Matemática visual

Michele Emmer

A computação gráfica é um instrumento importantíssimo, tanto no campo científico como artístico; um novo e poderoso instrumento que não elimina, no entanto, os demais instrumentos à disposição dos cientistas e dos artistas. O primado continua a pertencer à capacidade criativa do Homem. Nenhuma máquina conseguirá alguma vez substituir esta capacidade singular.

Os teoremas visuais

Nos nossos dias seria impossível tratar certos sectores da matemática contemporânea — dos fractais à teoria do caos, passando pelos sistemas dinâmicos — sem recorrer à eficácia dos computadores para produzir gráficos apropriados. O aparecimento desta nova tecnologia modificou em parte o modo como se faz a Matemática. Em parte, porque o fenómeno apenas diz respeito a certos sectores da Matemática e não se pode obviamente generalizar. O computador tornou-se um instrumento que permite experiências matemáticas que abrem perspectivas completamente novas.

Em 1993, foi publicado na revista *Scientific American* um artigo intitulado *The Death of Proof* ("A Morte da Demonstração"), onde o autor a certo passo dizia: "O computador está a obrigar os matemáticos a reconsiderar a própria natureza da demonstração, e consequentemente da verdade. Nos últimos anos, para conseguir certas demonstrações foi necessário executar uma enorme massa de cálculos, e assim nenhum ser humano pode verificar essas pretensas demonstrações feitas com computador; apenas outros computadores o podem fazer. Recentemente, alguns investigadores propuseram uma demonstração com computador que fornece apenas a probabilidade e não a certeza da verdade, o que para alguns matemáticos é uma verdadeira incongruência. Outros ainda preparam a 'vídeo-demonstração' na esperança de que seja mais convincente do que páginas e páginas de fórmulas". Haverá que precisar de imediato que o autor do artigo estava a pensar apenas em determinados problemas matemáticos e em certos sectores onde a "vídeo-demonstração" poderia ser útil.

Um exemplo famoso: as superfícies minimais

No artigo do *Scientific American* citava-se, entre outros, David Hoffman, hoje no MSRI (*Mathematical Science Research Institute*, de Berkeley), que juntamente com William Meeks III, e utilizando as equações descobertas por um matemático brasileiro, C. Costa, demonstrou a existência de uma categoria de superfícies minimais de tipo topológico bastante elevado, superfícies minimais com buracos, e portanto impossíveis de obter por meio de películas de sabão. O método usado por aqueles investigadores consistiu em estudar visualmente, num terminal vídeo, as superfícies construídas a partir das equações de Costa para tentar compreender a sua estrutura. Através da análise das imagens os dois matemáticos conseguiram estabelecer algumas simetrias entre as figuras vistas e graças a tal observação ficaram aptos a demonstrar analiticamente a existência das soluções.

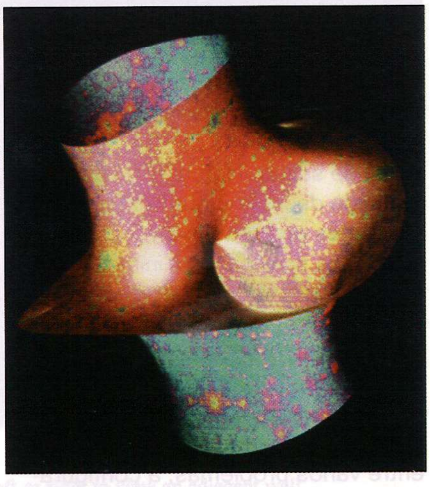


figura 1

Foi este um dos primeiros, se não o primeiro resultado no qual a computação gráfica desempenhou um papel importante na demonstração de um problema matemático não trivial, pois o problema resolvido estava em aberto há 200 anos.

Desde o seu surgimento, a teoria das superfícies minimais baseou-se de maneira preponderante em imagens. Antoine Ferdinand Plateau (1808-1883) publicou em 1873 o resultado de quinze anos de investigação: *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires.*

No caso de duas bolas de volume igual obtém-se uma configuração perfeitamente simétrica com uma lâmina plana dividindo as duas bolas.

A demonstração, obtida utilizando essencialmente o computador, foi anunciada por Joel Hass e Roger Schlafly em 16 de Agosto de 1995 durante o *Math Festival* de Burlington (nos EUA).
Foram obtidas imagens muito interessantes das duplas bolas por John Sullivan no Geometry Center da Universidade do Minnesota em Minneapolis, um centro encerrado em 1998.

