Uso do *Geometer's Sketchpad* no estudo de propriedades da parábola

Rosa Maria Ribeiro
Maria do Céu Silva

As questões abordadas neste artigo relacionam-se com a parábola, definida como curva plana, e vão ser tratadas de um ponto de vista geométrico que não envolve geometria analítica.

Para pôr em prática as actividades sugeridas recorremos ao *Sketchpad*. Este programa de geometria dinâmica, onde a possibilidade de construir facilmente figuras incita à multiplicação e à diversificação de exemplos, é um precioso auxiliar do processo mental para estabelecer conjecturas, rejeitar hipóteses e tirar conclusões. Além disso, pensamos que este programa permite estabelecer uma vantajosa interacção entre o tratamento, já referido, da parábola e o seu tratamento analítico, habitual nos manuais do ensino secundário.

A parábola

Definição

Seja *d* uma recta e *F* um ponto não pertencente a *d*. Seja α o plano definido por *d* e *F*. Define-se parábola de directriz *d* e foco *F* como o conjunto dos pontos *P*, de α, tais que dist(P, d) = dist(P, F).

Noções preliminares

Neste parágrafo são relembrados alguns conceitos relativos à parábola que serão utilizados nos pontos seguintes.

Eixo de uma parábola é a recta perpendicular à directriz que passa pelo foco.

Vértice de uma parábola é o ponto de intersecção da curva com o eixo.

Dado um ponto, *P*, da parábola, chama-se *raio vector* (ou raio focal) de *P* ao segmento de recta definido pelo foco, *F*, e por *P*.

Um ponto *E*, do plano da parábola, diz-se externo à parábola se dist(E, d) < dist(E, F).

Um ponto *I*, do plano da parábola, diz-se interno à parábola se dist(I, d) > dist(I, F).

Uma construção dinâmica com o *Sketchpad*

Comecemos por traçar, com o auxílio do *Sketchpad*, uma recta, *d*, e um ponto, *F*, não pertencente a *d* (fig. 1). Recorrendo às possibilidades oferecidas por este programa, coloquemos um ponto variável, *X*, em *d*, e tomemos o ponto médio, *M*, de *XF*. Em seguida, construamos a mediatriz *m*, de *XF*. Seja *P* o ponto de intersecção da perpendicular a *d* por *X* com a recta *m*.

O comando *locus* permite fazer o traçado da parábola — curva descrita por *P* quando *X* se desloca em *d*.

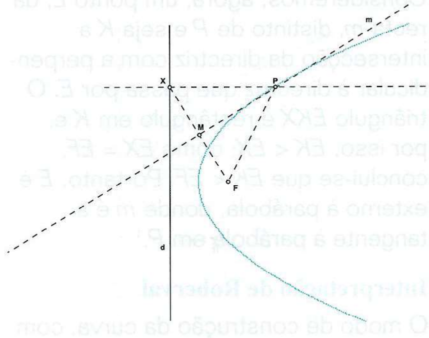

figura 1

É fácil verificar que qualquer ponto *P* da curva obtida por este processo satisfaz à definição dada de parábola. De facto, sendo *P* um ponto da mediatriz de *XF*, dist(P, F) = dist(P, X); além disso, como *X* é o projectado ortogonal de *P* em *d*, dist(P, X) = dist(P, d). Portanto, dist(P, F) = dist(P, d), isto é, *P* é ponto da parábola.

Pode observar-se que a recta *m* referida é também bissectriz do ângulo *XPF*. Esta propriedade é consequência imediata da congruência dos triângulos *PXM* e *PMF*.

Tangente à parábola num ponto

Definição

Uma recta, *t*, diz-se tangente à parábola no ponto *P* se todos os pontos de *t* à excepção de *P* são externos à parábola.

