Spira Mirabilis
Uma curva notável

Paulo A. J. Oliveira

Qual é a trajectória de um corpo em queda livre, atendendo ao movimento de rotação da Terra? Este problema, enunciado por Galileu na sua obra *Duas Novas Ciências,* teve eco em França através de Marin Mersenne. Descartes, em 1638, admitiu que a dita trajectória seria uma curva que designou como espiral equiangular. Em coordenadas polares esta curva tem equação $r = k.e^{a\theta}$. Curiosamente, apenas um ano antes, ao publicar a sua obra prima *La Géométrie*, Descartes tinha banido curvas como esta da geometria, nos seguintes termos:

> Provavelmente, a explicação real da recusa dos geómetras antigos em aceitarem curvas mais complexas que as secções cónicas, reside no facto de que as primeiras curvas para as quais a sua atenção foi atraída, foram a espiral, a quadratriz, e curvas semelhantes, que realmente pertencem apenas à mecânica, e não estão entre aquelas curvas que eu penso que devem ser incluídas aqui, porque se devem conceber como descritas por dois movimentos separados cuja relação não admite determinação exacta.

Mais adiante afirma:

> Por outro lado, a geometria não deveria incluir linhas que são como cordas, sendo por vezes rectas e por vezes curvas, porque as razões entre linhas rectas e curvas não são conhecidas, e eu acredito que não possam ser descobertas por mentes humanas, e sendo assim nenhuma conclusão baseada em tais razões pode ser aceite como rigorosa e exacta.

Deste modo, Descartes agrupava as curvas em duas classes: as curvas geométricas (recta, circunferência, secções cónicas, cissóide, conchóide) e as curvas não geométricas, ou mecânicas (quadratriz e espiral). Sendo um geómetra por excelência, não admira que Descartes se escusasse a fazer investigações profundas sobre as curvas mecânicas (nomeadamente as espirais, a de Arquimedes e a equiangular) que considerava como casos patológicos. No entanto, o multifacetado matemático suíço Jakob Bernoulli deixou-se maravilhar pela curva que Descartes banira da geometria. Deve-se-lhe a descoberta de propriedades espantosas, intrigantes e singulares da curva a que chamou espiral logarítmica, uma vez que na sua época a equação típica desta curva era apresentada na forma $\ln r = a\theta$ (equivalente a $r = e^{a\theta}$) visto que a exponencial de base *e* não era ainda considerada como função. Bernoulli desejou expressamente que fosse gravada uma espiral logarítmica no seu túmulo. Na pedra tumular de Jakob Bernoulli está de facto gravada uma espiral... de Arquimedes! Ignorância ou inabilidade do artífice, certamente.

> Bernoulli chamou-lhe espiral maravilhosa, outros designaram-na por logarítmica, equiangular, geométrica ou logística, mas todos se referiram à mesma curva, aquela que no seu tempo desafiou o pensamento de Descartes a ponto de este a banir da geometria.

Coordenadas polares e rectangulares

Como vimos, a espiral logarítmica é descrita pela equação $r = e^{a\theta}$, em coordenadas polares. Por simplicidade, e sem perda significativa de generalidade, muitas vezes toma-se $k = 1$.

Consideremos um ponto P(x,y) do plano, pertencente à espiral logarítmica (ver figura 1 da página seguinte).

Então, $r^2 = x^2 + y^2$ e $tg\theta = \dfrac{y}{x}$, ou,

de outro modo, $\theta = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

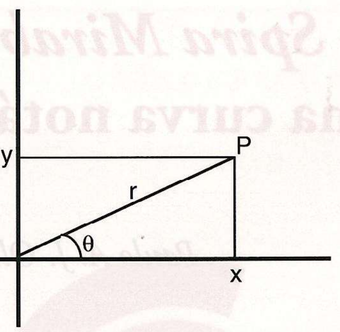

figura 1

Ora, sendo $r = e^{a\theta}$, tem-se sucessivamente:

$$r^2 = e^{2a\theta} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = e^{2a.\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Esta é a equação da espiral logarítmica em coordenadas rectangulares. Claro que a expressão da curva em coordenadas polares é mais natural, rica e simples, pelo que será aqui adoptada em tudo o que se segue.

