Z, curvas perigosas

Fernando Bensabat

Meio século decorrido, o autor recorda ainda a ida ao Coliseu e o fascínio que sentiu pela perícia que um malabarista demonstrou ao equilibrar-se com tanto à vontade. E, à volta das curvas perigosas, mais tarde veio a perceber as razões para a utilização de bolas tão grandes, pelos malabaristas, e outras coisas mais.

No dia em que fiz três anos, a minha mãe e a minha tia Maria Octávia decidiram levar-me ao Coliseu para assistir a um espectáculo de circo. Triste ideia! A multidão compacta que se ia acotovelando contra nós, o barulho — que na altura me pareceu ensurdecedor — e o facto de me ter perdido delas duas ou três vezes deixaram-me num estado miserável. O pânico que comecei a sentir atingiu o apogeu quando, subitamente, os palhaços que estavam a actuar resolveram saltar para a primeira fila e interpelar directamente as crianças que aí se encontravam — entre as quais eu próprio, absolutamente esgazeado e tão encolhido quanto possível entre os joelhos maternos. Nesse momento, perante a atitude ameaçadora daqueles monstros multicolores, fugi de gatas por entre pernas e cestos de merenda, e só me conseguiram apanhar três filas mais atrás. Escusado será dizer que, ainda hoje, não sou grande apreciador de circo.

O mais curioso dessa experiência dantesca é que, quase meio século decorrido, ainda recordo vivamente dois momentos: por um lado, o preciso instante em que os dois palhaços saltaram de súbito a pequena vedação que os separava dos espectadores; por outro, a sensação menos desagradável de toda a *soirée*, protagonizada por um malabarista que actuou, exibindo as habituais habilidades, sobre uma enorme bola de gomos coloridos. Senti-me fascinado pela perícia que ele demonstrava em equilibrar-se, com tanto à-vontade, sobre uma superfície tão presumivelmente incómoda. Lembro-me ainda de ter tentado, alguns dias depois, reproduzir a proeza em casa com as bolas que lá tinha — e também da inesperada profusão de *galos* que à noite, quando me ia deitar, a minha mãe ia encontrando.

Percebi mais tarde que a área da superfície útil (a que o malabarista usa como superfície de apoio), aumenta proporcionalmente com o tamanho da bola ou, de uma forma mais exacta, é directamente proporcional ao quadrado do raio (a área de toda a superfície é $4\pi r^2$), o que quer dizer que, aumentando o raio para o dobro, a área aumenta quatro vezes. Todavia, só mais recentemente me apercebi de que existe outra razão matemática para a utilização, pelos equilibristas, de bolas tão grandes quanto possível — é que a curvatura da sua superfície varia igualmente com o raio, mas desta vez numa razão inversamente proporcional ao seu quadrado.

1. A circunferência osculadora

Todos nós sabemos, por intuição e por experiência empírica directa, que é bastante mais fácil fazer imobilizar um berlinde sobre um tampo horizontal de uma mesa do que sobre a superfície de uma bola de praia. Justificamos este facto com o argumento de que a superfície da bola "não é direita", o que poderia ser traduzido, de forma mais precisa, pela afirmação de que ela "é curva". Também o ecrã de uma velha televisão é encurvado e, no entanto, temos a noção imediata de que, entre a curvatura da bola de praia e a do ecrã de televisão, existem duas diferenças imediatamente perceptíveis:

a) A superfície da bola é igualmente encurvada em todos os seus pontos — assumindo que é de facto esférica — o que quer dizer que é absolutamente indiferente escolher este ou aquele ponto para aí colocarmos o berlinde, pois o grau de encurvamento é o mesmo. Todavia, o ecrã de televisão apresenta diferentes encurvamentos ao longo da sua superfície, o que nos poderia sugerir que a habilidade que nos propúnhamos fazer seria mais fácil de executar num ponto do que noutro. Podemos expressar este facto dizendo que o grau de curvatura da superfície da bola é constante em todos os seus pontos, ao passo que a do ecrã varia de ponto para ponto;

b) Se a curvatura do ecrã é mais acentuada nuns pontos do que noutros, então deverá ser possível definir um critério que nos permita medi-la e comparar assim os valores pontuais obtidos.

