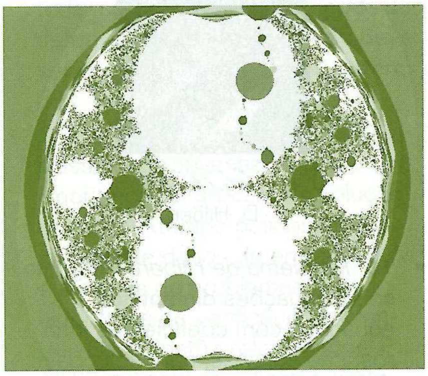
Os objectivos do ensino da Matemática em 2001: ensinar ou aprender?

J. Sousa Ramos



O que vai acontecer no próximo século? É impossível prever, dadas as taxas actuais de mudança: nas tecnologias, nas comunicações, no conhecimento do cérebro humano, etc. Assim, o que vai ser exigido da *Matemática,* é prematuro formular. No entanto, vejam-se as referências:

R.W.Riley, *The State of Mathematics Education: Building a Strong Foundation for the 21st Century.* Notices AMS, vol. 45, 4, 1998,p.487-491.

Mathematics Education for the 21st Century, A Fields Nortel White Paper, Nortel Northern Telecom, The Fields Institute for Research in Math. Sciences, 1998.

D.J.Lewis, *Mathematics Instruction in the Twenty-first Century,* Documenta Mathematica, Extra Volume Int. Cong.Math. 1998, III, 763-766.

Matemática 2001, Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática, Relatório preliminar, Março 1998, Associação de Professores de Matemática.

V.I. Arnold, *Sur l'education Mathématique,* http://www.botik.ru/~duzhin/v.i.arnold.html

Relativamente aos modos de ensinar e de aprender vejam-se os textos do projecto:

Explorar e Investigar para Aprender Matemática, CIEFCUL e do Seminário *Investigação na Sala de Aula,* Portalegre 14-16, Set.98.

Aqui, tentamos olhar a curto prazo, apenas para a próxima década. A *Matemática anterior ao nosso século,* aquela que é ensinada nas nossas Escolas Secundárias, deve o seu aparecimento quase exclusivamente ao estudo do mundo físico, e neste o das regularidades, das simetrias e das grandezas invariantes, perante os grupos de transformação que exprimem essas simetrias. A *Matemática deste século* tem duas componentes importantes: uma, a abstração, a formalização e extensão da matemática anterior – traduzidas na axiomatização, no desenvolvimento da Álgebra, da Geometria Algébrica, da Topologia Algébrica, etc. A outra componente, a que introduziu mais novidade, explora, contrariamente aos séculos anteriores, o irregular, o aperiódico, o assimétrico, o complexo — estuda o Caos, os Fractais, os Atractores Estranhos, os Quasi-cristais, o DNA, Fenómenos Não-lineares, a caracterização das Complexidades, etc.

Para o próximo século, somos levados a esperar a formalização e extensões destas novidades e o desenvolvimento tecnológico correlacionado. Quanto às novidades futuras, essas, não as podemos prever. Se me fosse pedido que adivinhasse, então aí, apostaria na maior das esperanças — compreender a inteligência humana a tal ponto que realizássemos o computador e o *robot* inteligente.

A *Matemática que se deverá ensinar* nos próximos anos não dispensa os conhecimentos adquiridos nos 2000 anos anteriores ao nosso século, mas terá de ser fundamentalmente a do século que finda e tarda em ser inserida nos currículos. As ideias, as técnicas de cálculo, os conceitos e os resultados são muitos, mas os meios de que se dispõe hoje são enormes, ou irão ser, pois nem todos ainda tem acesso a eles. E, há que ser muito inteligente no ensinar. Por exemplo, o formalismo e a axiomática devem ser deixados para segundo plano, para uma segunda visita ao assunto. Não se deve querer compreender, aprender pela síntese, sem que se tenha feito a análise antes.

Ensinar é criar as condições para aprender, isto é, refazer a descoberta dentro de cada aluno.

A Matemática que se deverá ensinar nos próximos anos não dispensa os conhecimentos adquiridos nos 2000 anos anteriores ao nosso século, mas terá de ser, fundamentalmente, a do século que finda e tarda em ser inserida nos currículos.

