A propósito de muros em ruínas

António Bernardes, Cristina Loureiro

Na secção *Desafios* do jornal *Público* de 15 de Novembro de 1998 é apresentado um problema intitulado *Os muros em ruínas* que, pela riqueza e diversidade de explorações que proporciona, nos mereceu especial atenção. É nesse sentido que aqui propomos três abordagens, diferentes mas complementares, e que nos parecem interessantes para serem trabalhadas com os alunos do Ensino Secundário.

Também achámos interessante esta exploração pelo gozo que nos deu resolver este problema e pelas boas ideias que o GSP nos sugeriu.

O problema e as primeiras dificuldades

Os muros em ruínas

O caminho de uma aldeia é ladeado por dois muros, um com 4 e outro com 7 metros de altura. Num certo local, os muros estão em ruínas e ameaçam desabar. Para evitar acidentes e enquanto os proprietários não efectuam as necessárias reparações, a junta de freguesia colocou umas traves a segurar os muros, conforme se mostra na figura. A que altura do chão se cruzam as traves?

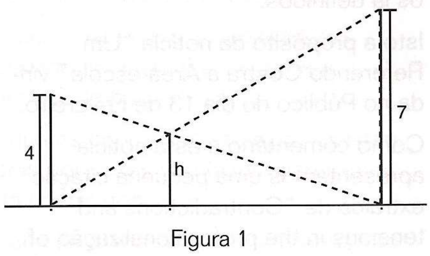


Figura 1

Começámos por identificar na figura algumas medidas desconhecidas.

Recorrendo à semelhança de triângulos podemos retirar da figura duas relações úteis. (Ver figura 2)

$$\frac{a}{d} = \frac{h}{7} \qquad \frac{b}{d} = \frac{h}{4}$$

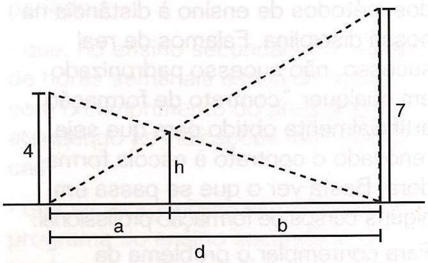


Figura 2

Constatamos que temos apenas duas condições e quatro incógnitas. É pouco para a solução que sabemos ser única. Temos a certeza disto pela representação visual que o problema sugere.

Uma simples manipulação algébrica leva-nos à relação $7a = 4b$.

Uma certa tendência para a manipulação algébrica, que aliás é vulgar neste tipo de problemas, pode fazer-nos identificar mais variáveis e procurar mais relações entre elas. Vamos evitar essa tendência.

Exploração com o programa *The Geometer's Sketchpad*

Podemos começar por simular a situação no *GSP*. (Ver figura 3)

Após alguma experimentação reconhece-se que:

- o comprimento das traves depende da altura dos muros e da distância entre eles;
- a altura a que se cruzam as traves é independente da distância entre muros.

Este último aspecto é o mais interessante de explorar. Não é que não estivessemos à espera de que isso acontecesse, os dados do problema,

Três abordagens, diferentes mas complementares, interessantes para serem trabalhadas com os alunos do ensino secundário, o gozo que deu a resolução do problema e as boas ideias que o GSP sugeriu...

em que nada se dizia sobre a distância entre muros, apontavam no sentido dessa independência. Mas a observação dinâmica da situação fez-nos pensar na existência de um rectângulo, com altura constante e igual a h, que conduziu à resolução geométrica por semelhança de rectângulos.

Resolução geométrica

A exploração com o GSP sugeriu-nos a exploração geométrica, apresentada na figura 4, usando a semelhança de triângulos:

De [1] e [3] obtém-se: $\dfrac{4-h}{4}=\dfrac{h}{7}$

De [2] e [4] obtém-se: $\dfrac{7-h}{7}=\dfrac{h}{4}$

Usando qualquer uma das igualdades, por exemplo a segunda:

$28-4h=7h \iff 11h=28 \iff h=\dfrac{28}{11}$

$\iff$ h ≈ 2,54 metros.

Mas podíamos ter seguido outro caminho.

Resolvendo a equação $\dfrac{a}{d}=\dfrac{h}{7}$ em ordem a a obtém-se: $a=\dfrac{dh}{7}$

Resolvendo a equação $\dfrac{b}{d}=\dfrac{h}{4}$ em ordem a b obtém-se: $b=\dfrac{dh}{4}$

Como a + b = d então: $\dfrac{dh}{7}+\dfrac{dh}{4}=d$

Donde: $\dfrac{h}{7}+\dfrac{h}{4}=1 \iff h=\dfrac{28}{11}$

O resultado $h=\dfrac{28}{11}$ dá para suspeitar que existe alguma relação entre ele e as alturas dos muros e estabelecer a conjectura:

A altura é sempre o quociente entre o produto das alturas dos muros pela sua soma.

