Socialmente falando a matemática também conta

Cristina Loureiro, Graciosa Veloso e Paula Reis

"Uma boa decisão é a melhor que pudermos tomar com o que sabemos no momento em que a tomamos. Se fizermos o melhor que pudermos, e se formos racionais no nosso pensamento, teremos feito tudo o que seria de esperar. (...) Isto acontece porque esta situação não pode ser resolvida só com raciocínio matemático. É necessário aos intervenientes chegar a um acordo de negociação e compromisso, a lógica só não é suficiente." (H. W. Lewis, 1997, p.viii)

No ProfMat 98, apresentámos uma comunicação com o título deste artigo, em que pretendemos ilustrar a importância social da matemática discutindo problemas e actividades de aplicação a situações realísticas. Estas situações são hoje estudadas no âmbito da matemática discreta, uma área da matemática que não é nova, embora seja pouco conhecida, mas que está actualmente em franco desenvolvimento. Este deve-se às suas aplicações à economia, gestão, ciências sociais, informática e também à evolução da tecnologia. As situações que vamos apresentar, e que foram exploradas por alunos dos cursos de formação de professores de Matemática, são adequadas a alunos da escolaridade básica.

O poder da matemática vai para além dos contextos e por isso temos de nos libertar deles. Uma das caraterísticas da matemática é possibilitar-nos construir critérios objectivos e independentes.

Atribuição de lugares numa assembleia

Numa escola do 3º Ciclo vai ser criada uma assembleia de alunos com 20 lugares. Em cada ano de escolaridade, 7º, 8º e 9º há 464, 240 e 196 alunos, respectivamente. Como fazer a distribuição do número de lugares, por ano de escolaridade, de modo que os alunos de cada ano fiquem satisfeitos com a sua representação?

Com um total de 900 alunos e de 20 lugares podemos obter a razão entre a população total e o número de lugares a que chamamos razão ideal. Neste caso a razão ideal é 45 porque 900: 20 = 45. Nesta situação, o significado da razão ideal é 1 representante para cada 45 pessoas.

Vamos então aplicar este critério a cada um dos anos de escolaridade. Será possível segui-lo totalmente?

7º ano -> 464 : 45 = 10,31 alunos

8º ano -> 240 : 45 = 5,33 alunos

9º ano -> 196 : 45 = 4,36 alunos

Daqui podemos concluir que o 7º ano terá 10 representantes, o 8º ano terá 5 e 9º ano terá 4. Ficam, no entanto, apenas atribuídos 10 + 5 + 4 = 19 lugares. Falta atribuir um representante e 1 é indivisível. Há que decidir a qual dos anos será atribuído.

Poderíamos ser tentados a atribuir esse representante ao 9º ano, visto ser este que corresponde à razão ideal com maior parte decimal. Este cenário corresponderia a uma distribuição em que o 8º e o 9º anos, embora com número diferente de alunos, teriam o mesmo número de representantes, o que pode gerar alguma estranheza. De qualquer forma, este critério é aceitável e está fundamentado do ponto de vista quantitativo.

Assim, começa-se a ter consciência que é impossível tomar uma decisão totalmente justa, o que se pretende é um critério independente de qualquer característica qualitativa do grupo, por exemplo, são do 9º ano, portanto são mais maduros logo merecem mais ter esse representante. Temos muita tendência para cair em critérios desta natureza e a matemática pode ajudar a evitar este tipo de tentação.

Vejamos como os alunos de um curso de formação inicial resolveram esta dificuldade. Um dos grupos fez o seguinte comentário:

> O que está em jogo são pessoas e são lugares, uns e outros só podem ser representados por elementos do conjunto dos inteiros. As operações adequadas são operações dos inteiros, portanto a divisão dos inteiros, com quociente e resto, e não a divisão dos reais, por isso as décimas não interessam.

Os alunos que fizeram este raciocínio foram incapazes de aceitar um critério que se apoiasse apenas na comparação das partes decimais, apesar de este ser um critério de uso habitual.

