Triângulos, cubos e outras coisas que tais…

0. Dois problemas do dia-a-dia com a Matemática no n.º 2 de Educação e Matemática despertaram-me a atenção. No primeiro pedia-se a colocação dos números 1 a 6 nos lados e vértices de um triângulo de modo que a soma nas três direcções fosse a mesma (v. fig. 1). O segundo era um problema análogo para o cubo, mas agora com os números 1 a 8 e de modo que a soma dos vértices em cada face fosse 18 (v. fig. 2).

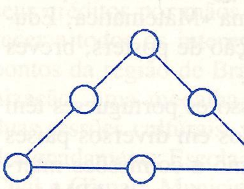


Fig. 1

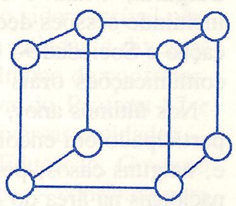
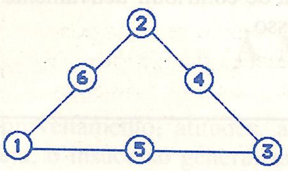
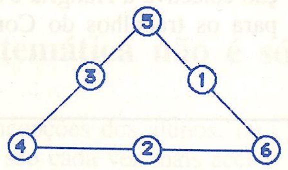


Fig.2

1. Uma solução para o problema relativo ao triângulo obtém-se rapidamente se pensarmos que de 1 a 6 há três números «mais pequenos» — 1, 2 e 3 — e três números «maiores» — 4, 5 e 6. Daí surge a ideia de colocarmos nos vértices os números 1 a 3 e nos lados os números 4 a 6. Há apenas que ter algum cuidado na colocação nos lados, para compensar as somas obtidas com os extremos de cada lado. E é natural pensar na solução «oposta» — 4 a 6 nos vértices e 1 a 3 nos lados. Teremos assim:





2. Pedia-se uma solução e já temos duas! Quem (ainda… ou já) não tenha o bichinho da Matemática ficará satisfeito por aqui — ou mesmo por ali, com a primeira solução. Mas o aprendiz de Matemática pensará: serão estas **todas as soluções**?

E embora perceba que, dada a pequena dimensão dos dados, seria possível descobrir todas as soluções por tentativas, prefere empregar uma estratégia que eventualmente possa servir para outros problemas. Por exemplo a seguinte:

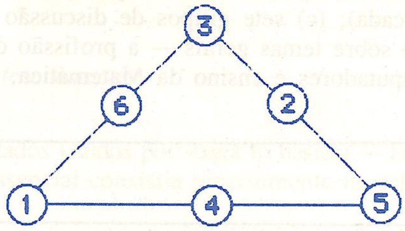
— como a soma dos números correspondentes a cada lado **tem que ser constante,** então a soma N dos três grupos de números associados aos três lados tem que ser um **múltiplo de três;**

— além disso, como cada vértice, na soma N, **é contado duas vezes** (pois pertence a dois lados), N é em cada caso igual à soma de duas parcelas, uma fixa — que é a soma dos números de 1 a 6, ou seja 21 — e outra correspondendo a cada escolha que fazemos dos números a colocar nos vértices.

Então N tem que ser maior ou igual a **27** = 21 + 6 (escolha de 1, 2 e 3 para os vértices) e menor ou igual a **36** = 21 + 15 (escolha de 4, 5 e 6 para os vértices). Como N ter que ser múltiplo de 3, as soluções possíveis são as que correspondem a **N** igual a 27, 30, 33 e 36. Os casos N = 27 e N = 36 referem-se às soluções já encontradas. Vejamos os outros:

N = 30: A soma dos números colocados nos vértices é **9** = 30 – 21. Há três escolhas possíveis

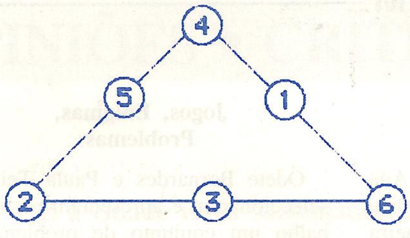
- 1, 2 e 6 nos vértices. Não corresponde a nenhuma solução, como é fácil ver.
- 2, 3 e 4 nos vértices. Idem.
- 1, 3 e 5 nos vértices. Obtém-se mais uma solução:



N = 33: A soma dos números colocados nos vértices é **12** = 33 – 21. Há escolhas possíveis:

- 1, 5 e 6 nos vértices. Não produz nenhuma solução.
- 3, 4 e 5 nos vértices. Idem.
- 2, 4 e 6 nos vértices. Obtém-se mais uma solução:

DIA-A-DIA COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA



O problema relativo ao triângulo tem assim quatro soluções.