Com efeito, o grau de encurvamento de uma superfície num dos seus pontos depende da curvatura das linhas que podemos desenhar nessa superfície passando pelo ponto considerado. Ora, tal como constatámos em relação às duas superfícies atrás referidas, também as linhas apresentam características semelhantes no tocante ao seu grau de encurvamento: este pode ser constante, ou não, e é susceptível de ser medido mediante um critério apropriado.

Comecemos por considerar dois casos de linhas especiais — a linha recta e a circunferência. Em relação à recta, sabemos intuitivamente tratar-se de uma linha direita (os ingleses chamam-lhe *straight line* e os franceses *droite*). Numa primeira análise, isto sugere que uma linha recta não tem qualquer encurvamento, seja qual for o ponto nela escolhido, o que poderá traduzir-se pela afirmação de que a sua curvatura *é nula*. Quanto à circunferência, analogamente ao que tínhamos verificado a propósito da bola de praia, constatamos que o seu grau de encurvamento *é constante*, independentemente do ponto que nela consideremos. Todavia, percebemos de imediato que essa curvatura constante não tem o mesmo valor para todas as circunferências. Na realidade, à medida que aumentamos o seu raio, a curva começa a aproximar-se de uma linha recta, o que se pode verificar fixando um dos seus pontos e fazendo crescer o raio — na vizinhança do ponto escolhido, o arco da curva começa a confundir-se com a recta que aí lhe é tangente (figura 1).

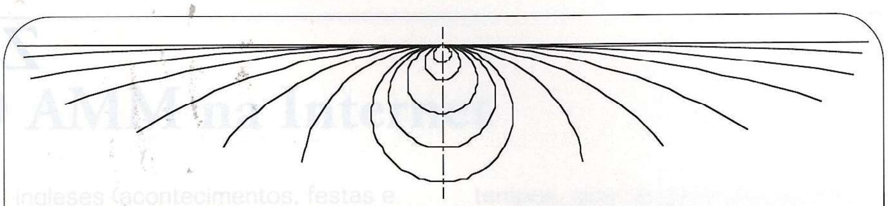

figura 1- Na vizinhança do ponto fixado, e à medida que o raio da circunferência aumenta, o arco da curva começa a confundir-se com a recta que aí lhe é tangente

Este fenómeno leva-nos a concluir que *a curvatura da circunferência diminui à medida que o seu raio aumenta*, o que poderá constituir um critério razoável para a definir. Uma vez que se trata de duas grandezas inversamente proporcionais (o encurvamento decresce à medida que o raio cresce, e vice-versa), poderemos medir uma em função da outra, e diremos então que a *curvatura de uma circunferência é metricamente igual ao inverso do comprimento do seu raio*:

$$(1) \quad k = \frac{1}{R}$$

Esta definição revela-se consistente com a anterior constatação, isto é, com o facto da linha recta ter uma curvatura nula. Com efeito, se um arco de circunferência se aproxima da tangente à medida que o raio vai crescendo, poderemos supor que as duas coincidirão numa situação limite, ou seja, quando *o raio da circunferência for infinitamente grande*. Ora se na expressão (1) fizermos tender R para ∞, o valor de k tenderá obviamente para 0, o que corresponde ao que foi atrás intuído.

Será curioso levar esta definição às suas últimas consequências. Em primeiro lugar, somos obrigados a aceitar, por força do que já foi dito, que *uma recta é uma circunferência de raio infinitamente grande*, ou, para os mais tortuosos, que uma circunferência é uma recta de curvatura constante não nula. Este inter-relacionamento entre as duas entidades estabelece uma ponte interessante entre a geometria euclidiana e a geometria riemanniana ou *geometria elíptica*. A geometria de Euclides pode assim ser encarada como um caso limite da geometria de Riemann, sendo esta mais geral.

O segundo aspecto que merece ser realçado prende-se com a possibilidade de adoptarmos o sentido de variação oposto ao que temos vindo a considerar, isto é: o que é que acontece quando fazemos *diminuir* o raio da circunferência? Como podemos facilmente deduzir da expressão (1), quando R tender para 0, k irá crescer e tender para ∞. Contudo, e no limite em que R=0, a circunferência reduzir-se-á a *um único ponto, coincidente com o seu próprio centro*, o que sugere que o ponto *é a única entidade geométrica cuja curvatura é infinitamente grande* (um buraco negro?).

