A cardióide[1]

Helena Paradinha, Margarida Oliveira, Otília Moreirinha

Métodos de construção da curva

1. *Como envolvente de circunferências*

Considere uma circunferência *c* de centro *O* e um ponto *A* dessa circunferência. Considere ainda um ponto *U* sobre *c* e com centro nesse ponto desenhe uma nova circunferência com raio *UA*. À medida que o ponto *U* percorre a circunferência *c*, vão-se obtendo novas circunferências; a cardióide é a envolvente dessas circunferências, isto é, a curva tangente a todas essas circunferências.

Se se usar um programa de geometria dinâmica, basta animar o ponto *U* na circunferência *c* após ter dado instruções para que a segunda circunferência traçada deixe rasto. (Ver figura 1)

2. *Como epiciclóide*

Considere duas circunferências *c* e *d*, tangentes e com o mesmo raio. A circunferência *d* rola sem escorregar sobre a circunferência *c*. Cada ponto *P* da circunferência *d* descreve uma cardióide durante esse movimento. (Ver figura 2)

Observação: para fazer esta construção no *Geometer's Sketchpad*, recorrendo à animação, sugerimos que:

- o centro da circunferência *d* que rola seja animado numa circunferência auxiliar concêntrica com *c* e com o raio duplo do desta;
- se crie, à parte, uma circunferência *e* de raio idêntico ao de *c* e um ponto *X* animado sobre ela;
- a circunferência *d* e o seu ponto *P* são depois construídos à custa da translacção que aplica o centro de *e* no centro de *d*.

Ver figura no final do artigo[2].

A *cardióide* foi descoberta por Roemer, em 1674, na sequência de uma investigação sobre rodas dentadas. Esta curva foi referida nas *Philosophical Transactions of the Royal Society*, pela primeira vez, com o nome de cardióide por Castillon em 1741, por lembrar um coração. O seu perímetro foi calculado em 1708 por La Hire, que também constatou tratar-se de um caso particular da família de curvas designadas por *caracol* de Pascal.

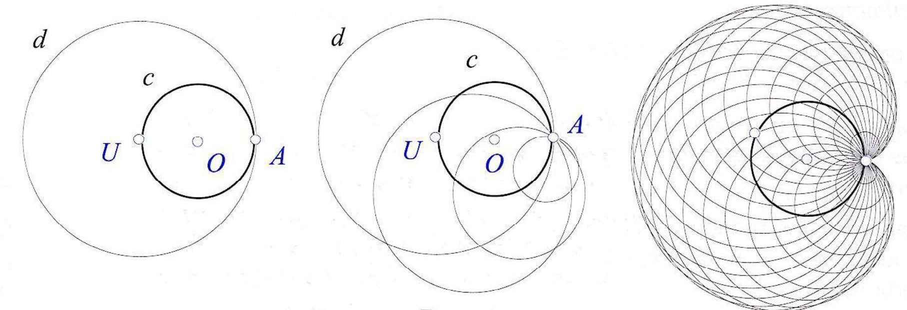


Figura 1

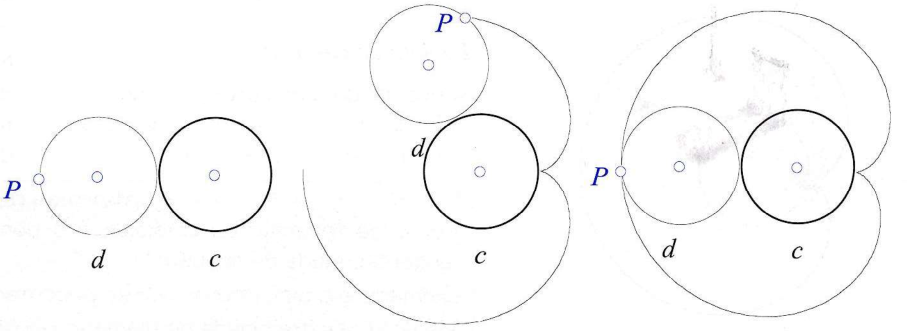


Figura 2

3. *Forma alternativa de definir a cardióide como epiciclóide*

Considere duas circunferências *a* e *b* tangentes, sendo o raio de *b* o dobro do de *a*. A circunferência *b* rola sem escorregar sobre a circunferência *a*. Cada ponto *S* da circunferência *b* descreve uma cardióide durante este movimento. (Ver figura 3)