Vamos mostrar que, a recta *m* usada na construção da parábola é tangente à parábola no ponto *P*. (fig. 2)

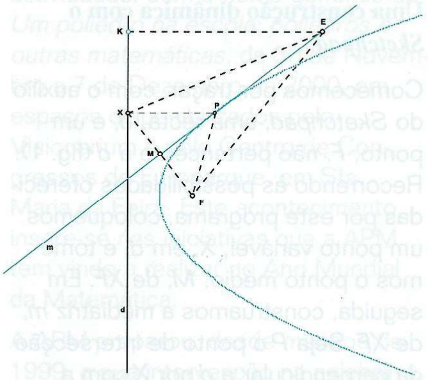

figura 2

Comecemos por observar que, como *P* é ponto da parábola, *XP* = *PF*; além disso, por *M* pertencer à mediatriz, *m*, *XM* = *MF*.

Consideremos, agora, um ponto *E*, da recta *m*, distinto de *P* e seja *K* a intersecção da directriz com a perpendicular à directriz que passa por *E*. O triângulo *EKX* é rectângulo em *K* e, por isso, *EK* < *EX*; como *EX* = *EF*, conclui-se que *EK* < *EF*. Portanto, *E* é externo à parábola, donde *m* é a tangente à parábola em *P*.[1]

Interpretação de Roberval

O modo de construção da curva, com o *Sketchpad*, permite observar que a recta *m* dá a direcção do movimento do ponto *P*. Em cada instante, este movimento resulta simultaneamente de outros dois, de afastamento ou aproximação, "à mesma velocidade" do foco e da directriz — o que está de acordo com o processo indicado por Roberval[2] para a obtenção de tangentes a curvas.

Com a opção *Action Button* do comando *Edit*, é possível criar um botão que anima o ponto *P* na parábola e que permite visualizar, não só diferentes posições das rectas *XP* e *FP*, como também da bissectriz, *m*, do ângulo por elas formado (fig. 3).

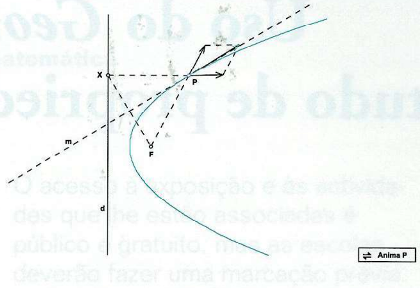

figura 3

Uma propriedade importante

Entre as propriedades da tangente à parábola há uma que, pela sua importância no que vai seguir-se, não podíamos deixar de mencionar.

Seja *P* um ponto da parábola e *t* a tangente à parábola em *P*. O ponto de intersecção de *t* com o eixo da parábola define com o foco um segmento de comprimento igual ao do raio vector.

De acordo com a fig. 4 a propriedade referida pode traduzir-se por: *PF* = *FT*.

Vejamos que, de facto, assim é, tendo presente que *t* é mediatriz de *XF* e bissectriz de *XPF*.

$\angle XPM = \angle MPF$ (pois *P* pertence à bissectriz do $\angle XPF$) e $\angle XPM = \angle PTF$ (pois são ângulos alternos internos e *XP* é paralela a *TF*).

Logo, $\angle PTF = \angle MPF$ e, portanto, o triângulo *TPF* é isósceles de base *PT*, donde, *PF* = *FT*.

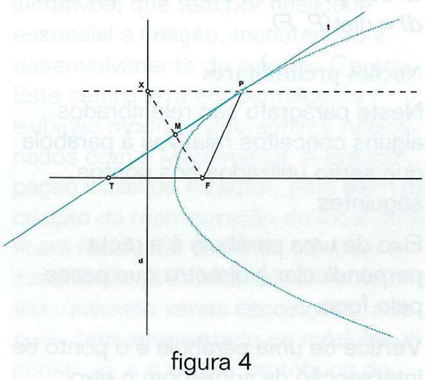

figura 4

Subtangente num ponto da parábola

Definição

Sejam *P* um ponto de uma parábola e *t* a tangente à parábola em *P*. Sejam, ainda, *P'* o projectado ortogonal de *P* sobre o eixo da parábola e *T* o ponto de intersecção de *t* com o eixo da parábola.

