Investigações e relatórios, temos muito que aprender!

Ana Luísa Correia

Em dois dos últimos números da Educação e Matemática surgiram artigos sobre a avaliação de actividades de investigação e respectivos relatórios. Para saber que trabalhos de investigação propor e que parâmetros avaliar talvez seja bom começarmos por sentir essa experiência na pele. Este texto pretende ser um relato breve das fases porque passei e um relatório de uma pequena investigação que me vi obrigada a fazer para pedir aos alunos um determinado trabalho de investigação e respectivo relatório.

Como tudo começou

Em Setembro de 1997 a "minha" escola, Escola Secundária de Ferreira Borges em Lisboa, tinha acabado de montar o Laboratório de Matemática. Grande parte das aulas que iria dar ao 11° ano eram nessa sala a que eu queria dar uso mas que mal sabia usar. Embora não tivesse o 10° ano estava em contacto com todas as "novidades" quanto mais não fosse por ser delegada. Tudo isto e o bichinho que já me roía há algum tempo deu-me coragem para avançar com a proposta de nas turmas de 11° ano se pedirem aos alunos pequenos trabalhos de investigação, um no 1° período e outro no 2° período. A proposta foi aceite embora o problema do peso que teria na avaliação final ficasse por resolver. Entendemos considerar isto como uma experiência e depois logo se veria. Isso mesmo se explicaria aos alunos dizendo-lhes que funcionaria como arredondamento da classificação final. Os trabalhos seriam em grupo, para fazer fora das aulas, com exposições orais e a classificação do trabalho seria qualitativa avaliando globalmente a parte escrita e a oral.

> Ficou-me sempre a impressão de injustiça por não contabilizar devidamente na avaliação final o empenhamento dos alunos nesta actividade. Achei que tanto esforço devia ser compensado de alguma maneira e por isso propus uma apresentação do projecto no ProfMat98

No 1° período propus investigações em trigonometria[1]. Resolvi fazer enunciados com a preocupação de pôr qualquer coisa que indicasse o que se esperava dos alunos. Em qualquer dos três enunciados que preparei podia-se ler:

"Este é um pequeno trabalho de investigação. Para o executar é necessário, além de conhecimentos sobre funções e trigonometria, imaginação e espírito crítico.

Deve ser elaborado um relatório detalhado do que foi feito em termos de investigação. Mais importante que as conclusões a que chegaram é o processo que utilizaram para lá chegar, incluindo os erros que cometeram em termos de conjecturas e o modo como os ultrapassaram. No final do relatório deve ser incluído um pequeno resumo das conclusões.

Além do relatório deve ser preparada uma apresentação à turma das conclusões. É fundamental que todos os elementos do grupo tenham intervenções nessa apresentação, que seja clara e dinâmica. "

Claro que conhecendo os alunos, já eram meus alunos no ano anterior, sabia que não bastava escrever. Provavelmente alguns iriam saltar a "conversa" do início e passar ao que era "importante". Resolvi logo que faria uma breve explicação oral do que era um trabalho de investigação e do que significava fazer um relatório. Passados uns tempos havia alunos a perguntar o que é que eu queria que eles escrevessem mas nessa altura disse-lhes sempre que estava escrito no enunciado. Como os trabalhos pressuponham o recurso às tecnologias existentes no Laboratório disponibilizei horas de atendimento para os orientar no que sentissem necessidade. A verdade é que eu própria precisava de ver como corriam as coisas. Era a 1ª vez nas suas vidas que alguém lhes tinha pedido um trabalho em Matemática. Isso era coisa de outras disciplinas!

Nesta primeira experiência foi determinante o meu acompanhamento para que os alunos percebessem realmente o que se lhes pedia. O que era afinal investigar. Acabaram por se entusiasmar e notou-se alguma mudança de atitude perante a Matemática. Nas aulas apareciam muito mais observações do tipo "e se...?". Quanto aos relatórios foi um fracasso. Os grupos preocupavam-se em escrever as conclusões mas descrever o processo que os tinha levado a elas não estava lá. As apresentações orais foram interessantes. Preocuparam-se de facto em explicar aos colegas o que tinham descoberto e fizeram-no recorrendo a calculadoras gráficas, acetatos e apresentações em *Power Point*.