Assentemos, então, no facto de que, qualquer que seja a curva considerada, a recta que lhe é tangente num dos seus pontos se confunde, na vizinhança do ponto de tangência, com a própria curva. Isto quer dizer que a relação entre uma curva qualquer e a sua tangente num dado ponto é exactamente análoga à que se verifica quando a curva é uma circunferência, o que nos sugere um processo de determinação da curvatura de uma *linha qualquer* em cada um dos seus pontos.

Suponhamos então uma curva qualquer e a recta tangente num dos seus pontos previamente fixado, P. É possível fazer passar por esse ponto um número infinito de circunferências tangentes à recta em questão. Todavia, e embora tenham todas em comum, com a curva inicial, o ponto fixado, nem todas se ajustam de igual modo ao seu perfil, isto é, haverá certamente uma que é a *que melhor se ajusta à curva, em P e na sua vizinhança*, circunferência essa a que chamaremos circunferência osculadora, chamando a P, subsequentemente, o ponto de beijamento. Como determinar o centro e o raio da circunferência osculadora à curva em P?

Antes de nos lançarmos em aventuras, comecemos por definir alguns dos conceitos aqui implícitos. O *centro de curvatura de uma linha num* *ponto P* é o centro da circunferência osculadora que passa por *P*, o seu *raio de curvatura* nesse ponto é o raio dessa mesma circunferência e a *curvatura* é metricamente igual ao inverso do comprimento daquele raio. Ora a circunferência osculadora, sendo concordante com a curva dada no ponto considerado, admite, nesse ponto, uma tangente que também o é àquela e, subsequentemente, ambas admitem uma recta normal comum. Como, na circunferência, a recta normal passa sempre pelo centro, o centro de curvatura da curva inicial em *P* está contido na normal comum.

Huygens foi um cientista de renome internacional. Entre os diversos campos a que se dedicou, a relojoaria proporcionou-lhe uma das suas descobertas matemáticas mais interessantes sobre curvas evolutas e involutas. Oiçamos Boyer e Merzbach (1989):

> Huygens (...) fez uma descoberta de importante significado matemático — a involuta de uma cicloide é uma cicloide semelhante e, inversamente, a evoluta de uma cicloide também é uma cicloide semelhante. Este teorema, e outros resultados respeitantes a involutas e a evolutas de outras curvas, foram demonstrados por Huygens de uma forma essencialmente análoga à que Arquimedes ou Fermat utilizariam: escolhendo pontos vizinhos e fazendo tender o intervalo para zero. Descartes e Fermat utilizaram esta técnica para a determinação de normais e tangentes a uma curva e agora Huygens aplicou-o para achar o que hoje chamamos *raio de curvatura de uma curva plana*. Se em pontos vizinhos *P* e *Q* de uma curva (figura 2) determinarmos as normais e acharmos o seu ponto de intersecção *I*, então, à medida que *Q* se aproxima de *P* sobre a curva o ponto variável *I* tende para um ponto fixo *O*, chamado centro de curvatura da curva em *P*, e a distância *OP* é o raio de curvatura.

Invoquemos então os espíritos de Descartes e de Fermat e comecemos por considerar um caso simples.

Seja a parábola dada pela expressão $f(x) = ax^2$ e *P* o seu vértice, situado na origem. Para determinarmos a curvatura da linha em *P*, consideremos um

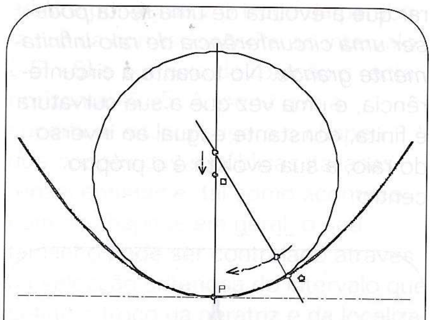

figura 2 - À medida que *Q* se aproxima de *P* sobre a curva, o ponto variável *I* tende para um ponto fixo *O*, chamado centro de curvatura da curva em *P*, e a distância *OP* é o raio de curvatura.

