Marcos históricos no desenvolvimento do conceito de potência*

Hélia Oliveira Ioão Pedro da Ponte

A história das potências, podendo parecer à primeira vista pouco interessante, evidencia a criatividade de muitos matemáticos ao alargarem e sistematizarem sucessivamente este conceito e ao procurarem símbolos adequados e, ao mesmo tempo, cómodos para a sua representação.

Os primórdios

Uma das primeiras referências à operação de potenciação encontra-se num papiro egípcio que remonta ao final do Império Médio (cerca de 2100-1580 a.C.). Ao ser ali apresentado o cálculo do volume de uma pirâmide quadrangular, é usado um par de pernas como símbolo para o quadrado de um número (Ball, 1960).

A noção de potência era, também, conhecida dos babilónios. Recordando o seu sistema de numeração sexagesimal, observe-se o conteúdo de uma antiga tabuinha babilónica de argila conhecida como a tabuinha de Larsa, na coluna ao lado, e a respectiva tradução (Fauvel, 1987, p. 22):

2401 é igual a 49 ao quadrado 2500 é igual a 50 ao quadrado 2601 é igual a 51 ao quadrado

3364 é igual a 58 ao quadrado 3481 é igual a 59 ao guadrado 3600 é igual a 60 ao quadrado Noutras tábuas antigas encontraramse tabelas contendo as potências

Estas eram utilizadas para resolver certos problemas de astronomia e de

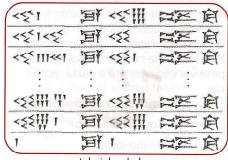
sucessivas de um dado número.

operações comerciais, tais como:

Quanto tempo levará a duplicar certa quantia de dinheiro, a uma taxa anual de 20 % ?

A utilização da palavra 'potência', no contexto da matemática, é atribuída a Hipócrates de Quio (470 a.C.), autor que escreveu o primeiro livro de geometria elementar do qual, provavelmente, os Elementos de Euclides recolheram uma importante inspiração. Hipócrates designou o quadrado de um segmento pela palavra dynamis, que significa precisamente potência. Existem motivos para se crer que a generalização do uso da palavra potência resulte do facto dos Pitagóricos terem enunciado o resultado da proposição I.47 dos Elementos de Euclides sob a forma: "a potência total dos lados de um triângulo rectângulo é a mesma que a da hipotenusa". Portanto, o significado original de "potência" era potência de expoente dois, somente passadas algumas décadas se conceberam potências de expoente superior (Ball, 1960)

Arquimedes (250 a.C.) no seu livro Contador de areia pretendia determinar o número de grãos de areia



tabuinha de Larsa

A escrita simbólica da potência de um número ou de uma variável é, actualmente, um assunto elementar, cedo introduzido no currículo da matemática escolar. Contudo, a simplicidade do conceito e do respectivo simbolismo esconde um extenso período de construção e desenvolvimento, para o qual contribuiram numerosos matemáticos de diversas civilizações.

^{*} Este texto foi concebido no âmbito do projecto "Matemática para Todos - Investigações na Sala de Aula", no Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

necessários para encher o universo solar, que para ele consistia numa esfera tendo a Terra como centro e a sua distância ao Sol como raio. Obteve a solução 1051 que não podia ser escrita na numeração utilizada na altura (alfabética), uma vez que apenas permitia escrever números até 10 000 (uma miríade). Arquimedes criou então um novo sistema: considerou os números de 1 a 108, ou seja, até uma miríade de miríade, que se podiam escrever na numeração grega como sendo de primeira ordem; depois, os números de 108 até 1016 como sendo de segunda ordem, em que a unidade é 108, e assim sucessivamente (Boyer, 1989). Arquimedes utilizou, deste modo, uma regra equivalente à propriedade da multiplicação de potências com a mesma base:

 $10^{51} = 10^3 \times 10^3 \times 10^8 \times 10^8 \times 10^8 \times 10^8$

O início da álgebra sincopada

No trabalho de Diofanto (Alexandria, cerca do ano 250 d.C.) começa a desenhar-se a álgebra sincopada na qual se faz uso de abreviaturas para designar quantidades e operações. No seu trabalho mais destacado, Arithmetica, dá-se um grande avanço na resolução de equações em relação aos egípcios e aos babilónios, uma vez que introduz várias abreviaturas para representar os termos. O símbolo que usou para designar a incógnita foi ς (talvez a contracção das duas primeiras letras da palavra arithmos, que significa número) (Katz, 1993). O quadrado da incógnita representou-o por Δ^{Y} , as duas primeiras letras, maiúsculas, da palavra dynamis. O cubo, kubos em grego, da incógnita representou-o pelas iniciais KY. Com base nestes símbolos fòi-lhe possível escrever até à sexta potên-

 $\Delta^{Y}\Delta$ (quadrado-quadrado) ΔK^{Y} (quadrado-cubo) $K^{Y}K$ (cubo-cubo).

Diofanto poderia ter continuado a escrever as potências sucessivas por este processo, mas não o fez porque os problemas com que trabalhou não o exigiam. É de notar que em todas as potências, tanto as bases como os expoentes eram números naturais. Segundo Boyer (1989), Diofanto, contudo, "tinha nomes especiais para os recíprocos das primeiras seis potências da incógnita, quantidades equivalentes às nossas potências de expoente negativo" (p. 204).

Uns séculos mais tarde, na obra do matemático hindu Bhaskara (nomeadamente no seu livro Lilavati -1150 d.C.), encontram-se referências à construção de potências de ordem superior por recurso ao quadrado e ao cubo. A evidência existente é de que os hindus utilizavam um processo diferente para construir as potências. No caso de Diofanto, Δ^{Y} seguido de KY representava ΔKY (tal como para nós n^2 seguido de n^3 representa n^5). Mas para os hindus varga-g'hana (quadrado-cubo) indicava a multiplicação dos índices (e portanto n² seguido de n^3 significava n^6). Consequentemente, este processo de construção de potências tornava-se inoperativo para representar potências com expoentes primos. Então, por exemplo, n⁵ era escrito como varga-g'hanagháta, em que gháta significava produto, ou seja, neste caso n^2 . $n^3 = n^5$ (Cajori, 1993).

Dos séculos XIII a XVII observa-se entre árabes e europeus a adopção quer do esquema hindu (multiplicativo) quer do de Diofanto (aditivo). Este constitui um bom exemplo de como o processo de construção da Matemática não foi, nem é, linear. Podem coexistir diferentes notações para o mesmo conceito e, além disso, notações muito semelhantes podem representar conceitos bastante diferentes.

A álgebra sincopada na Europa

A ordem pela qual são hoje abordados nos currículos escolares os diferentes conceitos matemáticos, muitas vezes, não coincide com a sequência em que surgiram ao longo dos tempos. No tema em análise, assiste-se a um período de cerca de mil anos de desenvolvimento da representação simbólica das potências das variáveis antecedendo a introdução dos

coeficientes literais e das suas potências. Nos trabalhos dos matemáticos que antecederam Viète (Biscaia, 1540-1603), tanto as constantes como as suas potências eram representadas nas equações pelos respectivos numerais. Ao resolver uma equação, não existia, portanto, a necessidade de criar uma notação adequada para as potências de uma constante, o que já não acontecia com as incógnitas (Cajori, 1993).

O conceito de potência e a escrita algébrica estiveram fortemente ligados desde o princípio. Alguns matemáticos dos séculos XV e XVI, tais como Luca Pacioli (1445-1517), Niccolò Tartaglia de Brescia (1499-1557), Gerolamo Cardano (1501 1576) e Pedro Nunes (1502-1578). usavam a mesma notação para representar potências das variáveis. A incógnita era representada por co., a abreviatura da palavra italiana cosa, por sua vez tradução de res em latim, ce., abreviatura de censo, representava o seu quadrado e cu. (cubo) o seu cubo.

