

Um trabalho de projecto no 11º ano

*Celina Pereira, Elsa Ferreira, Irene Aguiar,
Manuela Pires e Silvéria Sabugueiro*

Em conjunto com outros colegas é mais fácil preparar e implementar projectos, pois dessa forma estão em presença diferentes experiências e espíritos críticos, o que poderá contribuir para uma melhor qualidade do resultado. Quanto aos alunos, não temos qualquer dúvida que com este projecto foram desenvolvidas determinadas capacidades que ficariam adormecidas se nos cingíssemos às aulas ditas normais.

Numa das reuniões sectoriais dos professores de Matemática do 11º ano, em que se discutiam diferentes tipos de tarefas a implementar na sala de aula ao longo do ano, surgiu uma ideia: "Vamos propor a realização de um projecto aos nossos alunos do 11º ano". Aceite à partida, depressa concordámos com o tema a explorar: Fractais.

Tornava-se então necessário organizar informação sobre o assunto e transmiti-la aos alunos. Entre referências bibliográficas, conseguidas através da pesquisa em vários livros, em materiais da APM (nomeadamente a conferência "Caminhos para a Geometria") e consultas na Internet, conseguimos o indispensável para o arranque inicial, de forma a motivar os alunos e dar-lhes algumas primeiras noções sobre este novo e fascinante tema.

No entanto, parecia-nos conveniente que fosse apresentada aos alunos uma palestra sobre Fractais e, perante a proposta de convidar alguém para esse efeito, uma das colegas contrapropôs: "E porque não a preparamos e dinamizamos nós?". A primeira reacção das restantes colegas foi negativa, revelando insegurança e falta de confiança. Assustava-nos, em particular, preparar um assunto novo e complexo para expor durante uma hora a uma plateia de 180 alunos. Após alguma discussão, concordámos em abraçar essa iniciativa, conscientes da necessidade da nossa preparação e da responsabilidade desse nosso acto.

Exposição e conferência

Durante os dois dias das Jornadas Culturais da escola, a 11 e 12 de

Fevereiro de 1999, o 1º grupo organizou uma exposição interactiva sobre Fractais e Caos, tendo sido alguns materiais, os fractais a 3 dimensões, elaborados pelos alunos da turma de artes. O professor da turma propôs a construção dos dez fractais cuja descrição é feita no livro *Fractal-Cuts* e forneceu os materiais de consulta; os alunos estudaram as formas, escolheram as cores das cartolinas e puseram mãos à obra, sendo o resultado final belo e motivador para o estudo que se pretendia.

Até 3 de Março, aprendemos a trabalhar com o *Powerpoint*, utilizámos os *slides*, requisitámos os meios técnicos, providenciámos as necessárias dispensas das outras aulas dos alunos, convidámos os professores e funcionários a assistirem à nossa apresentação, de forma a que todos os alunos do 11º ano e demais interessados pudessem estar presentes no mini-ginásio da escola, entre as 10h 30m e as 11h 30m.

Lamentamos a deficiência das condições sonoras, mas concordamos que o balanço é bastante positivo. Entre os recursos que usámos, destacamos o *software Fractree*, com que fizemos algumas explorações, o *Sketchpad*, usado para a construção do floco de neve e a Internet que, em *offline*, nos permitiu evidenciar a beleza de algumas imagens fractais. Salientamos a colaboração da nossa colega de Português, Margarida Font, que, do seu jeito tão peculiar, estabeleceu algumas pontes entre a Matemática, Fractais e Caos, e o Português. Registámos a reacção dos professores presentes que, envolvendo áreas tão diversas como a Físico Química, a

Filosofia, a Biologia, a Mecânica ou o Francês, nos manifestaram a sua satisfação pelo tema, que lhes era totalmente desconhecido, e pela apresentação, que classificaram de boa.

Um destaque para as declarações do Armando, professor de Físico-Química:

Os meus parabéns pela vossa apresentação, que constitui uma pequena "pedrada no charco", pois as três maiores revoluções científicas deste século: a relatividade, a mecânica quântica e o caos, que desfizem respectivamente as ilusões Newtonianas do espaço e do tempo absolutos, de processos de medidas controláveis e a previsibilidade determinística Laplaciana, e que estão neste fim de milénio completamente ausentes da escola, permanecendo por isso como assuntos misteriosos e complexos que quase ninguém pode entender. Está dado um primeiro passo com a vossa introdução aos fractais, um tema muito interessante ligado à teoria do caos. Continuem!

Esta conferência mexeu com a escola, tendo sido, durante algum tempo, tema de conversa na sala de professores. Todos queriam saber o que são fractais e os nossos colegas que não tinham assistido pediam-nos uma segunda apresentação. Foi para nós gratificante constatar que a Matemática pode ser assunto de discussão entre a comunidade escolar não matemática, sem que o tema sejam os elevados níveis de insucesso nos exames ou outros aspectos negativos.