segundo ponto *Q* na vizinhança do anterior e determinemos a normal à curva nesse ponto. Como sabemos, o declive da recta tangente em qualquer ponto de uma curva é dado pelo valor que a primeira derivada da função tem nesse ponto e o declive da recta normal, que é perpendicular à tangente, é o inverso e o simétrico daquele. Assim, se as coordenadas de *Q* forem $[x_1, f(x_1)]$, teremos:

Declive da tangente: $m = f'(x_1)$

Declive da normal: $m_1 = \dfrac{-1}{f'(x_1)}$

Deste modo, a expressão que define a normal em $Q\ [x_1, f(x_1)]$ será:

$$y - f(x_1) = \frac{-1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

mas como a normal em *P*, no caso vertente, é o próprio eixo das ordenadas, o que pretendemos saber é *qual o valor da ordenada na origem da normal quando* x_1 *tender para zero*, isto é

$$(2)\quad y = \lim_{x_1 \to 0}\left[f(x_1) + \frac{x_1}{f'(x_1)}\right]$$

Tratando-se da curva atrás referida, em que $f(x)=ax^2$ e $f'(x)=2ax$, o limite dado pela expressão (2) toma o valor $1/2a$ quando x_1 tende para zero, o que quer dizer que, em relação ao vértice da parábola, o centro de curvatura é o ponto $O\ (0;\ 1/2a)$, o raio de curvatura mede $1/2a$ e a curvatura na origem é igual a $2a$. Esta situação é porventura a mais simples, uma vez que nos limitámos a determinar a variação da ordenada na origem da recta normal à curva em *Q* quando este tende para *P*. Se seleccionarmos outro ponto *A* da parábola $[x_A, f(x_A)]$ e pretendermos achar aí a curvatura da linha, teremos de recorrer ao mesmo método para determinar a variação das coordenadas do ponto de intersecção da normal em x_A com as normais em pontos situados na sua vizinhança, o que dará um pouco mais de trabalho.

Realcemos alguns factos curiosos acerca da curvatura de algumas linhas notáveis.

a) Em relação à parábola considerada, poderemos verificar que a curvatura máxima corresponde ao ponto situado precisamente no seu vértice. À medida que *x* tender para ∞, o ramo da curva vai apresentando um encurvamento cada vez menor que tende para zero, o que poderá ser interpretado como correspondendo à rectificação da linha que, no limite, se confundirá inteiramente com a sua recta tangente;

b) Sucede algo semelhante com as outras curvas cónicas. A hipérbole apresenta a sua curvatura máxima nos extremos do eixo real, chamado *eixo transverso*, e os dois ramos da curva vão tendendo para as respectivas tangentes no infinito, isto é, para as suas duas *assimptotas*; na elipse, existem dois limites entre os quais se distribuem os valores da curvatura — o superior, correspondendo à curvatura máxima, que se situa nos dois extremos do eixo maior da curva, e o inferior, correspondendo à curvatura mínima, que se situa nos dois extremos do seu eixo menor;

c) Generalizando, poderemos considerar que os pontos mais significativos no tocante à curvatura de uma linha estão relacionados com os seus *pontos singulares*, isto é, máximos e mínimos relativos, bem como eventuais pontos de inflexão.

2. Curvas evolutas e superfícies de revolução geradas por tais curvas

Vejamos agora a questão *com outros olhos*. Como se observou no ponto 1, a curvatura da parábola varia de ponto para ponto, o que significa que os centros de curvatura relativos a pontos diferentes da curva são também eles diferentes. Isto quer dizer que os centros de curvatura se irão distribuir de uma forma *directamente relacionada com a curva em análise*, dando por sua vez origem a um lugar geométrico a que se dá o nome de *linha evoluta da curva considerada*, sendo esta última designada por *involuta*. A curva evoluta tem uma particularidade interessante: dado que os seus pontos são determinados a partir das normais traçadas à curva inicial, estas são-lhe tangentes. Vejamos então qual a *fisionomia* da evoluta da parábola.