Chama-se subtangente em *P* ao segmento de recta *TP'*.

Uma propriedade importante

Em qualquer parábola o vértice bissecta a subtangente.

Seja *P* um ponto da parábola de vértice *V*; sejam, ainda, *t* a tangente à curva por *P*, *T* o ponto de intersecção de *t* com o eixo e *P'* o projectado ortogonal de *P* sobre o eixo. A propriedade enunciada traduz-se por: *VT* = *VP'* (fig. 5).

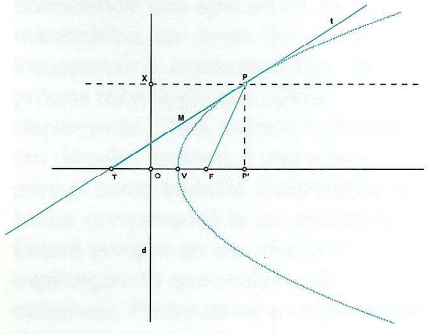

figura 5

De facto tem-se: *OP'* = *XP* (pois, por construção, *XPP'O* é um rectângulo); *XP* = *PF* e *OV* = *VF* (pois *P* e *V* pertencem à parábola). Além disso, *PF* = *FT*.

Logo, *VP'* = *OP'* – *OV* = *XP* – *VF* = *PF* – *VF* = *FT* – *VF* = *VT*.

Esta propriedade era já conhecida na Grécia Antiga. Apolónio refere-a no seu tratado *Cónicas*[3] e faz uso dela para obter a tangente a uma parábola num dos seus pontos.

A definição de parábola dada por Apolónio é diferente daquela que referimos no início deste artigo, não usando como elementos definidores o foco e a directriz. Ela baseia-se numa propriedade característica dos pontos da curva (que Apolónio designa por *sintoma da parábola*), que corresponde à actual equação $y^2 = kx$ num referencial convenientemente escolhido[4] — constituído pelo eixo da parábola (eixo das abcissas) e pela perpendicular ao eixo que passa pelo vértice. O sintoma da parábola e a teoria elaborada com base nesta definição conduzem a uma prova que "o vértice da parábola bissecta a subtangente", diferente daquela que acabamos de apresentar.

Traçado de tangentes à parábola

Por um ponto da parábola

O que ficou dito anteriormente permite indicar dois processos simples de traçar uma tangente à parábola por um dos seus pontos, quando são conhecidos o foco e a directriz.

Recorrendo à propriedade da tangente

Seja dada uma parábola de foco *F* e designe por *e* o eixo e *P* um dos seus pontos.

Construamos a circunferência de centro *F* e raio *FP*. Esta circunferência intersecta *e*, do lado do vértice, no ponto *T*.

A recta *PT* é tangente à parábola em P. (fig. 6)

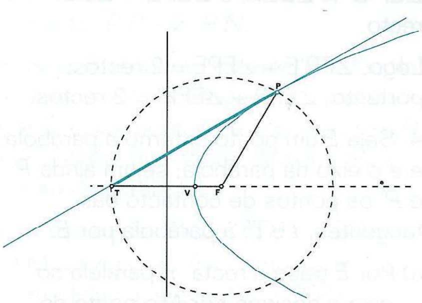

figura 6

Recorrendo à propriedade da subtangente

Seja dada uma parábola e sejam V^s o seu vértice, *e* o seu eixo e *P* um dos seus pontos.

Determinemos o projectado ortogonal, *P'*, de *P* sobre o eixo e o simétrico, *T*, de *P'* relativamente a *V*.

