grosseiramente, o número de elementos — do conjunto dos racionais e a do conjunto dos inteiros era a mesma, contável e infinita, designada por $\aleph_0$. Ele também mostrou que a cardinalidade dos números reais era incontável infinita, que ele apelidou de continuum *c*. A questão era, se há alguma cardinalidade entre $\aleph_0$ e *c*? A hipótese do contínuo diz que a resposta é «não». A prova eventual foi uma surpresa. Paul Cohen mostrou que a resposta era "não interessa"; quer a resposta fosse "não" quer fosse "sim" poderia chegar-se a uma teoria dos números sem contradições. Esta situação é comparável à aceitação ou não aceitação do quinto postulado de Euclides nas geometrias euclidianas e não-euclidianas, pelo que as estruturas foram apelidadas de teoria dos números cantorianas e não-cantorianas.

O século também viu muito trabalho na análise funcional, na álgebra abstracta, e na topologia. A análise funcional proveio do trabalho existente em álgebra linear, lidando com problemas especiais de diferenciação e integração. Emmy Noether e Grace Chistolm Young foram duas proeminentes mulheres do começo do século que trabalharam em análise e álgebra. Embora o seu trabalho seja esotérico para os alunos, ele é significativo por mostrar o grande papel que as mulheres começaram a ter em matemática. Uma história de vida mais estranha é a de Nicolas Bourbaki, cujo nome aparece em diversos livros que ajudam a organizar e a ligar muitas áreas importantes da álgebra abstracta e da topologia. Bourbaki, porém, nunca existiu! O nome era um pseudónimo colectivo de um grupo de matemáticos na sua maioria franceses que trabalharam nos livros de "Bourbaki", revezando-se na cuidadosa escrita e edição e constantemente argumentando sobre o modo de apresentar as ideias para um maior rigor e clareza. Como piada, os matemáticos também inventaram uma biografia e genealogia de Bourbaki e até celebraram o casamento da sua filha!

A topologia emergiu do século dezanove como uma nova área da matemática, ligando ideias de álgebra, análise e geometria. A topologia informal agrada aos alunos, incluindo os tópicos mais antigos dos anéis de Möbius e das pontes de Könisberg, mas este século viu a solução do teorema das quatro cores, mencionado previamente; estudos dos nós e do espaço à volta dos nós; e estudos envolvendo o virar esferas do avesso. Na década de noventa, os topologistas debateram demonstrações sobre a maneira optimizada de empacotar esferas num espaço fechado, embora alguns observadores notassem que os vendedores de fruta têm empacotado laranjas em caixas há muito tempo!

A teoria dos números é a área mais antiga da matemática pura, datando de antes de Pitágoras, mas continua a florescer como uma fonte de questões tentadoras e de respostas difíceis. Os números primos continuam enigmáticos, ainda sem qualquer padrão reconhecido na sua sequência. No século XIX, Chebyshev provou que entre qualquer número contável e o seu dobro se encontra pelo menos um número primo. Em 1930, Paul Erdös de dezassete anos de idade encontrou uma demonstração muito mais simples. Mais tarde, foi mostrado que para $n > 47$, um número primo ocorre sempre entre n e $9n/8$. Em 1949, Paul Erdös e Atle Selberg também encontraram uma demonstração mais elegante da distribuição dos números primos. Erdös viveu até 1996 como o ilustre e estranho velho homem da matemática, que não pensava em nada excepto na matemática. Ele não tinha casa, mas viajava de universidade em universidade com todos os seus haveres num pequeno saco, ajudando os teóricos dos números a resolver mais problemas enquanto eles o ajudavam a lavar as suas roupas e o lembravam de parar e comer. Os alunos de nível de escolaridade média podem investigar a conjectura de Goldbach, ainda por provar, que qualquer número par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos.

Os gregos também estavam intrigados com os números perfeitos, que são números para os quais a soma dos seus factores próprios é igual a eles próprios, mas apenas encontraram os primeiros quatro (6, 28, 496 e 8128). Durante séculos, novos números perfeitos foram descobertos mas apenas em pequena quantidade por causa das dificuldades no cálculo à medida que se verificavam números muito maiores. Em 1900, apenas mais seis números foram descobertos. As calculadoras mecânicas ajudaram a descobrir mais dois em 1911 e 1914, respectivamente. Então, depois de 1950, os computadores começaram a ajudar. Começando nos anos 50, foram descobertos mais seis números perfeitos, depois cinco, quatro, e mais quatro, respectivamente, nos anos 60, 70 e 80. Em 1990, os novos números perfeitos tinham centenas de milhares de dígitos e o processo parecia abrandar novamente, embora mais três fossem encontrados em 1993, 1994 e 1996. A ajuda, contudo, veio através da cooperação na Internet.

