A divisão e seus "dividendos"

Renato J. C. Valladares

Um grande cachê de pequena proporção

Iniciaremos citando um fato amplamente divulgado pela imprensa do Rio de Janeiro, nos primeiros dias de 1996:

> Nos festejos de ano novo promovidos pela Prefeitura, um artista conseguiu se sentir humilhado ao receber um cachê de aproximadamente 36.000 dólares por algumas horas de apresentação.

Como a quantia é vultuosa, sendo incapaz, por si só, de desmerecer quem quer que a tenha recebido, o próprio artista se incumbiu de explicar o que o havia incomodado: outros artistas haviam ganho mais ou menos o triplo para participar no mesmo show.

Assim, o que humilhou o artista, não foi o valor do cachê, que era grande, mas sim o fato dele ter sido cêrca de três vezes menor que o de outros artistas. Surge assim como elemento de humilhação, a proporção de um cachê em relação a outros.

Este fato mostra de forma muito clara que o artista raciocinou em termos proporcionais para se sentir ofendido. Isto é, o que estava na base da sua insatisfação era a proporcionalidade, idéia importantíssima que contrariamente a um bom número de noções da matemática, estende seu campo de abrangência muito além desta ciência. Isto é, a proporcionalidade é uma noção matemática que se incorporou à cultura humana, sendo muito bem compreendida e utilizada por um número imenso de pessoas, independentemente do nível de formação matemática que elas tenham.

O elemento de humilhação do artista era a proporção de um cachê em relação a outros. O que estava na base da sua insatifação era a proporcionalidade, idéia importantíssima que contrariamente a um bom número de noções da matemática, estende seu campo de abrangência muito além desta ciência. A proporcionalidade é uma noção matemática que se incorporou à cultura humana, sendo muito bem compreendida e utilizada por um número imenso de pessoas, independentemente do nível de formação matemática que elas tenham.

"Dividendos"

A noção de proporcionalidade, tão bem evidenciada no episódio acima e corrente em tantas atitudes humanas é, sem dúvida nenhuma, decorrente da idéia de divisão, que independentemente da grandeza do dividendo e do divisor, dá o quociente como uma razão entre estes números, estabelecendo assim uma proporção entre eles.

Dando sequência a este tipo de pensamento, se observarmos a divisão com um pouco de atenção, vemos que ela é uma operação riquíssima, que além da proporcionalidade, tem um sem número de desdobramentos da maior relevância para a matemática e para a ciência em geral.

Assim, neste artigo falaremos sobre alguns pontos importantes da matemática que podem ser vistos como desdobramentos da divisão. Como estes desdobramentos representam significativos ganhos científicos, não resistimos à tentação de fazer um jogo de palavras e, por isso, adotamos para eles a denominação "dividendos", corrente no mundo das finanças para significar certos ganhos.

Nesta linha de idéias, a proporcionalidade é o primeiro "dividendo" que surge. Para falarmos de outros, enunciaremos três problemas e um fato que nos conduzirão de forma natural a eles.

Três problemas e um fato

Problema 1 - Um agrimensor dividiu uma gleba de $36428 m^2$ em cinco lotes iguais. Deseja-se saber a área de cada lote.

Problema 2 - Um português chegou ao Brasil numa quinta-feira há 26324 dias. Deseja-se saber o dia da semana em que esta afirmação foi formulada.

Problema 3 - Uma senhora nasceu há 23431 dias. Sabendo-se que esta afrmação foi formulada em Janeiro de 1996, deseja-se saber o ano em que esta senhora nasceu.

Fato - É impossível dividir por zero.

As soluções

O primeiro problema é muito simples. A área de cada lote será dada pelo quociente da divisão 36428/5, que é 7285,6. Isto é, cada lote terá 7285,6 m^2.

Convém observar que embora a divisão acima não seja exata, a natureza do problema impôs que ela se estendesse, levando a um resultado fracionário. Mesmo que se tivesse chegado a uma dízima periódica, como teria sido o caso da divisão em 6 lotes, onde o quociente seria 6071,33..., o agrimensor, cometendo um erro desprezível, que certamente nem se daria o trabalho de mencionar, diria que cada lote ficou em 6071,33 m^2.

Fica então muito claro que o resto da divisão não ajuda em nada a resolução do primeiro problema, sendo em verdade quase um estorvo do qual quem resolve o problema procura se livrar, estendendo os cálculos e chegando a um quociente fracionário que elimina o resto ou o reduz a proporções desprezíveis.

Já no segundo problema, o que importa é justamente o resto da divisão, como veremos na sequência.

Dividindo o número de dias que o português está no Brasil (26324) pelo número de dias da semana (7), o btemos o resto 4. Assim, a diferença 26324 – 4 é um múltiplo de 7, o que mostra que 4 dias antes da afirmação ser feita, era o mesmo dia da semana em que o homem chegou; isto é, uma quinta-feira. Como o dia da semana que se obtém somando 4 dias a uma quinta-feira, é uma segunda-feira, concluímos que este foi o dia em que a afirmação foi feita.