A recta *PT* é tangente à parábola em *P*. (fig. 7)

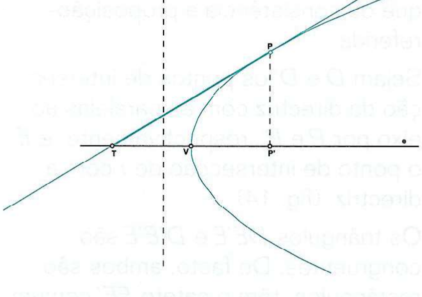

figura 7

Por um ponto externo à parábola

O processo dinâmico de construção da curva é suficiente para justificar o procedimento utilizado na construção que se segue.

Observe-se que, neste caso há duas tangentes à parábola passando pelo ponto.

Seja dada uma parábola (pelo foco e directriz) e um ponto externo, *E*.

Comecemos por construir a circunferência de centro *E* e raio *EF*; esta circunferência intersecta a directriz nos pontos *D* e *D'*. As tangentes à parábola pelo ponto *E* são as mediatrizes dos segmentos *DF* e *D'F*. (fig. 8)

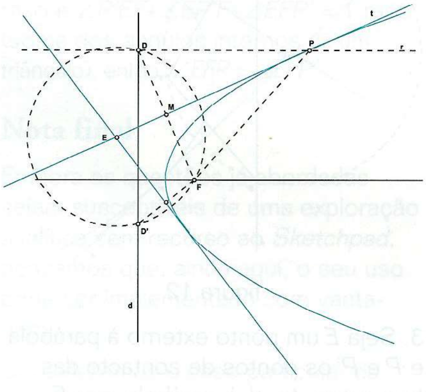

figura 8

Este processo permite determinar não só as tangentes como também os pontos de tangência. Por exemplo, seja *t* a mediatriz do segmento *DF*; o respectivo ponto de tangência, *P*, obtém-se como ponto de intersecção de *t* com a recta, *r*, que passa por *D* e é paralela ao eixo da parábola. A outra tangente obtém-se considerando *D'* em vez de *D*.

Observe-se que, se o ponto *E* for interno à parábola, então a circunferência de centro *E* e raio *EF* não intersecta a directriz e que, se *E* pertencer à parábola, então essa circunferência é tangente à directriz (pelo que só há uma tangente). Portanto, esta construção permite discutir a possibilidade do problema das tangentes, bem como o número de soluções.

Actividades usando o *Sketchpad*

Nas actividades que se seguem o leitor deve começar por traçar uma parábola de directriz *d* e foco *F*.

1. Seja *P* um ponto móvel da parábola, distinto do vértice.

a) Construa a tangente, *t*, à parábola, por *P* e determine o ponto, *E*, de intersecção de *t* com a directriz.

b) Meça o $\angle PFE$.

c) Quando *P* se move na parábola, a medida do $\angle PFE$ varia?

As respostas às alíneas anteriores poderiam levar o leitor a estabelecer a seguinte conjectura: qualquer que seja o ponto *P* da parábola, se E é um ponto da tangente que pertence à directriz, então o ângulo *PFE* é recto.

No entanto para validar esta conjectura não se pode dispensar uma prova, como aquela que, a título de exemplo, indicamos.

A prova de que o ângulo *PFE* é recto baseia-se no facto dos triângulos *PXE* e *EFP* serem congruentes (fig. 9). De facto têm o lado *PE* comum, $PX = PF$ (pois *P* é ponto da parábola e *X* é o projectado ortogonal de *P* sobre *d*) e $\angle XPE = \angle EPF$. Logo $\angle PXE = \angle PFE$; além disso $\angle PXE$ é recto, portanto $\angle PFE$ é recto.