Em 1564, Pedro Nunes publicou o Libro de algebra en arithmetica y geometria, onde utilizando álgebra sincopada, explica as propriedades das potências de variáveis, apresentando detalhadamente vários exemplos. No excerto seguinte, apresenta as potências sucessivas de cosa, as quais designa por dignidades:

La primera quatidad destas que llamamos dignidades, que assi van ordenadas en proporcion, es la Cosa, y por essa causa le fue dada la vnidad por denominacion. La segunda es el Censo, al qual cupo .2. por denominacio. La tercera es el Cubo que tiene .3. por denominacion. La quarta es Censo de censo, que tiene .4. por denominacion. La quinta se llama relato primo, cuja denominació es .5. La sexta es Censo de cubo, o Cubo de censo, y su denominació es .6. Por este modo proceden os Arithmeticos, y van criando las otras dignidades, y tiene cada vna dellas denominacion, que la orden le da.

La qual nos dize quantas proporciones tiene cada vna de las dichas quantidades comparada com a vnidade, de aquellas que la Cosa guarda con la misma vnidade." (p. 31)

E exemplifica para o caso em que a variável assume o valor dois:

Y en exemplo pusimos la cosa ser .2. y conforme a este valor de la cosa, veremos o valor de las outras dignidades, y como suelen ser escriptas.

Tal como Diofanto, Pedro Nunes escreve as potências de grau superior à custa das abreviaturas usadas para designar as de menor grau. No entanto, ao indicar que a cosa (x) tem denominação .1., o censo denominação .2. e assim sucessivamente, o matemático português está na realidade a representar as potências de x com expoente natural. Podemos confirmar isso, seguidamente, através da regra que ele apresenta para a divisão de monómios.

Documento segundo: Si el partidor fuere vna simple dignidad, y tuuiere menor denominacion que la dignidad que se ha de partir, sacaremos denominacion de denominacion, y lo que quedare sera denominacion de lo que viene en la particion, y partiremos numero por numero, y por esta arte se sabera quantas y quales dignidades vienen en la particion. Exemplo, si queremos partir.20. cubos por.5. cosas de.3. denominacion del cubo, sacaremos la vnidade denominacion de la cosa. y quedaran .2. que es la denominacion del censo. Y partiremos .20. por .5. y vernan .4. y diremos por tanto, que si partieremos .20. cubos por .5. cosas sera el quociente .4.ce. Desto se sigue, que quãdo el partidor fuere numero sin otra dignidad, sera el

quociente la dignidad que se partio en menor numero. Exemplo, si queremos partir .30. ce. por el numero .5. porque la denominació del censo es .2. y la de numero es cifra, restara la misma denominacion entera, y el quociente sera .6. censos. (p. 38, 39)

Observa-se que, no caso da divisão

de .20.cubos por .5.cosas (
$$\frac{20x^3}{5x}$$
),

Nunes explica que se subtrai a denominação da cosa à do cubo, ou seja, aplica a regra da divisão de potências com a mesma base. No exemplo seguinte, em que divide .30. ce por .5. (ou seja $30x^2$ por 5), mostra conhecer também o expoente nulo ao afirmar que nesse caso a denominação do número 5 "es cifra" (ou seja, zero).

No entanto, não aplica as regras para a divisão de potências quando a potência que se encontra no denominador é superior à do numerador. Afirma então:

.3. cosas partidas por .4.ce. vienen

.3.co. Y manifesto es, que no puede

venir numero, porque esse numero siendo multiplicado pelos .4. censos, haria censos, y no lo que se parte que son cosas. Ni podra dar dignidad alguna, porque essa dignidad siendo multiplicada por el partidor, hara mayor dignidad que la que se propuso para se auer de partir. Es por estas causas necessario, que lo que viene sea quebrado. (p. 39)

A escrita das potências de grau superior à custa das de menor grau foi o modelo notacional usado por Diofanto, pelos hindus e árabes e pela maioria dos italianos e alemães até ao século XVII. Entretanto, este modelo coexistia com um outro baseado em índices que permitia escrever de imediato uma potência com qualquer expoente.

O modelo com índices

Neste modelo alternativo o símbolo da variável era omitido e colocava-se apenas um número, o índice, corres-

pondente ao seu grau. Esta notação não apresentava problemas desde que apenas figurasse uma incógnita na equação.

