Cinco problemas

Cinco problemas da história da matemática no séc. XX

No final de 1999, a redacção da Educação e Matemática *decidiu dedicar as capas dos cinco números da revista, a publicar no ano 2000, Ano Mundial da Matemática, a cinco problemas ou teoremas importantes que tivessem sido resolvidos ou demonstrados durante o último século. Os problemas escolhidos foram: a conjectura de Kepler sobre os empilhamentos de esferas, o último teorema de Fermat, a conjectura do fole, o teorema das quatro cores e o 3º problema de Hilbert. Seguem-se artigos curtos relativos aos cinco resultados. Agradecemos aos colegas que aceitaram o desafio de comprimir em poucas palavras histórias que duraram séculos...*

A conjectura de Kepler

António Marques Fernandes

Introduzindo a conjectura

Foi no ano de 1611 que Kepler enunciou uma famosa conjectura que é hoje denominada por conjectura de Kepler. O famoso enunciado resistiu durante séculos às inúmeras tentativas para o estabelecer pela via demonstrativa. A conjectura estabelece um facto que desde muito cedo se considerou mais ou menos evidente, designadamente: *se se pretender empilhar esferas no espaço (todas de raio igual a uma unidade) não é possível fazê-lo e desperdiçar menos espaço que quando se distribuem essas esferas como no empilhamento cúbico de faces centradas* (fig. 1).

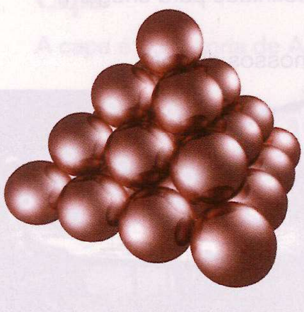


figura1. Empilhamento cúbico de faces centradas.

Embora Kepler tenha formulado a sua conjectura, não foi ele quem inicialmente se dedicou ao estudo deste problema. Os primeiros de tais estudos devem-se a T. Harriot.

Harriot, enquanto assistente de Sir Tomas Raleigh, foi incumbido por este de determinar fórmulas que permitissem determinar o número de balas de canhão que se podiam arrumar em empilhamentos regulares de diferentes tipos. Ele estudou exaustivamente o problema e, curiosamente, na sequência dos seus estudos foi conduzido a um triângulo, conhecido como *triângulo* de Harriot (fig. 2), que é uma versão do famoso teorema de Pascal, só que obtido muito antes do de Pascal.

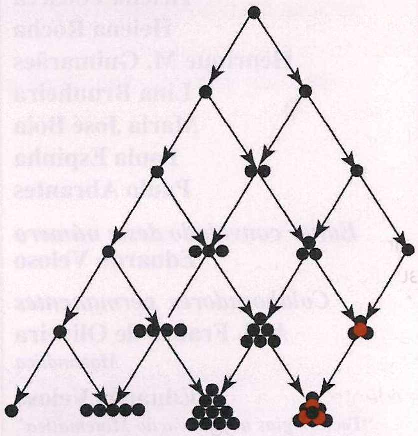


figura 2. O triângulo de Harriot

O modo como estes resultados de Harriot chegaram ao conhecimento de Kepler é também curioso. Nem Kepler estava interessado inicialmente no estudo matemático do problema, nem Harriot procurou dar a conhecer-lhe esses resultados pelo seu valor matemático intrínseco.

Nos primeiros anos do séc. XVII, Harriot e Kepler trocavam correspondência acerca da natureza da matéria. Kepler era um partidário de que os fenómenos naturais resultavam de *conflitos de contrários*, por exemplo, Kepler explicava os fenómenos de reflexão e refracção da luz como uma consequência da competição entre as propriedades de transparência e opacidade. Harriot não partilhava nem de perto esta convicção, aliás e a propósito, terá escrito numa das suas cartas para Kepler o seguinte:

[...] se essas assumpções e explicações o satisfazem, bem... fico surpreendido.

As explicações de Harriot, relativamente aos fenómenos naturais, assentavam na teoria atomista de Demócrito. A matéria é composta por átomos arranjados no espaço e é o modo como esses átomos se dispõem que determina as propriedades de cada substância. Foram os seus estudos sobre a reflexão e refracção da luz, que apresentaram a Kepler a problemática da disposição de esferas no espaço (os átomos eram supostos indivisíveis e com a forma de pequenas esferas).

Kepler foi certamente sensível às explicações de Harriot.

O facto é que em 1611, publicou um ensaio onde explorava diversas consequências de uma teoria da matéria composta por pequenas esferas. Foi precisamente nesse ensaio que Kepler, pela primeira vez, formulou a sua conjectura.