Novamente, usando uma das relações anteriores e designando as alturas

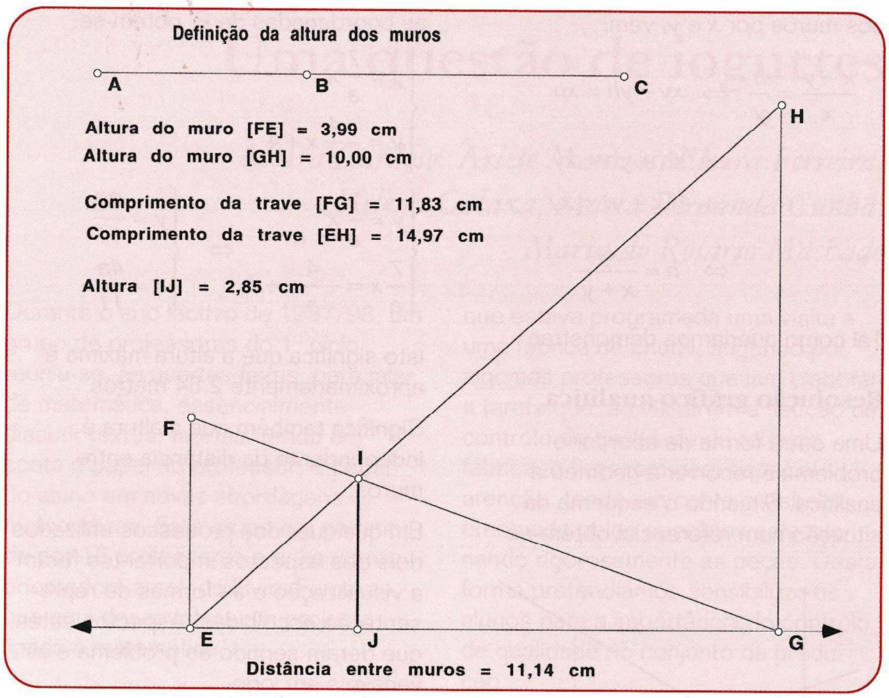


Figura 3

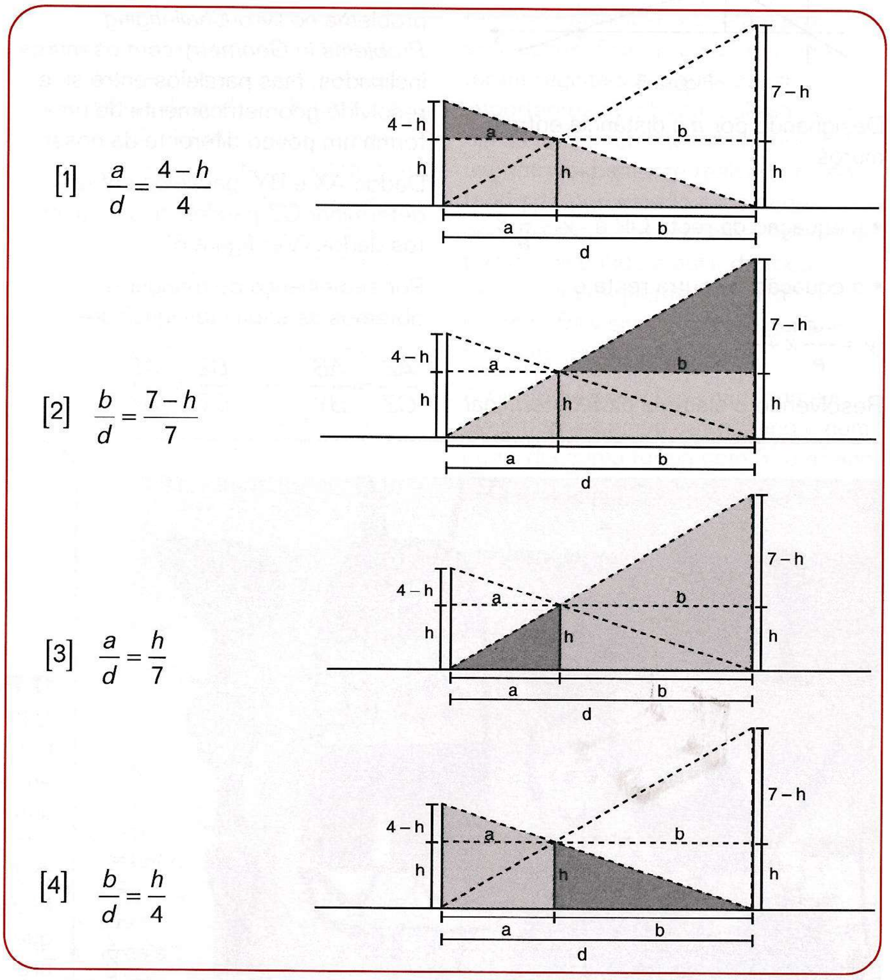


Figura 4

dos muros por x e y, vem:

$$\frac{x-y}{x}=\frac{h}{y} \Leftrightarrow xy-yh=xh$$
$$\Leftrightarrow xh+yh=xy$$
$$\Leftrightarrow h(x+y)=xy$$
$$\Leftrightarrow h=\frac{xy}{x+y}$$

Tal como queríamos demonstrar.