Nesta situação, os alunos rejeitaram este critério porque trabalharam com números cujo significado conheciam. Na nossa opinião a justificação da rejeição é matemática. Para estes alunos, a parte inteira e a parte decimal dos números podem ter significados diferentes. Estes alunos estão a distinguir os conceitos de divisão inteira e de divisão exacta. Na primeira, o quociente e o resto têm significado, na segunda não há resto, por isso este não tem significado. 5 a dividir por 2 pode dar 2,5 (divisão exacta) mas pode dar quociente 2 e resto 1 (divisão inteira).

Esta constatação foi para nós tanto mais importante quanto estes alunos vão ser professores em níveis de escolaridade onde se trabalham estes dois conceitos e não há, nos programas, a preocupação em os distinguir.

Outro grupo comentou:

> Olhando para as partes decimais e atribuindo mais 1 lugar ao que tem maior parte decimal daria
>
> 196 -> 4+1 = 5 representantes
>
> 464 -> 10 representantes mas 196 é muito menos de metade de 464, e assim um grupo de 196 alunos tem metade dos representantes de um grupo de 464, isto não é justo.

Este facto levou os alunos a rejeitarem o critério de atribuição do lugar sobrante pela maior parte decimal.

Não é uma rejeição baseada exclusivamente em argumentos matemáticos, ela está intimamente ligada com esta situação específica e com estes valores específicos. Optámos por designar esta justificação como social, pois a argumentação não é matemática mas sim social.

Para uma apropriação dos processos e das resoluções tem que haver contextos porque é neles que nos apercebemos das falhas de aplicação nas ideias matemáticas. Mas o poder da matemática vai para além dos contextos e por isso temos que nos libertar deles.

Este problema foi resolvido numa fase de trabalho dos alunos em que a preocupação matemática era a obtenção de algoritmos. O esforço dos alunos foi, assim, estimulado no sentido de procurarem um processo algorítmico, isto é, independente desta situação particular e do contexto, portanto utilizável em qualquer outra situação do mesmo tipo e por isso generalizável.

As circunstâncias particulares deste problema (grupos de alunos e número de representantes) não podia condicionar nenhuma das etapas do processo. Este problema podia ser, por exemplo, relativo ao número de habitantes por regiões e os seus representantes numa assembleia nacional.

Mas voltemos ao problema porque é interessante ver como os alunos acabaram por resolvê-lo. Vamos ver o que acontece se tivermos 1 representante por cada 44 alunos. Optando pela divisão inteira obtemos:

7º ano -> 464 : 44 = 10 R = 24

8º ano -> 240 : 44 = 5 R = 20

9º ano -> 196 : 44 = 4 R = 20

Observamos que continuam atribuídos apenas 19 lugares. Como se pode confirmar, fazendo os cálculos, obtém-se ainda o mesmo número de lugares atribuídos para o divisor 43. Mas para 42 isso já não se verifica:

7º ano -> 464 : 42 = 11 R = 2

8º ano -> 240 : 42 = 5 R = 30

9º ano -> 196 : 42 = 4 R = 28

Estes valores permitem-nos ter os 20 lugares atribuídos. É um outro critério que nos dá uma distribuição dos representantes diferente da inicial.

Em síntese, pelo primeiro (razão 45 associado ao valor do resto) e por este último critério teríamos as seguintes distribuições:

	1º critério	2º critério
7º ano	10	11
8º ano	5	5
9º ano	5	4

São decisões diferentes, baseadas em critérios independentes das características dos grupos. Não existindo uma decisão certa e outra errada, há, pelo menos, duas decisões igualmente aceitáveis. Outras pessoas poderiam encontrar outros critérios igualmente válidos.

A situação que seguidamente apresentamos é relativa a eleições. Como se irá mostrar, o critério eleitoral adoptado é de extrema importância, influenciando geralmente o resultado do escrutínio. Estes critérios são matemáticos e podem suportar discussões muito interessantes em que sobressai a importância social da matemática, nomeadamente no referente a haver mais que uma resposta adequada a uma situação.

