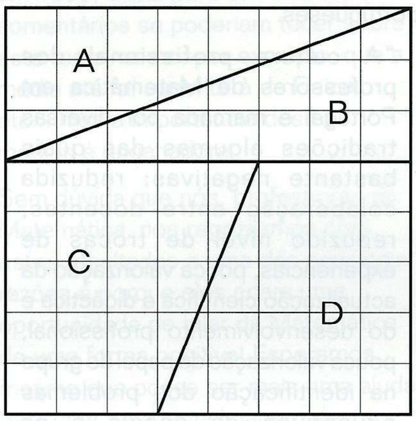
Quando um paradoxo não surpreende...

Renato P. dos Santos

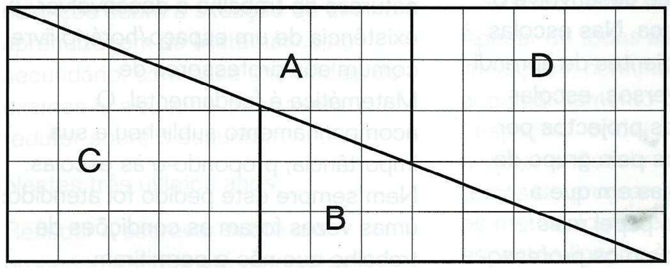
Com o objectivo de provocar uma discussão em classe, numa aula de Geometria, propus, certa vez, um conhecido paradoxo geométrico envolvendo a conservação da área. Apresento aqui esse paradoxo, comento as reacções dos alunos à luz da teoria de Piaget referente ao desenvolvimento das noções de conservação de quantidades contínuas e finalmente forneço de forma sucinta a sua solução.

O paradoxo

Neste paradoxo[1], apresenta-se o quadrado da primeira figura que, à semelhança de um tabuleiro de xadrez ou de damas, mede 8 unidades de lado e contém, portanto, 8 X 8 = 64 unidades de área (quadradinhos), dividido nas partes *A, B, C* e *D*, conforme indicado.



Vê-se, porém, pela figura seguinte, que essas partes podem também ser reunidas de forma a construir um rectângulo. Mas, medindo-se o rectângulo recém-formado, verifica-se que mede 5 X 13 = 65 unidades de área, uma unidade a mais que o quadrado original! *(experimente!)*



E isso não é tudo, pois vê-se da terceira figura que essas partes *A, B, C* e *D* podem ainda ser arranjadas de forma a obter uma figura com 63 unidades de área, uma a menos que o quadrado original (ver figura na página seguinte)!

Quando o objectivo da apresentação deste paradoxo é meramente recreativo, é frequente o quadrado original, bem como suas partes serem feitos de metal polido ou outro material qualquer, sem apresentar quaisquer marcas de referência. Quando, ao contrário, como aqui, o interesse é geométrico, eles são apresentados identicamente quadriculados de forma a ser possível, também, contar ou calcular a quantidade dos quadradinhos (unidades de área) presentes em cada configuração.

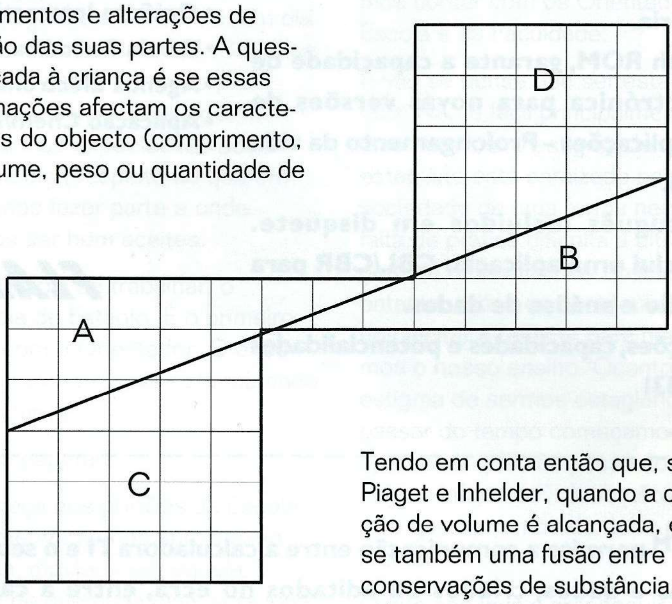
As reacções dos alunos

Apresentei o paradoxo na forma da figura inicial impressa sobre acetato transparente, já recortada da maneira indicada, fazendo uso de um retroprojector. Após cada transformação, reconstruí a figura em sua forma original, revertendo o processo. Desta forma, durante as operações de separação e reagrupamento, todas as quatro partes *A, B, C* e *D* da figura permaneciam no campo visual dos alunos; cada uma é apenas deslocada ou rodada. Com este procedimento, os alunos podiam seguir cada parte em seu percurso, e identificar cada uma delas, tanto numa como noutra configuração final.

