# Cartas, Chapéus & Prendas de Natal

*José Paulo Viana*

Três problemas do mesmo tipo que, nestas versões ou noutras parecidas, aparecem regularmente e levantam quase sempre muitas interrogações e hesitações sobre como chegar à solução.

- Escrevi quatro cartas para quatro amigos e fiz os respectivos envelopes. Depois distraí-me e enfiei as cartas ao acaso nos envelopes. Qual é a probabilidade de nenhuma carta ter ido para o endereço certo?
- Cinco homens de chapéu foram a uma festa. Quando chegaram, colocaram os chapéus num armário. Durante a festa alguém gritou "Fogo!" e os cinco homens foram a correr ao armário, tiraram os chapéus ao acaso e saíram. Qual é a probabilidade de todos terem pegado em chapéus errados?
- Na minha escola há 100 professores e no Natal há sempre um almoço em que cada um leva uma prenda. As prendas são depois sorteadas entre os professores. Qual é a probabilidade de ninguém receber de volta a prenda que levou?

Aqui estão três problemas do mesmo tipo que, nestas versões ou noutras parecidas, aparecem regularmente e levantam quase sempre muitas interrogações e hesitações sobre como chegar à solução.

Por isso, talvez valha a pena tentar desfazer as dúvidas e resolvê-los aqui.

## As Cartas

Vamos começar pelo primeiro, o das cartas. O número de casos possíveis, isto é, o total de maneiras diferentes que eu tenho de enfiar as quatro cartas nos quatro envelopes é 24. Para isto, basta pensar que, para o primeiro envelope, há 4 cartas que lá posso meter. Feito isto, restam 3 cartas para o segundo envelope, e depois 2 cartas para o terceiro e uma única carta para o último envelope. Então tenho:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Este é o número de "permutações de 4", ou seja, o total de maneiras que existem de ordenar quatro objectos. O número obtém-se multiplicando os naturais de 4 até 1 e a isto chama-se "factorial de 4", que se representa por 4!.

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Vamos agora contar o número de maneiras que há de nenhum envelope ter a carta que devia. Para isso, um bom método é fazer uma listagem dos casos ou, visualmente melhor, um diagrama em árvore. Como se vê na figura 1, o envelope 1 pode ter a carta 2, 3 ou 4. Se tiver a carta 2, o envelope 2 pode ter a carta 1, 3 ou 4. E assim sucessivamente.

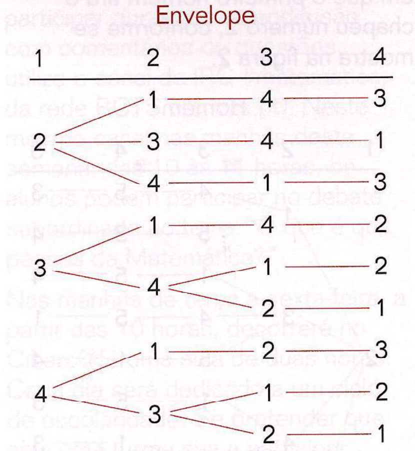

figura 1

Obtemos então 9 casos favoráveis. Favoráveis para aquilo que estamos a investigar, isto é, em que nenhum envelope tem a carta certa (na realidade, estes casos não são nada favoráveis para mim, que assim envio as cartas todas erradas...).

A probabilidade procurada é então:

$$P = \frac{9}{24} = 0{,}375$$

Note-se que, se tivéssemos feito uma lista, teríamos:

2 - 1 - 4 - 3
2 - 3 - 4 - 1
2 - 4 - 1 - 3
3 - 1 - 4 - 2
3 - 4 - 1 - 2
3 - 4 - 2 - 1
4 - 1 - 2 - 3
4 - 3 - 1 - 2
4 - 3 - 2 - 1

Cada um destes casos chama-se um "desarranjo" porque nenhum número (ou objecto) está na sua posição natural.

## Os Chapéus

Passemos aos cinco amigos com chapéu. O número de casos possíveis quando eles vão buscar os chapéus a correr é o número de permutações de 5:

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Os casos favoráveis vão ser os desarranjos de 5 elementos e é de prever que sejam bastantes. Vamos fazer um diagrama apenas dos casos em que o primeiro homem tira o chapéu número 2, conforme se mostra na figura 2.