Há poucos meses, Michael Hutchings, Frank Morgan, Manuel Ritoré e Antonio Ros anunciaram ter demonstrado que a configuração de duas bolas (a chamada "dupla bola") tal como aparece nas imagens de Sullivan é efectivamente a que tem a propriedade de mínimo. No sentido de que se se formam dois volumes de ar em duas duas bolas de sabão que se tocam, elas assumirão uma configuração que consiste em três superfícies: as duas bolas iniciais truncadas pela parte comum e a superfície que as separa. Esta superfície é curva excepto no caso em que os dois volumes de ar sejam iguais.

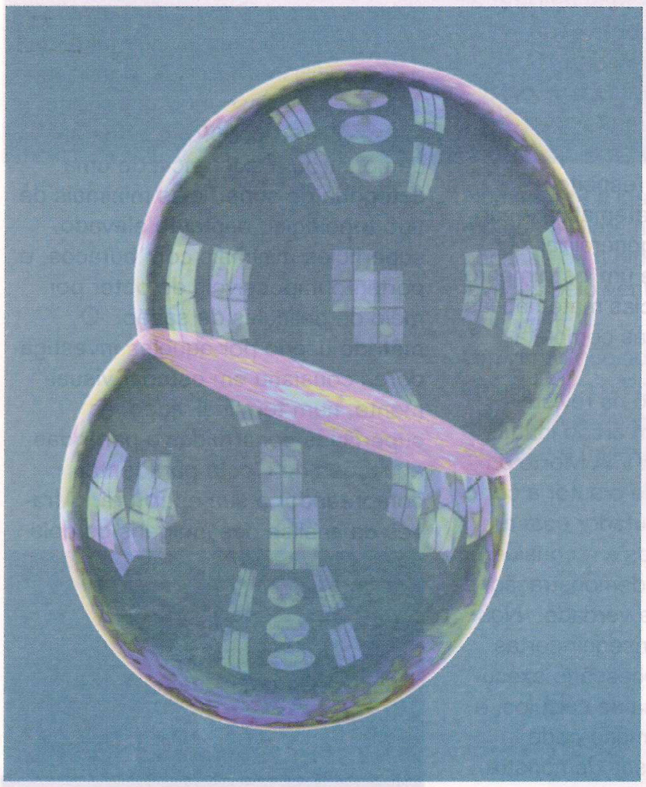


figura 2

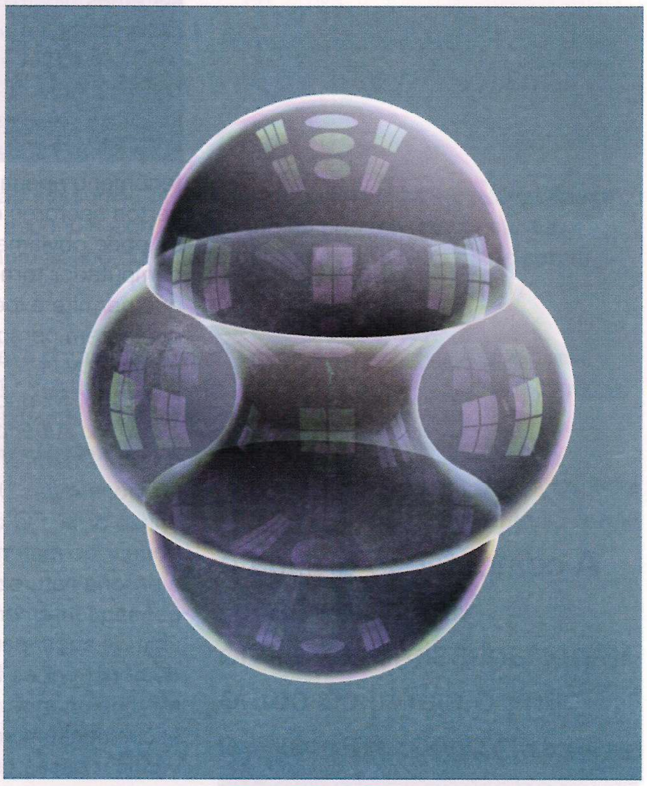


figura 3

Nessa obra, são expostos vários problemas relativos às lâminas e às bolas de sabão. Naturalmente, está cheio de desenhos que ilustram os diferentes problemas. Nasce assim a teoria das superfícies minimais, ou seja as superfícies que minimizam a área da superfície em relação a determinada propriedade; no caso de uma bola de sabão, em relação ao volume de ar que contêm.
No livro de Plateau observava-se, entre vários problemas, a configuração que assumem duas bolas de sabão quando se tocam.