Determinação da constante *a*

Na equação $r = k.e^{a\theta}$, a constante a é característica de cada espiral particular e pode ser determinada em função do ângulo que o raio vector faz com a tangente à curva num dado ponto.

Como $r = k.e^{a\theta}$ obviamente

$\frac{dr}{d\theta} = ake^{a\theta} = ar$. Mas $ctg\alpha = \frac{dr}{r.d\theta}$ como se pode concluir a partir da figura 2.

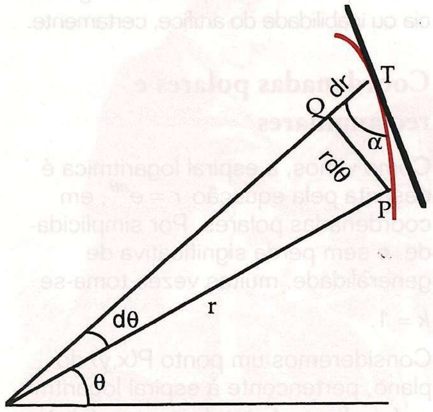

figura 2

Logo, $\frac{dr}{d\theta} = r.ctg\alpha$. Assim, $ar = r.ctg\alpha$, ou seja, $a = ctg\alpha$, em que α é o ângulo que o raio vector faz com a tangente à curva em T.

Equiangularidade

Como referimos na introdução, Descartes designou a espiral logarítmica como espiral equiangular, em virtude de ser constante o ângulo determinado por um raio vector que intersecte a curva em qualquer ponto e a tangente à curva nesse ponto. Com vista a provar esta propriedade, suponhamos que OP, OQ, OR,... são raios igualmente espaçados numa secção arbitrária da curva. Os valores correspondentes de θ, digamos, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, ...$ estão em progressão aritmética.

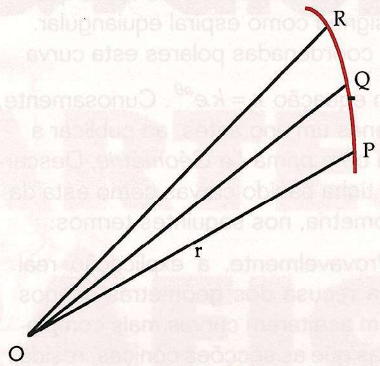

figura 3

Ora, os raios respectivos, digamos, r_1, r_2, r_3,... estão em progressão geométrica (por esta razão, a curva também se designa como espiral geométrica). De facto,

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{k.e^{a\theta_{n+1}}}{k.e^{a\theta_n}} = e^{a(\theta_{n+1} - \theta_n)}.$$

Como $\theta_{n+1} - \theta_n$ é constante (porque os ângulos estão em progressão aritmética) também aquele quociente é constante. Portanto, os triângulos OPQ, OQR,... são semelhantes. Se tomarmos P, Q e R suficientemente próximos, os ângulos OPQ e OQR aproximar-se-ão arbitrariamente dos ângulos entre as tangentes à curva e os raios OP, OQ, OR,... Mas os ângulos OPQ, OQR,... são iguais. Logo, no limite, o ângulo entre a tangente à curva e o raio vector é constante.

Rectificação

Em 1645, Evangelista Torricelli (1608-1647), discípulo de Galileu, rectificou a logística (outro nome da espiral logarítmica!). Mostrou que o comprimento do arco da espiral de *P* até ao pólo, *O*, é igual ao comprimento do segmento *PT* da tangente à espiral em *P*.