Escolha do presidente da mesa da assembleia de alunos

Cada um dos 3 anos de escolaridade tem direito a um representante na mesa da assembleia eleita. De entre os três representantes, A, B e C, a assembleia dos 20 alunos tem de escolher o presidente. Todos os membros fazem uma seriação destes 3 candidatos, como mostra o esquema.

A	A	B	C
B	C	C	B
C	B	A	A
8	1	4	7

Qual deve ser o presidente?

O esquema indica que 8 alunos apresentaram a seriação (A, B, C), 1 aluno apresentou (A, C, B), 4 alunos apresentaram (B, C, A) e 7 alunos (C, B, A). Cada seriação deve ser lida como fazemos neste exemplo: houve 8 alunos que escolheram A em primeiro lugar, B em segundo lugar e C em terceiro. Podia-se ter combinado a representação da ordenação seguindo o sentido contrário. A tabela seguinte foi feita com a informação sistematizada no esquema anterior e mosta a distribuição da seriação:

	A	B	C
1º	9	4	7
2º	0	15	5
3º	11	1	8

Será indiscutível qual dos candidatos vai ser presidente? Veremos que não, pois depende do critério adoptado.

Um cenário possível é atribuir a presidência ao representante A, pois foi o escolhido mais vezes em primeiro lugar — critério de maioria simples.

Contudo é aceitável a crítica de que pode não ser A o presidente, uma vez que também foi o candidato mais rejeitado (11 vezes em terceiro lugar). Esta crítica pode ser encarada matematicamente resolvendo atribuir peso a cada uma das três posições possíveis na seriação e calcular a pontuação de cada candidato por um processo de ponderação. Atribuindo peso 3 ao primeiro lugar, peso 2 ao segundo e peso 1 ao terceiro, a pontuação de cada um dos candidatos será:

A -> 8x3 + 1x3 + 0x2 + 4x1+7x1 = 38

B -> 4x3 + 8x2 + 7x2+1x1 = 43

C -> 7x3 + 1x2 + 4x2 + 8x1 = 39

Segundo este critério seria B o presidente da assembleia — critério de Borda (1733-1799). Mas ainda é possível adoptar outros critérios, que eventualmente conduzirão a ordenações diferentes:

- Elimina-seo que ocupa o primeiro lugar menor número de vezes. Neste caso elimina-se B nas 4 seriações;

- Actualizam-se todas as ordenações e repete-se o processo eliminatório até obter o primeiro lugar. C figura 11 vezes acima de A e portanto C é escolhido – método sequencial de eliminação.

Em síntese, relativamente a esta situação, obtivemos: presidente A, pelo critério de maioria simples; presidente B pelo critério de Borda; presidente C pelo método de eliminação. Trabalhámos uma situação que conduziu, conforme o critério utilizado, a três decisões, em que caminhos matemáticos diferentes basearam opções diferentes.

Cada opção revela uma postura ideológica e esta está subjacente à procura do procedimento matemático escolhido. Numa escolha baseada em procedimentos matemáticos é importante ter consciência desta interacção. Estaremos a ser ingénuos se aceitarmos sem crítica uma das opções só pelo facto de estar baseada, ou parecer estar baseada, em critérios ou procedimentos matemáticos.

A discussão desta situação permite realçar aspectos importantes do ponto de vista social e matemático. Do ponto de vista social, há decisões diferentes igualmente defensáveis; os diferentes tipos de critérios levaram a decisões diferentes e é discutível a opção por cada uma delas de acordo com o objectivo da representação.

Do ponto de vista da matemática, é importante observar: os números e as operações (neste caso até expressões numéricas) têm significado; o conceito de ponderação tem significado; a objectividade matemática facilita a aplicação de um critério; a natureza algorítmica permite que qualquer outra pessoa possa usar qualquer destes critérios para qualquer outra situação análoga; a matemática analisa algoritmos e no ensino confunde-se ou substitui-se esta análise pela aplicação rotineira desses algoritmos;

Divisão equitativa

O João e a Joana querem dividir entre si um bolo, de tal forma que ambos fiquem totalmente satisfeitos. Quem parte e quem escolhe?