Faltava uma demonstração da configuração de duas bolas de volume de ar diferente. O problema consiste em provar que duas bolas de sabão que se tocam, formarão uma configuração do tipo da imagem computorizada realizada por Sullivan. As equações que permitem modelar as superfícies minimais e as bolas de sabão são de tipo não linear, ou seja complicadas. Não são fáceis de tratar e essa é a razão pela qual alguns matemáticos ganharam a medalha Fields (equivalente ao Nobel) trabalhando com superfícies minimais.

Neste caso, a parede que separa as duas bolas será plana.
Esta configuração é a única configuração que tem a área mínima superficial global em relação a qualquer outra configuração formada pelas duas bolas (do tipo da bola "não *standard*" de Sullivan).

O artigo "Proof of the Double Conjecture" está na Internet desde 15 de Março de 2000.

Pode consultar-se no sítio: http://www.williams.edu/Mathematics/fmorgan/ann.html.

As imagens de Sullivan encontram-se em: http://www.math.uiuc.edu/~jms/Images. Outras imagens encontram-se em: http://www.msri.org/publications/sgp/jim/geom/cmc/library/double/index.html.

As primeiras imagens

As primeiras tentativas para utilizar a computação gráfica na geometria e na matemática foram levadas a cabo em fins dos anos Sessenta quando um especialista em informática, Michael Noll, concebeu um programa de animação de um hipercubo. Tratava-se de recorrer às várias possibilidades de projecção de um cubo a quatro dimensões num espaço a três dimensões e de com um *plotter* imprimir em papel e em sequência as diferentes imagens: a técnica dos desenhos animados (fig. 4).

A ideia foi mais tarde retomada por Thomas Banchoff e Charles Strauss, da Brown University, em Providence, nos Estados Unidos. Foram então realizados os primeiros filmes de superfícies geométricas em evolução no espaço utilizando a técnica da animação computorizada. Em particular o filme *Hypercube: projecting and slicing*, de1976, mostrava uma sequência contínua das diversas projecções do hipercubo. Era possível assim ver o hipercubo mover-se no espaço. O filme provocou uma grande impressão ao ser projectado no congresso mundial de matemática de Tóquio, em 1978. Se já se conhecia muita coisa do objecto geométrico hipercubo, a possibilidade de ver no ecrã de um computador esse objecto em movimento permitia pela primeira vez investigar as suas propriedades, por meio de uma experimentação em tudo semelhante à das outras ciências. Um poderoso meio de investigação, capaz por outro lado de fornecer imagens muito sugestivas. Poucos anos depois, o mesmo Thomas Banchoff, com outros colegas da Brown University, realizou a animação em computador da esfera a quatro dimensões (fig. 5).

Tornava-se realidade o sonho de Quadrado, o protagonista do romance *Flatland* ("O Mundo Plano"), escrito por A. Abbot em 1884, de ver os objectos do espaço a quatro dimensões.

