Da Educação Matemática: funções no centro das atenções

Maria do Carmo Domite Mendonça
Paulo César Oliveira

O conceito de função, de um ponto de vista matemático, tem sido discutido de modo cada vez mais frequente em diversos trabalhos académicos, artigos, entre outros. Se este é um tópico tão importante e central no ensino da matemática, por que somente nos últimos tempos, e cada vez mais, vêm sendo apontadas dificuldades e inovações que envolvem a sua aprendizagem?

Em geral, o conhecimento matemático mostra-se como algo estático quando observamos as definições e propriedades de tópicos matemáticos inseridos nos livros de texto como coisas cristalizadas e imutáveis — resultados que uma vez obtidos, somam-se uns aos outros, formando blocos justapostos de informações.

A realidade, entretanto, é outra. Olhando na perspectiva de uma análise histórica, adentramos num processo dinâmico quanto à observação de erros e acertos na construção de um determinado fato matemático, reconhecemos a interdependência dos resultados, os quais, muitas vezes, impossibilitam o estabelecimento de fronteiras entre as várias áreas que constituem o conhecimento matemático. Não obstante, os conceitos transformam-se lenta e gradualmente – de modo quase sempre não linear — num processo subordinado às necessidades do corpo científico e à sociedade.

O conceito de função é um exemplo do que foi delineado. A sua evolução foi conduzida/apreendida, segundo Tall (1992), no âmago de uma complexa rede de concepções, cujos nós podem ser vistos como uma imagem geométrica/representação gráfica, uma expressão algébrica/fórmula, relações entre variáveis dependentes e independentes, uma máquina de entrada-saída permitindo relações generalizáveis, a moderna definição envolvendo a noção de conjunto, entre outras.

Um pouco da História

Naturalmente, uma apresentação da *construção histórica* de um conceito matemático num texto didático como o que pretendemos, mesmo que modesta e pouco contextualizada, constitui uma prova de que o conhecimento matemático é um processo que se organiza e aprofunda como uma rede de relações/significações, como um referencial/inspiração para a elaboração de procedimentos pedagógicos. Assim, o que se segue é um breve resumo das realizações que evoluíram para o nosso conceito em estudo.

Segundo Eves & Newson (1957), a palavra *função* parece ter sido introduzida, em 1637, por Descartes (1596-1650), ao se referir a qualquer potência inteira e positiva x^n de uma variável x. No entanto, Boyer (1974) relata que Descartes em sua obra *La geómétrie*, interpreta parâmetros e incógnitas não como números, mas como segmentos. No caso de x^2 e x^3, Descartes rompeu com a tradição grega, pois ao invés de considerá-los como área e volume respectivamente, interpretou-os também como segmentos. Com efeito, os estudos de Descartes estavam voltados para a aplicação da álgebra a determinados problemas geométricos e vice-versa. Neste contexto, Boyer (1974, p.253) considera que "a teoria das funções veio a tirar grande proveito da obra de Descartes, mas a noção de função não teve papel aparente no desenvolvimento da geometria cartesiana."

As notas históricas destacadas em Boyer (1974), Wampler (1960), Ávila (1985,1993), Tall(1992), Blanco(1997) apontam que, embora Leibniz (1646-1716) não seja o responsável pela moderna notação para função, foi ele que introduziu o termo para designar as diferentes variáveis geométricas (coordenadas, tangentes, raios de curvatura, declividade, entre outras) associadas a uma determinada curva.

De fato, deve-se a Johann Bernoulli (1667-1748) a conceituação de *função* como "uma quantidade composta de qualquer modo de uma variável e constantes quaisquer" (Boyer: 1974, p.311). Embora um pouco vaga, esta definição permitiu empregar o termo *função* para algo diferente, pois chamou de *funções* as expressões analíticas (fórmulas) que envolviam somente uma quantidade variável. Assim, potências x^n ou fórmulas como $(a+x)^3.bx^2$ com constantes *a* e *b*, eram funções de *x*.