Chegando ao fim do 1º período senti-me perdida. Seria justo não contabilizar com mais peso o entusiasmo e empenhamento que os alunos tinham demonstrado na realização dos trabalhos? Mas os resultados dos testes não tinham melhorado substancialmente! Na verdade as dúvidas eram mais minhas que deles. Eu tinha explicado que era uma experiência, que só ia servir para arredondar a classificação. Os que se dedicaram fizeram-no porque acharam divertido e não porque isso fosse muito importante para a nota.

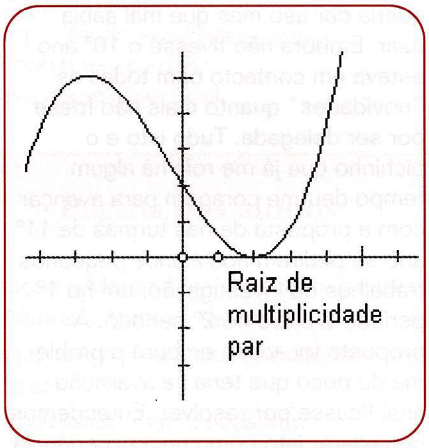
No 2º período, conforme combinado, havia que encontrar temas ligados ao currículo. Estávamos no estudo de funções polinomiais. A verdade é que dizemos que vamos estudar funções polinomiais mas acabamos quase sempre por estudar os polinómios de um ponto de vista algébrico. Pensei que poderia aproveitar esses trabalhos para levar os alunos a fazer conjecturas sobre o que nos podem dizer os gráficos de funções polinomiais sobre a multiplicidade das raízes. Mas afinal o que nos dizem os gráficos nesta matéria? Com esta pergunta, que fiz a mim mesma, iniciei uma pequena investigação para perceber melhor o que poderia pedir aos alunos.

Gráficos e multiplicidade de raízes – uma investigação

Estudamos funções quadráticas e sabemos que o respectivo polinómio do 2º grau tem uma raiz múltipla se e só se o vértice da parábola está sobre o eixo dos xx. Quando acabamos o estudo da função quadrática demos, de uma maneira ou outra, essa noção aos alunos. Fundamentalmente isso significa que a função não muda de sinal numa vizinhança do zero. Pensando um pouco podemos ver que sempre que um polinómio tem uma raiz de multiplicidade par a respectiva função polinomial não muda de sinal numa vizinhança dessa raiz.

Seja $f(x)=(x-\alpha)^{2n}Q(x)$, onde α não é raiz de $Q(x)$, $f(x)$ tem o mesmo sinal que $Q(x)$, excepto em α onde assume o valor zero.

Como α não é raiz de $Q(x)$ existe uma vizinhança de α onde $Q(x)$ não muda de sinal portanto nessa vizinhança, excluindo α, $f(x)$ também não muda de sinal.



1ª conclusão: Conhecido o gráfico de uma função polinomial podemos ajuizar se uma determinada raiz tem multiplicidade par ou não. Na prática sempre que o gráfico "toca e foge" temos uma raiz de multiplicidade par caso contrário ou é simples ou de multiplicidade ímpar.

Mas não poderemos ir mais longe? O que poderá distinguir graficamente uma raiz simples de uma de multiplicidade ímpar maior que 1?

Tinha a noção, já nem sei porquê, que as raízes de multiplicidade ímpar, maior que 1, correspondiam a pontos de inflexão do gráfico. Experimentei algumas funções polinomiais nestas condições e de facto lá estavam os pontos de inflexão; mas antes que houvesse algum caso especial que eu não estivesse a ver resolvi demonstrar.