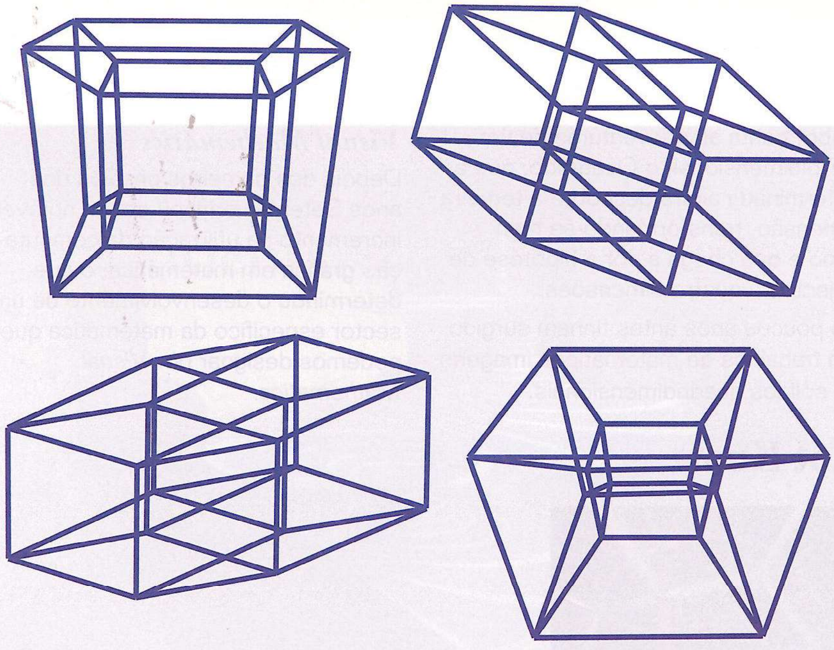
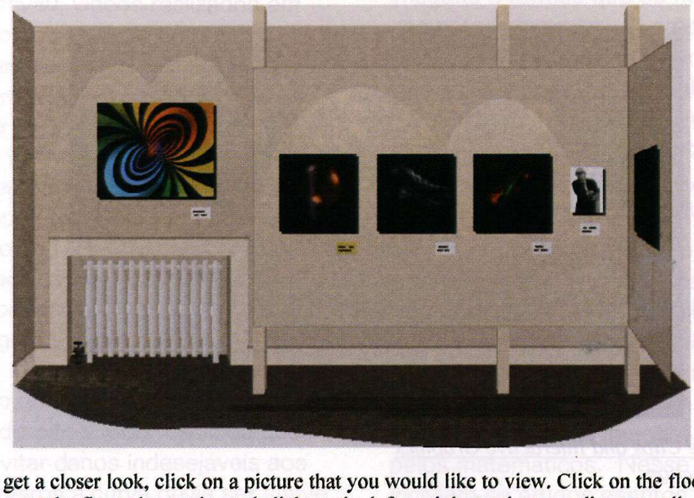


figura 4

Surfaces Beyond the Third Dimension: Gallery View

To get a closer look, click on a wall that you would like to view.
(The materials available for the items outlines in gold are more extensive.)



To get a closer look, click on a picture that you would like to view. Click on the floor to get the floor plan again, and click on the left or right to view an adjacent wall.

figura 5

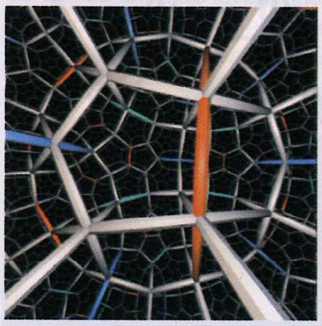
Abbot conta as desventuras de um ser bidimensional, o Quadrado, que a determinada altura descobre a terceira dimensão, transformando-se num cubo e que chega a pôr a hipótese de objectos a quatro dimensões.

Só poucos anos antes tinham surgido em trabalhos de matemáticos imagens de sólidos quadridimensionais.

Visual Mathematics

Depois dos primeiros ensaios dos anos Setenta verificou-se um notável incremento na utilização da computação gráfica em matemática; o que determinou o desenvolvimento de um sector específico da matemática que podemos designar por *Visual Mathematics*.

Not Knot:



Not Knot is a guided tour into computer-animated hyperbolic space. It proceeds from the world of knots to their complementary spaces -- what's not a knot. Profound theorems of recent mathematics show that most known complements carry the structure of hyperbolic geometry, a geometry in which the sum of three angles of a triangle always is less than 180 degrees.

Audience: Mathematics students, particularly advanced undergraduates and graduate students.
Distributed by: A. K. Peters.

A number of still images from *Not Knot* are available from the Geometry Center Graphics Archive.

Up: *Video Productions*

The Geometry Center Home Page

figura 6

Sphere turning inside out (overhead view)

This image is the centerfold of *Making Waves*, a full-color 48-page book that accompanies *Outside In*.