Interlúdio

O problema foi conhecendo ao longo do tempo algumas versões, muitas delas constituindo problemas aparentemente mais simples, pelos quais os matemáticos se foram interessando, na esperança de que a sua solução, trouxesse alguma intuição sobre o modo como demonstrar a conjectura de Kepler. Um desses problemas foi objecto de debate entre Isaac Newton e David Gregory. O problema consistia em determinar qual o número máximo de esferas que se podem agrupar de modo a todas tocarem uma esfera previamente dada. Newton defendia que esse número era de 12, enquanto que Gregory defendia que em certos casos podiam ser 13.

Newton estava correcto mas a primeira demonstração deste facto só surgiu em 1953 por B. L. van der Waerden e por Schüte. Aparentemente a resolução do problema de Newton/Gregory não tem relação evidente com a conjectura de Kepler, no entanto, em 1953, L. Fejes Tóth, concebeu uma estratégia para demonstrar a conjectura de Kepler em que um dos passos é inspirado na demonstração de van der Waerden e Schüte.

O análogo à conjectura de Kepler para duas dimensões, estabelecendo que a forma mais eficiente de arrumar discos no plano corresponde à disposição em rede hexagonal, foi demonstrada por Thue, em 1892. Depois desta demonstração outras surgiram, uma delas chegando a estabelecer uma generalização da conjectura a espaços não euclidianos.

A demonstração da conjectura de Kepler pareceu de tal modo um problema fascinante que levou Hilbert a incluí-lo na sua famosa lista de problemas apresentada em 1900. Tratava-se do 18º problema dessa lista. Milnor, num comentário ao 18º problema de Hilbert, chegou a escrever:

> Isto (o facto de não se conseguir demonstrar a conjectura de Kepler) é uma situação escandalosa, uma vez que a resposta (presumivelmente) correcta é conhecida desde o tempo de Gauss.

A solução

A demonstração da conjectura de Kepler parece ter sido finalmente obtida por Thomas Hales em 1998. A estratégia é fortemente apoiada numa redução da complexidade do problema sugerida por L. Fejes Tóth, atrás referida, e que relaciona a resolução deste problema com o problema de Gregory/Newton. A demonstração de Hales faz uso intensivo do computador. A razão pela qual a conjectura resistiu durante tanto tempo à sua demonstração é porque inicialmente se tratava de um problema de optimização num número finito de variáveis. Apesar de ser uma simplificação, a redução de Tóth, ainda obriga a resolver um problema de optimização em 150 variáveis, facto este que torna o problema exasperante do ponto de vista combinatório. Só para se ter uma ideia, a resolução deste problema *simplificado* envolve a análise de 5000 mapas planos. A classificação destes 5000 casos foi feita com recurso a rotinas computacionais.

Pode agora compreender-se melhor a expressão: *a demonstração da conjectura de Kepler parece finalmente ter sido obtida*. É de facto muito difícil convencer alguém, que se encontre perante *gigabytes* de código, que esses *gigabytes* constituem uma demonstração de uma conjectura.

Resta-nos esperar que esta demonstração combinatório/computacional envolvendo a consideração de 5000 subcasos, descritos por um algoritmo computacional como sendo os relevantes para a resolução do problema, possa ser no futuro substituida por uma outra que possa realmente tocar o espírito humano.

Referências

Hales, Thomas C., *An overview of the Kepler conjecture*, arXiv:math. MG/9811071, 1998.

Lagarias, Jeffrey C., *Bounds for local Density of Sphere Packings and the Kepler Conjecture*, arXiv:math.MG/0008151, 2000.

António M. Fernandes
Instituto Superior Técnico

O último teorema de Fermat

Margarida Mendes Lopes

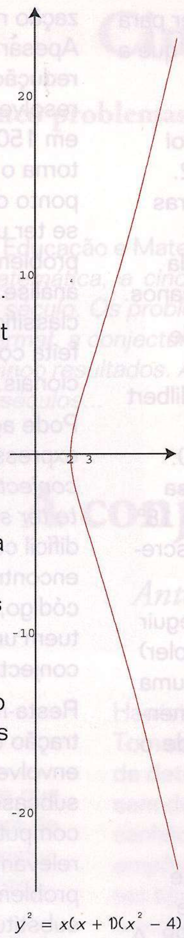
A capa da revista da APM de Julho apresenta uma superfície que nos dizem estar relacionada com o teorema de Fermat. Afinal o que é o teorema de Fermat? É a afirmação: *Para todo o $n \geq 3$ não existem números naturais a, b, c tais que*

$a^n + b^n = c^n$

Esta afirmação foi escrita por Fermat (1601-1665) na sua cópia do tratado de aritmética de Diofanto.