Seja $f(x)=(x-\alpha)^{2n+1}Q(x)$, onde α não é raiz de $Q(x)$,

$f'(x)=(2n+1)(x-\alpha)^{2n}Q(x)+(x-\alpha)^{2n+1}Q'(x)=(x-\alpha)^{2n}P(x)$,

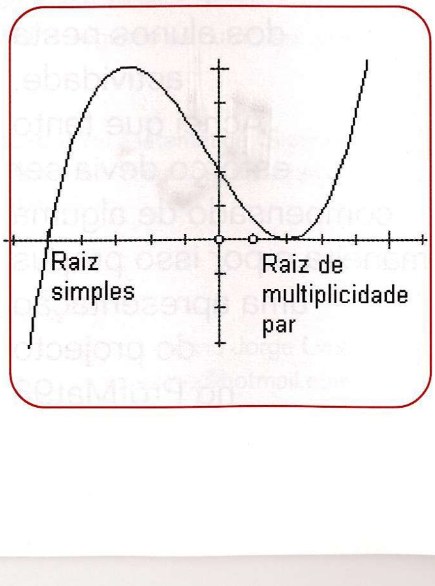
onde $P(x)=(2n+1)Q(x)+(x-\alpha)Q'(x)$

$f''(x)=2n(x-\alpha)^{2n-1}P(x)+(x-\alpha)^{2n}P'(x)=$
$=(x-\alpha)^{2n-1}T(x)$,

onde $T(x)=2nP(x)+(x-\alpha)P'(x)$

Então, como α é raiz de f'' será ponto de inflexão se esta função mudar de sinal neste ponto. $P(\alpha)\neq 0$ porque $Q(\alpha)\neq 0$, portanto $T(\alpha)\neq 0$. Então existe uma vizinhança de α onde $T(x)$ tem sempre o mesmo sinal. Nessa vizinhança $(x-\alpha)^{2n-1}$ assume de certeza sinais contrários, à esquerda e à direita de α, porque o expoente é ímpar portanto o mesmo acontece a f''.

2ª conclusão: Todas as raízes de multiplicidade ímpar maior que três correspondem a pontos de inflexão do gráfico. Podemos então concluir que se o gráfico corta o eixo dos xx sem que haja mudança de concavidade a raiz é de certeza simples.



O passo seguinte parecia ser verificar que se o gráfico apresentasse uma mudança de concavidade coincidente com a raiz então ela seria de multiplicidade ímpar superior a 1. Para tal bastaria demonstrar que se a raiz fosse simples não havia mudança de concavidade, isto é, o recíproco da 2ª conclusão. Mas não é verdade!

Seja $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$, onde α não é raiz de $Q(x)$.

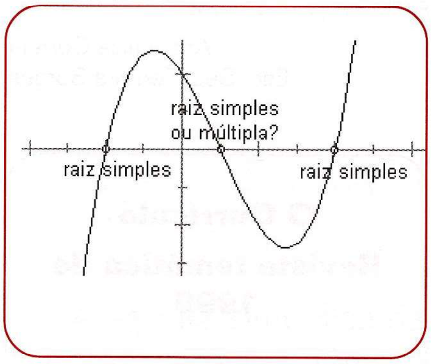
$f'(x)=Q(x)+(x-\alpha)Q'(x)$

$f''(x)=Q'(x)+Q'(x)+(x-\alpha)Q''(x)$

Basta que α seja raíz de $Q'(x)$ para que haja uma mudança de concavidade numa raiz simples.

Por exemplo o gráfico da função $f(x)=(x^2-x-5)(x-0.5)$ tem um ponto de inflexão em 0,5 que é uma raiz simples do polinómio.

Conclusão final:



Pelo aspecto do gráfico podemos perceber se uma raiz tem multiplicidade par. Podemos ainda decidir que uma raiz é simples sempre que não há mudança de concavidade. Se nessa raiz houver mudança de concavidade podemos apenas concluir que se for múltipla a multiplicidade é ímpar mas também pode acontecer que seja simples.

Que enunciado propor?

Depois desta investigação adensou-se uma das dúvidas que se me costuma colocar em situações deste tipo: será viável propor uma investigação destas quando os alunos não têm ainda ferramentas suficientes para demonstrar as conjecturas que fizeram?