Centenas de pessoas começaram a usar um novo programa de verificação. Outro número perfeito foi encontrado mais tarde em 1996, mais dois foram encontrados em 1997 e 1998, e provavelmente mais entre a escrita e a publicação deste artigo.

O acontecimento matemático mais celebrado do final do século vinte foi a solução do último teorema de Fermat, que tinha desafiado os matemáticos desde os anos de 1600. De novo, embora a demonstração seja extremamente difícil, os alunos podem compreender esta afirmação: apesar de haver muitas soluções inteiras que verificam o teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = z^2$ (tais como 3, 4, 5 e 5, 12, 13), não existe nenhuma quando os expoentes são maiores que 2. Depois de sete anos de trabalho secreto num escritório no sótão de casa, Andrew Wiles anunciou o resultado em 1993, gastando depois dois anos a pôr em ordem os pormenores. O seu trabalho foi significativo não apenas porque resolveu um problema de longa data, mas também porque o seu método ajudou a ligar diversas áreas da matemática, tais como as funções elípticas, formas modulares e geometrias não-euclidianas, que pareciam pouco ter a ver com a teoria dos números.

A Educação Matemática, a História, e a Cultura

Embora os alunos aprendam matemática há centenas de anos, o estudo formal da educação matemática como um campo académico não começou realmente antes da primeira década do século vinte. David Eugene Smith, um matemático que trabalhava na universidade da Columbia, reconheceu a necessidade de estudar o processo de aprendizagem e os problemas curriculares da matemática, e é frequentemente considerado o primeiro educador matemático. Evidentemente, muitos professores de Matemática já estavam a trabalhar, e começaram a formar organizações profissionais. Em 1920, diversos grupos uniram-se para formar o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), que se tornou na primeira organização de educação matemática e na maior organização do mundo relacionada com matemática.

Ao longo do século, os educadores matemáticos estiverem principalmente preocupados com o reforço do conteúdo curricular e com o aperfeiçoamento das práticas de ensino. Um tema central quer no currículo quer no ensino tem sido a resolução de problemas. George Pólya apresentou ideias básicas sobre os melhores métodos de resolução de problemas no seu livro *How to Solve It* (1945), que se tornou um dos maiores *best sellers* de todos os tempos da matemática. A preocupação por se alcançar um entendimento mais aprofundado das ideias matemáticas também levou às maiores revisões curriculares dos finais dos anos 50 e 60 que passaram a chamar-se a "nova Matemática". Ainda que a "nova Matemática" representasse muitas ideias boas, muitos pensavam que enfatizava demasiado o rigor e a abstracção, e a sua implementação ficou parada na confusão das exigências de vários programas e na competição das ideias sobre o que seria melhor. A reacção contra a "nova Matemática" abrandou o processo, até que relatórios sobre os baixos rendimentos na década de 80 levaram a uma nova forma de pensar e, em 1989, às *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* do NCTM. Seguidas de dois volumes a acompanhar e, no final da década, de uma versão actualizada, *Principles and Standards for School Mathematics*, as *Normas* foram um guia para muita da educação matemática para a nova geração do século vinte e um.

Tal como a educação, a cultura sempre interagiu com a matemática, mas o último terço do século vinte viu um novo interesse nesta interacção. Este interesse está expresso na preocupação sobre as questões do género na educação matemática e nos campos da matemática e da ciência em geral e encontra-se reflectido no novo campo da etnomatemática, que olha especificamente para a matemática em várias culturas. A igualdade na educação matemática procura assegurar que o campo da matemática beneficie do talento de todos e que o poder da matemática seja acessível a todos. Uma breve revisão a apenas este artigo revela que apesar das questões relacionadas com a igualdade estarem agora a ser faladas, as oportunidades na matemática estiveram maioritariamente limitadas a homens brancos, mesmo no século vinte. Esperamos que a matemática no século vinte e um possa provir da população em geral.

O aumento do interesse na história e na filosofia da matemática tem ajudado a colocar os desenvolvimentos matemáticos num contexto mais vasto e tem encorajado o pensamento sobre para onde se dirige a matemática a seguir. Um filósofo em particular, Imre Lakatos, defendeu uma visão mais flexível do significado da matemática. Ele sugeriu que as demonstrações e conceitos matemáticos não sejam finais nem estáticos, mas que sejam constantemente reavaliados e que sofram alterações dinâmicas. De facto, este artigo foi escrito por essa razão — para lembrar a todos nós que a matemática não parou no século dezanove e que está pronta a dar o salto para o século vinte e um!