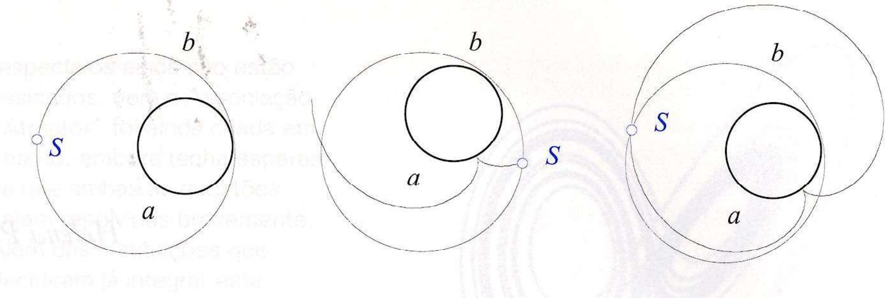
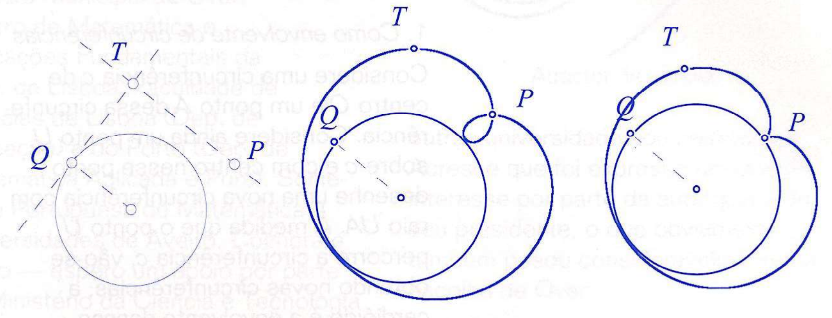


Figura 3

4. *Como curva pedal*

Considere uma circunferência *c* e um ponto fixo *P* (ponto pedal). Considere as perpendiculares tiradas por *P* às tangentes à circunferência (fig. 4A). O lugar geométrico dos pés *T* dessas perpendiculares constitui a *curva pedal*. A curva pedal de uma circunferência é um caracol de Pascal (fig. 4B). No caso do ponto *P* pertencer à circunferência obtém-se uma cardióide cujo ponto de reversão coincide com o ponto *P* (fig. 4C).



(A) (B) (C)

Figura 4

Algumas propriedades da cardióide

Equação cartesiana

Se a medida do diâmetro da cardióide for $4a$, a sua equação cartesiana é $(x^2 + y^2 + 2ax)^2 = 4a^2 (x^2 + y^2)$.

Perímetro e área

O perímetro da cardióide é $16a$. E a área é dada por $6 \times \pi \times a^2$.

Lugar geométrico dos pontos médios das cordas que passam pelo ponto de reversão.

Este lugar geométrico é uma circunferência, como se pode conjecturar a partir da figura 5.

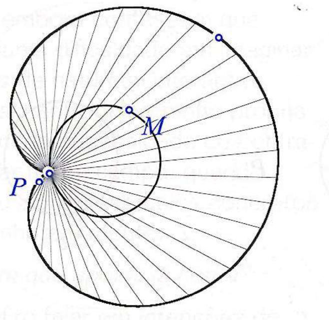


Figura 5

Tangentes paralelas a uma dada direcção

Considerando uma dada direcção, existem sempre três tangentes à cardióide paralelas a essa direcção (fig. 6). Os ângulos formados pelos segmentos que se obtêm unindo os pontos de tangência ao ponto de reversão medem $2\pi/3$.

