O crescimento das populações*

Francisco Silva, Gonçalo Marçalo, Marco Paulo Jesus

Em matemática, a designação *crescimento de populações* não se restringe à evolução de conjuntos de pessoas ou animais; pode ser aplicada à evolução de um capital, à difusão de boatos ou doenças, às vendas de carros ou outros bens, à concentração de uma droga (em sentido lato) no sangue, etc...

O termo crescimento também não quer dizer, necessariamente, aumento; tanto pode ser utilizado como um aumento da população (crescimento positivo) ou diminuição da população (crescimento negativo).

Populações financeiras

Começaremos por estudar o crescimento de populações *financeiras* e de entre os vários modelos, analisaremos os mais importantes, isto é, os que são habitualmente utilizados nas instituições bancárias.

Teoricamente, uma população financeira pode crescer infinitamente; este crescimento é positivo quando temos o dinheiro no banco a render a uma determinada taxa e é negativo quando, por exemplo, pedimos um empréstimo bancário e neste caso o capital está a render negativamente. Como é óbvio, o dinheiro só rende até ao momento em que ou levantamos o dinheiro ou saldamos a dívida.

Vamos começar o nosso estudo a partir de um capital inicial de 1000 contos, com um crescimento anual de 10%. Existem duas maneiras de calcular o crescimento desta população: o método dos juros simples e o método dos juros compostos.

O crescimento através do juro simples é sempre constante, isto é, o juro é sempre calculado a partir do capital inicial, que no nosso exemplo é 1000 contos. Por isso, o seu crescimento será constante ao longo de todo o período em que o dinheiro estiver depositado, que neste caso será de 100 contos.

A fórmula geral para esta situação é:

$N = C + kCt \Leftrightarrow N = C(1+kt)$

em que C é o capital inicial, t é o número de anos e k é a taxa anual de juros.

A fórmula particular para este caso concreto é a seguinte:

$N = 1000(1+0{,}10t)$

No caso dos juros compostos, o crescimento é proporcional ao capital actual. O que quer dizer que quanto maior for a população inicial maior será o seu crescimento. Assim, no primeiro ano, o crescimento é 100 contos, porque é 10% de 1000 contos; no segundo ano o capital inicial é de 1100 contos e o seu crescimento será na mesma de 10%, só que neste ano o capital vai crescer 110 contos, porque é 10% de 1100 contos. O que significa que no segundo ano a população vai crescer mais 10 contos do que no primeiro ano.

No caso geral, teremos, então:

$$N_1 = N_0 + kN_0 = N_0\,(1+k)$$
$$N_2 = N_1 + kN_1 = N_1\,(1+k) = N_0\,(1+k)(1+k)$$
$$N_3 = N_2 + kN_2 = N_2\,(1+k) = N_0\,(1+k)(1+k)(1+k)$$
$$\ldots$$
$$N_t = N_0\,(1+k)^t$$

onde t é o tempo em anos, N_t é o capital, ao fim de t anos, N_0 é o capital inicial e k é a taxa de juro.

* Este texto é um dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos da Escola Superior de Gestão Hoteleira e Turismo da Universidade do Algarve, na disciplina de Matemática leccionada por Leonor Moreira, e que esta professora refere no seu artigo publicado no número anterior da revista, com o título *Algumas reflexões sobre a democracia a propósito de currículos e vice-versa*.

No nosso caso particular, temos:

$N_t = 1000(1+0{,}10)^t$

Para melhor compararmos estes modelos, elaborámos um quadro que mostra a diferença de saldos entre os dois modelos (quadro 1). Verifica-se que, ao fim de 10 anos, o método dos juros compostos tem claramente um saldo superior ao método dos juros simples; esta diferença aumentaria ainda mais se o tempo fosse aumentado.

quadro 1

	Capital ao fim de *t* anos (em contos)	
Anos	J. Simples	J. Compostos
0	1000	1000
1	1100	1100
2	1200	1210
3	1300	1331
4	1400	1464,1
5	1500	1610,51
6	1600	1771,561
7	1700	1948,717
8	1800	2143,589
9	1900	2357,948
10	2000	2593,742

Ainda com os 1000 contos na conta bancária, a uma taxa de juro de 10% ao ano, podemos considerar que o juro vence duas vezes por ano, ou trimestralmente, ou mensalmente ou diariamente.