Eu esperava que os alunos, de uma licenciatura ligada ao ensino de Matemática, surpreendessem-se e considerassem esses resultados inconsistentes. Mas o efeito em sala surpreendeu-me:

alguns alunos consideravam natural que a área da figura se alterasse conforme a disposição das partes! E despoletou-se uma discussão com a maior parte do grupo a tentar convencer os colegas de que a área teria de ser sempre a mesma, ficando a busca da solução do paradoxo para um segundo momento.

Piaget e Inhelder[2] estudaram as explicações de crianças à situação em que um objecto é submetido a seccionamentos e alterações de disposição das suas partes. A questão colocada à criança é se essas transformações afectam os caracteres físicos do objecto (comprimento, área, volume, peso ou quantidade de



matéria) ou se apenas se referem ao aspecto geométrico (forma e dimensões). O problema da conservação decorreria sempre do conflito entre os dados da percepção e as operações racionais. Segundo aqueles autores, em média, as noções de comprimento e de distância surgem entre os 6 e 8 anos, a de superfície entre os 7 e 8 anos, a de quantidade de matéria entre os 8 e 9 anos, precedendo curiosamente as conservações de peso, entre os 10 a 11 anos, e de volume, entre os 11 a 12 anos.

Todavia, nem a mera identificação das partes *A, B, C* e *D* na figura final e nem a reversão do processo, pela reconstrução da figura em sua forma original após cada transformação, parecia ser suficiente para aqueles alunos serem levados a supor a conservação da área. E nem a possibilidade de dois reagrupamentos diferentes, conduzindo um a uma aparente diminuição e o outro a um aparente aumento da área causavam estranheza a esses alunos. Tal como as crianças observadas por aqueles autores, os alunos, iludidos pela percepção subjectiva, não acreditavam na conservação da área das próprias partes *A, B, C* e *D*, uma vez separadas da figura original, parecendo antes natural que se encolhessem ou dilatassem. E, por consequência, não viam ali nenhum paradoxo.

Tendo em conta então que, segundo Piaget e Inhelder, quando a conservação de volume é alcançada, efectua-se também uma fusão entre as três conservações de substância, peso e volume, usando-se alternativamente uma para justificar a outra, decidi apelar para uma analogia para retornar à discussão inicial. Colocando, assim, ênfase no segundo processo de medida, chamando a atenção para o número de quadradinhos como um sistema de unidades, não só para a quantificação da área como da própria quantidade de matéria, propus aos alunos imaginarem-se no papel de empregados numa ourivesaria com a figura a representar uma placa de ouro. Assim, se, ao fim dum dia de trabalho, o patrão, desejando conferir a quantidade de ouro montasse a figura na forma do rectângulo, deveria querer que os alunos/empregados prestassem contas da porção de ouro desaparecida! Argumentei que eles poderiam contestarem-no reunindo as peças na forma do quadrado original ou, melhor ainda, na forma da terceira figura, quando teriam direito a alguma compensação financeira! O absurdo de tal situação deveria ter algum efeito, esperava eu.

Verificou-se, então, aparentemente maior concordância no paradoxal da situação e não demorou para que, na discussão retomada, alguns alunos começassem a aproximar-se da solução do paradoxo, objectivo inicial da actividade.

A solução do paradoxo

Para benefício daqueles que ainda não conheciam este paradoxo, faz-se em seguida sua breve análise.

Vê-se da primeira figura que as partes *A* e *B* são, por construção, idênticas, bem como as partes *C* e *D*. Desta forma, as suas junções no quadrado original são perfeitas, com inclinações 3/8 e 2/5 ou 0,375 e 0,4, respectivamente, números bastante próximos mas não idênticos.

Quando se constrói o rectângulo da segunda figura, as junções entre os pares *A/C* e *B/D* já não podem ser perfeitas, uma vez que as inclinações, como visto acima, não são as mesmas. Mesmo a junção do par *A/B* ao centro do rectângulo já não se efectua pois, por força da falha nas outras junções, estas partes estarão separadas ainda que por uma distância muito pequena. O resultado é que o que parece ser a diagonal do rectângulo, não é senão um paralelogramo muito alongado com bases correspondentes aos lados oblíquos das partes *A* e *B* e lados correspondentes aos das partes *C* e *D*. A área dessa figura corresponderá à do misterioso quadradinho aumentado. Dito de outra forma, cada um dos supostos quadradinhos situados sobre essa falsa diagonal estará incompleto, de tal forma que suas áreas, somadas à dos restantes completos, perfaça os 64 quadradinhos completos originais.

Quando se constrói a terceira figura, ao contrário, há uma subtil sobreposição entre os pares *A/C*, *B/D* e *A/B*, reduzindo a área total justamente no equivalente ao quadradinho em falta.