É interessante notar que se problema 2 fosse modificado, dizendo que a afirmação foi feita em uma segunda-feira e pedindo o dia de chegada, o raciocínio teria de ser invertido, subtraíndo-se (em vez de somar) à segunda-feira os 4 dias que apareceram no resto da divisão. Concluía-se, evidentemente, que a chegada se deu em uma quinta.

O mesmo resultado seria obtido se em vez de subtraír 4, tivéssemos somado 3 dias à segunda-feira. Não é difícil observar que este fato está estreitamente relacionado à igualdade 3 = 7 – 4.

Finalmente, a solução do terceiro problema depende tanto do quociente quanto do resto da divisão, como veremos a seguir.

Como a maior parte dos anos tem 365 dias, iniciemos efectuando a divisão 23431/365, obtendo o quociente 64 que dá o número de períodos de 365 dias e um resto de 71 dias que não são suficentes para formar um destes períodos. Como não foram considerados os anos bissextos, é claro que esta conta não reflete a realidade dos factos, com exatidão.

Não obstante, ela deixa claro que em números redondos de anos, 64 era a idade máxima desta senhora em Janeiro de 96, tendo ela, portanto, vivido 16 ou 17 anos bissextos, o que mostra que voltando ao resto da divisão, pode-se concluir que 54 (=71–17) era, em Janeiro de 96, o número mínimo de dias em que a idade dela ultrapassava os 64 anos (o número máximo era 55). Como estes 54 dias não podem ser absorivdos pelos 31 de Janeiro, segue-se que seu 64° aniversário ocorreu em 1995, o que permite concluir que ela nasceu em 1931.

Se a afirmação tivesse sido formulada em Fevereiro de 96, os dados não seriam suficientes para decidir se o nascimento ocorreu em 1931 ou em 1932, pois como Janeiro e Fevereiro juntos têm 59 ou 60 dias, a absorção por estes meses, dos 54 ou 55 dias restantes poderia ou não ocorrer, dependendo do dia de Fevereiro em que a afirmação tivesse sido formulada.

Já se a afirmação tivesse sido feita em Março, é fácil ver que o nascimento teria ocorrido em 1932.

"Dividendos" mostrados pelos problemas

A atitude adotada na resolução do primeiro problema conduz ao cálculo fraccionário, às dízimas periódicas e em última análise, à construção dos números racionais, que é o conjunto numérico ideal para as divisões sem resto, nem sempre possíveis no conjunto dos números inteiros. Assim, o conjunto dos números racionais pode ser visto como um "dividendo" da divisão dado pela impossibilidade de efetuar, no conjunto dos números inteiros, algumas divisões necessárias ao bom equacionamento de certos problemas.

Dentro da mesma linha de raciocínio, a (célebre) verificação da incomensurabilidade de raíz de 2 se traduz na impossibilidade de encontrar uma unidade de comprimento que divida em número inteiros de partes, o lado e a diagonal de um mesmo quadrado. Como esta impossibilidade é muito comummente usada como disparador da construção do conjunto dos números reais, podemos considerar este conjunto como também sendo um "dividendo" da divisão, que sem a menor dúvida, é um dos mais importantes.

O segundo problema usou o resto da divisão, somando ou subtraindo-o aos dias da semana para chegar à solução. Assim, surgem como "dividendos" da divisão evidenciados por este problema, as teorias das congruências e das classes residuais, importantes no estudo das estruturas algébricas tão adequadas à compreensão dos fenômenos cíclicos ou periódicos, como a contagem do tempo pelo relógio ou pelo calendário, as marés, as estações do ano, trigonometria, diversos tópicos da astronomia, dos sistemas mecânicos e elétricos, etc.

Se tivesse sido usada a regra da divisibilidade por 7 (que existe, embora pouco difundida) a determinação do resto acima fica bem simplificada. Surgem assim através deste problema, a divisibilidade e suas regras como "dividendos" da divisão.

Cabe, aqui, observar que embora a determinação do quociente da divisão 26324/7 não tenha sido necessário na resolução do problema 2, o seu conhecimento é de grande utilidade para resolvê-lo com auxílio de uma calculadora, pois efetuando esta conta na máquina, obtém-se um quociente fracionário cuja parte inteira é 3760. Aplicando a igualdade fundamental da divisão, D = dq + r, onde D é o

(continua na pág. 40)

(Continuação da página 39)

tinha como título "Uma matrícula quadrada".

Perguntei ao meu pai o que era um número quadrado perfeito.

Ele disse-me que era o resultado de uma multiplicação de um mesmo número duas vezes.

Li novamente o problema.