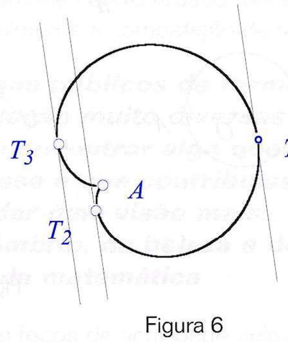


Figura 6

Evoluta da cardióide

A *evoluta* de uma curva pode ser definida como a envolvente das suas normais. No caso da cardióide obtemos outra cardiióide com um terço do perímetro (fig. 7).

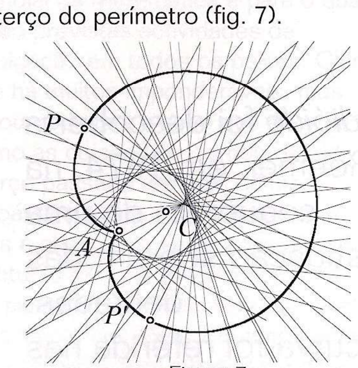


Figura 7

Pedais negativas da cardióide

Considere um ponto fixo *P* (ponto pedal), uma cardióide *c* e sobre *c* um ponto *Q*. A envolvente das perpendiculares aos segmentos *PQ* que passam por *Q* é a pedal negativa da cardióide *c* relativamente ao ponto *P*.

No caso de *P* coincidir com o ponto de reversão da cardióide a pedal negativa será uma circunferência com diâmetro igual ao da cardióide (fig. 8).

Algumas definições

Ponto de reversão da cardióide é o ponto onde a variação do declive das tangentes muda de sentido.

Diâmetro é a maior corda que se pode traçar a partir do ponto de reversão.

Vértice é a extremidade do diâmetro oposta ao ponto de reversão.

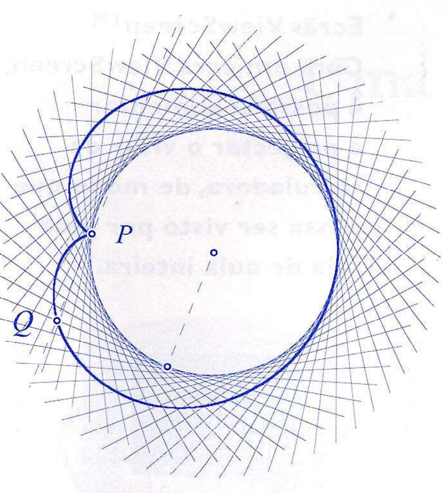


Figura 8

No caso de *P* ser o vértice da cardióide, a curva gerada é uma cissóide (fig. 9).