Visto isto e considerando que:

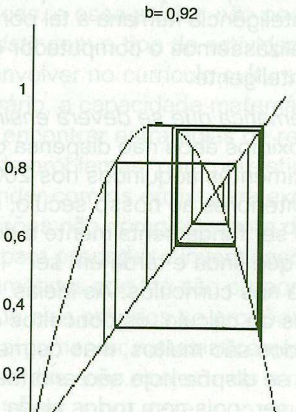
- A *Matemática* é hoje um dos principais factores do desenvolvimento.
- É a única linguagem formal de qualquer ciência.
- Foi sempre e continuará a ser, juntamente com a língua materna, a disciplina fundamental da formação.
- A presença sistemática e estruturante da *Matemática* na nova organização social designada por *Sociedade da Informação* é uma realidade.

Conclui-se que:

- Ensinar e aprender *Matemática* é uma necessidade universal.

Com *o ensinar* existem problemas — ninguém sabe como fazê-lo ou qual a melhor forma de o fazer. (Não significa que não admire o trabalho e os progressos feitos por muitos matemáticos na tentativa de compreender e de melhorar as formas de ensinar). É uma tarefa muito difícil.

Por outro lado, os *empregadores* teimam em não considerar a profissão de *professor de Matemática* como exigindo uma formação própria e adequada.



Então, que fazer?

Aprender, fazer e refazer *Matemática.*

Como se aprende? Refazendo a *Matemática* que outros já fizeram.

É tarefa bem mais fácil que ensinar mas, como tudo, exige *motivação, gosto e esforço.* O ter ou não capacidade é menos preocupante, pois esta existe na grande maioria das pessoas.

O *fazer Matemática* é indispensável para compreender os mecanismos da exploração do desconhecido, do exercício da imaginação e da actividade criativa.

E o *refazer* treina-nos no exercício lógico do pensamento dedutivo. Na capacidade de provar e de sentir a segurança, a certeza de uma proposição ser verdadeira ou falsa.

Como se faz Matemática? Como a fazem os matemáticos? *Formulando e resolvendo problemas.*

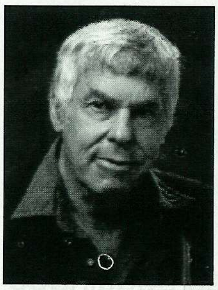
Que se entende por problema? Existem *Problemas* e problemas (charadas, puzles, curiosidades, exercícios,...). A resolução de milhares de exercícios, pequenos problemas não fazem de um indivíduo um grande matemático.

Em que tipo de problemas trabalham os matemáticos? Vejamos alguns exemplos.

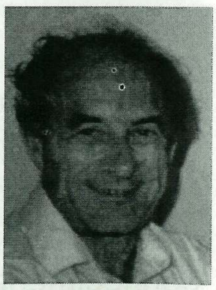
- O *Problema de Fermat*, resolvido recentemente por Andrew Wiles, 1993-1995. O último teorema de Fermat (1651) afirma que: $x^n+y^n=z^n$ não tem soluções inteiras não nulas para *x, y, z,* quando $n>2$. Fermat escrevera: *Descobri uma prova notável para a qual a margem do papel é demasiado pequena para a conter.* A prova não apareceu e foram precisos 345 anos para se conseguir uma prova. Com isso desenvolveram-se muitos campos da Matemática.
- Os 23 *problemas de Hilbert* apresentados em 1900, no Congresso Internacional de Matemática em Berlim, enriqueceram indiscutivelmente a Matemática do nosso século. Para esclarecer sobre o conceito de *problema* apresentemos dois problemas desta lista.
- *1º Problema de Hilbert.* É o problema introduzido por Cantor em 1874 sobre a cardinalidade dos conjuntos infinitos. Introduz a *hipótese do contínuo*: não existem conjuntos de cardinalidade intermédia entre os inteiros e os reais. Trabalhos de Gödel em 1940 e Cohen em 1963 permitem afirmar, hoje, que podemos ter matemáticas cantorianas onde a hipótese é verdadeira e *matemáticas não cantorianas* onde não.

