Marcos milenários na História da Matemática[1]

Um panorama – grandes sucessos, falhanços e desafios

A. J. Franco de Oliveira

Introdução

Centrarei a exposição em torno de variadas situações de (*aparente*, ou *real*) impossibilidade ocorridas no processo histórico de desenvolvimento das matemáticas, situações em que os matemáticos se confrontaram com dificuldades operatórias, metodológicas ou conceptuais, e que tiveram soluções ora positivas (+) ora negativas (-):

positivas (+): solução através de actos criativos, de novos sistemas de números, novas estruturas, novos métodos e conceitos,

negativas (-): impossibilidade real de solução, geralmente só reconhecida muitos séculos depois, dando origem a *teoremas de impossibilidade* (por exemplo, na geometria, na álgebra e na lógica), verdadeiros marcos milenários...

À distância dos tempos, quase apetece pensar que algumas das grandes linhas de desenvolvimento da matemática haveriam inevitavelmente de conduzir àqueles grandes teoremas de impossibilidade. Daremos alguns exemplos a seguir, após uma breve incursão pelas origens históricas da matemática.

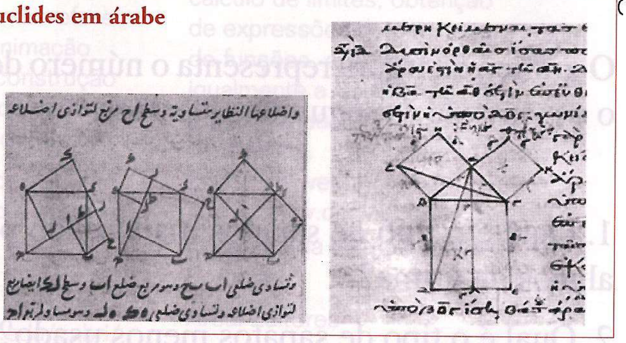
A herança helenística

Nos primeiros séculos do presente milénio assistiu-se a um retomar do desenvolvimento da matemática na Antiguidade, propiciado pelas traduções do árabe para latim de alguns grandes textos dos matemáticos e filósofos gregos (Apolónio, Arquimedes, Aristóteles, Platão, Euclides, Ptolomeu, Papo, Próclo, Diofanto e outros) sobre *Aritmética, Geometria, Mecânica* e *Astronomia*, depositados em centros culturais árabes a sul da Península Ibérica (Córdova, Granada, Toledo, Sevilha) e também trazidos para a Europa por viajantes ao Médio Oriente e Norte de África, os quais tinham sido preservados pelos árabes (apesar da destruição da Biblioteca-Museu de Alexandria em 641 d.C. por fanáticos pagãos), que também tinham absorvido conhecimentos matemáticos dos indianos (sistema decimal).

É necessário, pois, conhecer melhor essa rica herança legada pela civilização dos gregos antigos. É uma herança de realizações, falhanços e desafios para a posteridade. Mencionemos alguns expoentes e suas principais contribuições:

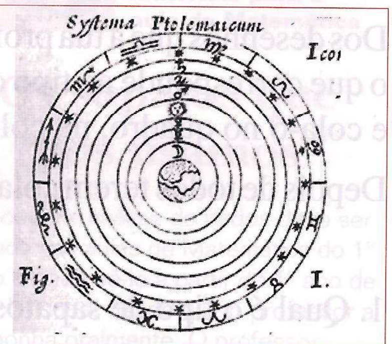
- Tales de Mileto (séc. VII–VI a.C): o primeiro matemático grego, que defendeu a necessidade de demonstrar as proposições matemáticas [a matemática dos babilónicos e egípcios antigos era essencialmente prática e empírica].