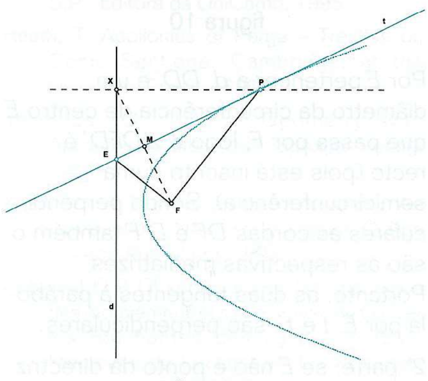

figura 9

2. Seja *E* um ponto externo à parábola.

a) Construa as tangentes, *t* e *t'*, à parábola por *E*. e obtenha os pontos de contacto, *P* e *P'*, respectivamente.

b) Meça o $\angle PEP'$.

c) Mova *E* (respeitando a condição de *E* ser externo à parábola) e observe as alterações na medida do $\angle PEP'$.

d) O que acontece quando *E* se aproxima da directriz? E quando se afasta?

e) Qual a posição de *E* para a qual o

$\angle PEP'$ é agudo? E obtuso?

f) Se *E* for um ponto da directriz, qual é a medida do $\angle PEP'$?

Das respostas dadas o leitor pode inferir que: numa parábola as duas tangentes tiradas por um ponto externo são perpendiculares se e só se o ponto pertence à directriz.

Seja *E* um ponto externo à parábola e sejam *D* e *D'* os pontos de intersecção com a directriz das paralelas ao eixo que passam por *P* e *P'*, respectivamente.

A prova que se segue consta de duas partes.

1ª parte: se *E* é ponto da directriz *d*, então as tangentes, *t* e *t'*, são perpendiculares (fig. 10).

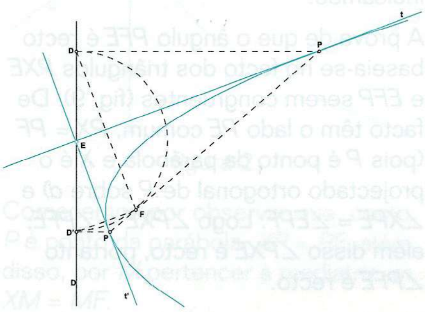

figura 10

Por *E* pertencer a *d*, *DD'* é um diâmetro da circunferência de centro *E* que passa por *F*, logo o $\angle DFD'$ é recto (pois está inscrito numa semicircunferência). Sendo perpendiculares as cordas *DF* e *D'F* também o são as respectivas mediatrizes. Portanto, as duas tangentes à parábola por *E*, *t* e *t'*, são perpendiculares.

2ª parte: se *E* não é ponto da directriz *d*, então as tangentes, *t* e *t'*, não são perpendiculares.

Neste caso há duas situações a considerar, conforme *E* pertence ao semiplano determinado por *d*, que contém a parábola (fig. 11) ou *E* pertence ao semiplano determinado por *d*, que não contém a parábola (fig. 12).

Em qualquer dos casos, as cordas *DF* e *D'F* não são perpendiculares (pois o $\angle DFD'$ está inscrito num arco que não é uma semicircunferência). Portanto as tangentes, *t* e *t'*, (mediatrizes dessas cordas) também não são perpendiculares.

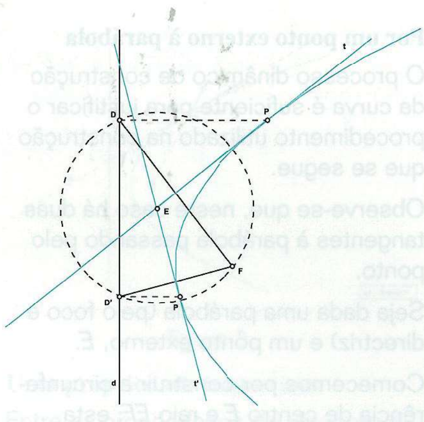

figura 11

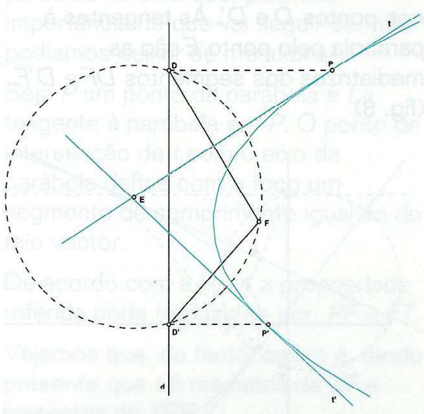

figura 12

3. Seja *E* um ponto externo à parábola e *P* e *P'* os pontos de contacto das tangentes, *t* e *t'*, à parábola, por *E*.