O Abel, a Branca e o Carlos têm um bolo para dividir igualmente entre os três? Como hão-de organizar a partilha de forma que os três fiquem totalmente satisfeitos com a sua parte?

O Abel, a Branca, o Carlos e a Dora têm um bolo para dividir igualmente entre os quatro? Como hão-de organizar a partilha do bolo de tal forma que os quatro fiquem totalmente satisfeitos com a sua parte?

Esta situação é generalizável para qualquer número de pessoas? Como? Há a garantia de que todos fiquem sempre totalmente satisfeitos?

Os alunos reagiram à situação de modo interessante — *é o pai que parte* — recorrendo a uma entidade neutra, o pai, para resolver o problema. Esta atitude é arriscada porque recorre a uma entidade exterior. Mas uma das características da matemática é possibilitar-nos construir critérios objectivos, independentes de qualquer autoridade exterior. É absolutamente necessário estabelecer um critério de justiça. Este critério utiliza procedimentos matemáticos e consiste em estabelecer que uma distribuição por n pessoas é justa se cada uma delas considerar que recebe pelo menos 1/n do bolo.

Houve também quem propusesse: *Deita-se uma moeda ao ar...* Mas, também nesta proposta, pode haver quem considere que a decisão não é justa, porque é aleatória. Será possível evitar riscos de injustiça? Como?

Também foi proposto: *porque é que não fazemos como lá em minha casa, um parte e o outro escolhe?* A aluna que diz isto parte da sua experiência.

Outra, comenta: *pois, então o que parte tem que dividir ao meio, porque como o outro vai escolher, o primeiro não pode deixar uma parte maior do que a outra.* Há um esforço desta aluna para se colocar no lugar do outro.

Mas há alunos que não entendendo o essencial da questão, fazem as seguintes sugestões: *temos que saber se o bolo tem creme ou não tem creme; vamos buscar uma balança; vamos medir o bolo e calcular o volume.* Estes comentários podem querer apelar à necessidade de serem explicitados os critérios de partilha, por exemplo:

- cada pessoa sabe dividir em partes que lhe parecem iguais;

- cada pessoa é capaz de "medir" qualquer das partes em que o bolo está dividido, e de reconhecer que a soma das partes é igual ao todo;

Uma das facetas inerentes a este problema é a ideia de justiça. Se cada pessoa sentir que recebe pelo menos a sua parte do bolo este critério estará operacionalizado. O outro aspecto é a concepção de um algoritmo, ou seja, um conjunto de procedimentos que aplicados a um número qualquer de pessoas conduzam sempre a uma distribuição equitativa:

Se forem 2, cada um receberá 1/2
Se forem 3, cada um receberá 1/3
...
Se forem n, cada um receberá 1/n.

Vamos apresentar um algoritmo de partição aplicável a qualquer número de pessoas envolvidas. Para 2 pessoas A e B:

A corta em 2 bocados e B escolhe. O facto de ser um a partir e o outro a escolher é essencial, porque é neste acordo que reside a aplicação do critério de justiça já apresentado, como muito bem mostrou o discurso de uma aluna, parcialmente transcrito acima.

Para 3 pessoas A, B e C:

1. A corta em 2 bocados que considere iguais;
2. B escolhe um dos dois bocados e A fica com o outro;
3. A corta o seu bocado em 3 partes que considere iguais. B corta o seu bocado em 3 partes que considere iguais;
4. C escolhe dois pedaços, um de A e outro de B.

Será que se verifica o critério de justiça para todos?

C fica satisfeito porque escolheu 2 x 1/3 x 1/2 = 1/3. Como escolhe cada um dos pedaços pode sempre pensar que era pelo menos 1/3 de cada uma das metades. B escolhe o que achou que era pelo menos 1/2 do total. Como depois parte em 3 partes que considera iguais e fica com duas delas (2 x 1/3 x 1/2 = 1/3), fica satisfeito.