D. Hilbert

- *10º Problema de Hilbert.* Pergunta se as equações diofantinas, equações com coeficientes inteiros, são solúveis, com soluções inteiras. Matiyasevich resolveu este problema em 1970 provando que não é possível obter um algoritmo que decida se a equação tem ou não solução num número finito de passos.
- Os 18 problemas colocados na revista *The Mathematical Intelligencer*, vol.20, 1998, por S. Smale, em resposta a uma convite de V.I. Arnold dirigido aos Matemáticos, para que elaborassem uma lista de problemas de Matemática para o próximo século. Vejamos apenas os três primeiros:



S. Smale



V.I.Arnold

- *1º Problema.* Sobre a *hipótese de Riemann*: em 1850 Riemann, estudando o modo como os números primos se distribuem, formulou uma conjectura a respeito de uma função designada por zeta $\zeta(s) = \Sigma\ 1/n^s$ (soma sobre todo n, inteiro positivo) e introduzida por Euler. Os únicos zeros da função zeta no intervalo *0 <= Re(z) <= 1* ficam na linha *Re(z) = 1/2*. Fora já o 8º problema da lista de Hilbert que continua hoje sem solução, mas que estimula variadíssimos novos desenvolvimentos da Matemática.

- *2º Problema. A conjectura de Poincaré* (1900): supondo que uma variedade compacta conexa de dimensão 3 tem a propriedade que toda a circunferência nela pode ser deformada num ponto. Então deve ser homeomórfica a uma 3-esfera, S^3.
- *3º Problema.* Deve *P = NP*? P é a classe de problemas com algoritmos *de procura* de solução eficientes (tempo polinomial no número de dados de entrada) e *NP* é a classe de problemas com algoritmos de *verificação* eficientes. Como estão relacionados *P* e *NP*? Se *f* está em *P* então certamente *verificar (f)* está em *P* e *f* está em *NP* também. Assim *P* é um subconjunto de *NP*. Surge assim a mais importante questão da teoria da complexidade computacional: é *P* um subconjunto próprio de *NP*? Isto é, existem problemas de decisão *f* tais que *verificar (f)* está em *P* (e *f* está em *NP*) mas para o qual *f* não está em *P*. *Verificar* será mais fácil que *procurar* uma solução?
- O *problema de Collatz* (1950). Este problema é interessante pela simplicidade do seu enunciado. Dada a função definida por: se *n* é impar, *f(n) = 3n+1*, senão *f(n) = n/2*. Conjectura de Collatz diz que: qualquer que seja o número natural *n*, iterando a aplicação *f*, acaba-se sempre por cair no ciclo de período três: *4->2->1->4*. Não existe hoje Matemática capaz de provar que, para todo o *n*, por maior que seja, isso acontece.
- Os nossos próprios problemas que gostaríamos de ver resolvidos. A *complexidade topológica dos fluxos de informação:* de quantos modos topologicamente diferentes a informação pode variar no tempo. Concretamente: de quantos modos diferentes podemos gerar sucessões de *0* e *1*? Esse conjunto tem a potência do contínuo, mas pode ser *estratificado* e em *certos estratos* podemos conhecer as dinâmicas dos fluxos de informação.

Em geral, o que caracteriza estes problemas é terem um enunciado simples, mas matematicamente precisos e profundos, isto é, capazes de influenciarem o desenvolvimento da Matemática do próximo século.

Como transpôr para o ensino esta prespectiva? Como se deverá ensinar no século XXI? Formulando e resolvendo problemas, refazendo a história dentro de cada um de nós, mas com outros meios, em especial a *Internet*. As minhas propostas são muito concretas e baseiam-se em trabalho concreto. Assim, passo de imediato às minhas sugestões para o ensino da Matemática no pré-universitário.