Nas publicações de Leonhard Euler (1707-1783), em especial no seu tratado *Introductio in analysin infinitorum* (1748), a *função* de uma quantidade variável é definida, segundo Boyer (1974, p.327), como "qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes". Naturalmente, tal sistematização era bastante coerente com a sua interpretação do conceito de função.

Hoje, tal definição já não é considerada, talvez pelo fato de Euler não ter apresentado explicitamente o significado de *expressão analítica*. Na verdade, segundo Ávila (1985, p.14-16), no referido tratado, Euler definiu função contínua como a que contém uma única expressão analítica, por exemplo, $y = sen\ x$ ou $y= x^2+1$ ou $y = log\ x$, cuja representação gráfica não admite interrupções — distinguindo-a de função descontínua como aquela formada por várias expressões algébricas.

A classe de funções que se contrapõe às representações de Euler teve como precedente a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & se\ x > 1 \end{cases}$$

Naturalmente, os argumentos de Euler não correspondem ao que hoje entendemos por descontinuidade e o conceito de função, por ele formulado, implica uma restrição que não está incluída na conceituação moderna de função.

É importante notar que, no séc. XVIII, embora diversas ideias, do Cálculo à Análise, tenham sido sistematizadas por meio de novos métodos e técnicas, ampliando algumas fronteiras do conhecimento científico, este não foi um período onde ocorreram coisas significativas na área de fundamentos. Tal missão ficou reservada para o séc. XIX.

De fato, abalando significativamente o conceito de Euler, Dirichlet (1805-1859), apresentou a seguinte formulação: "uma variável é um símbolo que representa qualquer número de um conjunto numérico; se duas variáveis x e y estão relacionadas de modo que sempre para um valor atribuído a x exista automaticamente um valor para y, determinado através de alguma regra ou correspondência, então, dizemos que y é uma função de x ...". Neste sentido, a partir de Dirichlet, a expressão analítica, como uma fórmula, deixou de ser a "única" maneira de representar uma função. Vale também comentar que a conhecida função de Dirichlet, definida por $f(x)=1$ para x racional e $f(x)=0$ para x irracional, foi um marco para o avanço das representações gráficas.

Até aos dias actuais, podemos reconhecer que as definições de função utilizam o conceito de conjunto de pares ordenados e são generalizações da definição de Dirichlet. É comum nos textos matemáticos de cunho formalista, proposições tais como:

> Sejam os conjuntos *A* e *B*, de modo $\{(x,y): x \in A, y \in B\}$ que denote o produto cartesiano de A por B representado por AxB. Se para todo elemento *x* pertencente a A, existir um e somente um único elemento y pertencente a B, dizemos que o par ordenado (x,y) pertence à função.

Na verdade, a referida concepção tornou-se um marco da inclusão do conceito de função nos currículos e livros didácticos de ensino fundamental e médio, mais especialmente no decorrer do movimento da Matemática Moderna.

E as investigações, o que têm revelado?

Nas últimas décadas, diversos pesquisadores da educação matemática envolveram-se em investigações sobre o desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos, as quais eram, em geral, justificadas pela variedade de noções que envolvem este conceito matemático. Entre os pesquisadores podemos destacar Markovits & Eylon & Burckheimer (1988), Tall (1992), Espinosa (1995), Godino et al (1994), Fernandes(1998), Ferreira (1998), entre outros.

Deste modo, parece-nos relevante destacar o desenvolvimento/análise de um destes trabalhos, visto que os resultados das pesquisas apontam fragilidades na construção do conceito de função e, consequentemente, sinalizam a necessidade de mudança de postura do professor frente ao processo ensino-aprendizagem desta ideia matemática.