Ao lado da passagem que apresentava as soluções naturais da equação $x^2 + y^2 = z^2$ (ou seja a forma geral de todos os ternos pitagóricos) Fermat escreveu que para $n \geq 3$ não existiam tais soluções e acrescentou (em latim) "Tenho uma demonstração admirável mas esta margem é demasiado pequena para a conter".

No entanto Fermat não apresentou nunca a demonstração desta afirmação que ficou conhecida como o último teorema de Fermat. Em rigor dever-se-ia chamar a conjectura de Fermat dado que só em 1994 foi demonstrada.



$y^2 = x(x+1)(x^2-4)$

Este problema capturou a imaginação de muitos e as tentativas de demonstração levaram a grandes avanços no conhecimento da Matemática. Para saber os detalhes (por vezes quase romanescos) da longa história desta conjectura aconselha-se a leitura do belíssimo livro de Simon Singh[1].

Ainda hoje se discute se Fermat teria de facto uma demonstração. O que é indiscutível é que Fermat não podia ter feito a demonstração apresentada por Andrew Wiles durante os anos 90. De facto o que Wiles demonstrou (parcialmente) foi a conjectura de Taniyama-Shimura formulada só nos anos 50, da qual decorre o teorema de Fermat.

Andrew Wiles é um matemático inglês estabelecido nos Estados Unidos e especialista em Geometria Aritmética, o ramo da matemática que aborda a teoria de números usando técnicas geométricas. Mais concretamente Wiles é um especialista em curvas elípticas. As curvas elípticas são todas as curvas definidas no plano por uma equação polinomial do 3º grau a duas incógnitas e uma curva elíptica diz-se racional se os coeficientes desta equação forem números racionais. Uma classe importante destas curvas é a formada pelas curvas definidas por $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com $a \neq 0$, a, b, c e d números racionais e onde o polinómio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem três raizes distintas (reais ou não).

A conjectura de Taniyama-Shimura diz que cada curva elíptica racional está associada a uma forma modular (abreviadamente, é modular). As formas modulares são objectos analíticos que aparentemente nada têm a ver com geometria. Muito imprecisamente as formas modulares são funções complexas definidas por séries de potências e que têm muitas simetrias. A conjectura foi formulada pelo matemático japonês Taniyama, depois de ter conseguido associar a algumas curvas elípticas uma forma modular. Mais tarde o seu amigo Goto Shimura mostrou que a cada forma modular estava associada uma curva elíptica racional. No entanto o problema de saber se cada curva elíptica racional era modular permaneceu em aberto.

Nos anos 80 o matemático alemão G. Frey, estudando curvas elípticas com coeficientes inteiros, considerou as curvas (chamadas posteriormente curvas de Frey) definidas por $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ obtidas a partir de uma hipotética solução inteira de $a^n + b^n = c^n$ para $n > 2$. Só existiria uma destas curvas se a conjectura de Fermat não fosse verdade. Frey verificou que estas curvas, se existissem, teriam propriedades estranhas, diferentes de outras curvas elípticas. Em 1984, num congresso em Oberwolfach, apresentando os seus resultados, conjecturou que estas curvas não eram modulares. O americano Ken Ribet, que estava na audiência, começou a trabalhar nesta conjectura tendo-a finalmente demonstrado em 1986.

O sonho de infância de Wiles tinha sido demonstrar o teorema de Fermat. Crescendo tinha abandonado esse sonho e tinha-se dedicado às curvas elípticas. Quando Wiles ouviu falar do resultado de Ribet viu uma estrada para realizar o seu sonho. Abandonando todos os outros projectos, durante sete anos dedica-se à conjectura de Taniyama-Shimura e finalmente em Junho de 1993, em Cambridge, apresenta a demonstração da conjectura para uma grande classe de curvas elípticas racionais, que incluía as curvas de Frey se existissem. Como Ribet tinha mostrado que as curvas de Frey, se existissem, não eram modulares, concluía-se que as curvas de Frey não existiam e portanto também não existiam soluções inteiras das equações $a^n + b^n = c^n$, para $n > 2$, tal como Fermat tinha afirmado.

Durante os meses seguintes a demonstração foi verificada por vários especialistas, mas foi descoberta uma falha. A demonstração continuava válida para uma grande classe de curvas elípticas que, no entanto, não incluía as curvas de Frey. Portanto o resultado de Wiles, embora continuando a ser importante, não demonstrava o teorema de Fermat.

Wiles tornou a concentrar-se no problema. Com o auxílio do seu antigo aluno Richard Taylor conseguiu demonstrar em Setembro de 1994 o resultado para a classe de curvas elípticas que incluiria a curva de Frey, fechando assim finalmente a saga do Teorema de Fermat.