Pedimos aos alunos um comentário, anónimo e escrito, sobre a conferência. Sinteticamente, concluímos que aqueles que se situavam na parte de trás da sala não conseguiram acompanhar o desenrolar da conferência nas melhores condições, pois havia perturbações nas condições sonoras e na visibilidade das projecções. No entanto, a maioria dos alunos gostou do que viu

e ouviu e, de um modo geral, ficaram motivados para a elaboração do trabalho que lhes era pedido. Pela positiva, destacaram a couve-flor, apresentada como exemplo de um objecto fractal e que contribuiu para ilustrar a propriedade da auto-similaridade característica dos fractais e a surpresa do conceito de infinito ligado a uma situação real como a medição da costa portuguesa. Algumas opiniões:

Acho que se devem desenvolver mais trabalhos deste tipo para dar a conhecer coisas diferentes, para a cultura geral dos alunos.

Acho que fizeram ver aos alunos e professores que a matemática não é só contas e coisas complicadas mas que também pode ser bonita e enriquecedora. Gostei muito da relação que fizeram entre os poemas e os fractais. O único problema foi ao nível do som.

Eu achei o trabalho muito bem organizado e acredito que deve ter dado muito trabalho.

É sempre bom descobrir que por detrás de uma coisa, que aparenta uma certa vulgaridade, existem muitas outras que nós nem fazemos ideia.



Os trabalhos dos alunos

Entre a realização da conferência (a 3 de Março) e 7 de Maio foi o período que reservámos para a elaboração dos trabalhos que deveriam ser entregues e apresentados de seguida, entre os dias 10 e 12 de Maio. Os alunos puderam consultar os materiais bibliográficos na mediateca e na

reprografia onde podiam tirar fotocópias.

Durante aquele período, que incluiu as férias da Páscoa, alguns alunos foram solicitando ajuda, principalmente na definição do subtema que deveriam tratar, no grau de aprofundamento pretendido ou em esclarecimentos sobre conceitos matemáticos ainda desconhecidos, como números complexos, logaritmos ou sucessões, bem como sobre alguns termos técnicos da bibliografia em inglês, o que também foi novidade para eles.

A obrigatoriedade da apresentação à turma foi, de início, contestada por alguns alunos mas, na data prevista, todos cumpriram a sua parte.

Houve alunos que ainda não conseguiram "dar o salto" e fizeram uma apresentação um pouco apagada, com muitas pausas ou bastante apoiada no texto escrito do trabalho.

No entanto, fazendo uma análise global, os resultados finais surpreenderam-nos, quer pela dimensão de algumas investigações levadas a cabo, pela originalidade de determinadas apresentações, pela extraordinária clareza de algumas comunicações ou pelos meios técnicos utilizados.

Apesar de constatarmos que muitos alunos foram direccionados para uma perspectiva histórica pelas consultas na Internet, que ocuparam quase em permanência os computadores da Mediateca e do Laboratório de Matemática, foi grande a diversidade e a qualidade de trabalhos elaborados.

Foram feitas apresentações recorrendo a dramatizações devidamente encenadas, a bandas desenhadas apresentadas em papel e com epílogo ao vivo, a sátiras de programas televisivos, a entrevistas a matemáticos. Fizeram-se páginas de Internet, elaboraram-se CD-Rom's, construíram-se muitos modelos em cartolina e outros materiais, apresentou-se música fractal e exemplos de lendas e da presença dos fractais nas artes, exemplificaram-se conceitos com couves-flor, fetos ou outros arbustos.

Guião do trabalho de projecto "Os fractais"

A apresentação do trabalho será livre, ou seja, poderão utilizar vários materiais, mas terá obrigatoriamente uma componente escrita e apresentação oral.

Na apresentação escrita deverão ser contemplados os seguintes aspectos:

Título; Objectivos do trabalho; Materiais utilizados; "História" do trabalho: descrição das pesquisas realizadas, dificuldades encontradas...; Desenvolvimento do tema; Conclusões; Bibliografia

Temas a abordar: Envolvendo fractais, podendo assumir formas diferenciadas. Desde o estudo pormenorizado de um determinado fractal, construção e exploração de um fractal, ao desenvolvimento de um programa de calculadora, passando por uma investigação histórica, ligação dos fractais às Artes, ou outro que aches interessante.