O estudo de Markovits & Eylon & Burckheimer foi especialmente valioso devido à maneira como as dificuldades e noções erróneas sobre função — de alunos entre 14 e 16 anos — foram focalizadas/analisadas, procurando determinar possíveis causas, assim como revelar procedimentos educacionais alternativos que pudessem ajudar a corrigir tais falhas. Os componentes do conceito de função, incluso neste estudo, foram estabelecidos levando em conta dois aspectos básicos: a) a função é definida por dois conjuntos, o domínio e a imagem, e por uma regra de correspondência que designa para todo elemento do domínio exactamente um único elemento da imagem e; b) há várias representações associadas às funções: gráfico, álgebra, tabela e diagrama de flechas.

Segundo Markovits & Eylon & Burckheimer (1988), vários alunos apresentaram dificuldades em localizar pré-imagem e imagem nos eixos coordenados, devido a falta de conexão entre os componentes relativos à definição verbal de uma função e aqueles da representação gráfica. Um outro ponto observado pelas pesquisadoras refere-se às dificuldades em identificar imagens e o par (pré-imagem, imagem) de funções na forma algébrica, pois quando a questão dada apresentava vários passos, o aluno ignorava um ou mais deles.

De um modo geral, a fim de determinar se um elemento dado é imagem de uma função, três operações são necessárias: a) verificar se o número pertence à imagem; b) calcular a pré-imagem e c) verificar se a pré-imagem pertence ao domínio. Do mesmo modo, três operações similares são necessárias para identificar pares (pré-imagem, imagem), tais como: a) verificar se o primeiro elemento pertence ao domínio, b) verificar se o segundo pertence à imagem e c) verificar se o segundo elemento é imagem do primeiro, de acordo com a função dada. A respeito destas considerações, tornaram-se evidentes as dificuldades dos alunos em distinguir/compreender entre conjunto imagem e imagem, assim como, domínio e imagem da função.

As autoras apontam a complexidade do conceito de função como um factor parcialmente responsável pela dificuldade dos alunos. De fato, se o professor optar por procedimentos pedagógicos que valorizem as habilidades dos alunos em conceituar domínio, imagem, conjunto imagem, entre outros, é necessário que ele os discuta sob várias formas de representação, de modo a atenuar as dificuldades dos alunos.

Finalmente, a pesquisa revela as concepções, frequentemente erróneas, dos alunos de que toda função é uma função linear. Para as autoras, esse equívoco pode ter sido gerado pelo fato do ensino de geometria estar simultaneamente ligado ao de álgebra, assim como, pelo tempo gasto — no currículo americano — com o ensino, quase exclusivo, de funções lineares.

Segundo as pesquisadoras, a visão de linearidade restringe a compreensão de certas categorias de funções. Os alunos não admitem, segundo Markovits & Eylon & Burckheimer, que duas regras de correspondência se possam referir a duas partes disjuntas do domínio, além de não compreenderem que uma função, na forma algébrica, pode ser dada por várias regras de correspondência, cada uma em alguma parte do domínio.

Na verdade, o movimento da *matemática moderna* foi uma tentativa de produzir um alicerce de definições claras dos conceitos matemáticos, acessíveis para os alunos. Essa perspectiva almejava novos paradigmas para o significado de *definição*, entendido pelos filósofos/cientistas como aquele que aplicamos somente para objectos a serem definidos, e exclusivamente para estes.

No entanto, segundo Tall (1992), os objectivos não foram atingidos, pois os métodos individuais de pensamento, sobre os conceitos matemáticos, dependem mais do que um simples ajuste na forma das palavras usadas nas definições.

No contexto da actividade matemática, as noções são utilizadas tanto de acordo com suas definições formais, como por meio de representações mentais, que podem diferir de indivíduo para indivíduo. Assim, o referido autor afirma que a experiência prévia dos alunos diante da aprendizagem das noções matemáticas afecta profundamente as representações mentais, dos sujeitos sobre os conceitos.