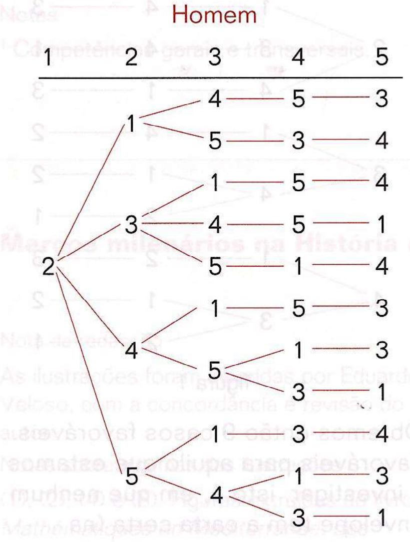


figura 2

Há 11 casos. No entanto, se pensarmos um bocadinho, rapidamente concluímos que também terão de ser 11 casos se ele tirar o chapéu 3, outros 11 para o chapéu 4, e mais 11 para o 5.

Ou seja, o número total de desarranjos é:

$4 \times 11 = 44$

Então, a probabilidade procurada é:

$$P = \frac{44}{120} \approx 0{,}3667$$

## As Prendas

Bem, agora a situação complica-se. O número de casos possíveis, isto é, o número de maneiras diferentes de distribuir 100 prendas a 100 professores é o factorial de 100. Ora este número é enorme e ultrapassa a capacidade de uma calculadora científica ou gráfica habitual. Uma calculadora mais avançada, como a TI-89 ou a TI-92, já nos dá o número (exacto!) com 158 algarismos. Temos então:

Casos possíveis $\approx 9{,}33 \times 10^{157}$

Mas, e o número de casos favoráveis? Queremos saber quantos são os desarranjos de 100 objectos mas não existe qualquer hipótese de fazer um diagrama em árvore ou uma listagem.

Tentemos uma outra abordagem: começar pelos casos mais simples e tentar descobrir o que se passa.

Com 1 prenda, há 1 caso possível e 0 favoráveis.

Com 2 prendas, há 2! = 2 casos possíveis e 1 favorável.

Com 3 prendas, há 3! = 6 casos possíveis e 2 favoráveis.

Com 4 prendas, estamos na situação das cartas nos envelopes e há 4! = 24 casos possíveis e 9 favoráveis.

Com 5 prendas, estamos na situação dos chapéus e há 5! = 120 casos possíveis e 44 favoráveis.

Com 6 prendas há 6! = 720 casos possíveis e fazer um diagrama ou uma listagem dos casos favoráveis já vai dar uma grande trabalheira.

A lista de casos favoráveis é, até às 5 prendas, esta:

0 1 2 9 44

Estava eu aqui, sem descobrir nenhuma lei de formação destes números, quando, ao ir à Internet ver uma das minhas páginas preferidas, a do *MathForum* (http://forum.swarthmore.edu/), encontro por acaso uma fórmula para o *número de desarranjos de n objectos*:

$$D(n) = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

É um grande passo em frente! Embora não seja uma fórmula simples de calcular quando o *n* cresce, já podemos determinar os valores seguintes.

| Objectos n | C. Favoráveis D(n) |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 9 |
| 5 | 44 |
| 6 | 265 |
| 7 | 1 854 |
| 8 | 14 833 |
| 9 | 133 496 |
| 10 | 1 334 961 |

figura 3

Organizemos então uma tabela.

Ao analisar estes números, reparei que o valor para n=10 era 10 vezes maior que o anterior mais 1 unidade. Seria isto uma coincidência ou aconteceria sempre?

Bem, quase. Ora veja-se:

$1 = 0 \times 2 + 1$

$2 = 1 \times 3 - 1$

$9 = 2 \times 4 + 1$

$44 = 9 \times 5 - 1$

$265 = 44 \times 6 + 1$

$1854 = 265 \times 7 - 1$

$14833 = 1854 \times 8 + 1$

$133496 = 14833 \times 9 - 1$

Temos então uma regra simples de formação destes números: o número de ordem *n* é igual a *n* vezes o anterior com, alternadamente, mais ou menos uma unidade.

Ou seja, é possível definir a sucessão D(n) por recorrência:

$D(1) = 0$

$D(n) = D(n-1) \times n + (-1)^n$

Agora, usando por exemplo uma calculadora TI-83 a trabalhar em modo Seq (sequência), é fácil construir a sucessão D(n) e fazer uma tabela.