Euclides em árabe (1)

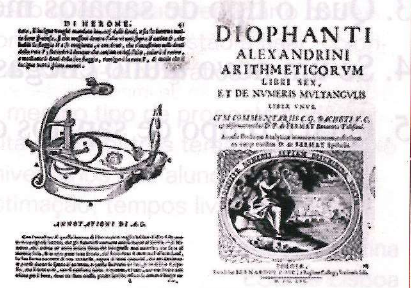


Apolónio e Arquimedes em latim (2)

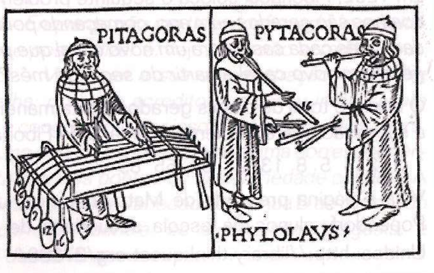
O sistema ptolomaico (3)



As *Mecânicas* de Herão e As *Aritméticas* de Diofanto (4)



(5)
Pitagóricos: matemática e música



(6)
Dedekind e os números irracionais

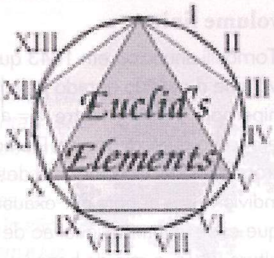
Faz-se tantas vezes a afirmação de que o cálculo diferencial tem a ver com grandezas contínuas, e no entanto uma explicação desta continuidade nunca é dada... [...]

[...] a linha recta é infinitamente mais rica em pontos que o domínio dos racionais em números [...]

[O que eu pretendo é] criar novos números de modo que o domínio dos números ganhe a mesma completude [ou a mesma] continuidade que a linha recta.

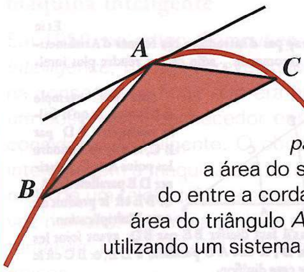
Dedekind, *Continuidade e Números Irracionais*, 1872

(7)
Euclides na Internet



Site interactivo de David Joyce, da Clark University:
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

(8)
Arquimedes: quadratura do segmento de parábola



No tratado *Da quadratura da parábola* Arquimedes demonstra que a área do segmento de parábola compreendido entre a corda *BC* e a parábola é igual a 4/3 da área do triângulo *ABC*. Este resultado foi descoberto utilizando um sistema de alavanca.

(9)
3 problemas clássicos de construções com régua não graduada e compasso

Trissecção do ângulo e duplicação do cubo

Primeira demonstração de impossibilidade dada em 1837 por Pierre Wantzel (1814-1848).

Quadratura do círculo

Demonstração de impossibilidade dada em 1881 por Ferdinand Lindemann (1852-1939). Lindemann demonstrou que π é um número transcendente, resultando daí a impossibilidade da quadratura do círculo.

Bourbaki, na 1ª linha do volume I dos *Éléments de Mathématique* (Paris, 1939) diz «Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration.»