Higueras & Fernández & Batanero & Godino (1994) reafirmam a complexidade do conceito de função, assim como a multiplicidade de suas representações que frequentemente desenvolvem níveis diferentes de abstracção. Uma possibilidade de minimizar as dificuldades frente a este conceito está em promover a articulação entre diferentes representações (gráficos, tabelas, diagramas de flechas, expressões algébricas, entre outros) e as relações entre elas.

Nesta perspectiva, acreditamos que o professor, como mediador do processo educativo — com suas crenças, concepções, valores e representações sobre os fatos matemáticos — se indagado sobre "o que é função?",

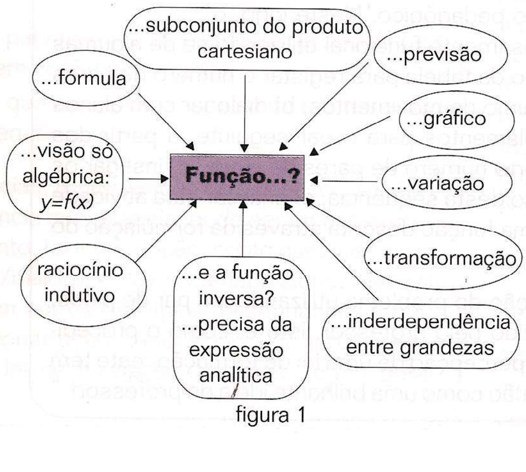


figura 1

possivelmente terá respostas apoiadas em imagens mentais como as relacionadas na fig. 1.

E a pedagogia?

Do nosso ponto de vista, uma pedagogia da matemática para o desenvolvimento do pensamento funcional deve levar em conta, entre outros, três aspectos.

O primeiro, diz respeito à dificuldade de compreensão do conceito de função, pelo aluno, devido às suas *múltiplas representações*, procurando considerar, como afirma Espinosa (1995, p.63-73): "um conhecimento associado a um conceito é estável no indivíduo, se este pode articular as diferentes representações do conceito sem contradições".

O segundo, refere-se à ideia de conhecimento como rede de significados, os quais constituem feixes de relações que se entretecem, articulando-se em teias. Dentro da concepção de Machado (1995) que reconhece a articulação de tais redes, constituídas individual e socialmente, em permanente estado de atualização, a construção do conhecimento matemático como rede dar-se-á, não a partir de um centro determinante de desenvolvimento, mas a partir de focos de interesse. Nesta perspectiva, estaremos apontando diferentes focos de interesse — como os ilustrados na fig.1 — como desencadeadores da aprendizagem das funções matemáticas.

O terceiro aspecto refere-se ao ensino por meio da resolução de problemas, que tem no seu âmago a preocupação de motivar o aluno a agir activamente frente a situações novas, ou seja, frente a problemas apresentados pelo professor ou gerados pela realidade social.

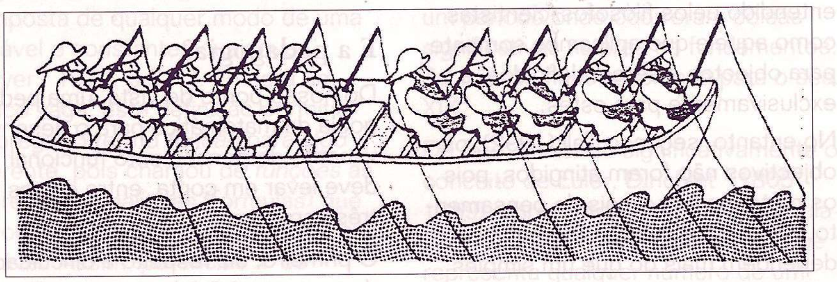
Nesta perspectiva, organizamos algumas actividades/problemas para a sala de aula, procurando uma articulação entre as representações do conceito de função.

Algumas considerações

O conceito de função, de um ponto de vista matemático, tem sido discutido de modo cada vez mais frequente em diversos

Sequência Generalizada Algebricamente

Jogo dos barqueiros

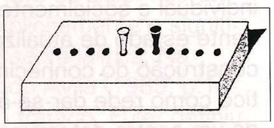


Dez homens estão num barco de pesca. Há 11 lugares no barco, sendo que o sexto lugar está vazio. Qual o menor número de movimentos para que todos os pescadores sentados à frente troquem de lugar com os de trás?