Next: *Movie Clips and Interactive Graphics*
Up: *Introduction*

The Geometry Center Home Page

figura 7

Não se trata apenas, como se poderia pensar, em tornar visíveis, ou seja visualizar, fenómenos bem conhecidos por meio de instrumentos gráficos, mas antes de utilizar instrumentos visuais para conseguir formar uma ideia de problemas ainda em aberto na investigação matemática. Thomas Banchoff e Charles Strauss tiveram a ideia de recorrer à animação de gráficos em computador para investigar visualmente as propriedades geométricas e topológicas de superfícies tri e tetra-dimensionais. Esta utilização do computador em matemática era nova. Tornava possível construir uma superfície num terminal vídeo e assim imprimir-lhe movimento e transformá-la para estudar melhor as suas propriedades. Mais do que funcionarem como um apoio à intuição, os computadores tornam-se instrumentos essenciais para a construção de modelos. À medida que instrumentos e programas de computador se tornavam mais sofisticados, iam também aumentando a profundidade e a importância das aplicações da computação gráfica aos problemas matemáticos.

Em Outubro de 1992, realizou-se, também no MSRI de Berkeley, um congresso. O tema era *A Visualização das Estruturas Geométricas*. Em todas as conferências se utilizava uma *workstation* que permitia mostrar em tempo real os resultados gráficos obtidos no estudo de determinados problemas geométricos. Naturalmente, não era possível fornecer um demonstração analítica de todas as soluções gráficas conseguidas.

Alguns anos antes, em 1987, nascia na Universidade do Minnesota, em Minneapolis, o *Geometry Supercomputer Project* destinado a pôr à disposição dos melhores matemáticos do mundo grandes computadores com elevadas capacidades gráficas para resolver problemas de interesse relevante.

No âmbito do *Geometry Project* foram realizados, entre outros, três filmes de animação computorizada: *Not Knot*, no qual são estudados os espaços complementares de um nó; *Inside Out*, que vira do avesso uma esfera; *The Shape of Space*, sobre a forma do espaço onde julgamos viver.

Os filmes foram realizados por um grupo de matemáticos e de informáticos. Em Agosto de 1999, o *Geometry Center* foi encerrado por os financiadores não se sentirem satisfeitos com os resultados económicos conseguidos!

Muitos daqueles que contribuíram para a sua realização mudaram-se para outros sítios, desde o MSRI de Berkeley, ao NCSA em Urbana e à Universidade Técnica de Berlim. Em 1995, tinha-se realizado em Berlim um *workshop* internacional sobre *Visualization and Mathematics*, cujas actas foram publicadas em 1997. Neste mesmo ano, realizou-se um novo *workshop*, também em Berlim e também sobre o mesmo tema. E é esta a razão de escolha de Berlim para a organização do *VideoMath Festival* de 1998, o primeiro em absoluto do género: Berlim tornou-se na nova capital da matemática animada em computador.

Filmes de Matemática

O congresso mundial de matemática que se realiza de quatro em quatro anos serve de palco ao mais alto e ambicionado reconhecimento manifestado aos matemáticos que se distinguiram na investigação. O último congresso teve lugar em Berlim de 18 a 27 de Agosto de 1998. Além das variadíssimas conferências plenárias e das dezenas de conferências dos oradores convidados, nas quais os matemáticos tentaram não só fazer o ponto sobre as investigações efectuadas, mas sobretudo delinear as orientações da investigação para o futuro, havia uma novidade: um festival de cinema matemático, o *VideoMath Festival*, organizado por Konrad Polthier, da Universidade Técnica de Berlim, sede do congresso mundial, e Hans-Christian Hege, especialista em computação gráfica.

Quatro noites de projecções num grande cinema do centro da cidade — iniciando-se cada uma delas com um genérico realizado para a ocasião, como convém a um verdadeiro festival. A ideia tinha nascido um ano antes quando foi lançado um concurso a nível mundial destinado a reunir vídeos matemáticos para uma selecção.

figura 8

Foram enviados mais de cem trabalhos, dos quais foram seleccionados vinte e quatro. Os vídeos seleccionados foram reunidos numa cassete vídeo distribuída pela Springer. O sucesso conseguido por esta cassete foi tal que esta editora alemã decidiu criar uma colecção de cassetes vídeo de matemática, tendo os primeiros títulos aparecido durante 2000. Uma iniciativa análoga decorre no congresso europeu de matemática em Barcelona e realizar-se-á no próximo congresso mundial de matemática, em Pequim, no ano 2002.