Nicole Oresme, bispo da Normandia, apresentou, em 1360, no seu livro Algorismus proportionum, uma teoria das proporções onde incluiu a noção de potência de expoente fraccionário racional. Este é referenciado por diversos historiadores como sendo o primeiro uso de expoentes fraccionários (Boyer, 1989). Oresme intenta o uso de notações especiais para as potências fraccionárias, por exemplo, escreve (Cajori, 1993):

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1.p.1}{4.2.2} \end{array}\right]$$
 para designar $\left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$

e
$$\frac{p.1}{1.2}$$
 4 para designar $4^{\frac{3}{2}}$

No entanto, não usou esta simbologia nos seus cálculos — nesse caso a escrita era retórica. Não obstante numa certa fase já terem sido propostas certas notações, nem todas as suas consequências práticas tinham sido completamente exploradas (Smith, 1958). A teoria sobre os expoentes inteiros e fraccionários continuou a desenvolver-se nos três séculos seguintes.

Nicolas Chuquet, de Lyon, deu mais uma contribuição importante para a notação das potências. No livro Le triparty en la science des nombres (1484), apresentou 12^0 , 12^1 , 12^2 e 12^3 para designar 12, 12x, $12x^2$ e $12x^3$. Observa-se, ainda, do seu trabalho o domínio da multiplicação algébrica: multiplica .12.º por .10.² e obtem .120.², ou seja, $12x^0$ x $10x^2$ = $120x^2$. Chuquet utilizou também expoentes negativos, por exemplo, escreveu $9x^{-3}$ como .9.³.m (NCTM, 1976).

Uma outra notação simbólica para os expoentes foi elaborada por *Rafael Bombelli* (1526-1572). No livro *L'Àlgebra* utilizou um numeral árabe com um pequeno arco por baixo para

representar o expoente da variável (NCTM, 1976):

1 para a incógnita, 2 para o seu quadrado, 3 para o seu cubo, ...

Apresenta nesse livro a equação

 $4+\sqrt{24-20x}=2x$, como solução de um certo problema, sob a forma:

4.p.R.q 24.m.20 Equale à 2 Simon Stevin, em 1585, propõe uma notação semelhante. Assim, x⁴+3x²-7x seria escrito na

A notação de Stevin, algo popular na época, foi abandonada a favor de outras mais próximas à de Chuquet devido, provavelmente à dificuldade de escrever e imprimir os numerais dentro de um círculo (Cajori, 1993). Com a introdução nas equações de coeficientes literais e de duas ou mais incógnitas, a omissão da letra correspondente à variável começou a mostrar-se inadequada. Surgem então novos desenvolvimentos na notação de potência.

O moderno conceito de potência

Em 1591, Viète forneceu uma contribuição importante com uma nova notação que permitia a inclusão, sem ambiguidades, de variáveis diferentes na mesma equação. Escreveu as potências da variável A como A quad., A cub.,, método este que se mostrava, ainda, pouco prático (Ball, 1960).

A notação actualmente usada surge, finalmente, com o livro *Géometrie* (1637) de *René Descartes* (1596-1650). Ali escreveu: "aa ou a² para multiplicar a por si mesmo e a³ para multiplicar ainda mais uma vez por a e deste modo até ao infinito" (Smith, 1958).

Descartes, todavia, limitou-se a trabalhar com expoentes inteiros positivos. Antes dele, já *Hume* em 1636) e *Hérigone* em 1634 tinham escrito representações bastante próximas da actual: por exemplo, designavam, respectivamente, 5a⁴

por 5a^{iv} e 5a4. Note-se que a notação de Hume seria pouco cómoda devido à utilização da numeração romana. Por sua vez, a notação de Hérigone seria mais económica para o trabalho de tipografia, mas a de Descartes oferecia certas vantagens quanto à interpretação, tal como o seu uso, até aos nossos dias, tem evidenciado (Cajori, 1993).

Durante o século XVII, todas estas notações coexistiram e, curiosamente, ainda foram criadas outras. Ilustremos duas delas:

Huyguens em1751 indica 1024(10)2 para representar 1024=2¹⁰;

Leibniz em 1710 indica (AB+BC) para representar (AB+BC)³.