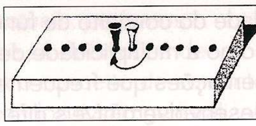
Uma modalidade deste jogo, para a sala de aula, pode ser apresentada usando um suporte com 11 lugares alinhados de modo a permitir a localização de 10 pinos, ou algo equivalente, em duas cores distintas. O jogo consiste em reverter a disposição de todos os pinos de uma mesma cor para os de outra cor.

Supõe dois jogadores, cada um responsável pelo movimento de um conjunto de pinos da mesma cor. O desenvolvimento do jogo deverá ocorrer observando a seguinte regra: cada pino só poderá deslocar-se para um lugar vizinho vazio ou "pulando" um outro pino. Assim, não é permitido pular um lugar vazio, mas é permitido dois ou mais movimentos seguidos, saltando lugares ocupados. Ilustramos a ocorrência de um número mínimo de movimentos para um par de pinos:

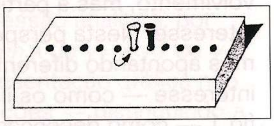
Disposição inicial dos pinos



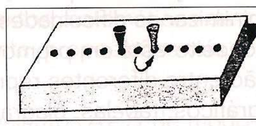
1º movimento



2º movimento



3º movimento



A tabela mostra a relação entre alguns números de pares de pinos e o número mínimo de movimentos.

pares	mov.
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35

Podemos generalizar algebricamente esta função como $m=p(p+2)$ onde p representa o número de pares de pinos e m o número de movimentos mínimos.

É importante ressaltar que a aplicação do jogo em sala de aula pode favorecer a construção do conhecimento matemático, pelo aluno, desde que haja um propósito pedagógico. Neste jogo, o professor pode desenvolver o pensamento funcional utilizando-se de algumas representações, entre elas: a) o uso da tabela para registar o número de pares de pinos em função do número mínimo de movimentos; b) dialogar com alunos sobre o número mínimo de descolamentos para o par seguinte, a partir dos resultados optimizados para um certo número de pares de pinos; c) instigar os alunos a descrever a lei de formação desta sequência; d) analisar esta atividade juntamente com osalunos, como uma função descrita através da formulação do termo geral desta sequência.

O procedimento de iniciar a resolução do problema utilizando um par de pinos, deve ser cuidadosamente introduzido pelo professor, isto é, como o procedimento é valioso para encaminhar a percepção de uma lei de formação, este tem que ser compreendido como tal e "não como uma brilhante ideia do professor!."

trabalhos académicos, artigos, entre outros. E porquê? Se este é um tópico tão importante e central no ensino da matemática, por que somente nos últimos tempos, e cada vez mais, vêm sendo apontadas dificuldades e inovações que envolvem a sua aprendizagem?

Com efeito, nós acreditamos que, em especial no caso das funções, tal movimento deriva da convicção, entre os educadores, de dois pontos básicos. O primeiro, refere-se às diferentes interpretações/entendimentos, por parte dos professores de Matemática e alunos, sobre este conceito assim como sobre a notação e a linguagem utilizada para expressá-lo o que, naturalmente dificulta a dinâmica interactiva entre aluno-professor-conteúdo e torna complexa a sua apreensão. Então, é preciso ir atrás de um estudo mais apurado destas ideias. O segundo, está na busca/compreensão, cada vez mais frequente, por parte dos educadores, de focar a ideia do conhecimento matemático como um processo, e não como um produto. Assim, a reflexão e discussão de problemas, dificuldades e novas ideias para a construção de caminhos que podem encaminhar melhor a apreensão da ideia de função, têm mais espaço, e são mais valorizadas.

