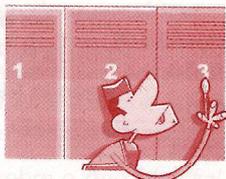


# O problema do ProfMat 99

José Paulo Viana

O concurso proposto aos participantes no ProfMat99 de Portimão consistiu na resolução do problema



## Pintores de Números:

Dois operários vão pintar os números dos cacifos de uma escola.

Enquanto o mais velho pinta cinco algarismos, o mais novo só consegue pintar quatro.

O mais novo começou pelos cacifos de números mais baixos: 1, 2, 3, ...

O mais velho começou pelo último cacifo e foi pintando por aí abaixo, ao encontro do mais novo.

No final, duas coincidências se verificaram:

- Acabaram os dois ao mesmo tempo, cada um em seu cacifo.

- Os dois pintaram o mesmo número de cacifos.

Quantos cacifos há na escola?

Tivemos um número recorde de respostas: 57, das quais 19 colectivas.

A maneira mais simples, elegante e surpreendente de resolver o problema é, sem dúvida, a do Jorge Manuel Ferreira, o vencedor incontestado do concurso. Ora vejam:

Pensemos do seguinte modo: eles pintam ao mesmo ritmo, mas o pintor mais novo descobre que pode pintar o mesmo número de cacifos não pintando um algarismo "desnecessário" de cada vez! Esse algarismo desnecessário é o zero à esquerda.

De 1 a 99 há  $2 \times 9 + 1 \times 90 = 108$  zeros à esquerda.

Então, o pintor mais novo pinta 4

algarismos 108 vezes e o mais velho pinta  $5 \times 108 = 540$  algarismos. Como cada cacifo do mais velho tem 3 algarismos, estes 540 algarismos que ele pintou correspondem a 180 cacifos. Logo, a escola tem 360 cacifos.

Três equipas, as do José Manuel Duarte, do Luís Pinheiro e da Ana Machado, resolveram o problema por um processo também muito curioso. Primeiro mostraram que o mais novo tem de pintar pelo menos 100 cacifos. Depois, nas palavras da primeira equipa:

Vejamos quantos cacifos pintou o mais velho enquanto o mais novo pintou os 100 primeiros.

A estes 100 cacifos correspondem  $9 + 2 \times 90 + 3 = 192$  algarismos.

O mais velho pintou então

$$192 \times \frac{5}{4} = 240 \text{ algarismos, a que}$$

$$\text{correspondem } \frac{240}{3} = 80 \text{ cacifos.}$$

Assim, o pintor mais novo leva um avanço de 20 cacifos.

A partir desta altura, ambos os pintores pintam cacifos com o mesmo número de algarismos, pelo que, enquanto o mais velho pinta 5 cacifos, o mais novo pinta 4.

Ou seja, em cada 5 cacifos, o mais velho recupera um.

Ao fim de  $20 \times 5$  cacifos, o mais velho recuperou o atraso que levava.

Cada um deles pintou portanto 180 cacifos.

A escola tem 360 cacifos.

Vários concorrentes partiram à procura de outras soluções "matemáticas" do problema mas que correspondiam a um número de

(continua na página 18)

## Participantes

Ana Cristina Assis	Ana Isabel Carvalho
Ana Luísa Correia	Ana Sofia Nobre
Ana Sofia Tavares	António Abrantes
António Bernardes	António Pinto da Silva
Augusto Taveira	Braulino Salgueiro
Carlos Faria	Clara Cruz
Cristina Gonçalves	Cristina Ortins
Fernanda Oliveira	Francisca Sousa
Helena Valadão	Isabel Viana
Jorge Manuel Ferreira	José Manuel Oliveira
José Paulos	Laura Guerra
Luís Malheiro	M <sup>o</sup> João Lopes
Mónica Valadão	Olga Correia
Olívia Sousa	Orlando Sá Couto
Pedro Oliveira	Pedro Torres
Renato Agostinho	Rita Basto
Sandra Gomes	Sérgio Macias Marques
Sócio n <sup>o</sup> 1448	Susana Fernandes
Vidal Minga	Vasco Carvalho

## Equipas:

- AAH (António Pinto Leite, Armando Fernandes & Heitor Surrador)
- Adriana Costa & Eva Matias
- Alice Pinto & Cristina Sapariti
- Ana Cristina Costa & Ana Sofia Henriques
- Ana Machado, Célia Lobo, Manuel Lago & Mário Roque
- Ana Morais, Avelino Costa & Rui Costa
- Ana Paula Júlio & Paulo Correia
- Ana Serrazina & Glória Serrazina
- Aurélia Freire, Cristina Piedade & Amélia Albuquerque
- Carla Dias & Paulo Lameira
- Celina Pereira & Elsa Ferreira
- Isabel Alves, Raquel Azevedo & Susana Ribeiro
- Isabel Guerreiro & Júlio Guerreiro
- Iva Angelino & Nuno Angelino
- José Manuel Duarte, Fátima Delgado, Pedro Girão & Sérgio Valente
- Jacinto Salgueiro & Luis Miguel Ferreira
- Lourdes Sequeira & Leonel Taveira
- Luis Pinheiro & Sónia Matos
- Mónica Conde & Matilde Rebelo