Se considerarmos, por exemplo, o juro composto semestralmente, teremos o ano dividido em duas partes iguais. Neste caso, teremos que dividir os 10% (agora designados por taxa nominal) em duas partes, ou seja, 5%. Assim, a cada semestre, o capital aumenta de um factor

$$\left(1+\frac{0{,}10}{2}\right)=1{,}05$$

Ao fim de 10 anos, haverá 20 (10x2) composições e, portanto, o capital final será dado por

$$1000\left(1+\frac{0{,}10}{2}\right)^{20}=1000\times 1{,}05^{20}=$$
$$=2653{,}298$$

Se considerarmos, agora, o juro composto trimestralmente, teremos o ano dividido em quatro partes iguais. Neste caso, teremos que dividir os 10% em 4 partes, ou seja, 2,5%. Assim, a cada trimestre, o capital aumenta de um factor

$$\left(1+\frac{0{,}10}{4}\right)=1{,}025$$

Ao fim de 10 anos, haverá 40 (10x4) composições e, portanto, o capital final será dado por

$$1000\left(1+\frac{0{,}10}{4}\right)^{40}=1000\times 1{,}025^{40}=$$
$$=2685{,}064$$

Contudo este valor poderia ser ainda superior se os juros fossem calculados em períodos de tempo ainda mais pequenos — dias, horas ou minutos. Como podemos verificar no quadro 2. Para o cálculo dos valores inscritos no quadro, usámos a fórmula geral

$$C_n = C_0\left(1+\frac{k}{T}\right)^n$$

em que C_0 é o capital inicial, k é a taxa nominal e T o número de vezes que o capital é composto, anualmente.

Hoje em dia e devido à diminuição frequente das taxas de juro, os depósitos a prazo deixaram de ter expressão na actividade bancária. As poupanças são investidas noutros produtos que oferecem taxas de rendimento mais atraentes. Mas os empresários continuam a recorrer a empréstimos, por períodos de tempo curtos, cujos juros compostos são, muitos vezes, calculados mensal ou mesmo diariamente.

Nos modelos de crescimento anteriores, as funções eram todas descontínuas, uma vez que os seus domínios eram conjuntos discretos de pontos. Em seguida, vamos apresentar um modelo de crescimento ilimitado em que a função também não é contínua, mas pode admitir-se que seja (grandes populações).

quadro 2

	Capital, ao fim de *t* anos, com juros compostos, à taxa nominal de 10%				
Anos	Anual	Semestral	Trimestral	Mensal	Diário
1	1000	1102,5	1103,812891	1104,713067	1105,156
5	1610,51	1628,895	1638,61644	1645,308935	1648,608
10	2593,742	2653,298	2685,063838	2707,041491	2717,91

Vamos considerar o caso em que o crescimento da população é proporcional ao tamanho actual, o que é expresso matematicamente por:

$$\frac{dN}{dt}=kN \Leftrightarrow \frac{dN}{N}=kdt$$

Integrando ambos os membros da equação, vem:

$$\int\frac{dN}{N}=\int kdt \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln N = kt + C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N = e^{kt+C} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N = e^{kt}e^{C} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N = Ce^{kt} \Leftrightarrow N = N_0e^{kt}$$

em que N é a população actual, N_0 é a população inicial, k é uma constante e t é o tempo decorrido.

A este modelo, chama-se modelo de crescimento exponencial. Se aplicássemos este modelo ao nosso capital de 1000 contos, com k = 10%, e t o número de anos, o capital cresceria segundo a função

$$N(t) = 1000e^{0{,}1t}$$

obtendo-se valores tanto mais próximos dos valores calculados anteriormente, quanto maior for o número de períodos em que o ano é dividido (1105,171 para 1 ano, 1648,721 para 5 anos e 2718,282 para 10 anos).

O crescimento com constrangimentos

Nas populações de seres vivos, o modelo exponencial tem limitações. Se no início de vida de uma população, a taxa de crescimento pode ser proporcional ao tamanho da população, a partir de certa altura, a taxa de crescimento começa a abrandar, quer por falta de comida, quer por falta de espaço.

Um exemplo mais razoável para explicar o crescimento de uma população biológica, a longo prazo, passa, então, por admitir que existe uma população máxima viável, a população máxima sustentada. Admite-se que, para estas populações, a taxa de crescimento é proporcional à diferença entre esse máximo M e a população actual, isto é,

$$\frac{dN}{dt} = k(M-N)$$

em que N é a população actual, M a população máxima sustentada e t o tempo decorrido a partir do momento em que se fez a primeira contagem.