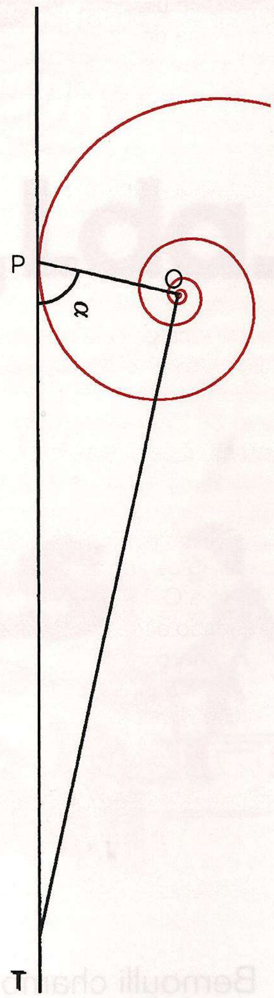

figura 4

Este resultado foi verdadeiramente espantoso na época. Recorde-se que o próprio Descartes havia afirmado apenas sete anos antes que "as razões entre linhas rectas e curvas não são conhecidas, e eu acredito que não possam ser descobertas por mentes humanas". Ainda hoje nos deleitamos nesta aparente aporia: o comprimento de um arco de espiral, definido por um dos seus pontos e pelo pólo, é finito embora se exijam infinitas revoluções para se "atingir" o pólo! Esta situação motivou o seguinte comentário a John Wallis, em 1698:

> *Habes itaque curvam interminabilem terminatae rectae aequalum*, quer dizer, tens assim que uma curva interminável é igual a uma recta determinada.

Vejamos uma "prova" informal desta propriedade usando uma argumentação próxima da de Torricelli. Podemos dividir a curva em unidades de ângulo, pelo que, sendo c o comprimento de uma parte, as partes sucessivas têm comprimentos ck, ck^2, ck^3,... Assim sendo, o comprimento deste arco de espiral até ao pólo será dado pela soma da série $\sum_{j\geq 0} ck^j$. Ora, esta série é geométrica porque $k<1$ (estamos a dividir a curva em secções em que os arcos são progressivamente mais pequenos, até ao pólo). Logo, a série é convergente.

Gnomones

Para Herão de Alexandria (cerca do 1° século a.C.), um gnomon é aquilo que, quando acrescentado a qualquer coisa, número ou figura, torna o todo semelhante àquilo a que é acrescentado. Herão mostrou que em qualquer triângulo ABC, o triângulo ABD é um gnomon do triângulo BCD se $\angle CBD = \angle A$.

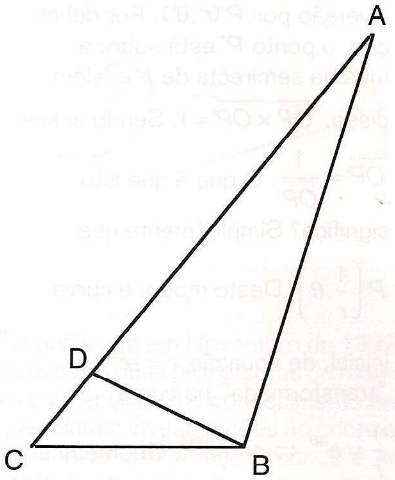

figura 5

Gnomones rectangulares

Consideremos o rectângulo de ouro $ABCD$ (i.e. $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\phi}{1}$) e o corte de

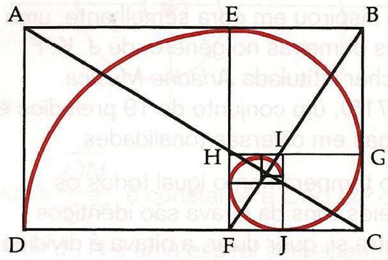

figura 6

ouro E. O rectângulo $EBCF$ é, ele mesmo, um rectângulo de ouro, sendo G um corte de ouro, e assim sucessivamente. Deste modo, podemos construir uma infinidade de rectângulos de ouro. Esbocemos os quartos de circunferência nos quadrados associados aos sucessivos rectângulos de ouro.

