Dave e Dan — tecnologia e investigação matemática no 9º ano

Da rotina à investigação

No final do ano lectivo 1994/95, o professor de Matemática Charlie Dietrich, da escola Greens Farms Academy, foi encarregado de dar um curso de Verão de geometria e trigonometria. Entre os seus alunos estavam David Goldenheim e Dan Litchfield. Dietrich resolveu passar a estes alunos do 9º ano, que já sabia interessados em matemática, um interessante mas relativamente rotineiro problema dos livros tradicionais de geometria:

Dividir um dado segmento num número qualquer de partes iguais.

Trata-se de uma questão já colocada e resolvida por Euclides na prop. 10 do livro VI dos *Elementos*.

Duas horas depois David e Dan disseram ao professor que já tinham resolvido o problema, não com régua e compasso, mas com o *Geometer's Sketchpad*.

David Daniel Charles Dietrich

David Goldenheim gosta de matemática e de ciências, e toca violoncelo na orquestra juvenil local. Gosta também de computadores. Espera vir a trabalhar numa profissão que envolva todos estes interesses.

Daniel Litchfield gosta de matemática, ciência da computação e química. Da descoberta que fizeram, gosta especialmente da demonstração algébrica e da construção dos números de Fibonacci. Pratica vela, luta e futebol. Está envolvido, como representante da turma, em acções cívicas de apoio à comunidade local.

Charles Dietrich ensina Matemática há 35 anos (Estados Unidos e Inglaterra). Foi presidente da Associação de Professores de Matemática de New England.

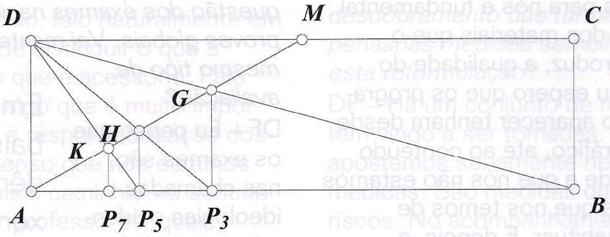

figura 1

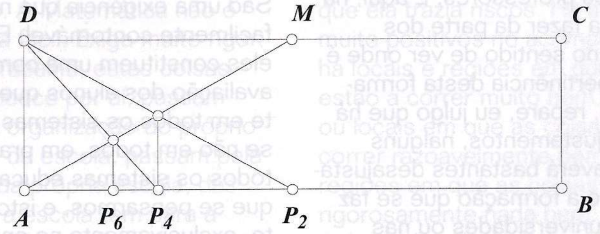

figura 2

Conta Dietrich que lhe perguntaram se isso era permitido, e que eles lhes respondeu "sim, sim, com certeza".

Mas que ia caindo para o lado com um ataque do coração quando viu o primeiro *sketch* produzido por eles, pois pareceu-lhe logo que se tratava de trabalho original (fig. 1).

Dave e Dan explicam num artigo na revista *Mathematics Teacher* como chegaram a este *sketch*. Escolheram o rectângulo pois "como as diagonais de um rectângulo se intersectam num ponto que pertence às mediatrizes de qualquer dos lados, começaram a fazer experiências, ligando vários pontos por segmentos, na esperança de que algum dos pontos de intersecção estivesse exactamente acima do ponto que trissectava a base.

Vinte minutos mais tarde [...], usando o computador para medir as distâncias, encontrámos um ponto que fazia precisamente isso.

Esse ponto foi a base das nossas descobertas. [...]. Depois de algumas tentativas falhadas para descobrir o padrão que estávamos certos que existia, Dave descobriu o "ponto um-sétimo". O nosso padrão saltou-nos aos olhos e tornou-se óbvio."

Dave e Dan descrevem com cuidado o algoritmo representado na figura 1. E acrescentam que a partição do segmento *AB* num número par de partes iguais se obtém começando a aplicar o mesmo algoritmo a partir do ponto P_2, ponto médio de *AB*, em lugar do ponto *B*.

Dave e Dan passaram depois à demonstração. Conseguiram demonstrar em alguns casos particulares, como nas divisões em três partes iguais (ponto P_3) e em cinco partes iguais (ponto P_5), mas não tinham uma demonstração válida para o caso geral: divisão em *n* partes iguais. Segundo relatam, o professor ensinou-lhes nesta altura a demonstração por indução finita.

Dave e Dan, ajudados pelo professor, demonstraram geométrica e algebricamente que o seu algoritmo resultava em todos os casos.

Já depois de terem escrito o artigo para a *Mathematics Teacher*, chegaram à conclusão de que podiam utilizar uma única construção para a divisão num número ímpar e num número par de partes iguais (fig. 3).

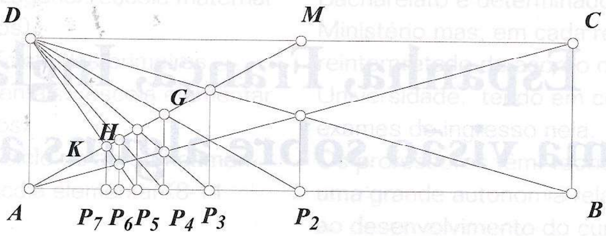

figura 3

Polya tinha razão...