Prazo de execução: até 7 de Maio 99

Apresentação e entrega: entre 10 e 14 de Maio 99

Avaliação: No quadro que se segue encontram-se os parâmetros a ter em conta na avaliação com a respectiva ponderação:

Parâmetros	Ponderação
Apresentação: suporte escrito e materiais de apoio	3
Cumprimento do guião	2
Desenvolvimento: clareza, criatividade, capacidade de síntese, rigor.	8
Conclusões	2
Apresentação à turma	5
Total	20

Bibliografia:

- Amorim, I. (1994). *Caos e Fractais na Aula de Matemática*. Actas do ProfMat94 (pág. 59-72).
- Bernardes, A et al. (1997). *Matemática 11º Sucessões*. Porto: Contraponto.
- Costa, M. J. P. (1987). A Curva do Dragão. *Educação e Matemática* n°4 (pág. 11, 12 e 36).
- Crato, N. Olhar o Céu. *Expresso* de 5/9/98.
- Dewdney, A. K. (1994). *A Máquina Mágica*. Lisboa: Gradiva.
- Giorgi, D. (1987). Fractais na Escola Secundária. *Educação e Matemática* n°4, (pág. 7-10).
- Lima, Y., Gomes, F. (1997). *XeqMat Matemática 11*. Editorial O Livro (pág.256-325).
- Mandelbrot, B. (1998). *Objectos Fractais*. Lisboa: Gradiva.
- *Material da Exposição* realizada durante as Jornadas Culturais.
- Miller, D. & al. (1996) *Fractals and Chaos in the Classroom*. KMEP (tradução provisória).
- Ramos, J. S. (1989). Matemática experimental. *Educação e Matemática* n°45, (pág. 7-10).
- Ribeiro, A. et al (1998). *Solução 11*. Texto Editora (pág.274-291).
- TI-Mat n°8 (1998). *Fractais na sala de Aula*.
- Uribe, D. (1995). *Fractals-Cuts*. Norfolk:Tarquin.
- Veloso, E. (1998). *Geometria Temas Actuais*. Lisboa: IIE (pág. 275-287: Forma e Dimensão)

Sites sobre fractais:

<http://www.ba.infn.it/www/wfractal.html>

<http://www.fractals.com>

<http://eulero.ing.unibo.it>

<http://www.fractaldomains.com/html/gallery.html>

http://dir.yahoo.com/Arts/Visual_Arts/Computer_Generated/Fractals

<http://cml.rice.edu/~lanius/fractals/>

<http://math.rice.edu/~lanius/fractals/>

<http://forum.swarthmore.edu/~alejandre/>

Avaliação dos trabalhos

Uma questão que se nos colocou desde o início foi a avaliação dos trabalhos. Havia que definir critérios, para que houvesse alguma uniformidade e se minimizassem as diferenças entre as nossas sensibilidades.

Apoiando-nos na brochura da Didáctica e tendo a nossa curta experiência de avaliação e classificação de relatórios como referência, estabelecemos um guião para a apresentação escrita dos trabalhos e definimos os parâmetros a ter em conta na avaliação final e a respectiva ponderação (ver caixa). Quando começámos a analisar os trabalhos que nos foram entregues, pareceu-nos que poderiam ser feitas algumas alterações dos critérios definidos, mas não as fizemos, pois isso seria contrariar as orientações apresentadas previamente, por escrito, aos alunos.

As apreciações escritas que fizemos a cada um dos trabalhos, procuraram revelar, não só a apreciação geral, mas também os aspectos mais e menos conseguidos, revelando também o conhecimento que cada uma de nós tinha dos seus alunos. Como exemplos:

Embora cumpra o guião, os objectivos são apenas os definidos pela professora e a conclusão não está ajustada ao desenvolvimento. Este consta em 20 páginas densas, cujo conteúdo, além de ter algumas ideias repetidas, não é dominado pelos alunos, devido ao seu grau de complexidade. Há uma enorme discrepância entre a linguagem da parte inicial (da autoria dos alunos) e da restante, o que denota que esta é cópia integral das fontes consultadas. A apresentação à turma foi bastante fraca.

Insuficiente

O tema escolhido [Fractais e Plantas] é efectivamente o fio condutor de todo o trabalho, sendo apresentados alguns exemplos interessantes. No entanto, a lei matemática para o crescimento da erva não me parece adequada, pois a "metade do tamanho" já não acontece ao

passar de 1/4 para 1/6, nem daí em diante. A história do trabalho poderia ter sido mais completa. A apresentação à turma teria sido mais dinâmica se, em vez de lerem, arranjassem alguns suportes (acetatos, por exemplo) que mostrassem melhor as figuras. Gostei do feto.

Suficiente +

Trabalho muito bem estruturado, de redacção clara, explorando bem as relações fractais-música-matemática. A história do trabalho é elucidativa e as conclusões são adequadas ao desenvolvimento feito. A apresentação foi óptima.