Obtemos assim uma espiral logarítmica de pólo O (o rectângulo limite!) formada pela adjunção dos quartos de circunferência. Informalmente, podemos constatar que:

(i) a espiral passa pelos cortes de ouro

(ii) os lados do rectângulo não são tangentes à curva (apenas aproximadamente)

(iii) as diagonais $[AC]$ e $[BF]$ são perpendiculares

(iv) os pontos E, O e J são colineares, bem como os pontos G, O e D

(v) $[EJ]$ e $[DG]$ são perpendiculares

(vi) a espiral é invariante por dilatação ou contracção de escala

(vii) $\frac{\overline{AO}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OF}}. = \ldots$ e existem infinitos triângulos semelhantes: $[AOB] \sim [BOC] \sim [COF] \sim \ldots$ ou $[ABC] \sim [BCF] \sim [CFH] \sim \ldots$

Neste caso, as áreas dos triângulos são iguais a metade das áreas dos rectângulos de ouro correspondentes.

Construção (aproximada) da espiral com régua e compasso

Seja a espiral logarítmica de equação $r = k.e^{\theta.ctg\alpha}$, de pólo O. Tomemos os raios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ separados entre si de $\frac{\pi}{2}$ radianos i.e.

$$\overline{OA} = k.e^{\theta.ctg\alpha}$$

$$\overline{OB} = k.e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right).ctg\alpha}$$

$$\overline{OC} = k.e^{(\theta+\pi).ctg\alpha}.$$

Então:

$$\overline{OB}^2 = \left(k.e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)ctg\alpha}\right)^2 =$$

$$= k^2.e^{(2\theta+\pi)ctg\alpha} = \overline{OA}.\overline{OC}$$

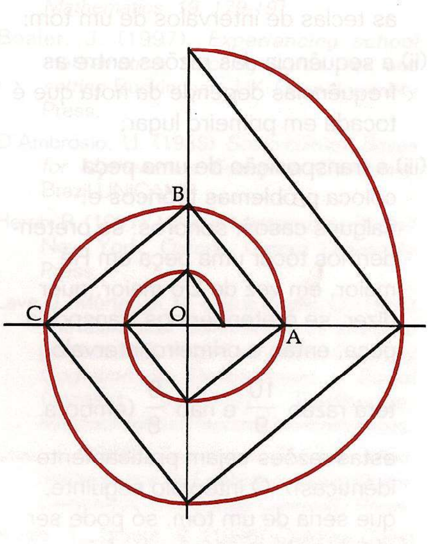

figura 7

Donde, $[OB]$ é meio proporcional entre $[OA]$ e $[OC]$, o que significa que o ângulo ABC é recto. Por conseguinte, a espiral rectangular é um bom "esqueleto" para a espiral logarítmica em que os arcos de espiral são arcos de circunferência.

A escala bem temperada

A escala musical denominada diatónica é composta por cinco intervalos de um tom e dois intervalos de meio tom. Para o diapasão de $Lá_3 = 440$ Hz (trata-se do Lá acima do Dó central no piano) temos as seguintes frequências para esta oitava:

Dó - 264 Hz	Sol - 396 Hz
Ré - 297 Hz	Lá - 440 Hz
Mi - 330 Hz	Si - 495 Hz
Fá - 352 Hz	Dó - 528 Hz

Aos intervalos de um tom, correspondem as razões (entre as frequências dos extremos do intervalo) $\frac{9}{8}$, para os intervalos Dó-Ré, Fá-Sol e Lá-Si, e $\frac{10}{9}$, nos restantes dois casos, ou seja, Ré-Mi e Sol-Lá. A razão $\frac{16}{15}$ corresponde aos intervalos de meio tom, Mi-Fá e Si-Dó. Esta escala apresenta alguns inconvenientes, como sejam:

(i) a construção de instrumentos de sons fixos (e.g. instrumentos de teclas) exige teclas adicionais entre as teclas de intervalos de um tom;

(ii) a sequência das razões entre as frequências depende da nota que é tocada em primeiro lugar;

(iii) a transposição de uma peça coloca problemas teóricos e, nalguns casos, sonoros: se pretendermos tocar uma peça em Ré maior, em vez de Dó maior, quer dizer, se pretendermos transpor a peça, então o primeiro intervalo terá razão $\frac{10}{9}$ e não $\frac{9}{8}$ (embora estas razões sejam praticamente idênticas!). O intervalo seguinte, que seria de um tom, só pode ser obtido pela sucessão de dois semitons i.e. pela razão $\frac{256}{225} = \frac{16}{15} \times \frac{16}{15}$. Porém, esta razão subentende um intervalo que não pertence a esta escala!!