Vale aqui destacar a nossa preocupação em incluir/consultar, naturalmente de modo breve, três perspectivas ou fontes — a história da matemática, a psicologia/cognição e a pedagogia — de modo a estudar as possibilidades da apropriação do conceito de *função*.

De certo modo, olhar do ponto de vista da construção histórica pode potencializar a concepção do professor que reconhece o conhecimento matemático como um processo construtivo, dada a revelação das diferentes interpretações, em diferentes níveis de complexidade pelos quais passou a definição e as notações do conceito de função. Não se trata, mais uma vez, de levar o professor a considerar a ideia da ontogênese recapitulando a filogênese, mas de revelar o desenvolvimento num certo aspecto ou outro, de modo a aprofundar a concepção do

Da interdependência entre grandezas à variação

a) Desenhe numa folha de papel quadriculado rectângulos diferentes de 64 unidades de área (u.a.) cada um.

b) Na tabela ao lado, a e b representam as medidas dos lados do retângulo, A representa a área e P o perímetro. Complete a tabela.

a	b	A	P

c) Qual o retângulo de menor perímetro?

d) Escreva a sentença matemática que expressa a área de retângulos de 64 u.a.

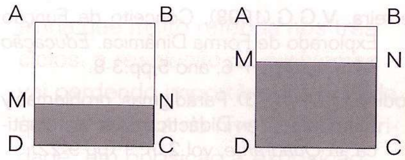
e) As grandezas a e b são diretamente ou inversamente proporcionais? Porquê?

f) Os retângulos construídos são semelhantes? Porquê?

O cálculo de perímetro e área de polígonos regulares pode proporcionar ao aluno o raciocínio da relação funcional, dada a interdependência entre os entes geométricos.

A partir dos itens sugeridos na atividade, o professor pode propor outras situações-problema, de modo a ampliar a noção de função, por exemplo, como um subconjunto do produto cartesiano.

Variação



a) Cada lado do quadrado ABCD mede 8cm. A faixa CDMN pode ser ampliada ou reduzida, sem chegar a ocupar todo espaço do quadrado ABCD. Nestas condições, o que ocorre com a faixa CDMN?

b) Elabore uma tabela com os valores correspondentes à medida da área da faixa CDMN, de acordo com a medida para NC. Adote os valores 1,2,3 e 4 para o segmento NC.

c) Qual a sentença matemática que expressa o valor da área de CDMN a partir de NC?

d) Construa um gráfico que represente os pares ordenados do item b).

e) Como descrever o conjunto domínio, contra-domínio e conjunto-imagem desta função?

Esta atividade pode levar o aluno a compreender, mais significativamente, a independência entre os cálculos de perímetro e área de figuras planas diversas. De acordo com a apresentação de um problema desta natureza, podemos encaminhar os alunos para o estudo de polígonos regulares, levando-os a reconhecer a particularidade da dependência entre as grandezas envolvidas.

Sequência/Lei da formação

a) Desenhe a 5ª figura da sequência.

b) Quantos pontos serão necessários para formar o 8° elemento da sequência? É possível determinar o 10° termo, sem conhecer o nono?

c) Escreva uma sentença matemática que relacione o número de pontos e sua respectiva posição na formação da sequência.

Nos problemas que envolvem sequências, a intervenção do professor, sugerindo a organização dos dados da sequência numa tabela, pode ser uma instrução pedagógica bastante valiosa. No entanto, tal intervenção, como qualquer outra, deve ser resultado de uma interação/diálogo entre professor/aluno. Naturalmente, o professor deve trabalhar com outros exemplos de sequência, formulando perguntas que favoreçam a construção, pelo aluno, de ideias como organização de dados numa tabela, lei de formação, padrões, termo geral, outros.

processo e construção da organização de um conceito matemático e dos fatos sociais e cognitivos que os envolvem. Isto é, nós ao ensinar/discutir um fato matemático, não esperamos ver o educando percorrer, no processo de aprendizagem, as mesmas etapas da evolução intelectual da humanidade.