Achando as *equações paramétricas* da evoluta da curva considerada, é possível representá-la graficamente (figura 3).

Antes de procurarmos as evolutas de outras curvas cónicas, vejamos o panorama das três entidades que considerámos *mais simples* no início destas considerações: o ponto, a recta e a circunferência. Quais serão as suas evolutas? Em relação ao ponto que tem — recorde-se — um grau de encurvamento infinitamente grande, o raio de curvatura deverá ser *nulo* , o que implica que a evoluta de um ponto é *outro ponto coincidente com o primeiro*. Relativamente à recta, o caso fia mais fino. Dado que a sua curvatura é nula, os pontos da evoluta situam-se a uma distância infinitamente grande da recta considerada — mas em que sentido? Para "cima" da recta ou para "baixo"? Ambas as possibilidades se afiguram exequíveis, o que nos leva a considerar que a evoluta de uma recta *pode ser uma circunferência de raio infinitamente grande*. No tocante à circunferência, e uma vez que a sua curvatura é finita, constante e igual ao inverso do raio, a sua evoluta é o próprio centro.

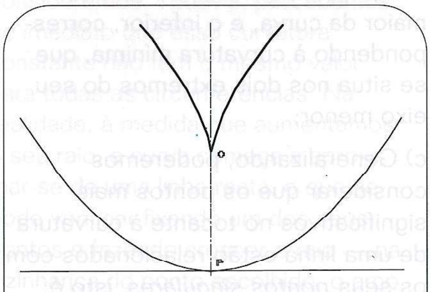
figura 3 - Curva evoluta da parábola f (x) = ax²

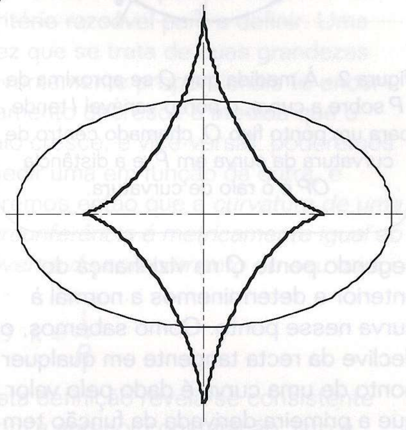
figura 4 - Curva evoluta da elipse

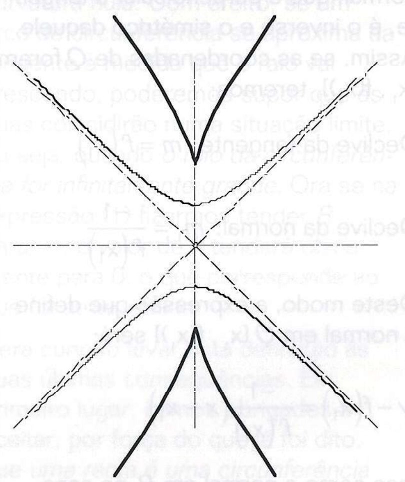
figura 5 - Curva evoluta da hipérbole

As figuras 4 e 5 são dois instantâneos das evolutas da elipse e da hipérbole. No primeiro caso, a curva resultante é muito semelhante à astroide, embora não obedeça às condições que a definem.

As curvas que acabámos de considerar, conhecidas por curvas cónicas devido ao facto de serem resultantes da intersecção de uma superfície cónica com diferentes planos secantes, são também utilizadas como curvas geratrizes de determinadas superfícies de revolução (uma superfície de revolução é a superfície originada pela rotação de uma linha em torno de um eixo com ela complanar, perfazendo um ângulo giro). Estão, neste caso, a esfera e a pseudo-esfera, o toro, o cone, o cilindro e os elipsóide, parabolóide e hiperbolóide de revolução – para além das que nos apetecer, como é óbvio.

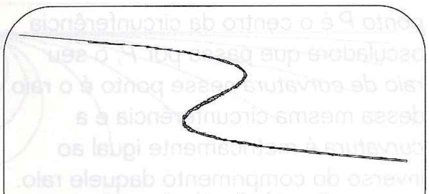
figura 6 - Um "rabisco"

Se desenharmos um rabisco num papel e o fizermos rodar em torno de um eixo apropriado, obteremos certamente um *rabiscóide*, e se o *rabisco* representar um gato, teremos um *gatóide*, superfície de revolução tão legítima quanto outra qualquer. Façamos uma rápida experiência (ver figura 6).