Gradualmente, a notação de Descartes foi ganhando mais adeptos, mesmo entre aqueles que, como Leibniz. começaram por usar outras. *John Wallis* (1616-1703) foi um dos primeiros a seguir o matemático francês e a exprimir, consistentemente, as potências de expoente negativo e fraccionário. No seu livro *Arithmetica infinitorum*, em 1656, indica que:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}$$
; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$ têm índice -1/2 (NCTM, 1976).

No entanto, não chega a escrever que

$$a^{-1}
int e \frac{1}{a}$$
 ou que $a^{3/2}
int e \sqrt[3]{a^2}$.

Deste modo, pode afirmar-se que a notação moderna atinge a sua forma amadurecida com Descartes. Mas neste autor o conceito de potência ainda era algo restritivo. Ele só foi alargado, de modo a que tanto a base como o expoente pudessem ser números racionais quaisquer, em 1676, por *Isaac Newton* (1642-1727). Numa carta dirigida a Oldenburg, secretário da *Royal Society of London*, Newton indica o significado dos expoentes negativos e fraccionários:

Uma vez que os algebristas escrevem a^2 , a^3 , a^4 , etc., para aa, aaa, aaaa, etc, também eu escrevo $a^{1/2}$, $a^{3/2}$, $a^{5/2}$, para \sqrt{a} , $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{a^5}$; e escrevo a^{-1} , a^{-2} , a^{-3} , etc. para

$$\frac{1}{a}$$
, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, etc.

(NCTM, 1976)

Os expoentes generalizados são apresentados, na mesma carta, na fórmula do binómio.

Anteriormente *Viète*, em 1634, tinha já apresentado expoentes generalizados para expressar

$$x^m + \frac{y^m - x^m}{y^n + x^n}.x^n$$

que escreveu, no estilo da álgebra sincopada, como

 $A\ potestas\ +\ \frac{E\ potestate - A\ potesta}{E\ gradui + A\ gradu}$

in A gradum (Cajori, 1993). Após Newton, a notação moderna de potência expandiu-se de forma rápida. tornando-se amplamente aceite. A utilização de variáveis como expoentes é, por exemplo, observada numa carta de Leibniz a Huygens, em 1679, onde se apresentam equações da forma: $x^x - x = 24 \text{ e } x^z + z^x = b \text{ (idem)}.$ Com o surgimento da análise infinitesimal, as potências deixaram de ser vistas apenas como o resultado duma operação aritmética para passarem a ser encaradas como funções. Assim, $f(x) = x^n$, para cada valor de n, representava uma função com certas propriedades, conhecida por função potência. Por outro lado, $g(x) = a^x$, representava uma outra função, com propriedades muito diferentes, designada por função exponencial função esta que viria a desempenhar um papel fundamental na Matemática a partir daí.

O conceito de potência viria a receber os seus retoques finais quando foi feita uma construção rigorosa do conjunto dos números reais, já no final do século XIX. Nessa altura, colocouse finalmente a questão de saber em que casos faz sentido definir potência.

Através deste breve resumo histórico podemos observar como tanto o desenvolvimento dos conceitos como a construção da linguagem simbólica da Matemática representam muitas vezes um processo moroso e complexo. Nas suas formas mais primitivas, o

conceito precedeu em muitos séculos a sua formalização actual. As diferentes notações que foram surgindo, não se mostraram de igual modo adaptadas para uma aprofundada exploração. A plena generalização do conceito só se conseguiu no momento em que atingiram a maturidade outros conceitos matemáticos com ele estreitamente relacionados. A relevância deste percurso é destacada por Cajori (1993):

A nossa notação para representar potências foi uma grande ajuda para o avanço da álgebra para um nível que não teria sido possível com as notações alemãs antigas ou com outras notações do passado. Em mais nenhum lado é a importância de uma boa notação para o desenvolvimento da Matemática tão bem evidenciada como no simbolismo das potências usado na álgebra. (p.360)