Notas

[1] Traduzido, para língua portuguesa, de *Mathematics Teaching in the Middle School*, Vol. 5, nº5, Janeiro 2000, copyright 2000, e publicado com a autorização do *National Council of Teachers of Mathematics*. Todos os direitos reservados. O NCTM não é responsável pela exactidão ou qualidade da tradução.

Bibliografia

Albers, Donald J., and G. L. Alexanderson, eds. *Mathematical People*. Cambridge, Mass.: Birkhäuser Boston, 1985.

Boyer, Carl. *A History of Mathematics*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1989.

Burton, David M. *The History of Mathematics: An Introduction*. Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown Group, 1991.

Casti, John L. *Five Golden Rules: Great Theories of 20th Century Mathematics-and Why They Matter*. New York: John Wiley & Sons, 1996.

Cipra, Barry A. *What's Happening in the Mathematical Sciences. Vol. 1.* Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1993.

D'Ambrosio, Ubiratan. "Ethnomathematics and Its Place in the History and Pedagogy of Mathematics." *For the Learning of Mathematics* 5 (1985): 44-58.

Davis, Philip, and Reuben Hersh. *The Mathematical Experience.* Cambridge, Mass.: Birkhäuser Boston, 1981.

Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics.* Orlando, Fla. Saunders College Publishing, 1990.

Grinstein, Louise S., and Paul J. Campbell. *Women of Mathematics.* Westport, Conn.: Greenwood Press, 1987.

Gulick, Denny. *Encounters with Chaos.* New York: McGraw-Hill, 1992.

Hoffman, Paul. *"The Man Who Loves Only Numbers"* [artigo de Paul Erdös]. *Atlantic Monthly* 260, no. 5 (Novembro 1987): 60-74.

Hofstadter, Douglas. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid.* New York: Vintage Books, 1979.

Katz, Victor. *A History of Mathematics: An Introduction.* New York: HarperCollins Publishers, 1993.

Linear Programming Founder Turns 80 [artigo de George Dantzig]. *SIAM News* 27, no. 9 (1994): 3, 8.

Math Horizons [quarterly]. Mathematical Association of America.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Historical Topics for the Mathematics Classroom.* 31st Yearbook. Reston, Va.: NCTM, 1969,1989.

Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics: Reston, Va.: NCTM, 1989.

Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft Reston, Va.: NCTM, 1998.

Polya, George. *How to Solve It.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1945,1973.

Scientific American, Science in the 20th Century (special issue) 3, no. 1 (1991).

Stewart, Ian. *From Here to Infinity.* Oxford: Oxford University Press, 1996.

Worral, J., and E. Zahar, eds. *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

Alguns recursos excelentes foram recolhidos nos sites seguintes da World Wide Web. Tome algum do seu tempo para explorar os seus muitos e úteis *links*.

The Sci. Math FAQ Team. *Frequently Asked Questions in Mathematics* (informações comuns e históricas). www.cs.unb.ca/ãlopez-o/math-faq/math-faq.html

Trinity College, Dublin. *The History of Mathematics* (conjunto de ficheiros e *links*). www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/HistMath.html

University of Saint Andrews, Scotland. *MacTutor History of Mathematics Archive.* www.history.mcs.st-and.ac.uk/history/

Woltman, George. *Great Internet Mersenne Prime Search* (números primos e perfeitos). www.mersenne.org

Alguns vídeos que se relacionam com este artigo também estão disponíveis.

Csicsery, George Paul. *N Is a Number: A Portrait of Paul Erdös* [uma visita com este teórico dos números], 1993.

Lynch, John, directed by Simon Singh. *The Proof* [*background* da demonstração de Andrew Wiles do último teorema de Fermat]. Episódio da série *Nova.* BBC – TV/WGBH_Boston coproduction, 1997.

Not Knot (1991), *Outside In* [dois filmes maravilhosos sobre transformações topológicas]. Minneapolis: Geometry Center, University of Minnesota, 1994.

Lawrence Shirley,
Towson University

Traduzido por:
David Mendes, Fernando Menezes, Henrique Machado, Hussene Remane, Pedro Ávila, Ricardo Barreiros, Rui Roboredo, Sérgio Antunes
Ensinos-Estudos Técnicos e Profissionais, SA

Galeria de poliedros

Neste ano 2000 foram construídos muitos poliedros nas escolas. Deixamos aqui o registo de alguns deles, sugerindo aos leitores que visitem a página web http://www.apm.pt/apm/amm/paginas/galeriaA.html onde encontrarão estes a cores e muitos mais.