Ao contrário, esperamos ver o aluno a recriar, ele mesmo, as relações que é capaz de compreender. Daí, dificuldades e facilidades semelhantes às que se apresentam nas construções históricas podem, talvez, se revelar. Num outro olhar, tomar uma perspectiva de natureza psico-cognitiva, destacando as pesquisas sobre a construção do conceito de função, pelos estudantes, é uma maneira de chamar nossa atenção, como professores, para aquilo que é mais significativo e importante para os alunos. Isto é, o que os alunos compreendem melhor, o que parece ser mais relevante e quais procedimentos permitem dar mais significado e desenvolvimento ao pensamento funcional.

E, então, o que fazer em sala de aula? Por meio dos procedimentos pedagógicos, procuramos orientar o trabalho do professor. As actividades sugeridas nesta etapa, resultam de nossas experiências em sala de aula, de reflexões desenvolvidas em torno da ideia de que o conhecimento se organiza em redes de significados e, principalmente, do desejo de dar sentido e eficácia ao trabalho pedagógico pela via da resolução de problemas.

No que se refere à metáfora do conhecimento como uma rede de relações significativas, interpretamos, a partir da discussão de Levy (1993), os diversos centros simultâneos e móveis de uma rede, a qual muito bem se encaixa às diferentes interpretações já anunciadas, naturalmente todas sobrepostas e interligadas, que envolvem a ideia de função matemática. Então, por onde começar? Convidando os alunos a resolver problemas que envolvem sequências? Parece-nos um ponto de partida viável. Apresentamos a atividade *sequência/lei de formação* que permite desencadear discussões referentes à associação das figuras às suas respectivas posições na sequência, bem com a formalização do termo geral — propiciando a elaboração verbal da interdependência das grandezas, no caso, as figuras e os números naturais.

E se partíssemos de um problema de *variação*, por exemplo, como aquele do quadrado ABCD de lado 8 cm? Na perspectiva de que compreender é apreender o significado, é percebê-lo em suas relações com outras representações, tal proposta também constitui um foco para o desenvolvimento da noção de função. É importante destacar que um ou outro problema pode ser um nó gerador da construção do fato matemático em questão.

Com isto, pretendemos chamar a atenção para a escolha das actividades matemáticas como eixo desencadeador da construção de um conteúdo pedagógico; é necessário uma escolha reflexiva/cuidadosa no sentido de contemplar as mais variadas representações, proporcionando ao aluno o desenvolvimento de percepções, generalizações e conexões.

Bibliografia

Ávila, G.(1985). Evolução dos conceitos de função e de integral. Matemática Universitária. SBEM, no1, *Da Educação Matemática: Funções no centro das atenções*

Blanco, M.M.G.(1997). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: el concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Sevilla: Grupo de Investigación en Educación Matemática.

Boyer, C. B. (1974), *História da Matemática*, S. Paulo: Editora E. Blucher Ltda.

Espinosa, F.H.(1995). Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa. *Educación Matemática*, 7 (1), pp.63-73.

Eves, H. & Newson, C.V. (1957) *An introduction to the foundations and fundamental concepts of mathematics*. New York: Reinhart & Company, pp. 250-251.

Fernandes, J.A.(1998). Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções. *Educação e Matemática*, nº 46, pp.33-36.

Ferreira, V.G.G.(1998). Conceito de Função Explorado de Forma Dinâmica. *Educação Matemática*, nº 6, ano 5,pp.3-8.

Godino, J. D. (1993). Paradigmas, problemas y metodologia en Didáctica de la Matemática. in *Quadrante*, vol.2, nº 1 (pp 9-22).

Higueras, L.R. & Fernández, J.L.R. & Batanero, C. & Godino, J.D.(1994). The role of graphic and algebraic representations in the recognition of functions by secondary school pupils. *Proceeding of PME XVIII*. Universidade de Lisboa, vol.IV, pp. 153-159.