Em 1691, Andreas Werckmeister, construtor de órgãos, sugeriu uma escala alternativa à diatónica para contornar os seus inconvenientes: a escala bem (ou igualmente) temperada. No entanto, Werckmeister não foi o inventor desta escala já que em 1590 o príncipe chinês Isai-yu expôs correctamente os princípios do temperamento igual. O mesmo fez Mersenne em 1635. No entanto, foi Johann Sebastian Bach (1585-1750) quem popularizou o temperamento igual na composição musical pelo célebre *Das Wohltemerierte Clavier*, usualmente traduzido como *Cravo Bem Temperado*, colectânea de 24 prelúdios e fugas em todas as tonalidades maiores e menores. Os dois cadernos em que estavam agrupados estes 24 prelúdios e fugas datam de 1722 e 1744, embora tenham sido publicados postumamente em 1801. Refira-se de passagem que J. S. Bach se inspirou em obra semelhante, uma das primeiras no género, de J. K. F. Ficher intitulada *Ariadne Musica* (1715), um conjunto de 19 prelúdios e fugas em diversas tonalidades.

No temperamento igual todos os meios tons da oitava são idênticos entre si, quer dizer, a oitava é dividida em 12 intervalos iguais de meio tom. Deste modo, a razão das frequências dos semitons é $\frac{\sqrt[12]{2}}{1}$. Naturalmente, a oitava obtém-se "adicionando" os 12 semitons: $\left(\frac{\sqrt[12]{2}}{1}\right)^{12} = \frac{2}{1}$.

Adoptando um determinado diapasão (e.g. Lá = 440 Hz) pode-se estabelecer um quadro de notas com as respectivas frequências a partir do factor $\sqrt[12]{2} = 1{,}059463094$.

Por exemplo,

$$440 \times \sqrt[12]{2} = 466Hz \ \ (Lá\#_3\ ou Sib_3)$$

$$466 \times \sqrt[12]{2} = 494Hz \ \ (Si_3)$$

$$440 \div \sqrt[12]{2} = 415Hz \ \ (Sol\#_3\ ou Láb_3)$$

Pelo que foi dito anteriormente, fica claro que as notas da escala bem temperada se podem representar

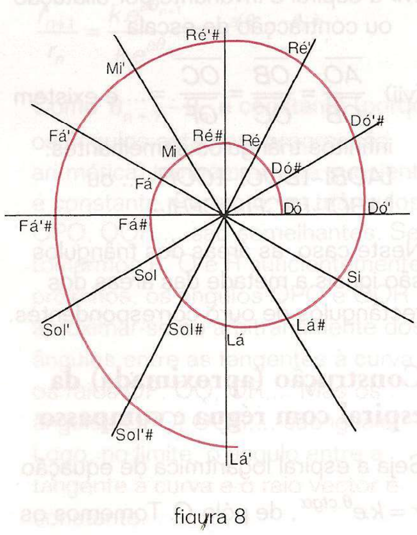

figura 8

numa espiral logarítmica. Uma vez que a oitava compreende 12 intervalos iguais, o ângulo giro tem que ser dividido em 12 partes iguais, pelo que, as notas estão separadas entre si por intervalos de 30°. Assim, para fazer a transposição de uma peça basta efectuar uma rotação da espiral de modo a que a tonal coincida com o eixo horizontal.

Qual é o ângulo característico desta espiral? Ora, sabe-se que para a oitava $\frac{r_1}{r_2} = 2$ e $\theta_1 - \theta_2 = 2\pi$.

Donde, $\frac{r_1}{r_2} = e^{(\theta_1-\theta_2).ctg\alpha} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 = e^{2\pi.ctg\alpha} \Leftrightarrow tg\alpha = \frac{2\pi}{\ln 2}$$

Logo, o ângulo α é aproximadamente igual a 83° 42'.