- Os pitagóricos (séculos VI-V a.C., Crotona, Itália):
  - relação entre matemática (inteiros positivos e razões entre eles) e música, daí a ideia de explicar o mundo através dos números ("tudo é número") e concepção da matemática como instrumento privilegiado para compreender o mundo (Platão);
  - descoberta dos incomensuráveis (impossibilidade de medir *racionalmente* a diagonal de um quadrado tomando o lado para unidade: "irracionalidade de $\sqrt{2}$"): é um falhanço, ou uma insuficiência — primeiro confronto entre o *discreto* dos números inteiros e o *contínuo* da geometria —, colmatada geometricamente pela teoria das proporções de Eudóxio, mas que deixa um desafio para a posteridade: enriquecer suficientemente o universo numérico para corresponder ao contínuo geométrico. Somente completado no séc. XIX (Dedekind, Cantor, Weierstrass, 1872);
  - grande desenvolvimento da aritmética ou teoria dos números (ligações iniciais estreitas com a numerologia, a magia e misticismo dos números).
- Euclides de Alexandria: grande sistematizador de todos os conhecimentos matemáticos precedentes, nos *Elementos* (300 a.C.),
  - inaugura o método axiomático (em geometria), a forma mais perfeita de apresentação dos conhecimentos matemáticos (já está na Internet!). Embora com algumas falhas, completadas no séc. XIX (Pieri, Pasch, Peano, Hilbert).
- Apolónio de Perga (225 a.C.): as cónicas (tantas aplicações modernas: órbitas dos planetas e cometas (Kepler), óptica, balística, etc.).
- Arquimedes de Siracusa (III a.C.): o maior
  - grande descobridor ("Eureka", quadraturas e cubaturas usando a balança ou alavanca, $(4/3)\pi r^3$ = volume da esfera) e inventor («Não matem O Geómetra» — Marcelo), precursor do cálculo integral, utilizando indivisíveis (*O Método*, ficou desconhecido até 1906), mas fazia as demonstrações pelos métodos rigorosos da geometria — intuição e descoberta *vs.* demonstração).
- Ptolomeu, Eratóstenes: medições astronómicas.
- Outras grandes questões e desafios:
  - o problema das paralelas: o postulado de paralelismo de Euclides é *verdadeiro*?, questão só resolvida nos anos 70 do século XIX: impossível demonstrar aquele postulado, utilizando os restantes postulados de Euclides;
  - construções com régua (não graduada) e compasso (segundo o *princípio da parcimónia* de Platão): 3 problemas clássicos (quadratura do círculo, duplicação do cubo, trissecção do ângulo) só resolvidos pela negativa no séc. XIX: demonstrações de impossibilidade;

- paradoxos do movimento de Zenão de Eleia ("horror ao infinito"): compreender a natureza do movimento, do espaço e do tempo, só resolvidos com a moderna teoria das séries e do cálculo infinitesimal;
- a lógica de Aristóteles: compreender o raciocínio, só finalizado nos séculos XIX e XX para a lógica clássica (Boole, Frege, Gödel).

O segundo milénio

- Leonardo de Pisa ou Fibonacci (*Liber Abaci*, 1202) introduz na Europa o sistema decimal hindu-árabe e os algoritmos operatórios usuais, o que representa uma primeira *democratização* das matemáticas; sucessão de Fibonacci (problema da criação de coelhos) definida recursivamente por $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, presente em tantos fenómenos físicos e biológicos.
- Renascimento:
  - os algebristas italianos (del Ferro, Fiore, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Bombelli) resolveram equações até ao grau 4, exprimindo as raízes em função dos coeficientes com +, -, x, ÷ e extracção de raízes; primeira aparição dos números complexos ("quantidades impossíveis") na *Ars Magna* de Cardano. *Desafio*: fazer o mesmo para a quíntica e grau superior a 4 — só completado no século XIX (Ruffini, Abel, Galois), mais outro teorema de impossibilidade;
  - matemática da navegação (Pedro Nunes): os portugueses não acreditaram em Colombo, porquê?
  - redescoberta dos indivisíveis (Kepler, Pascal, Galileu, Cavalieri); em Galileu: paradigma da modelação matemática;
  - Torricelli (o dos vasos comunicantes) faz a primeira cubatura de um sólido ilimitado com volume finito. Talvez o infinito seja amenizável, afinal de contas...
- Descartes: números negativos; cálculo dos segmentos como se fossem números (o produto de dois segmentos é um segmento, e não um rectângulo, como pensavam os gregos), primeiro passo para...
- Pioneiros do cálculo infinitesimal (Newton, Leibniz, M. de l'Hospital, Euler, ...): a matemática como linguagem das ciências.