A demonstração é muito longa tendo sido publicada em dois artigos[2]. Utiliza técnicas sofisticadas de várias áreas da Matemática e, dada a sua complexidade, possivelmente só há 20 ou 30 matemáticos no mundo capazes de a entender completamente.

A demonstração de Wiles encerrou um capítulo na História da Matemática mas talvez seja ainda mais importante por ser o começo de um novo e excitante capítulo. Deu um novo ânimo ao estudo da conjectura de Taniyama-Shimura, que foi finalmente demonstrada em 1999 para todas as curvas elípticas por C. Breuil, F. Diamond, B. Conrad e R. Taylor. Por seu lado a conjectura (agora teorema) de Taniyama-Shimura é a primeira pedra sólida de uma vasta teoria, conhecida como o programa de Langlands, proposta nos anos 60 pelo matemático canadiano Robert Langlands. Essencialmente o programa de Langlands é a procura de unificação de várias teorias matemáticas, não muito diferente da procura de teorias unificadoras em Física.

Só nos resta esperar que este novo capítulo não leve tanto tempo a ser concluído como o anterior.

Referências bibliográficas

1. Singh, Simon. *A solução do último teorema de Fermat*. Ed. Relógio d' Água, 1998.

2. • Wiles, Andrew. "Modular elíptica curves and Fermat's Last Theorem". *Ann. Math.*, II. Ser. 141, No.3, 443-551, (1995).

• Taylor, Richard; Wiles, Andrew. "Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras". *Ann. Math.*, II. Ser. 141, No.3, 553-572 (1995).

Margarida Mendes Lopes
Faculdade de Ciências
da Universidade de Lisboa

A conjectura do fole

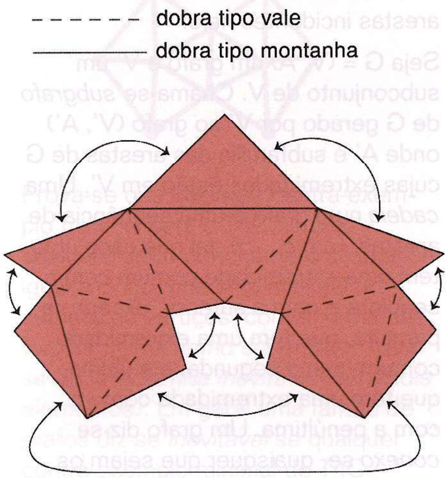
António Marques Fernandes

Se considerarmos polígonos construídos de tal modo que os lados sejam feitos de um material rígido, mas tais que os vértices sejam articulados então, não é difícil verificar que todos os polígonos se podem deformar (mantendo os lados inalterados) com uma única excepção: a do triângulo. Este facto simples ajudou a suportar durante muitos anos a convicção de que qualquer poliedro, possuindo faces triangulares, seria rígido.

Embora a problemática da indeformabilidade de sólidos no espaço remonte a 1813, data em que Cauchy demonstrou que todo o poliedro convexo é indeformável, foi já no século XX, que se provou a existência de sólidos de faces triangulares flexíveis e se provou a denominada conjectura do fole (*bellows conjecture*), estabelecendo que o volume de um poliedro flexível de faces triangulares permanece inalterado durante qualquer deformação. (De facto é por esta razão que a conjectura recebe a designação de *conjectura do fole*: de acordo com este resultado não existem foles exactos, no sentido em que, se nos foles verdadeiros as faces não sofressem elas próprias deformações, então eles não conseguiriam bombear ar – a sua função).

Antes de continuarmos, importa precisar o que se entende por *deformação*, neste contexto. De facto no tipo de *deformação* que estamos a considerar, as faces do poliedro devem permanecer rígidas. O movimento produz-se apenas ao nível das arestas, alterando-se apenas os ângulos entre as faces. Esta exigência coloca de parte muitos exemplos que podem vir imediatamente à ideia, como sejam certas construções de *origami* ou o já referido exemplo do fole. Em todos estes casos a forma das faces é alterada, embora ligeiramente, durante as deformações.

A primeira pessoa a ter um vislumbre da possibilidade da existência de sólidos flexíveis, foi um engenheiro francês de nome Raoul Bricard. Falamos de um vislumbre na medida em que o seu exemplo consistia de uma figura imaginária com faces que se intersectavam mutuamente e que não podia ter correspondência em nenhum objecto real. Apesar disso, o exemplo de Bricard não se tratou de um mero vislumbre. Em 1970, Robert Connelly produziu uma modificação do poliedro não convexo, imaginário, de Bricard, construindo deste modo o primeiro exemplo de um sólido flexível de faces triangulares. Esta construção seria simplificada por Klaus Steffen, produzindo o exemplo cuja planificação se pode ver na figura abaixo.