Há inúmeras variações possíveis deste paradoxo[1], baseadas todas porém, como aqui , em figuras com proporções baseadas na conhecida sequência de Fibonacci (5, 8, 13).

(continua na pág.30)

Concurso de Professores - que desilusão!!!

Caros Colegas, não quisemos deixar passar a oportunidade de partilhar convosco os sentimentos que nos têm envolvido nas ultimas semanas.

Somos duas jovens professoras da margem sul do Tejo, licenciadas em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, e fazemos parte do elevado número de professores profissionalizados não colocados na segunda parte do concurso para o ano lectivo 2000/2001. Foi com bastante surpresa, e após várias tentativas de ligação à linha telefónica do Ministério da Educação, que obtivemos a inesperada informação: " Lamentamos mas a sua candidatura não obteve colocação".

Apesar de estarmos conscientes do aumento do número de candidatos à nossa frente, relativamente ao ano passado, nunca pensámos ficar privadas de pôr em prática tudo aquilo que aprendemos e em que acreditamos. Para quem sempre quis ser professora, esta notícia foi recebida com bastante tristeza e revolta, sobretudo para quem teve a oportunidade de viver o dia-a-dia de uma escola e verificar que de facto era esta a profissão que a realizava.

Se tomarmos como exemplo o que aconteceu em anos anteriores, nada previa que tivéssemos que recorrer aos mini-concursos para continuar a dar aulas, algo que iniciámos há somente dois anos. Se os mini-concursos são para muitas pessoas um complemento da sua profissão ou uma alternativa empregadora, para nós será a única e última hipótese que temos para exercer a profissão que escolhemos. Andando de CAE em CAE, apercebemo-nos do reduzido número de horários existentes e da dificuldade que será obter um horário completo, avistando-se assim futuro profissional pouco risonho.

Todos estes momentos que temos vivido, fazem-nos reflectir sobre a qualidade do ensino em Portugal e as situações adversas que os professores têm que gerir após a sua colocação tardia nas escolas. E os alunos? Não sofrerão também eles com esta situação?

Na nossa opinião, a instabilidade existente no corpo docente de cada escola que muda de ano para ano, reflecte-se no seu dia-a-dia, não permitindo que haja uma continuidade de trabalho, comprometendo em parte o sucesso dos alunos.

Sem outra alternativa, só nos resta aguardar pelos resultados e fazer votos para que o próximo ano lectivo comece no mesmo dia para todos os professores.

Bem hajam pela vossa atenção,

Dora Pinto e Silvia Cidades

A Redacção reserva-se o direito de editar os textos recebidos de modo a tornar comportável a inclusão das contribuições recebidas no espaço disponível na revista.

Quando um paradoxo não surpreende (continuação da pág. 27)

Conclusão

Paradoxos podem ser um recurso útil para motivar e despertar interesse na sala de aula e os conflitos cognitivos podem ser um factor importante na construção de novo conhecimento pelo aluno. Por outro lado, podem também ser interessantes para aceder a falhas na estruturação do conhecimento, tal como ocorreu aqui.

Embora Piaget e Inhelder tenham constatado que as conservações elaboram-se naturalmente entre os seis e os doze anos, mesmo nos primeiros anos de faculdade encontram-se estudantes que ainda apresentam reacções de não-conservação.

Vale a pena perguntar por que o ensino fundamental não auxiliou a que estes alunos tivessem desenvolvido as conservações e, por outro lado, por que o sistema escolar permite que alunos tenham notas suficientes em Matemática, incluindo Geometria, desprovidos um conceito tão fundamental. Esses alunos sabem talvez, as fórmulas para calcular as áreas de várias figuras geométricas mas ainda não têm o conceito de área.

Já observei o mesmo tipo de problema em Física, quando os alunos chegam à faculdade, por exemplo, sem um conceito de «força» bem estabelecido, tão fundamental na Física quanto o de área na Geometria. E o mesmo tem sido observado em Química e em várias outras áreas de conhecimento. Ou seja, pergunta-se que Matemática se está, afinal, a ensinar?

Bibliografia

[1] ver, por exemplo, GARDNER, Martin, *Mathematics, Magic and Mystery*, Dover, 1956, trad. port.: *Matemática, Magia e Mistério*, Gradiva, Lisboa, 1991, p. 146.

[2] PIAGET, Jean e INHELDER, Bärbel, *Le Développement des Quantités Physiques chez l'Enfant*, DelaChaux et Niestlé, Neuchâtel, 1941, 2ᵉ éd. augm., 1962, trad. port.: *O Desenvolvimento das Quantidades Físicas na Criança*, Zahar, Rio de Janeiro, 2ª ed., 1975; PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel; SZEMINSKA, Alina, *La Géometrie Spontanée de l'Enfant*, PUF, Paris, 1948.

Renato P. dos Santos
CEDICA- Centro de Estudos em Epistemologia e Didáctica das Ciências/Almada
Instituto Piaget