Os vídeos seleccionados incluíam, além do já referido *Inside Out* (que além disso foi o vencedor do prémio do Festival), vídeos realizados em diversos países do mundo utilizando técnicas de computação gráfica mas também técnicas tradicionais. Dedicou-se um vasto espaço à simulação, desde ver como se fazem os testes de aderência ao piso de um automóvel (o famoso teste de *slalom* que o novo modelo da Mercedes não tinha superado) até como se constrói um *oito-voador* fantástico no qual os passageiros viajam de cabeça para baixo. O famosíssimo matemático alemão que forneceu o modelo para a curva do *oito-voador* explicou que para evitar danos indesejáveis aos passageiros a curva devia ser suave (regular, dizem os matemáticos) e por isso utilizava uma curva do (tipo de um polinómio de) terceiro grau. E ainda se diz que a álgebra não serve para nada! Alguns vídeos eram de imagens matemáticas sublinhadas apenas por um comentário musical, tipo *Mandelbloom*, rosas fractais que se reproduziam até ao infinito. Havia também lugar para as bolas de sabão, quer realizadas em computador, quer reais. No fim de cada projecção, o público que tinha pago bilhete para entrar podia votar no seu vídeo preferido; foi este o processo de nomeação do vencedor.

Matemática e arte

Naturalmente, os artistas também não podiam ficar indiferentes às novas imagens e formas que os matemáticos estavam a criar. O próprio facto de cada vez mais se realizarem em todo o mundo novos encontros sobre "Matemática e Arte" é prova disso. Só em 2000, haverá encontros de matemática e arte nos EUA, em Portugal, em França e em Itália.

Já em 1993, no próprio ano da publicação do artigo da *Scientific American*, a MIT Press publicava um volume intitulado *The Visual Mind; Art and Mathematics* dedicado às relações que se estabeleceram entre artistas e as novas imagens criadas pelos matemáticos. Nesse volume incluíam-se artigos escritos por matemáticos e também por artistas e historiadores de arte.

Dado o grande interesse despertado por esta obra, quer nos meios científicos quer entre os artistas, encontra-se já em preparação na editora MIT Press um segundo volume que sairá no ano 2002. Na capa do livro da MIT Press de 1993 via-se uma obra do famoso artista suíço Max Bill, desaparecido em 1996. O primeiro artigo era constituído pela reimpressão de um artigo seu de 1949 dedicado à abordagem matemática da arte. Escrevia Bill:

> [...] a matemática não é apenas um dos meios de pensamento primário, e portanto, um dos recursos necessários para o conhecimento da realidade circundante, mas também, nos seus elementos fundamentais, uma ciência das proporções, do comportamento objecto a objecto, grupo a grupo, movimento a movimento. E já que esta ciência possui em si tais elementos fundamentais e estabelece entre eles relações significativas, é natural que factos semelhantes possam ser representados, transformados em imagens.[...]

Além disso, estas representações matemáticas, estes casos limite em que a matemática se manifesta plasticamente, possuem indiscutivelmente um efeito estético, acrescenta Bill.

Vale a pena lembrar estas palavras para não dar a impressão que a arte, assim como a matemática, esteja reduzida a meras operações mais ou menos sofisticadas com a computação gráfica. A computação gráfica é um instrumento importantíssimo, tanto no campo científico como artístico; um novo e poderoso instrumento que não elimina no entanto os demais instrumentos à disposição dos cientistas e dos artistas. O primado continua a pertencer à capacidade criativa do Homem. Nenhuma máquina conseguirá alguma vez substituir esta capacidade singular.