A análise destes exemplos sugeriu que durante a deformação o volume dos sólidos permanecia constante. De resto esta hipótese foi testada de modo engenhoso por Dennis Sullivan que, depois de construir o sólido de Steffen, introduziu fumo no seu interior através de um pequeno orifício, vindo a verificar que durante a deformação do sólido, o fumo permanecia no seu interior.

Estava formulada a conjectura do fole (uma conjectura, de resto, cujo análogo para duas dimensões é falso. É bem conhecido que deformando um rectângulo por exemplo, a respectiva área se altera).

Finalmente, num artigo publicado na revista *Contributions to algebra and geometry*, três matemáticos: R. Connelly, I. Sabitov e A. Waltz, demonstraram a veracidade da conjectura do fole.

A ideia central da demonstração consistiu em relacionar o volume do sólido com o comprimento das respectivas arestas (uma vez que esse valor permanece inalterado, o mesmo sucederia com o volume). A prova de Connelly, Sabitov e Waltz, é essencialmente algébrica. Eles demonstraram que se $d_1, d_2, ..., d_k$ são os comprimentos das arestas de um poliedro S de faces triangulares, então o volume de S, denotado $vol(S)$ é algébrico sobre $Z[d_1^2, ...d_k^2]$, o que em termos simples, significa que existe um polinómio com coeficientes que são *combinações algébricas* de $d_1^2, ...d_k^2$ e de números inteiros, de que $vol(S)$ é uma raíz.

Claro que, do ponto de vista teórico, um polinómio pode ter várias soluções mas, como as raizes são pontos isolados, o volume na deformação não pode *saltar* de um valor para outro, já que a deformação, sendo contínua, a alterar o volume do sólido teria que produzir uma alteração igualmente contínua.

Nas palavras de Ian Stewart, *é interessante que mais um teorema matemático tenha nascido a partir da manipulação de alguns modelos de cartão.*

Bibliografia

R. Connelly, I.Sabitov, A. Walz, "The Bellows Conjecture" in *Contributions to algebra and geometry*, Volume 38 (1997), No. 1, pp 1-10.

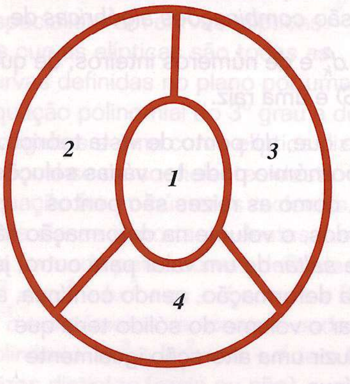
Ian Stewart, "Mathematical Recreations", in *Scientific American*, Julho 1998, pp 90-93.

António M. Fernandes
Instituto Superior Técnico

O Teorema das Quatro Cores (T4C)

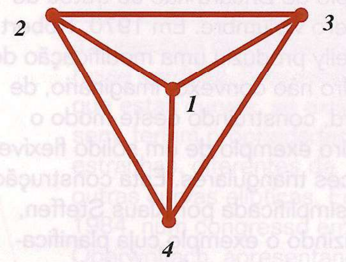
Jorge Nuno Silva

Em 23 de Outubro de 1852 De Morgan, professor do University College, em Londres, recebia de um aluno, Frederick Guthrie, o enunciado do Problema (ou Conjectura) das Quatro Cores. O autor da questão tinha sido o irmão do aluno, Francis, a quem o problema ocorrera quando coloria um mapa de Inglaterra. *Quatro cores bastam para pintar um mapa plano de forma a que dois países vizinhos não partilhem a mesma cor.* Países que só se tocam num ponto não são considerados vizinhos. Por exemplo, se num tabuleiro de xadrez cada casa representar uma nação, a coloração habitual alternada preto/branco mostra que duas cores bastam neste caso. Mas a figura abaixo prova que, às vezes, quatro cores são mesmo necessárias já que a zona 1 tem três vizinhos.



No lugar de áreas planas, revelou-se mais proveitoso usar grafos, de cuja teoria relembramos os conceitos mais básicos antes de avançar[3].

Um *grafo* é um par G = (V,A) onde V (*vértices* de G) é um conjunto finito e A (*arestas* de G) é uma família finita de pares não ordenados de elementos de V. Numa aresta $a = \{u,v\}$ diz-se que u e v são as *extremidades* de a. Uma aresta $\{u,v\}$ em que $u = v$ chama-se *lacete*. Se um grafo contém duas arestas com os mesmos elementos, estas dizem-se *arestas paralelas*. Um grafo que não contenha lacetes nem arestas paralelas diz-se *simples*. Há uma forma natural de associar um grafo a um mapa. A cada região corresponde um vértice, e dois vértices são adjacentes, isto é, definem uma aresta, exactamente quando as respectivas regiões são vizinhas. Por exemplo, ao mapa ilustrado acima corresponde o grafo



Grau de um vértice é o número de arestas incidentes nele.