Visto a olho nu, o *rabisco* anterior é exactamente isso — um *rabisco* vagamente aparentado com nada. Contudo, se nos armarmos de alguma paciência e o orientarmos devidamente, procedendo à sua descrição analítica, depressa constataremos que não se trata de um *rabisco* qualquer — muito pelo contrário, é um membro da respeitabilíssima família das *parábolas cúbicas*.

No caso vertente, o falso *rabisco* é a parábola $f(x)=(x^3-12x)/6$ (ver figura 7).

De forte personalidade, admite uma raiz tripla, $x=-\sqrt{12} \vee x=0 \vee x=\sqrt{12}$, máximo e mínimo relativos (respectivamente x=–2 e x=+2) e ainda um ponto de inflexão na origem. Tal como qualquer curva decente, tem curva evoluta mas — e é aqui que a sua genealogia distinta mais se faz notar — esta última admite uma assimptota oblíqua (y=x/2), o que provoca alguns embaraços na determinação da sua curvatura.

Ora como já tínhamos notado a propósito da parábola *plebeia* do segundo grau, o menor raio de curvatura — e, logo, o maior grau de encurvamento —, corresponde aos vértices da curva, na circunstância os máximo e mínimo relativos; depois, e à medida que *x* tende para infinito,

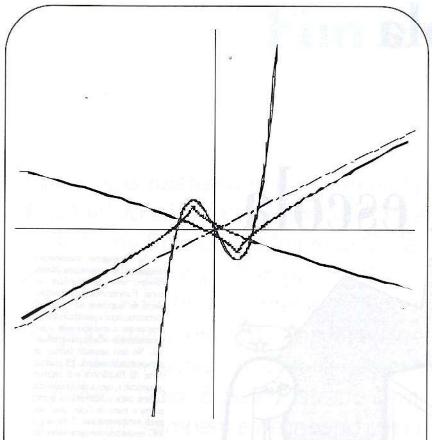

figura 7 - O *rabisco* $f(x) = (x^3-12x)/6$ e a sua curva evoluta.

quer pela esquerda, quer pela direita, o ramo da curva vai-se *rectificando*, aproximando-se consequentemente da recta tangente. O problema reside na vizinhança do ponto de inflexão (x=0), já que o centro de curvatura se situa à direita ou à esquerda, consoante nos aproximamos da origem por um ou pelo outro lado. Assim, quando x tende para 0^+, o centro de curvatura tende para $+\infty$ e quando x tende para 0^-, o centro de curvatura desloca-se para $-\infty$. Isto leva-nos a concluir que o ponto de inflexão é um ponto de *curvatura dupla* pois, embora o valor desta seja nulo em ambos os casos, na sua vizinhança admite centros de curvatura de *sinal contrário*.

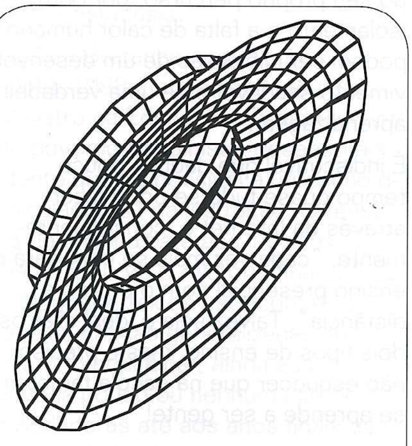

figura 8 - O "rabiscóide", gerado pela parábola cúbica $f(x)=(x^3-12x)/6$, e que poderemos baptizar com o nome de *chapéu dos dodges*.