A equação anterior é equivalente a

$$\frac{dN}{M-N} = kdt$$

Integrando ambos os membros da equação, vem: $\int \frac{dN}{M-N} = \int kdt$

Para calcular o integral do lado esquerdo, podemos fazer a substituição $u = M-N$ que diferenciando conduz a $du = -dN$.

$$\int \frac{dN}{M-N} = -\int \frac{du}{u} =$$
$$= \ln|u| + C_1 = -\ln(M-N) + C_1$$

Por outro lado, $\int kdt = kt + C_2$

Então,

$$-\ln(M-N) + C_1 = kt + C_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\ln(M-N) = kt + C_2 - C_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\ln(M-N) = kt + C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln(M-N) = -kt - C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M-N = e^{-kt-C} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M-N = e^{-kt}.e^{-C} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N = M - e^{-kt}.e^{-C}$$

Fazendo $t = 0$ e admitindo que a população inicial é zero, vem

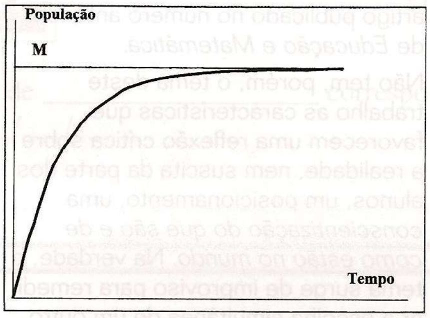
$$M - e^{-C} = 0 \Leftrightarrow M = e^{-C}$$

Então, $N = M(1-e^{-kt})$

Este modelo de crescimento, tal como o modelo logístico que analisaremos em seguida, descrevem a aceitação de um bem ou serviço no mercado, a partir do seu lançamento. A função dá-nos o número de pessoas, neste caso os consumidores, que ao longo do tempo vão adquirindo o bem.

Neste caso, o lançamento do bem é acompanhado de uma campanha publicitária através dos media, o que faz com que seja logo conhecido (e comprado) por muita gente. A partir desse impacto inicial, o ritmo de crescimento abranda e, é claro, tende a aproximar-se do tal máximo que, neste caso, se chama *capacidade de mercado*.

O gráfico seguinte é um gráfico típico da evolução da população de consumidores.



Crescimento logístico

Quando o lançamento de um bem, não é acompanhado de uma campanha publicitária, a sua divulgação é feita pelos próprios consumidores. As vendas crescem com a divulgação dos próprios consumidores que inicialmente são poucos. Estes poucos é que depois vão falar a outros consumidores deste bem que, por sua vez, irão comprá-lo e, se gostarem dele, divulgá-lo a outros consumidores. Inicialmente o crescimento é lento, depois o ritmo de crescimento aumenta, para voltar a diminuir quando o número de consumidores se aproximar do potencial máximo de vendas, ou seja, a capacidade de mercado.

Admite-se que a população de consumidores cresce segundo o modelo logístico que é aquele em que a taxa de variação é proporcional, quer à da população actual, quer à diferença entre a capacidade de mercado e a população actual, isto é,

$$\frac{dN}{dt} = kN(M-N) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN}{N(M-N)} = kdt$$

Integrando ambos os membros da equação, vem: $\int \frac{dN}{N(M-N)} = \int kdt$

Para integrarmos o termo esquerdo, faremos agora a substituição $u = 1/N$ com $dN = -\frac{1}{u^2}du$. Teremos, então:

$$\int \frac{dN}{N(M-N)} =$$
$$= -\int \frac{1/u^2}{1/u(M-1/u)}du =$$
$$= -\int \frac{1/u^2}{1/u^2(Mu-1)}du =$$
$$= -\int \frac{du}{Mu-1}$$

Fazendo, agora, $Mu-1 = v$, vem $Mdu = dv$ e teremos:

$$-\int \frac{dv}{Mv} = -\frac{1}{M}\int \frac{dv}{v} =$$
$$= -\frac{1}{M}\ln|v| + C_1 = -\frac{1}{M}\ln|Mu-1| + C_1$$

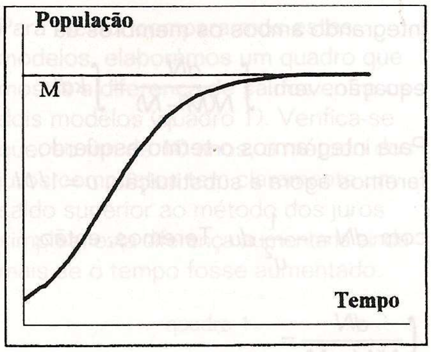
A integração do segundo membro é idêntica à que se fez anteriormente, ficando, portanto,

$$-\frac{1}{M}\ln|Mu-1| + C_1 = kt + C_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{M}\ln|Mu-1| = kt + C_2 - C_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{M}\ln\left(\frac{M}{N}-1\right) = kt + C_3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{M}{N}-1\right) = -Mkt - MC_3 \Leftrightarrow$$ [1]
$$\Leftrightarrow \frac{M}{N} - 1 = e^{-Mkt}e^{-MC_3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{M}{N} = 1 + Ce^{-Mkt} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow N = \frac{M}{1+Ce^{-Mkt}}$$

Fazendo $t = 0$, chega-se a

$$C = \frac{M}{N_0} - 1.$$

O gráfico seguinte ilustra uma situação deste tipo.