Seja G = (V, A) um grafo e V' um subconjunto de V. Chama-se *subgrafo* de G gerado por V' ao grafo (V', A') onde A' é subfamília das arestas de G cujas extremidades estão em V'. Uma *cadeia* num grafo é uma sequência de arestas, $(a,b,c,...,z)$, tal que cada uma tem uma extremidade comum com a seguinte e com a anterior, excepto a primeira, que tem uma extremidade comum com a segunda, e a última, que tem uma extremidade comum com a penúltima. Um grafo diz-se *conexo* se, quaisquer que sejam os seus vértices u e v, existe uma cadeia em G que liga u a v. Grafos *planares* são os que se podem representar no plano sem que as suas arestas se intersectem para lá dos vértices. Um resultado que usaremos fica aqui realçado: se G é um grafo planar simples conexo então G tem um vértice de grau no máximo 5.

O *número cromático* de um grafo G é o menor número de cores necessárias para pintar os vértices de forma a que nenhuma aresta incida em vértices da mesma cor. O T4C equivale então a dizer que o número cromático de um grafo planar (sem lacetes) é, no máximo, 4.

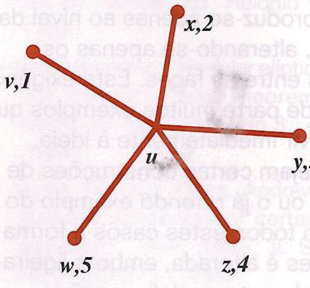
Em 1879 o jurista e matemático amador inglês Alfred Kempe publicou uma pretensa prova do T4C. O interesse neste problema baixou, ao pensá-lo resolvido, até que, em 1890, Percy Heawood, matemático inglês, mostrou que o argumento de Kempe não era satisfatório. Contudo, no mesmo trabalho, Heawood mostrou como o *método das cadeias de Kempe* podia ser utilizado na prova do T5C. É essa demonstração que apresentaremos, na linguagem da teoria dos grafos. Vamos usar Indução Matemática em v, o número de vértices do grafo. Se v é menor ou igual a 5, o resultado é óbvio. Suponhamos que vale também para $v=n$ e seja G=(V, A) um grafo planar com $n+1$ vértices. Como realçámos atrás, G tem um vértice de grau no máximo 5, seja u um tal vértice.

Seja G' o subgrafo de G gerado por V-{u}. Tem-se que G' é um grafo planar com n vértices, logo, por hipótese de indução, o seu número cromático é no máximo 5.

Caso 1. A coloração dos vizinhos de u em G usa menos do que cinco cores. Neste caso sobra pelo menos uma cor para pintar u. E assim temos uma coloração de G com cinco cores.

Caso 2. A coloração dos vizinhos de u em G usa cinco cores. Neste caso o grau de u em G é cinco.

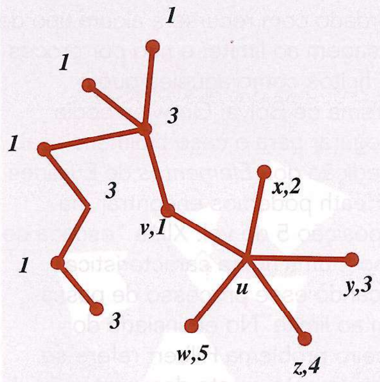
Sejam os vizinhos de u em G representados por v, x, y, z, w, e as respectivas cores numeradas de um a cinco.



Podemos colorir todos os vértices de G com cinco cores da forma seguinte.

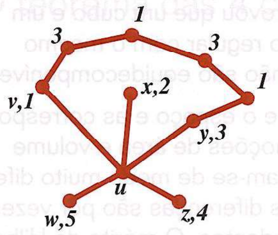
Consideremos todas as cadeias que partem de *v* e alternam as cores 1 e 3.

Caso 2.1. Nenhuma destas cadeias termina em *y*.



Nesta situação podemos trocar entre si as cores 1 e 3 nas cadeias consideradas, ficando a cor 3 disponível para colorir *u*.

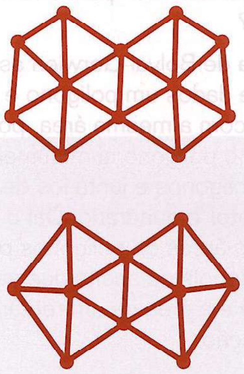
Caso 2.2. Uma destas cadeias termina em *y*.