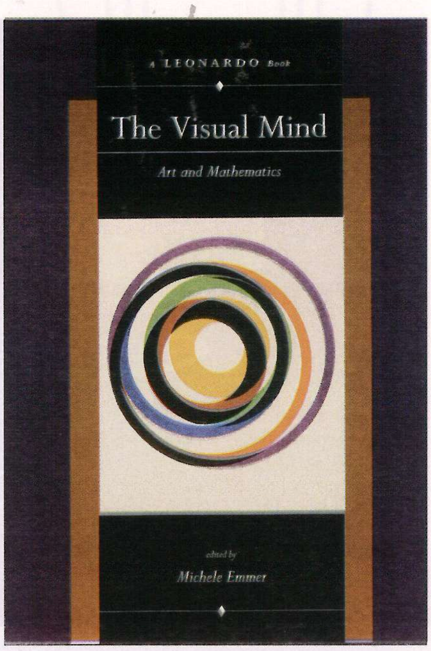


figura 9

Bibliografia

T. Banchoff, *Oltre la terza dimensione*, Zanichelli, Bolonha, 1993.

P. Concus, R. Finn, D. Hoffman *Geometric Analysis and Computer Graphics*, MSRI Series n. 17, Springer, Berlim, 1991.

M. Emmer, ed.,*The Visual Mind: Art and Mathematics*, MIT, Boston, 1993.

M. Emmer, *Bolle di sapone*, La Nuova Italia, 1991.

M. Emmer, *La perfezione visibile*, Theoria, 1991.

M. Emmer, ed., *Visual Mathematics*, Special issue, Int. J. Shape Modeling, vol. 5, n. 1, Junho 1999.

M. Emmer, *Art and Mathematics*, series of 18 videos, 1980-1996.

H.-C. Hege e K. Polthier,(eds.) *Visualization and Mathematics*, Springer, Berlim, 1997.

_____________, *Mathematical Visualization*, Springer, Berlim,1998.

_____________, *Videomath festival at ICM98*, video, Springer, Berlim, 1999.

D. Hoffman, *The computer-aided discovery of new embedded minimal surfaces*, The mathematical intelligencer, vol. 9, n. 3, 1987.

J. Horgan, *The Death of Proof*, Scientific American, Outubro, 1993.

Referências /Figuras

(1) D. Hoffman, W.H. Meeks III, J.T. Hoffman "Superfície mínima completa imersa de género topológico 1", computação gráfica a partir das equações de C. Costa, 1985. © Hoffman, Meeks, Hoffman.

(2) Quando duas bolas de sabão se unem como na figura, produzem uma dupla bola que consiste em duas porções de esfera e uma superfície de separação, que é plana se as bolas contêm dois volumes de ar iguais. Simulação no computador de John Sullivan, Universidade de Illinois em Urbana Champaign, 1995 © J. Sullivan.

(3) Configuração *não standard* de duas bolas de sabão, das quais uma em forma de amendoim e a outra de anel (de bóia) cuja área da superfície global externa é maior do que a configuração *standard*. Simulação no computador de John Sullivan, Universidade de Illinois em Urbana Champaign, 1995 © J. Sullivan.

(4) Quatro das projecções possíveis de um hipercubo, o cubo a quatro dimensões, no espaço a três dimensões.

(5) Sítio na Internet de Thomas Banchoff, chamado *Beyond the third dimension* ("Para além da Terceira Dimensão").

(6) Página de apresentação do vídeo *Not Knot*, no sítio do *Geometry Center*.

(7) A página de apresentação do vídeo "The Sphere inside out" no *site* do Geometry Center.

(8) "Superfície mínima de Riemann", um fotograma do vídeo de A. Arnez, K. Polthier, M. Steffens, C. Teitzel, *Touching Soap Films*, © A. Arnez, K. Polthier, M. Steffens, C. Teitzel. Um extracto deste vídeo, assim como outros que venceram a selecção para o congresso mundial de Berlim de 1998, foi incluído no vídeo *VideoMath Festival at ICM'98*, Springer, 1999.

(9) Capa do livro: M. Emmer, ed., *The Visual Mind: art and mathematics*, MIT Press, 1993. Reprodução de *Variação 12*, litografia de Max Bill, 1937.

Referências/*Online*

Endereços relativos a Thomas Banchoff *home page*:
http://www.math.brown.edu/~banchoff
ver também:
http://www.geom.umn.edu/~banchoff/
e ainda:
http://www.geom.umn.edu/~banchoff/projects.html

Endereço relativo a D. Hoffman
http://www.msri.org/publications/sgp/SGP/indexc.html

Endereços relativos ao *Geometry Center*:
principal:
http://www.geom.umn.edu/
vídeos disponíveis:
http://www.geom.umn.edu/video
download do Geomview, programa de visualização 3D para Linux
http://www.geomview.org/

Endereços relativos a Konrad Polthier
home page:
http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/~konrad/
vídeos:
http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/~konrad/video.html

Endereço relativo ao *VideoMath festival*
http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/VideoMath/

Michele Emmer
Università di Roma "La Sapienza"
emmer@mat.uniroma1.it

Nota da redacção: as imagens de John Sullivan foram obtidas por *download* da *web* com autorização do autor.