Como já vimos, este crescimento diferencia-se do anterior, na medida em que, no primeiro caso, o lançamento de um produto é apoiado por um meio de uma campanha publicitária para divulgar o bem ou serviço no mercado e, nesta última situação, a divulgação faz- se pelos próprios consumidores. É evidente que um empresário só pode confiar nesta forma de divulgação se o produto for realmente bom e também não pode esperar lucros rápidos – tem de esperar que a marca se consolide no mercado. Enquanto aqui é a qualidade que vende, no outro caso quem vende é a publicidade que cria no consumidor apetência pelo produto. Vale mais a fama do que a qualidade, é mais ou menos este o lema utilizado no primeiro caso.

Nota

[1] M/N>1 Por ser M a capacidade de mercado. Logo, o modulo é dispensável.

Bibliografia

Fife, J. (1994) Calculus for Business and economics. New York: Macmillan College Publishing Company.

Arya, J & Lardner, R. (1993) Mathematical Analysis for Business, Economics and the Life and Social Sciences. London: Prentice Hall.

Francisco Silva, Gonçalo Marçalo, Marco Paulo Jesus
Estudantes da ESGHT da Universidade do Algarve

Nota da professora

Este trabalho foi realizado por alunos de um primeiro ano do Curso de Gestão, no âmbito da cadeira de Matemática, de que, em traços largos, apresentei as linhas de força, em artigo publicado no número anterior de *Educação e Matemática*.

Não tem, porém, o tema deste trabalho as características que favorecem uma reflexão crítica sobre a realidade, nem suscita da parte dos alunos, um posicionamento, uma *conscientização do que são e de como estão no mundo*. Na verdade, o tema surge de improviso para remediar a escolha simultânea de um outro, a SIDA, por grupos diferentes.

Na altura, os alunos haviam já estudado a evolução de populações biológicas reais e fictícias e tinham-se confrontado com uma situação artificial de difusão de boatos — estava aberto o caminho para abordar o crescimento de populações de um outro género. Saliente-se que os alunos estudarão, em anos subsequentes, os vários aspectos da promoção de um produto — em cadeiras de Marketing — sem, contudo, aí, se preocuparem com o aspecto matemático da questão. Por outro lado, terão uma cadeira de Matemática Financeira em que lhes são fornecidas as ferramentas acabadas para tratarem situações da banca, dos seguros, etc., em que o objectivo é mais escolher a(s) técnica(s) adequada(s) ao tratamento de uma situação realista particular, do que, propriamente, compreenderem os modelos matemáticos subjacentes. O trabalho foi, totalmente, realizado fora da sala de aula. Em dois momentos, apenas, os alunos trocaram comigo opiniões sobre o esquema do trabalho ou esclareceram dúvidas.

Note-se que: 1) Os alunos deduzem a fórmula que permite calcular o capital, ao fim de um certo tempo, quando se trata de juros compostos, mas não o fazem no caso de juros simples porque acharam, nas suas palavras, "demasiado simples"; 2) tratam as constantes de integração, com critérios diferentes. Assim, fazem $e^C=C$, porque "se trata ainda de uma constante; tanto faz escrever C como D". Isto, quando, se trata de calcular o capital com juros compostos tratando a função como contínua. Mas, quando tratam o crescimento com constrangimentos ou o crescimento logístico fazem questão de utilizar C_1, C_2 e C_3, porque "é mais difícil".

Leonor Moreira

Educação e Matemática

Número Temático/ Ano 2000 — Apelo à colaboração dos nossos leitores

Neste Ano Mundial da Matemática, o número temático da nossa revista será dedicado à Matemática. O conteúdo desse número, como é habitual, será constituído em grande parte por artigos pedidos expressamente para esse efeito. No entanto, como sempre, a colaboração dos nossos leitores é essencial para assegurar que a revista se afirma como orgão da APM e dos seus membros, sendo um veículo de toda a sua rica experiência de professores. Apelamos por isso aos nossos leitores no sentido de nos enviarem pequenos relatos, episódios, etc., significativos da relação que os seus alunos têm com a Matemática, e dos factores que podem contribuir positiva (ou negativamente) para essa relação. O número será publicado no próximo mês de Novembro, pelo que necessitamos de ter todas as propostas de contribuições até fins do próxmo mês de Junho.