a) Construa os segmentos *EF*, *PF* e *P'F*.

b) Meça $\angle EFP$ e $\angle EFP'$ e calcule a sua soma — obtém a medida de $\angle PFP'$.

c) Mova *E* (respeitando a condição de E ser externo à parábola) e observe as alterações na medida do $\angle PFP'$.

d) Há alguma posição de *E* para a qual *P*, *F*, *P'* estão alinhados?

As respostas dadas podem levar o leitor a concluir que: se *E* é um ponto da directriz de uma parábola, então *F* pertence à recta definida pelos pontos de contacto das tangentes por *E*.

Apresentamos a seguir uma prova da veracidade da afirmação precedente.

Seja *E* um ponto da directriz e *D* e *D'* os projectados ortogonais de *P* e *P'* sobre *d*. O objectivo é mostrar que os pontos *P*, *F*, *P'* estão alinhados, o que é equivalente a provar que:

$\angle EFP + \angle EFP' = 2$ rectos (fig. 13).

Por ser $\angle EFP + \angle EFP' + \angle FP'E + {}$ $+ \angle P'EF + \angle PEF + \angle FPE = 4$ rectos e, por ser $\angle P'EF + \angle PEF = \angle P'EP = 1$

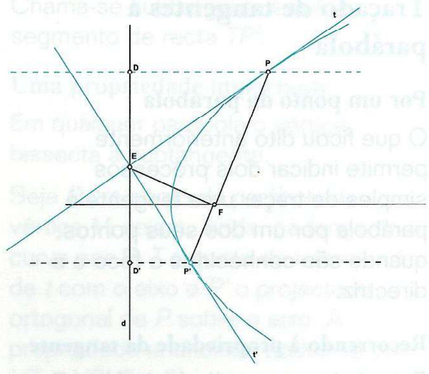

figura 13

recto (pois $E \in d$), logo, podemos concluir que:

$\angle EFP + \angle EFP' + \angle FP'E + \angle FPE = 3$ rectos.

Por outro lado, $\angle FPE = \angle EPD = \angle D'EP'$ (ângulos de lados perpendiculares) e, de forma análoga, $\angle FP'E = \angle EP'D' = \angle DEP$; e $\angle EPD + \angle DEP = 1$ recto.

Logo, $\angle FP'E + \angle FPE = 2$ rectos; portanto, $\angle EFP + \angle EFP' = 2$ rectos.

4. Seja *E* um ponto externo à parábola e *e* o eixo da parábola; sejam ainda *P* e *P'* os pontos de contacto das tangentes, *t* e *t'*, à parábola por *E*.

a) Por *E* trace a recta, *r*, paralela ao eixo e designe por *N* o ponto de intersecção de *r* com a corda de contacto *PP'*.

b) Meça os comprimentos dos segmentos *NP* e *NP'*.

c) Mova *E* (respeitando a condição de E ser externo à parábola) e observe a variação dos comprimentos dos segmentos *NP* e *NP'*.

Das constatações feitas o leitor pode ser levado a formular o seguinte: numa parábola a paralela ao eixo por um ponto externo bissecta a corda de contacto das tangentes por esse ponto.

Apresentamos a seguir uma prova que dá consistência à proposição referida.