A corta o bolo de modo que B não possa ficar com mais do que 1/2. Isso significa que A fica satisfeito com qualquer uma das duas partes do bolo. Como depois parte em 3 partes sabendo que 2 eram para ele, A atribui a cada uma dessas partes pelo menos 1/3 de 1/2. Como fica com duas, isto é o que ele considera pelo menos 1/3 do bolo, fica satisfeito.

Para a divisão por 3 pessoas começamos por recorrer ao caso anterior, 2 pessoas. Para a divisão por 4 pessoas, procedemos de forma análoga:

A 1/3 x 1/4 x 3
B 1/3 x 1/4 x 3
C 1/3 x 1/4 x 3
D escolhe uma parte das partes de cada um deles 3 x 1/4 x 1/3

Este procedimento é generalizável para n pessoas, utilizando o algoritmo apresentado.

Algumas conclusões

Um aspecto interessante que distingue estas três situações é que nas duas primeiras os alunos não se assumem como protagonistas, enquanto que nesta terceira os alunos já se sentem como tal, colocando-se no lugar das personagens.

• Aspectos sociais:

— Não foi preciso ir buscar uma entidade exterior e independente para ajudar a tomar a decisão.
— Respeito e consideração pelos outros.
— Capacidade de nos colocarmos no lugar do outro.

• Aspectos matemáticos

— Os números e as operações tinham um significado.
— Objectividade matemática que facilita a utilização de um critério.
— Comunicação.
— Natureza algorítmica, porque qualquer outra pessoa poderá usar qualquer destes critérios para qualquer outra situação análoga e sendo generalizável a qualquer número de intervenientes.

Estes problemas são acessíveis aos alunos da escolaridade básica. Para além de exigirem poucas destrezas numéricas e de cálculo, permitem trabalhar conceitos numéricos e operações básicas. Não exigem muitos conhecimentos nem técnicas matemáticas, o que pode favorecer que um maior número de pessoas os discutam.

Também é comum às situações apresentadas o lidar com os conceitos de operações básicas em situações com significados diferentes do habitual. Em nossa opinião, socializam a matemática e ajudam a construir uma ideia de argumentação matemática. Simultaneamente, libertam do dualismo certo/errado, mas também permitem valorizar situações em que o certo e o errado são um ponto seguro.

Além disso, têm, do ponto vista matemático, características que não são muito frequentes e que são estudadas no âmbito dos processos da matemática discreta. Dão-nos ainda a possibilidade de os alunos recorrerem à sua própria experiência de quotidiano, tão importante para os mais pequenos.

O que há de comum entre estas situações é permitirem trabalhar matematicamente aspectos sociais como a negociação, a decisão e a argumentação. São um contexto facilitador do pensamento social.

Referências bibliográficas

Crisler, N. & al. (1994). *Discrete Mathematics Through Applications*. New York: Freeman.

Johnsonbaugh, Richard (1993). *Discrete Mathematics*. Prentice-Hall, Inc.

Gardiner, Anthony D. (1991). "A Cautionary Note". In M. J. Kenney, C. R. Hirsch (eds) *Discrete Mathematics Across the Curriculum*, K-12, 1991 Yearbook of the NCTN. NCTM: Reston, Va.

Lewis, H, W. (1997). *Why flip a coin?*. New York: Jonh Wiley.

Maurer, Stephen B. e Ralston, Anthony. (1991) "Algoritms: You cannot Do Discrete Mathematics without them.". In M.J. Kenney, C. R. Hirsch (eds) *Discrete Mathematics Across the Curriculum*, K-12, 1991 Yearbook of the NCTN. NCTM: Reston, Va.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação escolar*. (Tradução portuguesa da APM). Lisboa: APM e IIE.

Cristina Loureiro, ESE de Lisboa
Graciosa Veloso, ESE de Setúbal
Paula Reis, ES Padre António Vieira