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Full Horiz G-T
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
·.u(n)=u(n-1)*n+(
-1)^n
u(nMin)={0}
·.v(n)=
v(nMin)=
\w(n)=
```

| n | u(n) |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 9 |
| 5 | 44 |
| 6 | 265 |
| 7 | 1854 |

n=1

figura 4

Relembremos que *n* representa o número de professores (ou de prendas) e D(n) os desarranjos, isto é, as diferentes maneiras de ninguém receber de volta a prenda que levou.

Já sabemos calcular os desarranjos para qualquer número de objectos (dentro das capacidades da calculadora). Podemos aproveitar e determinar, para os diferentes valores de *n*, as probabilidades de nenhum professor receber a sua prenda. O número de casos favoráveis está em u(n) e o número de casos possíveis é n!.

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
·.u(n)=u(n-1)*n+(
-1)^n
u(nMin)={0}
·.v(n)=u/n!
v(nMin)={0}
\w(n)=
```

| n | u(n) | v(n) |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | .5 |
| 3 | 2 | .33333 |
| 4 | 9 | .375 |
| 5 | 44 | .36667 |
| 6 | 265 | .36806 |
| 7 | 1854 | .36786 |

n=1

| n | u(n) | v(n) |
|---|---|---|
| 8 | 14833 | .36788 |
| 9 | 133496 | .36788 |
| 10 | [illegible] | .36788 |
| 11 | 1.47E7 | .36788 |
| 12 | 1.76E8 | .36788 |
| 13 | 2.29E9 | .36788 |
| 14 | 3.2E10 | .36788 |

u(n)=1334961

figura 5

Basta então criar uma nova sucessão

$$v(n) = \frac{u(n)}{n!}.$$

Observemos as probabilidades. A partir de n=8 o valor parece estabilizar. Mas na tabela só temos cinco casas decimais. Passemos ao ecrã principal para podermos ver os números com melhores aproximações.

```
          .3678794392
v(12)
          .3678794413
v(13)
          .3678794412
v(14)
          .3678794412
```

figura 6

A partir de n=13, com 10 casas decimais, já não há alterações na probabilidade. A sucessão v(n) das probabilidades converge rapidamente para 0,3678794412.

Está resolvido o nosso problema. A probabilidade de, nos 100 professores, ninguém receber de volta a sua prenda é aproximadamente 0,36788.

Logo, a probabilidade de haver pelo menos um professor que receba a sua prenda de volta é 0,63212.

Há duas curiosidades que vale a pena realçar.

A primeira é que a probabilidade de ninguém receber a prenda de volta é praticamente a mesma quer haja 8 professores ou 100 ou 1000 ou um milhão. O valor da probabilidade estabiliza rapidamente.

A segunda curiosidade é este valor que encontrámos: 0,3678794412...

À partida não suspeitaríamos que fosse um número especial. Mas, afinal, trata-se nada mais nada menos que do inverso do número *e* de Nepper...

Quem diria que a solução deste tipo de problemas estava afinal tão intimamente ligada a um dos mais famosos números irracionais?

```
e
          2.718281828
1/e
          .3678794412
```

figura 7

José Paulo Viana
E.S. Vergílio Ferreira - Lisboa

## A Matemática e a Internet no Pavilhão do Conhecimento

Decorrerá de 20 a 24 de Novembro, no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa, a semana "A Matemática e a Internet". Esta semana, organizada pelo Grupo de Trabalho da Internet em colaboração com o Programa Internet na Escola — Ministério da Ciência e Tecnologia, inclui várias realizações, com a finalidade de promover a utilização da Internet no ensino e aprendizagem da matemática.

Na segunda-feira, dia 20 de Novembro, realiza-se uma videodifusão que inclui um painel, dinamizado pela Branca Silveira, sobre tecnologias e educação matemática e uma conferência do José Paulo Viana sobre paradoxos. Para assistir presencialmente a esta realização, a partir das 10 horas da manhã no Auditório do Pavilhão do Conhecimento, contacte a APM. Se a quiser ver via Internet, consulte a página da APM no endereço www.apm.pt/semana/index.html. Se quiser participar durante a videodifusão com comentários ou questões, utilize o canal de IRC #matematica, da rede RCTS (irc.rcts.pt). Neste mesmo canal nas manhãs desta semana, das 10 às 11 horas, os alunos podem participar no debate subordinado ao tema "O que é que pensas da Matemática?"

Nas manhãs de terça a sexta-feira, a partir das 10 horas, decorrerá no Cibarc@fé uma aula de duas horas. Cada dia será dedicado a um ciclo de escolaridade. Se pretender que seja uma turma sua a participar, contacte a APM.

Como o acesso é totalmente livre, está disponível nesta semana um menu de propostas interactivas realizáveis na Internet. A Mediateca do Pavilhão do Conhecimento será utilizada para a construção de páginas www de alunos, com temas matemáticos.

Para completar todas estas informações consulte www.apm.pt/semana/index.html.

GT da Internet