Agora, como o grafo é planar, nenhuma cadeia que nasça em *x* e que alterne as cores 2 e 4 pode cruzar a cadeia marcada na figura acima. Portanto podemos, à semelhança do que fizemos no Caso 2.1, trocar entre si as cores 2 e 4 em todas as cadeias que partam de *x* e alternem as cores 2 e 4, libertando assim a cor 2 para *u*.

A demonstração está terminada.

Método semelhante foi utilizado por Kempe na sua tentativa de demonstração do T4C. Pegar num grafo G e mostrar que qualquer grafo que o contenha, se for colorido com cinco cores, sendo uma cor usada num único vértice, que também está em G, pode ser recolorido com quatro cores, como Kempe tentou, pode aplicar-se a algumas configurações, ditas *reductíveis*, mas não funciona com todas, por exemplo não se pode aplicar às duas seguintes:



Prova-se que qualquer contra-exemplo minimal para o T4C, isto é, qualquer grafo com número cromático igual a cinco, que seja minimal no número de vértices, contém uma das formas acima como subgrafos. Trata-se de uma *família inevitável* (com dois elementos). Em geral uma família de grafos diz-se *inevitável* se qualquer contra-exemplo minimal do T4C contiver necessariamente um elemento da família. Para demonstrar o T4C precisamos então de arranjar uma família inevitável composta por grafos reductíveis. Foi exactamente isto que Appel, matemático americano, e Haken, matemático alemão, trabalhando em Urbana, nos EUA, conseguiram, com a ajuda de um computador IBM 360. A família inevitável utilizada tinha perto de 2000 elementos, a prova não pode ser inspeccionada por um ser humano, é demasiado longa. Trata-se do primeiro exemplo de uma demonstração cuja validade não pode ser aferida pelos colegas dos autores. Em 1994 uma prova simplificada da autoria dos matemáticos americanos Paul Seymour, Neil Robertson, Daniel Sanders e Robin Thomas foi anunciada[6]. A respectiva família inevitável contém somente 633 elementos, e os algoritmos utilizados são mais eficientes. Contudo, a colaboração do computador é ainda necessária.

Referências

1. R. Fritsch, *The Four-Color Theorem*, Springer 1998
2. L. Saaty & P. Kainen, *The Four-Color Problem*, Dover 1986
3. I. Silva, *Tópicos de Matemática Finita*, AEFCL 1992
4. G. Toth, *Glimpses of Algebra and Geometry*, Springer 1998
5. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The_four_colour_theorem.html
6. http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html

Jorge Nuno Silva
Faculdade de Ciências
da Universidade de Lisboa

O terceiro problema de Hilbert

Eduardo Veloso

Fez 100 anos em 8 de Agosto passado que David Hilbert proferiu a conferência famosa em que enunciou 23 problemas que iriam influenciar, na sua perspectiva, a história da matemática no séc. XX. Disse Hilbert aos seus colegas matemáticos:

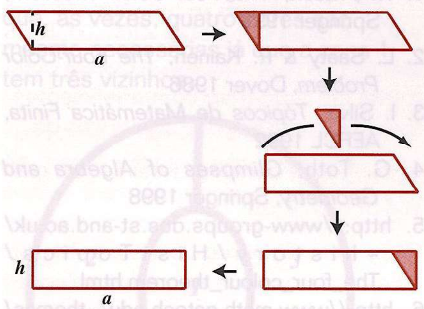
> Qual de nós não gostaria de levantar o véu atrás do qual o futuro está escondido, de lançar um olhar sobre os avanços da nossa ciência e sobre os segredos do seu desenvolvimento nos séculos futuros? Quais serão os objectivos específicos que procurarão atingir os mais agudos espíritos matemáticos das futuras gerações? Que novos métodos e factos serão desvendados, no amplo e rico domínio da matemática, nos próximos séculos?

David Hilbert, 1900

Dos 23 problemas, o terceiro é considerado o mais elementar e foi logo resolvido no mesmo ano de 1900. A sua solução revela uma diferença essencial de comportamento relativamente a certas propriedades dos objectos geométricos – área e volume – quando passamos da segunda para a terceira dimensão. Devido à falta de espaço, aceitaremos sem análise as noções intuitivas de área e volume que cada um de nós tem ao ler este texto, mas prometemos noutra altura voltar a este assunto importantíssimo e habitualmente muito mal tratado no nosso ensino básico. Comecemos pela dimensão dois.