Para começar escrevi todos os quadrados perfeitos inferiores a 100 e superiores a 16.

Somei um número quadrado perfeito com outro, por exemplo 16+25=41.

Se desse um número superior a 81 ia ver à máquina de calcular a raiz quadrada desse número e se o resultado fosse um número sem vírgula, esse número era um quadrado perfeito, mas se o resultado tivesse vírgula não era.

Depois escrevi o alfabeto e numerei-o com os números ordinais por baixo.

Quando acabei, peguei na máquina de calcular e comecei a multiplicar um mesmo número duas vezes. O número tinha de acabar em 3664 ou em 6436.

Achei o número 153664. (...)

Pensámos que valia a pena partilhar com os leitores de Educação e Matemática a belíssima descrição que o Tiago Martins faz do processo que seguiu para resolver o problema. Repare-se que deu uma interpretação diferente ao enunciado do problema: admitiu que "juntar dois números num só" era somar os números, quando o que tínhamos em mente era formar um único número de quatro algarismos.

Os outros leitores seguiram esta segunda interpretação e, para resolver o problema, usaram vários processos, desde a folha de cálculo ou um pequeno programa de computador até à utilização das congruências (António Lozano).

Mas a maioria começou por pôr os quadrados perfeitos de dois algarismos:

16, 25, 36, 49, 64, 81

e agrupá-los dois a dois. Há 36 possibilidades, desde 1616 até 8181, que facilmente se testam com uma calculadora. O único quadrado perfeito é 1681.

Estão descobertos os algarismos. Faltam as letras. Para isso temos de descobrir um novo quadrado perfeito terminado precisamente em 1681.

Agora pode ajudar uma pequena pesquisa sobre as terminações dos quadrados perfeitos e o respectivo número base.

Para terminar em 1, os números base têm de terminar em 1 ou 9 e aparecem em duas séries, espaçados de 10 em 10:

1, 11, 21, 31, ... e 9, 19, 29, 39, ...

Para terminar em 81, os números base aparecem de 50 em 50:

41, 91, 141, ... e 9, 59, 109, ...

Para terminar em 681, aparecem de 250 em 250:

41, 291, 541, ... e 209, 459, 709, ...

Experimentando os quadrados destes números encontramos:

$1209^2 = 1461681$

$3791^2 = 14371681$

$4959^2 = 24591681$

$5041^2 = 25411681$

A única hipótese que serve é a primeira: 1461681.

146 corresponde às letras e só há uma possibilidade: 14–6.

A 6ª letra é o F mas qual é a 14ª?

João Barata esclarece todas as dúvidas:

Como antigamente a letra K não era incluída nas matrículas, a 14ª letra correspondia ao O.

A matrícula do velho carro é:

OF – 16 – 81

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira
Lisboa

A divisão e seus "dividendos" (continuação da pág. 38)

dividendo (agora sem aspas), d o divisor, q o quociente e r o resto, vemos que este último será dado por

$r = D - dq = 26324 - 7 \times 3760 = 4.$

Contrariamente ao problema 2, onde a igualdade fundamental da divisão embora útil, é dispensável, a resolução do problema 3 depende diretamente dela. Surgem assim, como "dividendos" através deste problema, os domínios euclidianos, que são as estruturas algébricas onde é possível falar nesta igualdade e nas suas consequências, tais como divisibilidade, MMC, MDC, elementos primos e primos entre si, etc. Os anéis mais gerais, onde esta igualdade não seja válida, também não deixam de ser "dividendos" que são mostrados por este problema.

O "dividendo" da impossibilidade do divisor nulo

Finalmente, a impossibilidade de dividir por zero, não obstante o fato de impôr uma enorme limitação a esta operação, termina por dar origem a um dos mais promissores de seus "dividendos", como veremos a seguir.

Um dos desdobramentos da proporcionalidade e, portanto, outro "dividendo" da divisão, que é a variação média de certos fenômenos precisa, em algumas situações, ser calculada com denominadores muito pequenos, tendentes a zero. É aí que entra o recurso do limite e contorna a impossibilidade aritmética da divisão por zero, criando a derivada, que com todos os seus desdobramentos surge como um "dividendo" da divisão que dá uma dimensão quase infinita à matemática.

Estes exemplos evidenciam bem como a operação divisão e os seus muitos desdobramentos são ricos em dividendos da maior relevância em importantes campos da Matemática.

Referências bibliográficas

Ávila, Geraldo, Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais, RPM, Vol. 5, pp. 6 a 11.

Lima, Elon, Grandezas Proporcionais, Meu professor de Matemática, pp. 127 a 141.

Valladares, Renato J.C., Intuição e Proporcionalidade, Bol. GEPEM nº 33, pp. 50 a 59.

Renato J. C. Valladares
Mestrado em Ed. Mat. da Univ. de Santa Úrsula