Revoluções e fundamentos nos séculos XIX e XX

- Novidade das demonstrações de impossibilidade (resolubilidade algébrica: emergência do conceito de estrutura; construções com régua e compasso: ligação re-encontrada entre a álgebra e a geometria);
- resolução do problema das paralelas e geometrias não euclidianas (Saccheri, Gauss, Bolyai e Lobachevskii);
- rigorização da Análise: construção dos sistemas de números, noção de limite como fundamental, etc., pagando um preço: abolição dos indivisíveis, infinitamente grandes e pequenos numéricos, mas não definitiva (criação da *Análise Não-standard* nos anos 60 deste século); substituição da intuição geométrica por propriedades analíticas dos números e das funções, com recurso a

Fibonacci e os casais de coelhos (10)

Em 1202, Fibonacci coloca o seguinte problema: *quantos casais de coelhos são gerados num ano, começando por um único casal, se em cada mês cada casal gera um novo casal que por sua vez é capaz de gerar um novo casal a partir do segundo mês?*

O número total de casais gerados desta maneira, mês a mês, forma a sucessão posteriormente chamada de Fibonacci:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 ...

Veja a página premiada de Matt Anderson, Jeffrey Frazier e Kris Popendorf, alunos da escola secundária de Logan, nos Estados Unidos: http://library.thinkquest.org/27890/

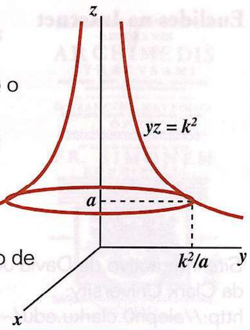
Cardano, *Ars Magna* e os números complexos (11)

Num dos últimos capítulos de *Ars Magna*, Cardano coloca o problema de dividir o número 10 em duas partes cujo produto seja 40. Quando chega às soluções

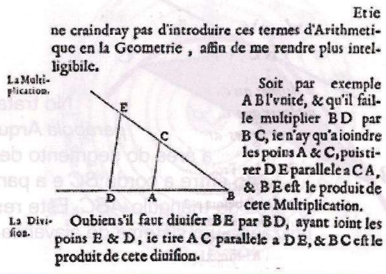
$5+\sqrt{-15}$, $5-\sqrt{-15}$, que Cardano escreve "5p:Rm:15" e "5p:Rm:15", comenta que este resultado é "tão subtil quanto inútil".

Torricelli: um sólido ilimitado com volume finito (12)

Torricelli anunciou em 1643 que era finito o volume do sólido gerado pela rotação da hipérbole $yz = k^2$ (entre $z = a$ e $z = \infty$) em torno do eixo dos *zz*. Demonstrou, primeiro pelo método dos indivisíveis e depois por exaustão, que esse volume é igual ao de um cilindro de altura k^2/a e raio da base igual ao semidiâmetro da hipérbole ($\sqrt{2k}$).



Descartes: aritmética de segmentos (13)



Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E est le produit de cete Multiplication.

La Diuision.

Oubien s'il faut diuiser B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C est le produit de cete diuision.

Geometrias não euclidianas (14)

Saccheri *A hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa, porque é repugnante para a natureza da linha recta.*

Gauss *Estou cada vez mais convencido que a necessidade da nossa geometria não pode ser demonstrada [...]*

Janos Bolyai [...] *criei um mundo novo e diferente a partir do nada.*

Lobatchevskii [...] *outra geometria pode existir, se não na natureza, então ao menos na matemática* [...]

(15)

Cantor e Dedekind (em 1877) sobre a existência de uma bijecção de um quadrado sobre um segmento

Cantor para Dedekind – *Enquanto não me tiver confirmado [o resultado anterior], o mais que posso dizer é*: vejo, mas não acredito. *[...]* Dedekind para Cantor – *Verifiquei a sua demonstração e não lhe encontrei nenhuma falha; portanto acredito que o seu interessante teorema é verdadeiro e congratulo-o por isso.[...] Mas acredito agora, de maneira provisória, no seguinte teorema: dada uma correspondência unívoca e completa entre os pontos de uma variedade contínua* A *de dimensão* a *e os pontos de outra variedade contínua* B *de dimensão* b*, então a própria correspondência, se* a *e* b *são desiguais, é necessariamente [...] descontínua.*

(16)

Hilbert: questões em aberto; Gödel: respostas

- consistência da (teoria dos números) e da análise? não
- consistência da teoria dos conjuntos? não
- completude da teoria dos números e da análise? não
- completude da lógica elementar? sim

(17)

Mandelbrot sobre a "geometria da natureza"

Porque razão a geometria é descrita muitas vezes como "fria" e "seca"? Uma razão assenta na sua incapacidade para descrever a forma de uma nuvem, de uma montanha, de uma costa, de uma árvore. As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as costas não são circunferências e nem a cortiça é lisa nem a luz se desloca em linha recta.