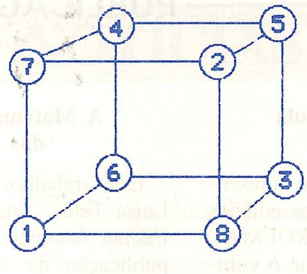
3. Quanto ao problema análogo relativamente ao cubo, o que se estranha é que no enunciado seja agora fornecido um dado omitido no problema anterior: o valor constante da soma dos números colocados nos vértices de cada face (18). Na realidade, como veremos já a seguir, este dado é supérfluo.

Significando agora **N** a soma dos seis grupos de 4 números colocados nos vértices de cada face, notando que o número colocado em cada vértice é agora contado **três vezes** em N e que todos os números, de 1 a 8, são colocados nos vértices, concluímos que **N** tem que ser igual a **108** = 3 x (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) e que a soma dos quatro vértices de cada face tem que ser igual a **18** = 108/6.

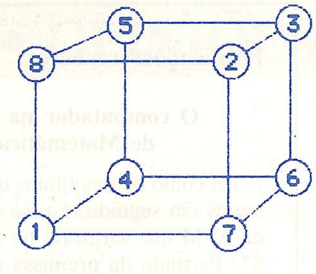
Se repararmos ainda que no cubo há *três pares* de faces disjuntas (significando, aqui, faces disjuntas aquelas que não têm vértices comuns), vemos que cada eventual solução do problema está ligada a existência de *três decomposições* do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} em dois subconjuntos disjuntos de quatro elementos cuja soma seja igual a 18. Procedendo com cuidado, vemos que existem apenas quatro decomposições daquele tipo, a que chamaremos A, B, C e D, a saber:

A...... {1, 2, 7, 8} e {3, 4, 5, 6}
B...... {1, 3, 6, 8} e {2, 4, 5, 7}
C...... {1, 4, 5, 8} e {2, 3, 6, 7}
D...... {1, 4, 6, 7} e {2, 3, 5, 8}

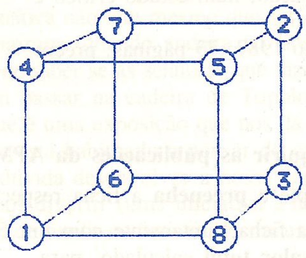
Mesmo sem recorrer à fórmula das combinações, vemos que são quatro os modos como podemos agrupar três a três aqueles quatro pares de faces, a saber: ABC, ABD, ACD e BCD. Isto é, haverá quando muito quatro soluções para o problema posto. Mas ABC parece não poder ser solução, pois a aresta 1-8 estaria em três faces, o que não é possível num cubo. Só os outros casos deverão corresponder efectivamente a soluções, como o leitor pode verificar pelas figuras seguintes;



ABD



ACD



BCD

Nota final: Serão estes dois interessantes problemas realmente **dois** problemas ou apenas dois exemplos de **um mesmo problema**? Para isso teríamos de ir estudar outras figuras planas e outros poliedros, como o tetraedro, por exemplo. Quem quer continuar?

Eduardo Veloso

Alguns colegas têm perguntado se seria possível publicarem-se as soluções dos problemas apresentados, nesta secção, nos dois primeiros números da nossa revista. Como é visível nestas duas páginas, alguns desses problemas têm merecido uma especial atenção de colaboradores ou leitores de *Educação e Matemática*. Em relação aos restantes, pensamos apresentar proximamente um número maior de soluções e sugestões. Entretanto, claro, esperamos a contribuição dos colegas que tenham encontrado soluções ou explorações particularmente interessantes.

COM A MATEMÁTICA • DIA-A-DIA COM A MA