Bibliografia

- Ball, W. R. (1960). A Short Account of the History of Mathematics (4ª ed.). New York: Dover Publications.
- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1989). *A History of Mathematics* (2ª ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Cajori, F. (1991). *A History of Mathematics* (5^a ed.). New York: Chelsea Publishing Company.
- Cajori, F. (1993). A History of Mathematical Notations (3ª ed.). New York: Dover Publications (Edição original, em dois volumes, de 1928 e 1929)
- Fauvel, J. (1987). Early Mathematics. Topics in the History of Mathematics — Unit 1. Milton Keynes: The Open University.
- Katz, V. J. (1993). A History of Mathematics. New York: Harper Collins College Publishers.
- National Council of Teachers of Mathematics (1976). Historical Topics for the Mathematics Classroom (31st Yearbook, 3ª ed.). Washington, D. C.: Autor.
- Nunes, P. (1956). Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria. Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa. (Edição original de 1567)
- Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics* (2° ed.). New York: Dover Publications.

João Pedro da Ponte Hélia Oliveira Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Materiais para a aula de Matemática



A actividade desta secção (página ao lado) foi proposta aos alunos de uma turma de 11º ano neste ano lectivo. Os alunos trabalharam aos pares, dois por computador. Conheciam já a designação de hipérbole como curva correspondente ao gráfico de determinado tipo de funções, mas desconheciam outras formas de a obter. Quando viram surgir a curva no ecrã, começaram por lhe chamar parábola:

—Oh setora, então porque é que não é uma parábola?

Adiei a resposta, procurei que resolvessem as tarefas propostas até ao fim, que discutissem entre eles, escrevessem as suas conjecturas. A surpresa foi geral quando viram aparecer a elipse.

Na terceira aula discutimos as suas descobertas. Só nessa altura falei da diferença entre a hipérbole e a parábola, e das características comuns a todas as cónicas. Procurei documentar-me sobre um assunto de que pouco sabia, e falei-lhes então dos primeiros estudos das cónicas feitos pelos gregos, de Apolónios, e de que só muitos séculos mais tarde surgiu o conceito de função e se percebeu que alguns gráficos tinham a forma de cónicas ou de partes de cónicas. Falei-lhes de algumas aplicações das cónicas a problemas de engenharia, de óptica, etc.. O interesse foi geral. Os alunos acompanhavam curiosos, faziam perguntas, queriam saber mais. Cuidadosamente tomaram apontamentos nos cadernos. Os eixos de simetria, os vértices, os focos, a ligação entre tudo isto, as diferenças entre tudo isto, a origem do nome, os cortes no cone, improvisaram-se cones em folhas de papel. E surgem sempre aquelas perguntas de que não estou à espera e que no momento não sei responder:

— Porque é que os gregos se interessaram tanto pelas cónicas?

—Como é que conseguiram fazer esses estudos com instrumentos rudimentares, sem computadores? —Como é que conseguiram descobrir que os cortes do cone davam as cónicas e as suas características? — ...??

Apesar do desconforto de não saber muito bem responder a tudo, tinha a satisfação de perceber que tinha despertado a curiosidade em alguns e de ouvir comentar por vezes:

—Que giro...!

Parecia correr tudo bem, mas o toque estridente da malfadada campainha não nos deixou esquecer que a aula tinha que acabar. Talvez por isso os alunos se tenham recordado que afinal estavam na escola, e surgiram as perguntas às quais não dei resposta, desta vez não porque não soubesse ou porque queria que fossem os alunos a descobrir, mas unicamente porque me invadiu um sentimento de impotência e uma enorme irritação:

—Isto sai para o teste? É preciso saber os focos e os vértices? Temos que saber os nomes?

É esta a escola que temos. A escola que amestra os jovens para responder a testes escritos, às vezes basta pôr umas cruzinhas, a escola onde eles aprendem que só tem valor o que pode ser perguntado nos testes. E são os alunos como os desta turma, dos melhores alunos da escola, os que interiorizam geralmente melhor este ensinamento: o que interessa é o que pode ser perguntado no teste, só isto têm que saber, tudo o resto não tem grande valor. Pode suscitar uns momentos de curiosidade, mas nada mais, porque o seu futuro não depende disso.

E qual é o meu papel no meio de tudo isto?

Ana Vieira Esc. Sec. de Linda-a-Velha