Curvas derivadas da espiral equiangular

Uma das maravilhas notáveis da espiral logarítmica é a sua invariância relativamente a alguns métodos clássicos para obter curvas a partir de curvas. Vejamos dois exemplos significativos.

(i) Inversa. A transformação geométrica denominada inversão foi apresentada por Steiner em 1824. Consideremos, em coordenadas polares, um ponto $P(r,\theta)$ e designemos o seu transformado pela inversão por $P'(r',\theta')$. Por definição, o ponto P' está sobre a mesma semirecta de P e, além disso, $\overline{OP} \times \overline{OP'} = 1$. Sendo assim, $\overline{OP'} = \frac{1}{\overline{OP}}$. O que é que isto significa? Simplesmente que $P'\left(\frac{1}{r},\theta\right)$. Deste modo, a curva inicial, de equação $r = e^{a\theta}$, é "transformada" na curva $\frac{1}{r} = e^{a\theta} \Leftrightarrow r = e^{-a\theta}$. Geometricamente (ver figura 9 da pág. ao lado), admitindo que a>0, temos

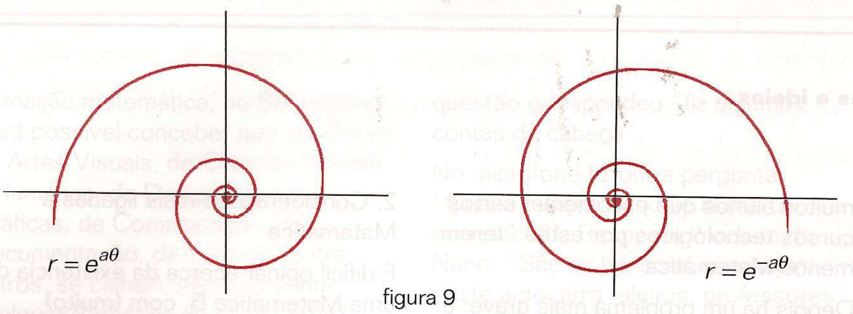

figura 9

que: A espiral logarítmica é, pois, uma curva *analagmática*, ou seja "coincide" com a sua inversa.

(ii) Evoluta. Foi Huygens (1673) quem primeiro estudou este método de obter uma nova curva a partir do *locus* do centro de curvatura de uma dada curva. Tucker (1864) prolongou as investigações de Huygens.

Tomemos um ponto *P* na espiral. Seja α o ângulo (constante) entre *OP* e a tangente à curva em *P*; *PN* a normal à curva em *P* (quer dizer, *PN* é perpendicular à tangente) de tal modo que $ON \perp OP$. Então $ONP = \alpha$. Como a

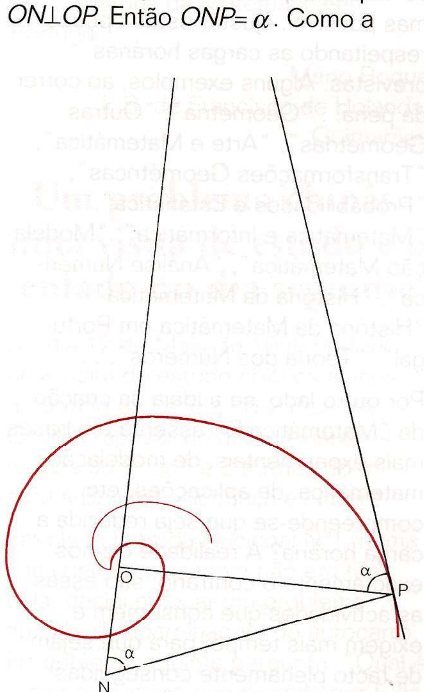

figura 10

razão $\dfrac{\overline{ON}}{\overline{OP}}$ é constante e $ON \perp OP$ o *locus* de N é uma espiral semelhante (logo igual) à original. Como *o* ângulo $ONP = \alpha$, PN é tangente à "nova" espiral e normal à original. Portanto, a nova espiral é a evoluta da primeira, sendo *N* o centro de curvatura da primeira relativamente a *P*.