Sejam *D* e *D'* os pontos de intersecção da directriz com as paralelas ao eixo por *P* e *P'*, respectivamente, e *E'* o ponto de intersecção de *r* com a directriz. (fig. 14)

Os triângulos *DE'E* e *D'E'E* são congruentes. De facto, ambos são rectângulos, têm o cateto *EE'* comum e hipotenusas iguais ($ED = ED'$ pois *D*

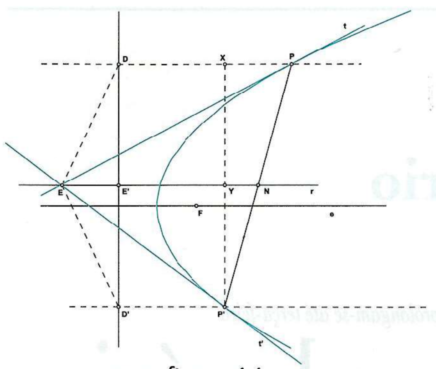

figura 14

e D' estão na circunferência de centro E que passa por F). Logo $E'D = E'D'$.

Por P' trace-se a paralela à directriz; esta recta intersecta r no ponto Y e PD no ponto X. Os triângulos $P'PX$ e $P'NY$ são semelhantes pois têm os ângulos iguais logo $\frac{P'X}{P'Y} = \frac{P'P}{P'N}$. Mas, $P'X = D'D = 2.\ D'E' = 2.\ P'Y$ e, portanto, $P'P = 2.\ P'N$.

5. Seja E um ponto externo à parábola e sejam t e t', as tangentes à parábola por E, cujos pontos de contacto são P e P', respectivamente; designe por e o eixo da parábola.

a) Meça os ângulos $\angle EFP$ e $\angle EFP'$.

b) Mova o ponto E e compare as medidas dos ângulos $\angle EFP$ e $\angle EFP'$. O que nota?

As conclusões tiradas permitem conjecturar o seguinte: qualquer que seja o ponto E externo à parábola, os ângulos EFP e EFP' são geometricamente iguais.

A veracidade desta afirmação pode confirmar-se com a prova que vamos apresentar.

Trace-se por E a recta paralela ao eixo e da parábola e designe-se por E' o ponto de intersecção dessa recta com d (fig. 15); sejam D e D' os pontos de intersecção da directriz com as paralelas ao eixo por P e P', respectivamente.

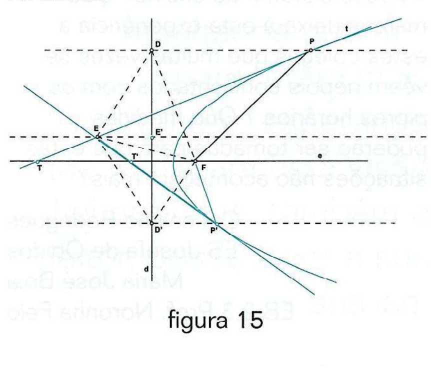

figura 15

Tem-se: $\angle DEP = \angle PEF$ (por t ser a bissectriz do ângulo $\angle DEF$) e $\angle PEE' = \angle EPF$ (pois $\angle EPF = \angle PTF$ e EE' é paralelo a TF), donde $\angle DEP + \angle PEE' = \angle PEF + \angle EPF$; além disso $\angle D'EP' = \angle P'EF$ (por t' ser a bissectriz do ângulo $\angle D'EF$) e $\angle P'EE' = \angle EP'F$ (pois $\angle EP'F = \angle P'T'F$ e EE' é paralelo a $T'F$), donde $\angle D'EP' + \angle P'EE' = \angle P'EF + \angle EP'F$.

Por outro lado, $\angle DEP + \angle PEE' + \angle EDD' = 1$ recto e $\angle D'EP' + \angle P'EE' + \angle ED'D = 1$ recto (soma dos ângulos agudos de um triângulo rectângulo) e $\angle EDD' = \angle ED'D$ (pois o triângulo EDD' é isósceles de base DD') logo, $\angle DEP + \angle PEN = \angle D'EP' + \angle P'EN$, e, por isso, $\angle PEF + \angle EPF = \angle P'EF + \angle EP'F$.

