José Paulo Viana

Fibonacci para o ano 2000

Provavelmente já conhecem a famosa série de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Uma série do tipo de Fibonacci tem todos os termos positivos e cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois anteriores.

Consideremos as séries que incluem o número 2000.
Um exemplo é aquela em que os primeiros termos são 16 e 144:
16, 144, 160, 304, 464, 768, 1232, 2000.
Como 2000 é o oitavo termo, convencionemos dizer que a série tem comprimento 8.

Qual é a mais longa série de Fibonacci que inclui o termo 2000?

Respostas até 15 de Janeiro

A esfera na caixa

No número 53 de *Educação e Matemática* propusemos um problema que fez parte do Torneio Matemático do Limousin (França) de 1997:

Uma caixa triangular tem lá dentro uma esfera de raio 1 cm. As medidas interiores da caixa são 6, 8 e 10 cm. A esfera parte de um canto e rola sempre encostada às paredes da caixa.

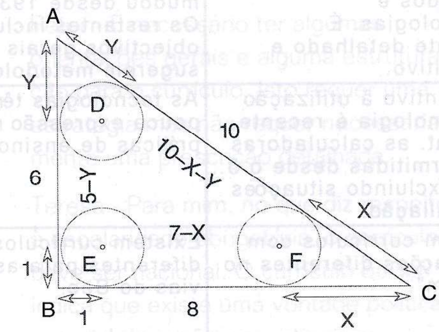
Que distância percorreu a esfera após dar uma volta completa à caixa?

Recebemos 15 respostas, vindas um pouco de todo o lado: Ana Luísa Correia (Lisboa), Ana Silva (Barreiro), António Amaral (via e-mail), Carlos Pereira (Viana do Castelo), Edite Magalhães (Braga), Helder Martins (Lisboa), Helena Perpétua (Setúbal), Isabel Mateus (Celorico da Beira), João Alves (Chaves), João Barata (Castelo Branco), Marta Santos (Porto), Paulo Correia (Portimão), Sérgio Valente (Almada), Sílvia Carvalho (Felgueiras), e ainda de Célia Lobo, Manuel Lage e Mário Roque (Guimarães).

Um aspecto curioso deste problema é que pode ser resolvido de formas muito diferentes. Os métodos seguidos pelos nossos leitores foram desde a simples medição numérica feita com um dos programas de geometria dinâmica até ao cálculo exacto com recurso à trigonometria, à geometria analítica e outra "artilharia pesada". Infelizmente, por falta de espaço, não nos é possível aqui dar um retrato completo da diversidade e riqueza das várias possibilidades de resolução.

Gostaríamos no entanto de salientar, pela elegância e simplicidade, o processo seguido pela Sílvia Carvalho.

Seja [ABC] o triângulo de medidas 6, 8 e 10.



O centro da esfera percorre um triângulo [DEF], semelhante ao triângulo da caixa. A distância pedida corresponde ao perímetro do triângulo [DEF].

Seja x a distância de C aos pontos em que a esfera toca na caixa quando o seu centro está em F, e y a distância de A aos pontos de tangência quando o centro da esfera está em D. Em relação ao ponto E, essa distância é 1.

As medidas dos lados do triângulo [DEF] são então $5-y$, $7-x$ e $10-x-y$.

Como os triângulos [DEF] e [ABC] são semelhantes, os lados são proporcionais:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{5-y} = \dfrac{8}{7-x} \\ \dfrac{8}{7-x} = \dfrac{10}{10-x-y} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 42-6x = 40-8y \\ 70-10x = 80-8x-8y \end{cases}$$

Resolvendo este sistema temos $x=3$ e $y=2$

Então, os lados do triângulo [DEF] medem 3, 4 e 5 cm.

A distância percorrida pela esfera é

3 + 4 + 5 = 12 cm.

A Isabel Mateus fez uma pequena animação, ilustrando o problema, no *Sketchpad*. Aliás, o *Sketchpad* e o *Cabri* foram utilizados por muitos dos leitores para encontrar a solução, fazendo depois a demonstração matemática do resultado.