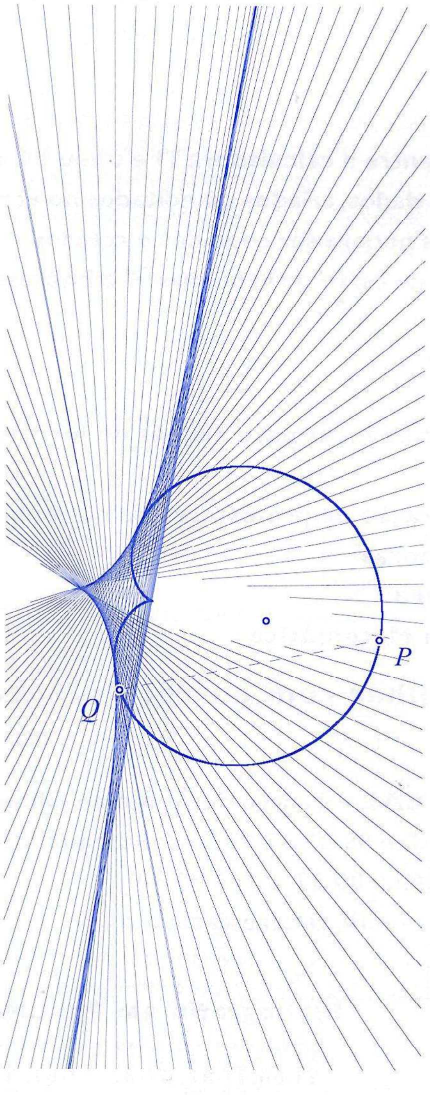


Figura 9

Cardióide como envolvente de segmentos

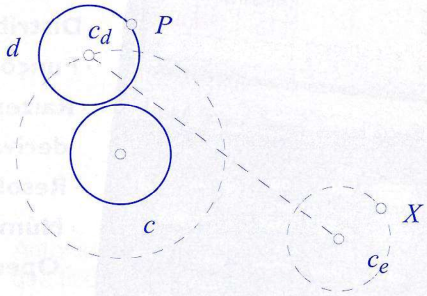
Considere uma circunferência e divida-a em 36 arcos iguais por meio de 36 pontos numerados de 0 a 35. Una, por meio de segmentos, pares de pontos da seguinte forma: o ponto *n* fica ligado a um ponto *m* se *2m* é congruente com *n* módulo 36 (isto é, os restos da divisão inteira de *n* e *2m* por 36 são iguais). Por exemplo, o ponto $n=4$ está ligado ao ponto $m=2$ porque $2m=4$ é congruente com $n=4$ módulo 36. Da mesma forma $n=2$ está ligado ao ponto $m=19$ porque $2m=38$ é congruente com $n=2$ módulo 36.

A envolvente destes segmentos é (aproximadamente) uma cardióide (tanto mais perfeita quanto maior for o número de partes em que se divide a circunferência. (Ver figura 10)

Notas

1. Trabalho realizado em Dezembro de 1997, no âmbito de um curso de formação "Inovação no Ensino da Geometria" no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

2. Figura referente à observação do fim da primeira página deste artigo:



Bibliografia

Lockwood, E. H. A., *Book of curves.* Cambridge: Cambridge University Press, 1961.

Veloso, Eduardo. *Geometria: temas actuais.* Instituto de Inovação Educacional, 1998.

On-line

http://www.groups.dcs.st-amd.ac.uk/~history/Curves/Curves

http://www.best.com/~xah/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html

Helena Paradinha
Esc. Sec. Braamcamp Freire, Pontinha
Margarida Oliveira
Esc. Sec. Patrício Prazeres
Otília Moreirinha
Esc. Sec. David Mourão Ferreira

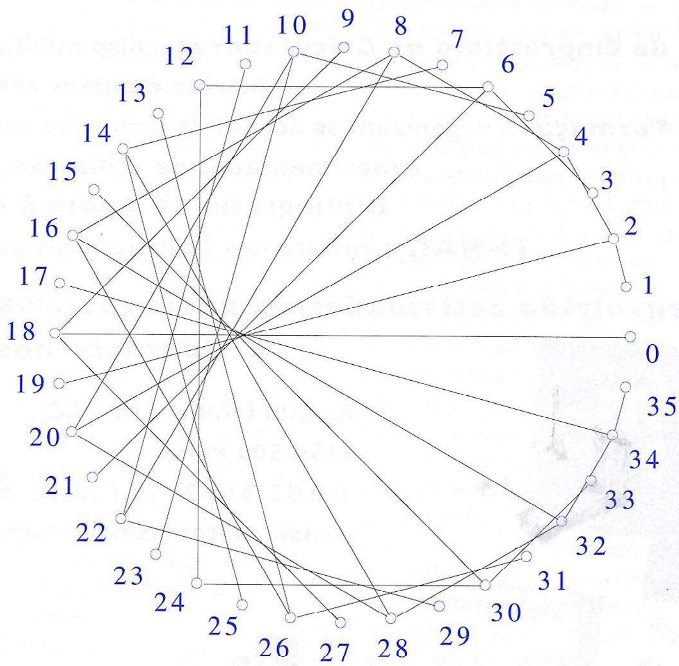


Figura 10