Para finalizar esta visita ao *rabisco*, e dado que ele surgiu a propósito das superfícies de revolução, insere-se, na figura 8, o *retrato* da superfície que admite por geratriz o troço da parábola cúbica correspondente ao intervalo [–5; +5] e por eixo de rotação a recta horizontal y=–5. A forma que a superfície adopta sugere o chapéu dos *dodges* das repúblicas italianas renascentistas e, tal como acontece com os chapéus em geral, o seu tamanho pode ser controlado através da selecção criteriosa do intervalo que define o troço da geratriz e da localização do próprio eixo. Assim, para um *dodge* muito cabeçudo, poderíamos recorrer ao intervalo [–10; +10] e ao eixo y=–10, ao passo que, para uma princesinha loira de 7 anos, o intervalo [–2; +2] e o eixo y=–2 seria a medida ideal. Finalmente, se se pretender um chapéu aberto no cimo da cabeça — para ser usado como penteador, por exemplo —, bastaria provocar um certo desfasamento entre o intervalo escolhido e o eixo adoptado. Se o intervalo fosse [–5; +5] e o eixo y=–7 obter-se-ia uma abertura circular com 4 de diâmetro, perfeitamente indicada para o fim em questão.

Todavia, as superfícies mais clássicas chamadas *superfícies geométricas de revolução*, para além de terem um estatuto clássico universalmente reconhecido, são as que de facto dão origem a grande parte dos objectos que utilizamos no nosso quotidiano, desde as latas de salsichas ao funil doméstico, passando pelas antenas parabólicas. Ora se é possível gerar uma superfície de revolução fazendo rodar uma linha em torno de um eixo apropriado, então também é possível submeter ao mesmo processo a correspondente *linha evoluta*, o que, naturalmente, irá dar origem a uma segunda superfície de revolução. A título de curiosidade, as figuras 9, 10 e 11 mostram o retrato de família de algumas superfícies de revolução e das superfícies obtidas a partir das evolutas das suas curvas geratrizes.

Referências bibliográficas

Boyer,C. e Merzbach, U. (1989). *A History of Mathematics*. Singapore: John Wiley & Sons, p. 419.

Fernando Bensabat

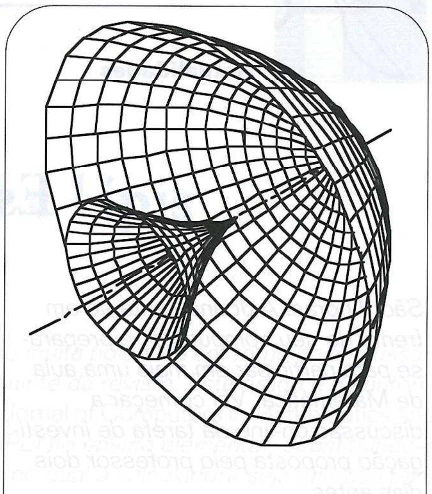

figura 9 - O parabolóide de revolução e a superfície gerada pela evoluta da parábola.

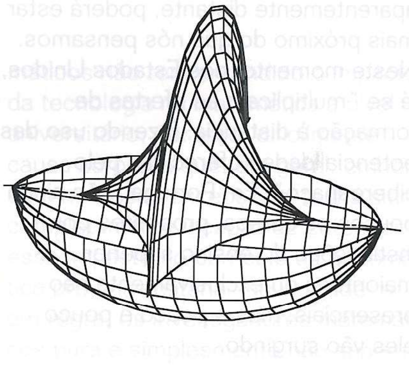

figura 10 - Um elipsóide de revolução e a superfície gerada pela evoluta da elipse. Para a sua mais fácil identificação, foram ambas seccionadas por um plano axial representadas apenas a metade inferior do elipsóide e a metade superior da outra superfície.

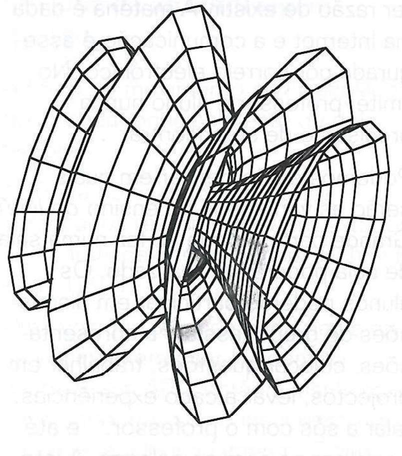

figura 11 - O hiperbolóide de revolução de uma folha e a superfície gerada pela evoluta da hipérbole.