(18)

Alan Turing sobre as condições para considerar uma máquina inteligente

Em 1950, no artigo *Computing Machinery and Intelligence*, Turing escreveu que se uma máquina conseguisse fingir que era humana perante um observador conhecedor então poderia ser considerada inteligente. O observador deveria interagir com a máquina e com uma pessoa por meio de um teletipo (para evitar ter que imitar a voz humana) e tanto a pessoa como a máquina tentariam persuadir o observador que eram humanos.

(19)

Um desafio antigo: a conjectura de Poincaré

Se esticamos uma banda de elástico em torno de uma maçã, podemos reduzi-la a um ponto encolhendo-a lentamente, sem a partir e sem a separar da supefície. Poicaré sabia, há cerca de 100 anos, que esta propriedade (ser simlesmente conexa) caracteriza essencialmente a esfera bidimensional. E interrogou-se se a esfera tridimensional (lugar geométrico dos pontos que distam uma unidade da origem, no espaço a quatro dimensões) teria uma propriedade análoga.

- um novo e poderoso instrumento para as matemáticas: a teoria dos conjuntos de Cantor, que permite, pela primeira vez, a domesticação dos infinitos; apesar de alguns problemas iniciais (paradoxos) acaba por se tornar no séc. XX a grande teoria fundacional para as matemáticas; mas,
- ficam problemas em aberto: o problema da consistência ou não-contradição (teoremas de incompletude das teorias formais, Gödel, 1931), o problema do contínuo ("quantos pontos tem uma recta?"); e
- a matemática torna-se mais *pura*, deixa de ser só a matemática do mundo real para ser também a dos mundos possíveis (e, afinal de contas, qual é o mundo *real*? — nem os físicos sabem...); o real é finito mas muito complexo...
- teoria dos algoritmos e da computabilidade, após definição matemática de algoritmo e de função computável (mais teoremas de impossibilidade na lógica e na computação, por exemplo: impossível decidir algoritmicamente se uma equação diofantina arbitrária $f(x_1,...,x_n) = 0$ tem ou não soluções inteiras não triviais; indecidibilidade do problema da paragem, indecidibilidade e incompletude das teorias formais consistentes suficientemente ricas, resultados de independência relativa na teoria dos conjuntos — Axioma da Escolha, Hipótese do Contínuo —, etc.).

Novos desafios

- Compreender mais e melhor o que se pode fazer e não se pode fazer, por exemplo, na Inteligência Artificial (talvez mais um teorema de impossibilidade em vista, mas somente após definição matemática precisa do que é a I.A.);
- compreender melhor o caos, os fenómenos da turbulência, a natureza fractal da natureza-mãe;
- compreender melhor o cérebro, a consciência, como surge um "eu" (consciência de si mesmo), o código genético;
- compreender melhor a língua natural (problemas da tradução automática);
- resolver os inúmeros problemas matemáticos em aberto (conjectura de Goldbach, Hipótese de Riemann, etc.), só porque "estão lá", porque os infinitos matemáticos (úteis para aproximar ou "arredondar" os finitos muito complexos) são uma fonte inesgotável de surpresa e maravilha.

Notas

1. Notas resumidas de conferências que, com pequenas variações, foram apresentadas em algumas escolas secundárias e instituições universitárias em Lisboa, Évora, Porto, Setúbal, Portalegre e Macau, no âmbito do Ano Mundial da Matemática.