Resolução gráfico-analítica

Uma outra forma de abordar o problema é recorrer à geometria analítica. Situando o esquema da situação num referencial obtém-se

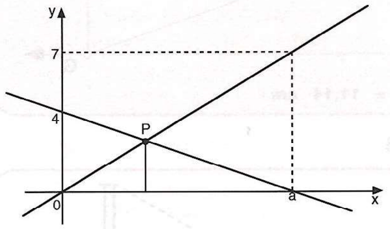


Figura 5

Designando por a a distância entre muros,

- a equação da recta OP é $y=\frac{7}{a}x$
- a equação da outra recta é

$y=\frac{-4}{a}x+4$

Resolvendo o sistema para determinar as coordenadas de P, obtém-se:

$$\begin{cases} y=\frac{7}{a}x \\ y=-\frac{4}{a}x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{7}{a}x \\ \frac{7}{a}x=-\frac{4}{a}x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{28}{11} \\ x=\frac{4a}{11} \end{cases}$$

Isto significa que a altura máxima é aproximadamente 2,54 metros.

Significa também que a altura é independente da distância entre muros.

Em qualquer dos processos utilizados dois dos aspectos importantes foram a visualização e as formas de representação escolhidas. Aspectos estes que deram sentido ao problema e às variáveis em jogo.

Mais tarde fomos descobrir este problema no livro *Challenging Problems in Geometry* com os muros inclinados, mas paralelos entre si, e resolvido geometricamente de uma forma um pouco diferente da nossa.

Dados AX e BY, paralelos entre si, determinar CZ paralelo aos segmentos dados.(Ver figura 6)

Por semelhança de triângulos, obtemos as seguintes igualdades

$$\frac{AZ}{CZ}=\frac{AB}{BY} \quad \text{e} \quad \frac{BZ}{CZ}=\frac{AB}{AX}$$

adicionando as duas igualdades obtém-se

$$\frac{AZ}{CZ}+\frac{BZ}{CZ}=\frac{AB}{BY}+\frac{AB}{AX}$$

e como $AZ+BZ=AB$, temos

$$\frac{AB}{CZ}=\frac{AB}{BY}+\frac{AB}{AX}$$

dividindo ambos os membros por AB obtém-se

$$\frac{1}{CZ}=\frac{1}{BY}+\frac{1}{AX}$$

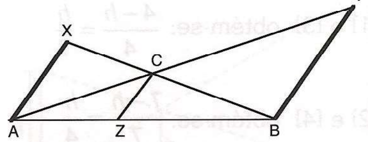


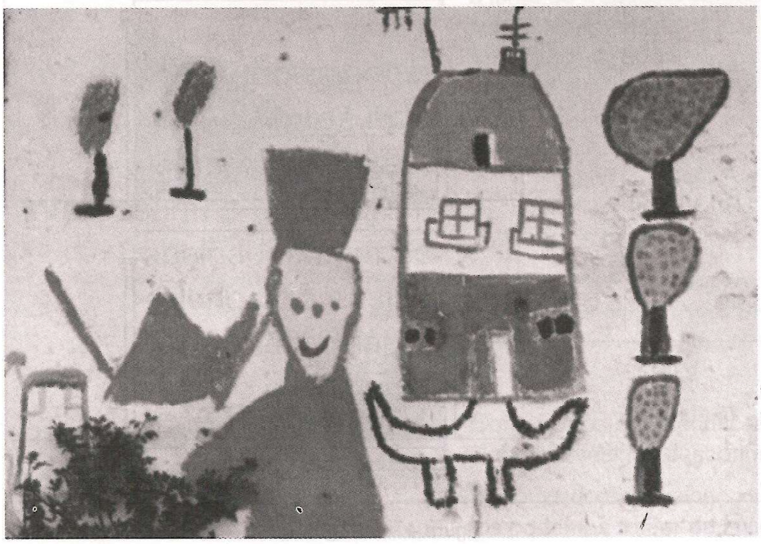
Figura 6

Se forem dados BY e AX a solução do problema decorre imediatamente desta igualdade. Parece-nos que esta generalização do problema a uma posição qualquer dos muros, desde que paralelos entre si, é bastante interessante.

Referências

Posamentier, A. S. e Salkind, C. T. 1988. *Challenging Problems in Geometry*. Dover Publications, Inc., New York.

António Bernardes
Esc. Sec. de Gil Vicente
Cristina Loureiro
Esc. Superior de Educação de Lisboa



Parede de Abril

O ProfMat 99 e SIEM X

O ProfMat 99 realiza-se de 10 a 13 de Novembro na Escola Secundária Poeta António Aleixo, em Portimão, como foi divulgado na revista anterior. O 1º anúncio foi já enviado a todos os sócios da APM e o 2º chegará em breve.

O Seminário de Investigação em Educação Matemática — SIEM X, realiza-se nos dois dias que antecedem o ProfMat — 8 e 9 de Novembro, a par com os cursos.