## Um encontro na sede da APM, à volta do "poliedro na escola"



Por iniciativa do Grupo de Trabalho de Geometria, realizou-se no dia 11 de Dezembro, às 14.30, na sede da APM, uma sessão aberta de trabalho sobre o projecto "Um Poliedro na Escola". A convocatória foi enviada a

perto de 70 escolas que haviam já declarado a sua intenção de participar nas iniciativas da APM. A redacção da Educação e Matemática esteve lá, tirou fotos e assistiu à troca de ideias e informações sobre os projectos a desen-

volver ou já em andamento, os materiais a usar nas construções, os problemas técnicos e matemáticos a resolver... para que poliedros de grandes dimensões apareçam em muitas escolas, para que também

muitos professores e alunos se envolvam no seu estudo e na sua construção... Os participantes na reunião, para além de falarem sobre os seus projectos, levantaram questões, pediram informações ao grupo de Geometria, deram outras. Trocou-se bibliografia, tiraram-se fotocópias, falou-se das planificações, da história, e também de outras iniciativas que estão ainda a ser pensadas.

Entretanto várias escolas foram dando notícias sobre os seus poliedros, os seus planos de actividades, a semana da Matemática, ...

Para ter acesso a estas informações basta entrar na página da APM e pressionar o símbolo



### O Problema do ProfMat 99 (continuação da pág. 15)

cacifos impossível de existir numa escola. A equipa do José Manuel Duarte demonstrou que existem mais quatro soluções:

22 212, 179 230, 2 389 644 e 71 508 952.

A equipa AAH fez notar uma particularidade extremamente curiosa da solução 22 212.

Se considerarmos como unidade de tempo o tempo necessário para o pintor mais lento pintar 4 algarismos (e o mais rápido pintar 5), o número de unidades de tempo gastas para pintar os cacifos é precisamente igual ao número de cacifos pintados por cada um dos pintores. Isto possibilita um novo problema engraçado, com as devidas alterações de enunciado.

A maioria dos concorrentes resolveu o problema com a ajuda de equações ou fazendo tentativas organizadas. O processo mais utilizado foi, em linhas gerais o seguinte:

Nos primeiros 100 cacifos, o pintor mais lento pintou:

$$9 + 90 \times 2 + 3 = 192 \text{ algarismos.}$$

Seja  $100+N$  o número de cacifos que ele pintou, a que correspondem  $192+3N$  algarismos.

O mais rápido também vai pintar  $100+N$  cacifos (todos com três algarismos), a que correspondem  $300+3N$  algarismos.

Como demoraram o mesmo tempo, terá

$$\text{de ser } \frac{192 + 3N}{4} = \frac{300 + 3N}{5}$$

Resolvendo a equação, vem  $N = 60$

Logo, cada um pintou 180 cacifos e portanto a escola tem 360 cacifos.

### Prémios

- |    |   |
|----|---|
| 1° | <b>Jorge Manuel Ferreira</b><br>Calculadora Gráfica TI-92 + Módulo Plus, oferta Texas Instruments                                   |
| 2° | José Manuel Duarte, Fátima Delgado, Pedro Girão & Sérgio Valente<br>Calculadora gráfica Casio Algebra FX 2.0, oferta Beltrão Coelho |
| 3° | Ana Machado, Célia Lobo, Manuel Lago & Mário Roque<br>Calculadora gráfica TI-89, oferta Texas Instruments                           |
| 4° | Luis Pinheiro & Sónia Matos<br>Calculadora gráfica TI-83, oferta Texas Instruments  |
| 5° | AAH (António Pinto Leite, Armando Fernandes & Heitor Surrador)<br>Conjunto Sistema Zome "Pioneer Kit"                               |
| 6° | Braulino Salgueiro<br>Jogo "Zatre", oferta Ludomania  |
| 7° | Isabel Guerreiro & Júlio Guerreiro<br>Conjunto Polydron "Universal Set"   |

Os concorrentes devem contactar com a sede da APM a fim de receberem os prémios.

Braulino Salgueiro apresentou três processos diferentes de resolução a que chamou Anos 60, Tentativas, e Tecnomatemática.

Nota: O 7º prémio foi atribuído por sorteio entre cinco concorrentes em pé de igualdade.