A. J. Franco de Oliveira
Universidade de Évora

(*continua na página 60*)

pação em relacionar as três dimensões conhecimentos, capacidades e atitudes, e é possível ainda, a um leitor atento, depreender até que ponto trabalhar este ou aquele tópico matemático é fundamental e imprescindível. O segundo aspecto transcrito, por exemplo, coloca a ênfase na capacidade — explorar, investigar, ... — de trabalhar determinados conhecimentos — padrões e relações numéricas, ... — mas de uma certa maneira — com gosto, desenvolvendo a predisposição para, ... Por outro lado, uma interpretação possível é a de que trabalhar divisores e múltiplos neste contexto é desejável mas não é o fundamental. As relações e os padrões numéricos, esses sim fundamentais, podem ser trabalhados à custa de muitos outros elementos matemáticos que não estes.

De facto, estes novos documentos não falam de nada de que não se falasse já, mas pretendem, e quanto a mim bem, ir mais além no entendimento do que já existia. E este é, sem dúvida, um dos aspectos mais interessantes das brochuras sobre competências essenciais da Matemática.

Notas

[1] Competências gerais e transversais, competências essenciais do Português e competências essenciais da Matemática.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I., 1999, *A Matemática na Educação Básica*, Departamento da Educação Básica, Ministério da Educação, Lisboa.

Associação de Professores de Matemática, 1998, *Matemática 2001: diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*, APM, Lisboa.

DEB - ME, 1999, *Gestão Flexível do Currículo*, Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação, Lisboa.

DEB - ME, 1999, *Matemática - competências essenciais*, Documento de trabalho, Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação, Lisboa.

DEB - ME, 1999, *Competências gerais e transversais*, Documento de trabalho, Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação, Lisboa.

DGEBS - ME, 1991, *Organização Curricular e Programas - Matemática - 3º ciclo do ensino básico*, Vol. I e Vol. II, Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário, Ministério da Educação, Lisboa.

Fernanda Perez
Esc. Sec. da Amora

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de modo a tornar comportável a inclusão de todas as contribuições no espaço disponível na revista.

Marcos milenários na História da Matemática (continuação da pág. 57)

Nota da redacção

As ilustrações foram inseridas por Eduardo Veloso, com a concordância e revisão do autor.

Notas sobre algumas das ilustrações:

(1), (2), (4) e (5). Figuras extraídas do livro *Mathématiques en Mediterranée: des tablettes babyloniennes au théorème de Fermat*. Catálogo de uma exposição, ed. Édisud/Musées de Marseille, 1988.

(3). Figura extraída do livro *Alquimia e Misticismo*, de Alexander Roob. Ed. Taschen, 1997.

(6). Uma tradução foi publicada no Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática de Dezembro de 1999.

(11). Figura extraída da obra citada *Mathématiques...*

(13). Retrato de Descartes extraído da obra citada *Mathématiques...* Texto do livro *La Géometrie*, de Descartes, ed. fac simile (1ª edição, 1637) bilingue da Dover Inc., 1954.

(15). Extractos da correspondência entre Cantor e Dedekind, in *The History of Mathematics, a reader*, org. por John Fauvel e Jeremy Gray, pag. 578. Ed. The Open University, 1987.

(16). Retratos de Hilbert e de Gödel extraídos respectivamente dos livros: *Hilbert-Courant*, de Constance Reid, ed. Springer-Verlag, 1986. *Reflections on Kurt Gödel*, de Hao Wang, ed. The MIT Press, 1987.

O autor faz notar que "as duas respostas apenas são 'não' se não saírmos das teorias cuja consistência se quereria demonstrar".

(17). Primeiro parágrafo da Introdução do livro *The Fractal Geometry of Nature*, de Benoit B. Mandelbrot, ed. W. H. Freeman and Company, 1977.

(18). Fonte: *Alan Turing, The Enigma*, de Andrew Hodges, ed. Simon & Schuster, Inc.,1983.