Machado, N.J. (1996). *Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*. São Paulo: Cortez.

Markovits,Z. & Eylon,B. & Bruckheimer M.(1995). *Dificuldades dos estudantes com o conceito de função*. In: COXFORD, A.F. & SHULTE, A.P. (orgs.) *As idéias da Álgebra* (trad. De Hygino H. Domingues). São Paulo: Atual, pp. 49-69.

Souviney, R.J. & Keyser, T. & Sarver, A.(1978). *Mathematters: developing computational skills with developmental activity sequences*. USA: Goodyear Publishing Company, Inc.

Tall, D.(1992). *The transition to advanced mathematical thinking: functins, limits, infinity, and proof*. In:GROUWS, D.A. (ed.) *Handbook of research on Mathematics teaching and learning*. USA: NCTM, pp. 495-511.

Wampler, J.F.(1960). The conception of function. *The mathematics teacher*, 3(7),pp.581-583.

Maria do Carmo Domite Mendonça
Faculdade de Educação - USP
Paulo César Oliveira
Faculdades Hoyler - U. Paulista

O problema deste número

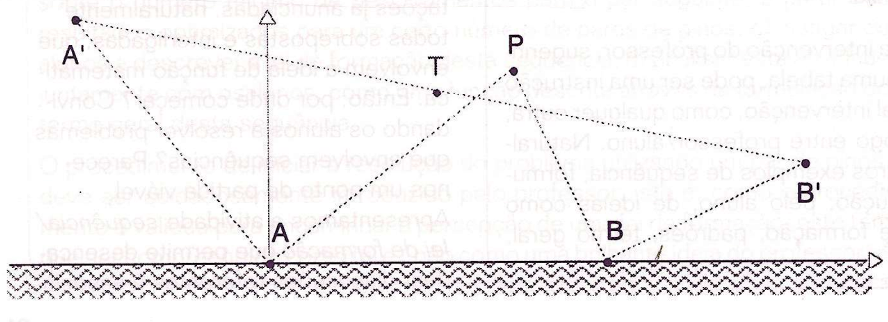
O Tesouro do Piratas *(Continuação da página 35)*

Torna-se agora necessário demonstrar que, para qualquer posição de P, o ponto T é invariante.

Há vários métodos possíveis que passam por arranjar um referencial e que podem incluir trigonometria, equações de rectas, ponto médio, etc. A que me parece mais fácil é a seguida tanto pela Isabel Moreira como pelo Paulo Correia.

Consideremos o referencial indicado ne com origem em A. As coordenadas dos pontos iniciais são:

A(0 , 0) B(100 , 0) P(*p* , *q*)



Os piratas olham segundo a direcção dos vectores:

AP (*p* , *q*) BP (*p*–100 , *q*)

Para não molharem os pés, os piratas deslocam-se segundo os vectores perpendiculares aos anteriores "virados" para terra:

AA' (–*q* , *p*) BB' (*q* , 100–*p*)

Depois, os piratas caminham até aos pontos:

A': (0 , 0) + (–*q* , *p*) = (–*q* , *p*)

B': (100 , 0) + (*q* , 100–*p*) = = (*q*+100 , 100–*p*)

As coordenadas de T, ponto médio de A'B', são:

$$\left(\frac{q+100-p}{2}, \frac{p+100-p}{2}\right) = 50$$

As coordenadas de T, como facilmente se demonstra, são ambas iguais a metade da distância entre as duas rochas. *Para encontrar o tesouro, basta partir de uma das rochas, andar 50 metros em direcção à outra e depois outros 50 na perpendicular, de costas para o mar para não molhar os pés* (Ana Luísa).

O Alberto Canelas, como é seu hábito, parte para interessantes generalizações:

1) se os piratas molhassem os pés,
2) se um molhasse e outro não,
3) se os piratas rodassem um outro ângulo q diferente de 90°.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira