Explorando possibilidades e potenciais limitações de calculadoras gráficas

Telma Souza Gracias
Marcelo C. Borba

Neste artigo, vamos apresentar como características da calculadora gráfica foram utilizadas para gerar aprendizagem e *insights* de uma professora/ pesquisadora sobre as concepções de alunos que estudavam com o auxílio dessa *mídia*. Isto nos impulsiona a discutir a eficiência de *softwares* educacionais, partindo do *software* da calculadora gráfica.

Vários estudos têm sido feitos com o objetivo de analisar a utilização das calculadoras gráficas no ensino e na aprendizagem de Matemática. As pesquisas, com diferentes ênfases, têm analisado o impacto da presença da calculadora gráfica na "cultura de sala de aula", o efeito no que diz respeito a professores e estudantes de diversas faixas etárias, e as possibilidades de utilização como ferramenta para o estudo de conteúdos matemáticos, tais como geometria, polinómios e funções. Provavelmente devido à sua principal característica, traçar gráficos de funções definidas por expressões algébricas, grande parte dos estudos[1] envolvem as possibilidades de utilização das calculadoras gráficas no estudo de funções, apesar das diferentes preocupações apresentadas, sem se deter, contudo, nas características que são usualmente tratadas como limitações desta *mídia*. Por outro lado, há estudos que se dedicam às limitações deste tipo de calculadora vendo-as como um obstáculo à aprendizagem da "matemática correta", que é aquela, do ponto de vista de alguns, desenvolvida somente com lápis e papel. Acreditamos que tanto o lápis e papel, visto enquanto *mídia*, quanto os computadores, quando associados a seres humanos, permitem a produção de matemática com aspectos diferentes.

Neste artigo, vamos apresentar como características da calculadora gráfica, vistas usualmente como obstáculos, foram utilizadas para gerar aprendizagem e *insights* de uma professora/ pesquisadora (a primeira autora deste artigo) sobre as concepções de alunos que estudavam com o auxílio dessa *mídia*. Isto nos impulsiona a discutir a eficiência de *softwares* educacionais, partindo do *software* da calculadora gráfica.

Apresentaremos excertos de um estudo que envolveu o estudo de funções quadráticas segundo uma proposta didático-pedagógica elaborada com ênfase em aspectos visuais e empíricos. Em Souza (1997) é feita uma discussão mais ampla sobre tal proposta e suas aplicações. Antes de apresentarmos a proposta e os exemplos que nos interessam discutir neste artigo, cabe realçar que no Brasil, local de realização deste estudo, ainda é muito raro a utilização de calculadoras gráficas na sala de aula. Embora haja alguns grupos de pesquisa que desenvolvam práticas em sala de aula, poucos têm publicado resultados sobre estudos ou relatos de experiências nos periódicos da área. Acreditamos, entretanto, que esse artigo é relevante não só para professores do Brasil, mas também para professores de Portugal, onde a calculadora gráfica já é usada com mais regularidade, pois há exemplos que ilustram situações que o professor pode encontrar em sala de aula, indicando possíveis formas de se lidar com elas.

Uma proposta didático-pedagógica e sua aplicação

Uma proposta didático-pedagógica foi elaborada para o estudo de funções quadráticas com o auxílio da calculadora gráfica. Esta proposta é constituída por uma sequência de atividades que envolvem o estudo de funções quadráticas, e esta sequência materializa uma perspectiva de estudar o conteúdo segundo um enfoque predominantemente visual e "empírico". Convém esclarecer que por visualização entendemos o processo de formar imagens, quer seja mentalmente, quer seja com o auxílio de lápis e papel ou tecnologia. Quanto ao aspecto "empírico", referimo-nos à possibilidade de se trabalhar com testes, por meio de tentativas e erros, onde o estudante tem a oportunidade de elaborar hipóteses, testar conjecturas, refutá-las ou chegar a generalizações. Tais aspectos são possibilitados pelo fato da calculadora gráfica produzir rapidamente os gráficos e apresentá-los em uma mesma tela, e, quando empregados com o objetivo de estimular o processo de investigação matemática, pode oferecer uma maior compreensão matemática.

Cabe ressaltar também que não esperamos que neste enfoque os estudantes trabalhem exclusivamente com gráficos e com visualização, embora tais aspectos sejam enfatizados.

Este enfoque abre novas opções no estudo da Matemática para aqueles que têm dificuldade em relação à Álgebra. Os estudantes que têm mais dificuldade ou resistência em trabalhar algebricamente com os conceitos podem encontrar na visualização uma outra opção de investigação matemática.

Na sequência da atividade elaborada, os estudantes começavam explorando o plano cartesiano e funções do 1° grau escritas na forma $f(x)=ax+b$. Nesta série de atividades, enquanto os estudantes se familiarizavam com os comandos básicos da calculadora gráfica, a entrevistadora podia observar o que os estudantes sabiam sobre este conteúdo. A seguir, os estudantes trabalhavam com diferentes funções a fim de identificar as funções quadráticas como uma família de funções dentre muitas, e acabavam envolvidos com questões mais fechadas e específicas sobre funções quadráticas.

Segundo o enfoque proposto, esperávamos que os estudantes trabalhassem com funções quadráticas estabelecendo relações entre as representações, sendo capazes, por exemplo, de associar mudanças no gráfico com mudanças nos coeficientes da expressão algébrica e vice-versa.

Gustavo e Alessandra, estudantes com então 14 anos de idade, foram entrevistados individualmente ao trabalharem com as atividades da proposta didático-pedagógica, fazendo uso da calculadora gráfica. Cada estudante foi entrevistado por cerca de dez horas, em 5 sessões de duas horas aproximadamente. Este estudo se enquadra na modalidade "experimento de ensino" (Cobb & Steffe, 1983), que consiste basicamente de uma série de encontros individuais com um estudante por um certo período de tempo. No "experimento de ensino" o pesquisador deve estar constantemente tentando "ver" as ações sob o ponto de vista do estudante, o que lhe permite compreender melhor as estratégias utilizadas.

Embora reconheçamos que há uma grande diferença entre o ambiente de sala de aula e o ambiente de uma entrevista, ressaltamos que, ao entrevistar um estudante, podemos dar a ele o tempo que quiser para trabalhar em uma determinada questão, e além disso, criar modelos mais detalhados sobre a forma de raciocinar. Esses fatores não são possíveis em sala de aula, pois além da grande quantidade de estudantes, há uma diversidade muito grande entre o ritmo de trabalho de cada um deles. Acreditamos que os exemplos sobre como os estudantes trabalharam com a calculadora gráfica descritos neste artigo possam servir de parâmetros para seu uso em outros contextos educacionais. Tais exemplos podem dar indicações aos professores de como lidar com situações similares quando estas emergirem.

Calculadora gráfica e funções quadráticas

Nesta seção apresentamos exemplos de como características das calculadoras gráficas, usualmente vistas como obstáculos, foram utilizadas para gerar aprendizagem e *insights* de uma professora/pesquisadora sobre as concepções de alunos que estudavam com o auxílio dessa *mídia*.

No início das entrevistas os estudantes Gustavo e Alessandra praticamente nada sabiam sobre funções quadráticas. As atividades da proposta didático-pedagógica permitiram que os estudantes trabalhassem com os coeficientes *a*, *b* e *c* de $y=ax^2+bx+c$ e tivessem sua própria compreensão sobre esta família de funções.

Vale ressaltar que o estudo de tais coeficientes da função quadrática não é comum nas aulas de Matemática no Brasil. Em geral, os coeficientes *a* e *c* são os mais abordados nos livros didáticos brasileiros, de forma superficial, enquanto o coeficiente *b* recebe pouca ou nenhuma atenção.

Para situar o leitor diante dos exemplos que apresentaremos na próxima seção, vamos descrever brevemente e de forma geral as conclusões às quais os estudantes chegaram ao trabalhar com as atividades da proposta didático-pedagógica com o auxílio da calculadora gráfica.

Além de estudar o coeficiente *a*, que é, em geral, o mais abordado nos livros didáticos brasileiros, Gustavo associou o coeficiente *c* a translações verticais e o coeficiente *b* ao vértice da parábola. Gustavo verificou que mantendo *a* e *c* fixos, basta mudar o sinal do coeficiente *b* para que o vértice da parábola mude de lado em relação ao eixo *y*, ou seja, associou a mudança de sinal de *b* à reflexão da parábola em torno do eixo *y*. O coeficiente *b* foi estudado por Gustavo num ambiente de investigação com o auxílio da calculadora gráfica.

Assim como Gustavo, Alessandra também chegou a várias conclusões sobre os coeficientes *a*, *b* e *c* da função quadrática escrita na forma $y=ax^2+bx+c$. Em ambos os casos, o processo de associar mudanças nos coeficientes com mudanças no gráfico envolveu um processo de levantamento de conjecturas, formulação de hipóteses, testes e reformulação de conjecturas.

No caso de Alessandra, sua experiência visual com os gráficos das funções quadráticas permitiu a elaboração de uma conjectura que envolve x_v e raizes da função quadrática: "esse ponto vai estar sempre na metade dos dois, né?!", ou seja, $x_v=(x'+x'')/2$, sendo x' e x'' raizes da função. Alessandra ainda elaborou uma outra conjectura[2] sobre o coeficiente *b*, que também envolve x_v: *b* como o dobro de x_v. Alessandra, na verdade, pensava no valor absoluto de *b* e verificou que essa relação é válida no caso de *a* valer 1 ou −1. Passaremos a descrever como a estudante chegou a essa conclusão.

Janela de visualização da calculadora gráfica

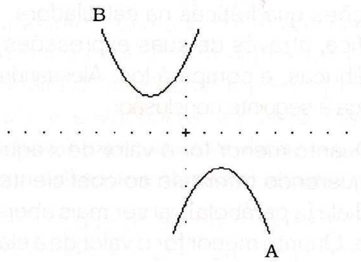
Quando um gráfico é traçado na tela da calculadora gráfica, ele aparece na janela de visualização ajustada anteriormente à entrada da função, ou seja, a calculadora não apresenta o gráfico da função na tela com o seu melhor ajuste. Esta limitação da calculadora foi explorada em algumas atividades.

Em uma das atividades os estudantes tinham, por exemplo, que falar sobre os coeficientes *a*, *b* e *c* das três parábolas traçadas na calculadora gráfica, estando apenas duas delas visíveis na janela de visualização da calculadora. As funções eram:

A: $y = -x^2 + 2x - 2$

B: $y = x^2 + 2x + 2$

C: $y = x^2 - 4x + 20$ (que não aparece na tela da calculadora gráfica)



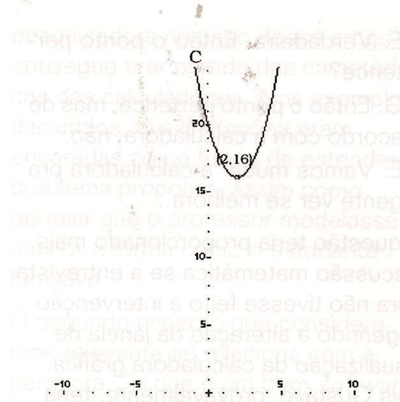
Alessandra, após encontrar as fórmulas dos gráficos A e B, empenha-se em descobrir a fórmula do gráfico C, elaborando uma conjectura sobre o coeficiente *b*.

Alessandra primeiramente teve que encontrar o gráfico da função na tela da calculadora gráfica. Ela observou uma dica da atividade que dizia que o sinal da função era sempre positivo, então, utilizando as teclas da calculadora gráfica que alteram a janela de visualização, Alessandra começou a percorrer o subconjunto do plano cartesiano onde as ordenadas são positivas, até que encontrou o gráfico.

Ao encontrar o gráfico da função[3], Alessandra falou que *a*>0, por causa da concavidade voltada para cima.

A fim de determinar o *c*, Alessandra utiliza o *Trace* e encontra o ponto onde a parábola corta o eixo *y*.

Utilizando ainda o comando *Trace*, Alessandra passa pelo vértice, que é



o ponto (2,16), e afirma:
(E=entrevistadora; A=Alessandra)

A: O *b* é dois. Eu acho que é.

E: Você acha que o vértice coincide com o *b*?

A: É.

A idéia de Alessandra era que $b=x_v$. A entrevistadora pergunta de onde vem esta idéia, se nos gráficos anteriores o "vértice" (referindo-se ao x_v) coincidia com o *b*.

Alessandra observa os gráficos e elabora uma explicação de *b* como o dobro do *x* (referindo-se ao x_v).

Ela diz que neste caso o *b* tem que ser menor que zero, que *b* é negativo para dar do lado certo (referindo-se ao fato do gráfico ter o vértice do lado direito do eixo *y*).

Assim, a estudante conclui que $b = -4$ e traça, então, o gráfico procurado: $y = x^2 - 4x + 20$.

E: Como é que você viu que é 4?

A: O *x* (referindo-se ao x_v) é... Aqui (referindo-se ao *b*) é o dobro do *x*.

E: Agora vamos só ver uma coisa. É... você falou que o *b*... Como é que você escolheu o *b*?

A: Porque ele é o dobro do valor de *x*.

E: Isso: o dobro do valor de *x*. Onde? Em que ponto?

A: No vértice, nesse aqui. Aqui, olha, ele corta o... porque é 2.

E: Porque é o vértice dele, né?!

A: É.

E: Vamos ver se isso vale em outros casos.

Ao pedir para verificar se a relação encontrada, $b=2x_v$, vale em outros casos, Alessandra traça vários gráficos de funções quadráticas na calculadora gráfica. Em vários casos, Alessandra verifica que a relação é válida. Somente quando traça o gráfico de $y = 4x^2 - 4x + 1$ Alessandra encontra um exemplo onde a relação não vale. Ela conclui que isto acontece porque neste caso $a=4\neq 1$.

Esta idéia, de *b* ser o dobro do x_v, é retomada em uma outra atividade quando Alessandra está procurando a fórmula de uma função quadrática, cujas raizes são 3 e -1.

É importante ressaltar aqui que, ao associar *b* como dobro do x_v Alessandra está, na verdade, pensando no módulo de *b*, pois ela determina o sinal deste coeficiente olhando para o vértice da parábola: se a parábola tiver concavidade voltada para cima, então *b*>0 se o vértice estiver à esquerda do eixo *y* e *b*<0 se o vértice estiver à direita do eixo *y*. Em relação à validade desta relação, as investigações de Alessandra permitiram que ela concluísse que a relação só é válida quando $a=1$ ou $a=-1$.

De fato:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow -b = 2ax_v \rightarrow b = -2ax_v$$

se $a = \pm 1$ então $|b| = |2x_v|$

Podemos dizer, no caso que acabamos de descrever, que o fato de um dos gráficos traçados na calculadora através de sua expressão algébrica não aparecer imediatamente na tela, fez com que Alessandra tivesse que explicitar as conjecturas que estava elaborando sobre os coeficientes *a*, *b* e *c* da função quadrática escrita na forma $y=ax^2+bx+c$. Ou seja, o que pode ser considerado como uma limitação da calculadora gráfica, que é o fato de não apresentar os gráficos com o melhor ajuste na janela de visualização, pode se constituir em possibilidade de discussão de determinados conteúdos matemáticos. Neste caso, a entrevistadora pôde entender como Alessandra estava compreendendo os coeficientes de funções quadráticas, principalmente o coeficiente *b*.

Resolução da tela da calculadora gráfica

Em outra atividade a resolução da tela da calculadora poderia também ter gerado alguma discussão, se a intervenção da entrevistadora não tivesse acabado com a aparente discrepância entre o resultado encontrado algebricamente pelo estudante e o resultado fornecido pela calculadora.

A questão pedia para verificar se o ponto (40,42) pertencia à reta $y=x+2$. Gustavo, que já tinha o gráfico da função traçado na tela da calculadora, ajusta o campo de visão de forma que o retângulo de visualização da calculadora contenha o ponto (40,42). A seguir ele utiliza o comando *Trace* para ver se o ponto pertence à reta. Devido aos mecanismos de aproximação utilizados pela calculadora, o ponto mostrado na tela é (40.091,42.012) ao invés de (40,42). Gustavo conclui, então, que o ponto não pertence à reta. Esta conclusão do estudante está baseada no resultado fornecido pela calculadora gráfica. A entrevistadora intervém sugerindo a Gustavo que verifique se este mesmo resultado é encontrado algebricamente. Logo, a álgebra só foi utilizada devido a essa intervenção.

Gustavo substitui o x por 40 e encontra $y=42$, concluindo então que o ponto pertence à reta. Aí Gustavo se depara com a discrepância entre os resultados apresentados pela calculadora gráfica e o resultado que encontrou algebricamente. Neste momento, a entrevistadora faz outra intervenção sugerindo ao estudante que altere a janela de visualização da calculadora gráfica. Essa intervenção não foi adequada porque a alteração na janela de visualização permitiu que Gustavo encontrasse o ponto (40,42) utilizando o comando *Trace*. Portanto, a intervenção resolveu a aparente contradição entre os resultados, impedindo Gustavo de escolher sozinho a forma de lidar com a discrepância entre o resultado que encontrou algebricamente e o resultado apresentado pela calculadora gráfica (E=entrevistadora; G=Gustavo):

> E: E olhando para essa expressão aqui [referindo-se a $y=x+2$] daria para saber?
>
> G: Que nem, se eu puser 40 aqui e 42 aqui [substituindo x por 40 e y por 42], é, vai dar certo, né?!
>
> E: Vai dar uma sentença o quê? Uma sentença falsa ou verdadeira?
>
> G: Vai dar verdadeira.
>
> E: Verdadeira. Então o ponto pertence?
>
> G: Então o ponto pertence, mas de acordo com a calculadora, não.
>
> E: Vamos mudar a calculadora pra gente ver se melhora...

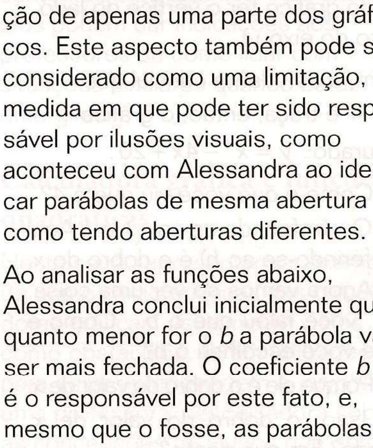
A questão teria proporcionado mais discussão matemática se a entrevistadora não tivesse feito a intervenção sugerindo a alteração da janela de visualização da calculadora gráfica, pois Gustavo, provavelmente, teria elaborado conjecturas ao coordenar as representações algébrica e gráfica.

Este exemplo mostra que a resolução da tela da calculadora gráfica também pode vir a ser explorada na elaboração de atividades, além de ressaltar a importância da postura da entrevistadora e/ou professora envolvida no contexto educacional, pois, neste caso, a intervenção ruim da entrevistadora prejudicou o trabalho do aluno em sua investigação matemática. Este é um exemplo de como não se deve agir.

O tamanho da tela da calculadora gráfica

O terceiro episódio aqui relatado se refere ao tamanho da tela da calculadora gráfica, que permite a visualização de apenas uma parte dos gráficos. Este aspecto também pode ser considerado como uma limitação, na medida em que pode ter sido responsável por ilusões visuais, como aconteceu com Alessandra ao identificar parábolas de mesma abertura como tendo aberturas diferentes.

Ao analisar as funções abaixo, Alessandra conclui inicialmente que quanto menor for o b a parábola vai ser mais fechada. O coeficiente b não é o responsável por este fato, e, mesmo que o fosse, as parábolas abaixo não têm concavidades diferentes: elas têm a mesma abertura.



Olhando para os gráficos das funções como aparecem na tela da calculadora gráfica, é compreensível esta interpretação de Alessandra. Tal fato já foi apontado por diversos autores (e.g. Goldenberg, 1988): estudantes pensam que parábolas de mesma abertura têm aberturas diferentes quando algumas funções aparecem acima de outras na tela. Um dos fatores responsáveis por provocar estas ilusões é o tamanho da tela, a qual permite a visualização de apenas uma parte dos gráficos.

Como Alessandra, no exemplo acima, estava apenas iniciando a elaboração de conjecturas sobre os coeficientes a, b e c de $y=ax^2+bx+c$, a entrevistadora optou por não interferir neste momento, esperando que em outras atividades Alessandra identificasse o coeficiente a como o responsável pela abertura da parábola. Isso aconteceu em uma das atividades seguintes, onde após traçar vários gráficos de funções quadráticas na calculadora gráfica, através de suas expressões algébricas, e compará-los, Alessandra chega à seguinte conclusão:

> Quanto menor for o valor de x aqui [querendo referir-se ao coeficiente a] ela [a parábola] vai ser mais aberta. Quanto menor for o valor de a ela vai ser mais aberto, quanto maior for o valor de a ele vai ser mais fechado.

É importante ressaltar que Alessandra não estava confundindo, neste momento, a variável com o coeficiente, pois com o lápis apontava o coeficiente e não a variável. A dificuldade estava apenas em se expressar. Outro fato que deve ser explicitado é que ao usar a expressão "quanto menor for o valor de x aqui", Alessandra está, na verdade, se referindo ao valor absoluto de a, pois já havia analisado gráficos de funções quadráticas com valores de a positivos e negativos. Assim, o que Alessandra está querendo dizer é que quanto menor for o valor absoluto de a, mais aberta vai estar a parábola, e quanto maior for o valor absoluto de a, mais fechada.

Alessandra identificou a relação entre o coeficiente a e o gráfico da função traçado na calculadora gráfica.

Coordenar aspectos gráficos e algébricos pode ser uma forma de analisar gráficos que não permitem que conjecturas sejam elaboradas com base apenas nos aspectos visuais.

Considerações finais

Neste artigo, apresentamos exemplos de como características da calculadora gráfica, que podem ser vistas como limitações desta *mídia*, podem ser exploradas como possibilidades.

Os exemplos indicam que as conclusões obtidas pelos estudantes foram fruto de sua experiência visual com os gráficos e da possibilidade oferecida pela calculadora gráfica de testar rapidamente hipóteses para que conjecturas sejam reformuladas. A visualização teve um papel importante na compreensão da relação entre os coeficientes de uma função quadrática e seu gráfico, uma vez que serviu de guia para as investigações dos estudantes. O modo como Alessandra explica o valor de *b* mostra ainda uma maneira de coordenar representações gráficas e algébricas: a posição do vértice é explicada através de relações na representação algébrica.

Mas em que os excertos apresentados podem ser úteis para educadores matemáticos?

Acreditamos que os exemplos apresentados podem ser úteis em dois aspectos. Em primeiro lugar, eles podem ser úteis para professores que estejam engajados em usufruir de vantagens de características que são normalmente vistas como limitações de *mídias* eletrônicas. Entendemos que não devemos nos prender ao tipo de matemática que era aprendido quando as *mídias* eletrônicas não estavam disponíveis na sala de aula. Devemos, como sugerido por Tikhomirov (1981), pensar nos problemas que podem ser trabalhados por alunos quando eles formam, juntamente com *mídias* informáticas como as calculadoras gráficas, unidades de conhecimento. Pretendemos, portanto, mostrar como problemas abertos, adequados a esses sistemas alunos-calculadoras-gráficas, podem se tornar ainda mais relevantes quando um professor (professora/pesquisadora no caso desse artigo) consegue tirar partido das características das calculadoras. Nos exemplos discutidos, tais limitações eram encaradas como forma de estender o problema proposto, assim como permitir que o professor modelasse melhor a forma como o estudante pensava.

O segundo aspecto que consideramos relevante se relaciona com a pergunta: "o que é um bom *software* educacional?" Embora não pretendamos responder de forma mais abrangente esta pergunta, entendemos que tanto *designers* de *software*, assim como professores ou administradores que escolhem os *software* que vão utilizar, devem ter em mente que nem sempre o aplicativo mais eficiente é o mais apropriado do ponto de vista educacional.

Um *software* com ajuste de janela automático poderia ser considerado mais eficiente, entretanto não permitiria que os exemplos aqui apresentados, que foram catalisadores de aprendizagem, pudessem acontecer. Não queremos com isso, nenhum tipo de volta à noção de que somente programando tudo o que o computador fará, haverá aprendizagem. Queremos, todavia, argumentar que encontrar um balanço entre o que o *software* faz e o que não faz, é fundamental para os educadores matemáticos.

No caso desse estudo, um *software* da calculadora gráfica, que não era tão completo, ou seja, que não fazia todos os melhores ajustes automaticamente, mostrou-se eficiente ao permitir que os estudantes chegassem a generalizações através da elaboração de hipóteses e testes de suas conjecturas. O *software* eficiente não é apenas aquele que é completo, com todas as suas operações automatizadas, mas é aquele que permite que professor e estudantes o explorem de modo a gerar discussão e compreensão de conceitos. Neste processo o professor tem um papel fundamental ao conduzir as atividades. Não basta fazer uso das calculadoras gráficas nas aulas de Matemática. Como mostramos neste artigo, uma intervenção ruim pode prejudicar o trabalho do aluno na sua investigação matemática, o que aponta para a necessidade do professor reconhecer as características do *software* que deseja utilizar, preparar cuidadosamente cada atividade, e questionar constantemente sua postura na sala de aula.

Bibliografia

Borba, M.C.; Meneghetti, R.C.G.; Hermini, H.A. (1997). Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas. *Educação Matemática*. Ano 5, nº 3, (pp. 63-70). São Paulo: SBEM.

Cobb, P. and Steffe, L. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14 (2), (pp. 83-94). Reston: NCTM.

Fernandes (1998). Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções. *Educação e Matemática*. nº 46, (p.33-6). Lisboa: APM.

Gracias, T.A. Souza e Borba, M.C. (1998). Calculadoras gráficas e funções quadráticas. *Educação Matemática*. Ano 6, nº. 4. (p.27-32) São Paulo: SBEM.

Goldenberg, P.E. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representations of functions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 7, (pp. 133-173).

Smart, T. (1995). *Visualising quadratic functions: a study of thirteen-year-old girls learning mathematics with graphic calculators*. Anais do PME 19, vol. 2, (pp. 272-9). Recife.

Souza, T.A. (1997). *Calculadoras gráficas: uma proposta didático-pedagógica para o tema funções quadráticas*. Dissertação de Mestrado, UNESP. Lisboa: APM.

Notas

[1] Fernandes (1998), Borba et al. (1997), Smart (1995), por exemplo.

[2] Uma descrição mais detalhada de como a estudante chegou a esta conclusão pode ser encontrada em Gracias e Borba (1998).

[3] Ao modificar a janela de visualização da calculadora gráfica apenas o gráfico da última função traçada ficou disponível, ou seja, o gráfico da função $y=x^2-4x+20$, o qual Alessandra estava procurando. Esta é uma característica da calculadora gráfica utilizada, a Casio fx 8700GB: dependendo do modo como os gráficos das funções são criados, apenas o gráfico da última função armazenada na calculadora fica disponível na tela.

Telma Souza Gracias
Marcelo C. Borba
UNESP, Rio Claro, SP, Brasil