Polya dizia que mesmo depois de termos chegado à solução de um problema, devíamos voltar a ele e examiná-lo de novo (*looking back*), pois novos resultados e descobertas podiam estar escondidos. Foi o que Dave fez. Retomou uma das tentativas iniciais abandonadas. E depois de algumas experiências, eis que surge a sequência de Fibonacci! Concretamente, no lado superior do mesmo rectângulo surgem os inversos dos números de Fibonacci — 1, 1/2, 1/3, 1/5, 1/8, ... — a partir do segundo. Assim (fig. 4), se P_2 é o ponto médio do segmento CD, S a intersecção dos segmentos P_2A e DB, e S' a reflexão de S segundo o eixo M_1M_2, a figura mostra um algoritmo para obter os pontos P_1, P_2, P_3, P_5, P_8, ...que nos dão a sucessão dos inversos acima referida.

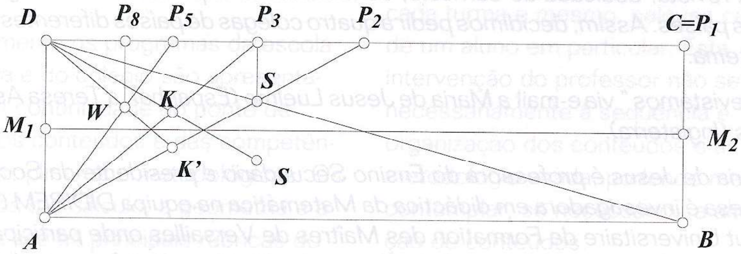

figura 4

Na conclusão do seu artigo, escrito em conjunto com o professor Dietrich, Dave e Dan salientam a importância que teve a utilização do *Sketchpad* na sua investigação. Como eles dizem, o programa "permitiu que trabalhássemos com ideias, observássemos padrões, e testássemos as nossas teorias. Depois de estarmos convencidos das nossas descobertas, prová-las foi 'the icing on the cake'."

O artigo a que nos estamos a referir foi publicado no *Mathematics Teacher* de Janeiro de 1997, vol. 90, nº1, quando Dave e Dan andavam no 10º ano. Pode ser consultado *online*.[1]

Dave e Dan apresentam as suas descobertas

Desde 1996 os dois estudantes e o professor têm apresentado em diversos encontros as suas descobertas: no 12º Encontro Anual de Tecnologia e Matemática, em vários encontros de professores e no 75º Encontro Anual de Professores do NCTM, em Minneapolis, em 1997. Pela primeira vez, estudantes apresentaram uma comunicação no encontro do NCTM. As suas descobertas também foram objecto de inúmeras notícias em jornais, revistas, na rádio e na televisão.

A construção descoberta por Dave e Dan é conhecida pelo nome de GLaD (iniciais de Goldenheim, Litchfield and Dietrich) e tem um site na Internet.[2]

GLaD e a *Viagem de Ida e Volta*

É possível também, a partir do *site* referido da Internet, fazer o *download* da apresentação em Powerpoint que Dave, Dan e o professor Dietrich têm utilizado nas suas comunicações em encontros. Aí são apresentadas algumas extensões relacionadas com a construção *GLaD*.

Uma das observações aí feitas despertou-me a atenção. Sendo uma apresentação em *Powerpoint*, tem pouco texto, mas a figura seguinte e a expressão que a acompanha são suficientes para compreender o alcance da observação (fig. 5).

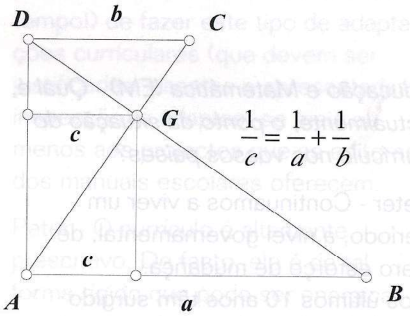

figura 5

A expressão relacionando c, a e b é fácil de deduzir da semelhança entre alguns triângulos da figura e é muito conhecida. E prova completamente a construção de Dave e Dan, pois se a for igual a 1 e b igual a $1/n$, vem imediatamente c igual a $1/(n+1)$ (comparar as figuras 3 e 5).

Mas para mim o principal é que me lembrei do prazer que tive ao ler o livro, publicado pela APM em 1988, *Viagem de Ida e Volta*, de Paulo Abrantes. Paulo Abrantes relaciona uma série de problemas interessantes, todos em torno de um "personagem matemático" que é a média harmónica de dois números a e b, e que é igual a $c/2$ na expressão anterior. Isto é, de novo o mesmo personagem matemático apareceu a Dave e a Dan em Green Farms...

Notas

1. http://www.nctm.org/mt/1997/01/vol90-no1-euclid7.htm
2. http://gfacademy.org/GLaD.

Agradeço a Nuno Candeias a indicação da existência deste *site*.