Como, além disso, $\angle PEF + \angle EPF + \angle EFP = 1$ raso e $\angle P'EF + \angle EP'F + \angle EFP' = 1$ raso (soma dos ângulos internos de um triângulo), então, $\angle EFP = \angle EFP'$.

Nota final

Embora as questões já abordadas sejam susceptíveis de uma exploração analítica sem recurso ao *Sketchpad*, pensamos que, ainda aqui, o seu uso pode ser implementado com vantagem.

Consideremos o caso particular da parábola ter como directriz uma recta horizontal ou vertical (como interessa no ensino secundário); instalemos, utilizando o comando *Graph* do *Sketchpad*, o referencial cartesiano ortogonal "naturalmente" associado à parábola construída, definindo como origem o seu vértice. Fixado esse referencial, o programa permite através de opções do comando Measure determinar coordenadas de pontos e equações de rectas, que poderão ser preciosos auxiliares na confirmação de resultados.

Notas

[1] O *Sketchpad* permite mover E na recta m e mostrar que, qualquer que seja a posição de E, este ponto é externo à parábola.

[2] Roberval estabelece o seguinte *axioma ou princípio de invenção*: "A direcção do movimento de um ponto que descreve uma linha curva, é a tangente da linha curva em cada posição desse ponto", ao qual acrescenta a seguinte *regra geral*: "Pelas propriedades específicas da linha curva (que vos serão dadas) examinai os diversos movimentos que tem o ponto que a descreve no sítio onde quereis traçar a tangente: de todos esses movimentos compostos num só tirai a linha da direcção do movimento composto, tereis a tangente à linha curva." (Roberval, *Observations sur la composition des mouvemens, et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes*, em Memoires de l'Academie Royale des Sciences, depuis 1666, jusqu'a 1699, t. VI, Paris, 1730, pp. 24 e 25).

[3] *Cónicas*, livro I, prop. XXXIII e XXXIV (Heath, T., *Apollonius of Perga – Treatise on Conic Sections*, p. 25).

[4] A propriedade característica da parábola, referida por Apolónio, é verificada para qualquer referencial constituído por uma recta r, paralela ao eixo, e pela tangente à parábola no ponto de intersecção de r com a curva.

[5] Para obter o vértice, V, com o *Sketchpad* começamos por determinar o ponto O de intersecção da directriz com o eixo e, em seguida, definimos o segmento OF. O ponto V é o ponto médio de OF.

Bibliografia

Bourdon, M. Application de L'Algèbre à la Géométrie. Neuvième Édition, revue et annotée par M. G. Darboux. Paris: Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, 1906.

Chasles, M. Aperçu Historique sur l'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie. Paris, Gauthier-Villars et Fils, Imprimeurs-Libraires, 1889.

Eves, H. Introdução à História da Matemática - trad. Hygino H. Domingues. Campinas, S.P.: Editora da UniCamp, 1995.

Heath, T. Apollonius of Perga – Treatise on Conic Sections. Cambridge: at the University Press, 1896.

Jennings, G. Modern Geometry with Applications. New York: Springer Verlag, 1994.

Katz, V. A History of Mathematics: An Introduction. New York: Harper Collins College Publishers, 1993.

Roberval, G.P. Observations sur la composition des mouvemens et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes. Mémoires de l'Académie des Sciences, tome VI, 1666-1699.

Rouché, E. e C. Comberousse. Traité de Géométrie (2 vol.). Paris, Gauthier-Villars et C., Editeur, 1929.

Veloso, E. Geometria, Temas Actuais. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

Veloso, E, H. Fonseca, J. P. Ponte e P. Abrantes. Ensino da Geometria no virar do milénio. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1999.

Ver Eecke, P. Les Coniques d'Apollonius de Perge-Oeuvres traduites pour la Première fois du grec en français, avec une introdution et des notes. Bruges, Desclée, de Brouwer et C., 1923.

Rosa M. Ribeiro e Maria do Céu Silva,
Centro de Matemática da Univ. Porto