Muito Bom

A descoberta de novos conceitos

Durante a realização dos trabalhos os alunos depararam-se com muitos conceitos matemáticos que ainda não tinham estudado na aula, como sucessão, soma de termos, limite, números complexos, logaritmos, etc.

Por exemplo, ao depararem se com a noção de dimensão fractal, que é quase sempre um número irracional e se pode determinar através da fórmula

$$D = \log_k N = \frac{\log N}{\log K}, \text{ em que } N \text{ é o}$$

número de elementos finais e K o número de partes em que se dividiu o segmento inicial, surge o conceito de logaritmo.

Os alunos do 11º ano ainda não conhecem este conceito, mas dois grupos que abordaram a dimensão fractal não só o compreenderam como conseguiram transmiti-lo de forma a que os colegas também o compreendessem.

Um dos alunos explicou desta forma, usando o triângulo de *Sierpinski* como referência:

Há 3 triângulos novos por cada um dos anteriores e cada lado é dividido em 2 partes. Logo, a dimensão é o número representado por d na expressão $3=2^d$. Comparando com $2=2^1$ e $4=2^2$, conclui-se que d tem que estar entre 1 e 2 e, usando a calculadora, determina-se o seu valor que é aproximadamente 1,58.

Outra aluna, não entrando no cálculo da dimensão fractal, explicou que um segmento de recta transformado num "zigzag" terá dimensão entre 1 e 2 visto ser mais do que uma simples linha e não preencher inteiramente o rectângulo que a limita (no exemplo que ela desenhou no quadro). Também um popular porta-chaves que consiste numa bola de borracha com "picos" representará um fractal com dimensão entre 2 e 3 pois não é apenas uma superfície e não preenche todo o espaço correspondente.

Conclusão

O desenvolvimento deste trabalho teve, para nós, aspectos bastantes enriquecedores.

Aumentámos o nosso conhecimento e a nossa cultura, ao estudarmos um tema do qual sabíamos muito pouco. Apresentar a conferência aos alunos foi outro desafio que, pelos resultados, nos entusiasmaram para novas iniciativas deste tipo.

Finalizada esta experiência, consideramos que o trabalho em equipa com outros professores é o meio privilegiado para desenvolver actividades inovadoras. Em conjunto com outros colegas é mais fácil preparar e implementar projectos, pois dessa forma estão em presença diferentes experiências e espíritos críticos, o que poderá contribuir para uma melhor qualidade do resultado.

Quanto aos alunos, não temos qualquer dúvida que com este projecto foram desenvolvidas determinadas capacidades que ficariam adormecidas se nos cingíssemos às aulas ditas normais. A comunicação de ideias e de conceitos matemáticos foi posta em prática durante as apresentações à turma. Por outro lado, atitudes de pesquisa e de selecção de informação estiveram presentes durante a realização do trabalho. E é claro que se desenvolveram o sentido de autonomia e a cooperação entre os vários elementos dos grupos, além da respectiva responsabilização.

Quanto às opiniões dos alunos, registamos alguns comentários

referidos no questionário que elaborámos e que eles preencheram, sobre este projecto:

Com a realização deste Projecto pude aprender que a Matemática não é só números e fórmulas, mas também tem a sua beleza. Com a geometria fractal a Matemática deixa de ser tão "fria" e "austera". Pudemos conhecer novos ramos da Matemática.

Através deste trabalho fiquei a saber o que era um fractal e também a compreender como é o processo de formação dos Fractais. Este trabalho deu bastante "gozo" e despertou bastante interesse da minha parte para a Matemática.

Aprofundei a minha sabedoria, na área da Matemática e do mundo moderno.

Saber mais da Nova Matemática. Saber ciência é Matemática.

Fomos "obrigados" a pesquisar sobre uma coisa que nem sequer sabíamos que existia. Aprendemos bastante não só a nível de conteúdo, mas a própria realização nos ensinou a trabalhar com alguns programas.

Apreendi algo que nunca imaginava vir a saber, o que foi bastante bom para o meu conhecimento, tanto a nível matemático como cultural, pois é engraçado dizer aos meus colegas que uma couve-flor é um fractal.

Bibliografia

Para além da bibliografia dada aos alunos consultámos ainda os seguintes livros e artigos

Matos, JF. (1989). Modelos, aplicações da Matemática e computadores, o exemplo dos autómatos celulares. *Educação e Matemática* 12, 17-22

Gleick, J. (1989). *Caos*. Lisboa: Gradiva

Jurgens, O. et al. (1992) *Fractal for the Classroom: Strategic Activities Volume One and Two*. NCTM

Celina Pereira, Elsa Ferreira, Irene Aguiar, Manuela Pires e Silvéria Sabugueiro
Escola Sec. Eng. Acácio Calazans
Duarte, Marinha Grande