Respondi a mim mesma que esta era precisamente a situação ideal. As novas tecnologias permitem que os alunos intuam imensas coisas que só muito mais tarde, provavelmente para alguns será nunca, poderão demonstrar. Por outro lado é preciso que eles aprendam que só a intuição não chega ou cada vez mais acharão bizarro que os professores de matemática se dêem ao trabalho de demonstrar o que se está mesmo a ver. Provavelmente eles iriam conjecturar que uma raiz é múltipla se e só se o gráfico tem esse ponto de inflexão, o que como vimos é falso. O meu papel seria esperar que o fizessem e em seguida apresentar uma função que contrariava a conjectura.

A experiência do 1° período tinha-me ensinado que apesar de motivados os alunos tinham ocupado muito tempo com os trabalhos. Talvez fosse melhor indicar sugestões concretas no enunciado.

Foi assim que resolvi propor o enunciado que se apresenta, em baixo, na "Proposta para trabalho de grupo".

Relativamente ao trabalho sobre funções polinomiais tudo correu mais ou menos como eu previra. Este trabalho foi distribuído apenas a dois grupos, os outros tiveram outro do mesmo tipo sobre máximos e mínimos[1] e outro sobre História da Matemática. Tenho a certeza que nem todos os alunos aprenderam a lição principal deste trabalho e que para mim era – a intuição é boa mas é preciso ter cuidado com ela! Lembro-me que na apresentação oral uma das alunas, realmente a minha melhor aluna, conseguiu levar a turma a fazer a conjectura errada para depois

Proposta para trabalho de grupo

Tema : Funções polinomiais

11º ano - 1997/98

O objectivo deste trabalho é tentar responder às seguintes questões:

1. *Em que casos é que sendo **a** um zero de um polinómio a respectiva função polinomial não muda de sinal numa vizinhança de **a**?*

2. *Será que conhecendo o gráfico de uma função polinomial, sem conhecer a sua expressão analítica, podemos concluir se as raízes do polinómio são simples ou múltiplas?*

Para conseguir dar resposta a estas perguntas sugerimos que:

No caso da pergunta1:

Começa por tentar responder à pergunta no caso de uma função quadrática. Em seguida considera funções polinomiais de grau maior que 2 e analisa-as tendo em conta a multiplicidade da raiz. Estabelece uma conjectura.

No caso da pergunta 2:

Começa por analisar gráficos de várias funções polinomiais que tenham raízes simples e raízes de várias multiplicidades. O melhor para isso é "inventar" funções polinomiais escrevendo-as na sua decomposição em factores. Usa uma calculadora gráfica ou software adequado para visualizar os gráficos. Repara que algumas vezes o gráfico muda de concavidade quando há um zero e outras vezes não. Estabelece uma conjectura.

O relatório da investigação deve ser entregue até ao dia 14 de Março de 1998 e a apresentação oral será na semana seguinte

Não deixes para amanhã o que podes fazer hoje

Bom trabalho

desfazer o erro. Pelo menos essa tenho a certeza que aprendeu e só por isso valeu a pena.

A avaliação dos trabalhos foi mais formativa do que sumativa. Emendei com cuidado a construção de frases, observei o modo como foi apresentado tanto do ponto de vista estético como de estrutura e claro que corrigi todas as imprecisões de carácter científico. Classifiquei qualitativamente em insuficiente, suficiente e bom, tendo em conta estes parâmetros.

Os trabalhos do 2º período corresponderam muito mais ao que considero um relatório do que os do 1º período. Já havia uma história antes das conclusões finais.

Ficou-me sempre a impressão de injustiça por não contabilizar devidamente na avaliação final o empenhamento dos alunos nesta actividade. Achei que tanto esforço devia ser compensado de alguma maneira e por isso propus uma apresentação de projecto no Profmat98 onde levaria todos os que conseguissem passar para o 12ºano.