O teorema de Bolyai-Gerwien

Todos nós passámos na escola básica pela "descoberta" da fórmula da área do paralelogramo pelo método da *dissecção*:



Ou seja, cortamos o paralelogramo num número finito de peças (neste caso, em duas), juntamos as peças (sem ligar às suas fronteiras) de modo a formar uma figura de área conhecida (neste caso um rectângulo) e ficamos assim a conhecer a área do paralelogramo. Até ficamos com uma fórmula!!!

Pelo menos desde os gregos é essa a ideia fundamental para calcular áreas de polígonos (e apenas essas figuras nos interessam neste texto). Diremos que dois polígonos são *equidecomponíveis* se é possível cortar um deles num número finito de peças e rearranjá-las, por meio das isometrias do plano, e sem ligar às fronteiras, de modo a formar o outro.

Dois polígonos equidecomponíveis têm naturalmente a mesma área. Será a recíproca verdadeira?

F. Bolyai (pai de Janos Bolyai, um dos inventores da geometria hiperbólica) e P. Gerwien demonstraram que sim, independentemente, nos anos trinta do século XIX. Isto é,

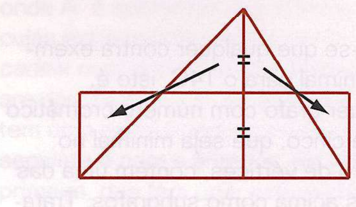
Dois polígonos são equidecomponíveis se e só se têm a mesma área (teorema deBolyai-Gerwien).

Uma demonstração simples pode encontrar-se no livro de Stan Wagon referido na bibliografia.

O terceiro problema

Essencialmente, o terceiro problema de Hilbert consiste em colocar a questão: existirá um teorema análogo ao de Bolyai-Gerwien para a terceira dimensão?

O teorema de Bolyai-Gerwien assegura-nos que dados um polígono e um quadrado com a mesma área, posso decompor o polígono num número finito de polígonos e juntá-los de forma a obter o quadrado. Daí o cálculo das áreas de polígonos poder fazer-se, depois de aceite que sabemos o que é a área de um rectângulo, por dissecção.



Por exemplo, esta figura mostra como posso dissectar um triângulo em três partes e juntá-las de modo a formar um rectângulo.

Se existisse um análogo do teorema de Bolyai-Gerwien para o espaço, isso significaria que poderíamos encontrar processos semelhantes de calcular volumes de poliedros, por exemplo de uma pirâmide. Ora, desde Euclides que o cálculo do volume de uma pirâmide tinha sido sempre sido abordado com recurso a algum tipo de passagem ao limite, e não por processos finitos como aqueles que o teorema de Bolyai-Gerwien podia assegurar para o caso bidimensional. Na edição dos *Elementos* de Euclides de Heath podemos encontrar, na proposição 5 do vol. XII, a "escada do diabo", uma figura característica indicando esse processo de passagem ao limite. No enunciado do terceiro problema Hilbert refere-se precisamente a esta demonstração de Euclides e prevê que na terceira dimensão, para poliedros, a equivalência entre equidecomponibilidade e igualdade de volumes não seja demonstrável no caso geral.

Hilbert tinha razão. Logo no mesmo ano de 1900, um seu discípulo, Max Dehn, provou que um cubo e um tetraedro regular com o mesmo volume não são equidecomponíveis.

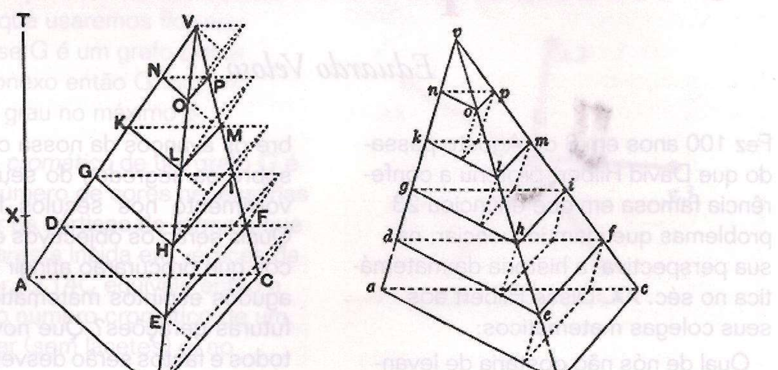
O plano e o espaço e as correspondentes noções de área e volume comportam-se de modo muito diferente. Essas diferenças são por vezes surpreendentes. O mérito de Hilbert foi colocar claramente uma questão e prever correctamente a sua resposta.

Bibliografia

Boltianskii, Vladimir. Hilbert's third Problem, trad. de R. Silverman.Washington, D.C.: Winston, 1978.

Wagon, Stan. The Banach-Tarski Paradox. N.Y.: Cambridge University Press, 1985.

Eduardo Veloso



A escada do diabo