Na pedra tumular de Bernoulli pode ler-se a respeito da espiral, *Eadem Mutata Ressurgo*, quer dizer, "embora mude ressurjo imutável". Esta é uma alusão evidente a essa invariância relativamente a transformações que, no caso de outras curvas, modificam tremendamente a curva original. Não admira, pois, que *Bernoulli* tenha designado esta curva como *spira mirabilis*, forma latina de "espiral maravilhosa"!

Nota:

As figuras nº 4 e 9 são extraídas do livro "Geometria - Temas actuais" de E. Veloso

Referências bibliográficas

Fauvel, John e Gray, Jeremy (1987). *The History of Mathematics - A Reader*. Open University.

Ghyka, Matila (1977). *The Geometry of Art and Life*. Dover Pub.

Huntley, H. E. (1970). *The Divine Proportion*. Dover Pub.

Lawrence, J. Dennis (1972). *A Catalog of Special Plane Curves*. Dover Pub.

Lockwood, E. H. (1961). *A Book of Curves*. Cambridge University Press.

Maor, Eli (1994). *e - The Story of a Number*. Princeton University Press.

Paulo A. J. Oliveira
Dep. Educação da FCUL

Se até a Barbie... (cont. da pág. 14)

Notas

1 Acrescentado pela autora, à frase de Jean Piaget.

2 Investigação realizada no Brasil, por Nunes e outros (1993), com miúdos de rua que vendem chocolates e frutas como meio de sobrevivência.

3 Lave (1988) investigou a Matemática usada por adultos que faziam compras num supermercado.

Referências

Abreu, G. (1995). A Matemática na vida versus na Escola: Uma questão de Cognição situada ou de Identidades Sociais? *Psicologia: Teoria e Pesquisa.* 11(2):85-93.

Bishop, A. (1988) Mathematics Education in its Cultural Context. *Educational Studies in Mathematics, 19, 179-191*

Boaler, J. (1997). *Experiencing school mathematics: teaching styles, sex and setting.* Buckingham, UK: Open University Press.

D'Ambrósio, U. (1985) *Socio-cultural Bases for Mathematics Education.* Campinas, Brazil.UNICAMP

Hersh, R. (1997). *What is Mathematics Really?* New York. Oxford. Oxford University Press.

Lave, J., Murtaugh, M. e de la Rocha, O. (1984) The dialectical construction of aritmetic practice, in B. Rogoff e L J (eds) *Everyday Cognition :Its Development in Social Context*, pp.67-97. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Lave, J. (1988). *Cognition in Practice: Mind, mathematics and culture in everydat life.* Cambridge. Cambridge University Press.

Nunes, T., Bryant, P. (1996) *Children Doing Mathematics*, Cambridge, Massachusetts, T.J. Press.

Nunes, T., Schliemann, A., e Caraher, D.(1993), *Street Mathematics and School Mathematics.* New York: Cambridge Unversity Press.

Pombo, O. (1999). A Escola, a Recta e o Círculo, *Educação e Matemática*, 50, 3-10.

Schoenfeld, A. (1989).Problem Solving in Context(s). In R. I. Charles and E. A. Silver, (Eds). *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. pp. 82-92. Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.

Elsa Fernandes,
Universidade da Madeira

Quadrante

Foi publicado em Novembro de 1999 o Volume 7, nº 1 da Quadrante. Neste número pode ler um artigo sobre as práticas lectivas de duas professoras de Matemática (3º ciclo e secundário) num contexto de reforma curricular e a sua relação com as concepções e o conhecimento profissional sobre a disciplina, o currículo, a aprendizagem e a instrução. Dois artigos que relatam investigações no contexto de disciplinas de Matemática no 1º ano de cursos superiores. Num deles procura-se uma fundamentação teórica e empírica de que as actividades de aplicação e modelação matemática constituem contextos propícios a uma aprendizagem significativa da matemática. No outro procura-se entender o discurso de alguns professores sobre o tema taxas de variação. A revista contém ainda a recensão do livro "Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática: Múltiplos contextos e perspectivas".