Outras repercussões na formação dos alunos

Na 1ª aula deste ano lectivo, conversando sobre o que íamos fazer durante o ano, uma aluna perguntou-me se também ia haver trabalhos. Eu hesitei e ela acrescentou logo que era muito divertido e aprendia-se muito mas tirava muito tempo e 12º ano tinha exames no fim do ano a todas as disciplinas. Acabei por lhe responder que logo se veria e dei-lhes a novidade de que a apresentação do projecto no Profmat98 tinha sido aprovada. Expliquei-lhes que iam comigo a Guimarães mostrar o que tinham feito no ano anterior e portanto teriam que pelo menos voltar a olhar para o que tinham produzido. O entusiasmo era enorme. Eles sabiam o que era o ProfMat pois nos anos anteriores eu contara-lhes muito do que tinha visto. Acho que consideravam que o ProfMat era um dos grandes responsáveis pelos projectos da escola que levaram ao aparecimento do Laboratório de Matemática e provavelmente tinham razão.

O 1º período foi passando e nunca mais havia tempo para falar das apresentações no ProfMat. Como não houve aulas na primeira semana de Novembro foi só nessa altura que nos reunimos em duas tardes para ver alguma coisa do que iam apresentar e combinar o que iriam dizer. Não valia a pena alongarem-se muito. Também não havia muito tempo para as exposições e tinha decidido que ninguém ficava só a ver.

Fui para Guimarães no Domingo seguinte e eles ficaram a ultimar as apresentações, que seriam todas em power point. Na 4ª feira seguinte, véspera do dia em que eles deviam chegar a Guimarães apostei um jantar com umas colegas. Eu achava que pelo menos um grupo se ia esquecer da disquete com o trabalho em Lisboa. Elas respondiam-me que não. No dia seguinte chegaram. Cada grupo, constituído por três ou quatro alunos trazia tantas disquetes quanto o número de alunos do grupo. Com medo que alguém se esquecesse tinham feito cópias, uma para cada um. Aqueles alunos simpáticos mas pouco responsáveis, que no 12º ano de vez em quando pensam que têm que estudar mas raramente o fazem, assumiram com uma seriedade incrível o que foram fazer a Guimarães. Na apresentação conseguiram imprimir um tom descontraído, apesar de roerem as unhas antes de entrar para a sala. Por causa de uns trabalhos de Matemática estes alunos foram obrigados a crescer como indivíduos. Mesmo que não tenham aprendido muito mais de Matemática, tudo valeu a pena tendo como referência a sua formação integral.

Eu aprendi uma lição e... perdi um jantar!

A agora?

Apesar de tudo não tenho coragem para lhes pedir trabalhos este ano. Estão perdidos a fazer contas e a ver que na maioria dos casos não têm médias para entrar onde querem. Passam tanto tempo a pensar nisso que se esquecem de que para começar era preciso estudar. Num destes dias um aluno perguntou-me se era melhor chumbar este ano para tentar ter a nota que precisa no ano que vem ou fazer melhoria de nota em exame para o ano. Acabo por me preocupar em dar o programa olhando como eles para o exame final. Claro que me "perco" de vez em quando. Não resisto a mostrar-lhes as últimas que aprendi no *Sketchpad* e a usá-lo para dar as cónicas, mas tudo feito por mim. Eles interessam-se mas não há tempo para os ensinar a trabalhar com o *software*. Talvez a culpa seja minha por não saber como é que posso ao mesmo tempo prepará-los para o exame e propor-lhes trabalhos de investigação.

1 Os enunciados dos trabalhos de investigação propostos encontram-se nas actas do ProfMat98 pág. 231 a 235

Ana Luísa Correia
Esc. Sec. Ferreira Borges

O Currículo
Revista temática de 1999

A revista temática deste ano, a sair como habitualmente no ProfMat, terá como tema central o currículo. Abordar-se-ão diversas questões, tais como:

- entendimento do que é o currículo e implicações na prática educativa;
- gestão do currículo pelas escolas e pelos professores;
- currículo nacional e diversificação curricular;
- concepção e utilização de materiais curriculares.

Se quiser colaborar neste número da revista, envie-nos sem demora a sua contribuição, ou contacte qualquer elemento da redacção.