1. O aluno deverá possuir um *caderno pessoal* ou um *bloco de notas* (serve, quando disponível, o *notebook criado no Mathematica—Wolfram*), onde regista os problemas propostos e os novos por ele formulados. Anotará ainda os progressos feitos dia a dia e todas as tentativas experimentadas, bem como notas das leituras feitas com o objectivo de resolver cada um dos problemas.
2. Periodicamente fará um ponto da situação escrevendo um pequeno relatório sobre os resultados obtidos, as dificuldades e as conjecturas.
3. Na aula, na *Internet* ou noutros locais de encontro discute os problemas e tenta encontrar respostas, recorrendo a tudo o que tiver ao seu alcance, livros, *Internet*, os programas: *Mathematica, Maple, Derive*, etc.
4. A Matemática, assim como os problemas, não deve ser compartimentada: Álgebra, Análise, Geometria, Lógica, Computação, Física, Engenharia, Economia, etc. . Um problema contém muitas componentes e o estudo de todas elas conjuga-se para se obter a solução.
5. A *História da Matemática* e das *Ciências* é útil, diria mesmo indispensável, mas na busca da solução não importa respeitar datas ou precedências históricas. Os conhecimentos do século XX podem e devem entrar na reformulação e solução dos problemas colocados pelos séculos anteriores.
6. A feitura dos problemas deve receber o contributo de muita gente para se enriquecer e ampliar, em simplicidade e em profundidade. Uma vez colocados na *Internet* estarão acessíveis a todos e todos podem contribuir para o seu melhoramento.
7. A lista dos problemas e a sua resolução deve envolver todo o curriculum que se pretende ensinar e ainda incluir matérias que actualizam o saber e que ajudam a compreender melhor as matérias ensinadas habitualmente, por exemplo, grupos, grafos, fractais, caos, redes neuronais, onduletas, códigos, etc.
8. A avaliação, problema necessário e preocupante por vivermos numa sociedade de competição desenfreada, pode resolver-se, em parte, pela avaliação do caderno, a qual deve ser feita na presença do aluno e inquirindo-o sobre o que escreveu.
9. Ver lista de problemas em http://www.math.ist.utl.pt/~sramos/preuniv . A lista está em construção e convido todos os interessados a colaborarem, com contributos, críticas, correcções, sugestões, enviando-os por email para sramos@math.ist.utl.pt

Alguns problemas de Matemática da lista em construção para o 10º, 11º e 12º anos do Ensino Secundário[1]

- *Problema 1.* Da contagem: como contar o número de elementos de conjuntos finitos e infinitos?
- *Problema 2.* Da medida: como medir comprimentos comensuráveis? Recurso às fracções—números racionais.

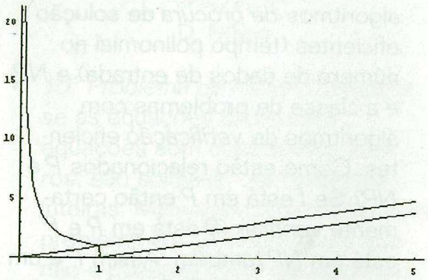
- *Problema 3.* Da representação dos números fraccionários: como obter expansões de números—dízimas periódicas, base 10 e 2, e fracções contínuas finitas?
- *Problema 4.* Da existência de outros números não racionais:como medir a 1-dimensão não comensuráveis? Teorema de Pitágoras. Demonstração de que raíz quadrada de 2 não é racional.
- *Problema 5.* Outros números não racionais:como medir o perímetro de um círculo ou a área usando como unidade um submúltiplo do raio? Medida da razão perímetro/ diâmetro de um círculo. Prova de que Pi é um irracional.
- *Problema 6.* Da representação dos números irracionais quadráticos: como representar os números reais (algébricos quadráticos) dízimas aperiódicas, base 10 e 2 e fracções contínuas periódicas? Números algébricos quadráticos são as soluções de equações quadráticas.
- *Problema 7.* Outras soluções das equações quadráticas: qual o significado das soluções complexas das equações do segundo grau, raízes de números negativos?
- *Problema 8.* Densidade dos racionais: existem racionais suficientes para medir aproximadamente os comprimentos? Quantos irracionais existem entre quaisquer dois racionais?
- *Problema 9.* O que é uma linha contínua? Construção dos reais, continuidade.
- *Problema 10.* Conceito de função: como representar graficamente funções? Exemplos concretos de funções. Escalas, unidades de medida e mudanças de escala.
- *Problema 11.* Translações e posição em relação à diagonal: que significado e que importância na iteração (composição da função com ela própria) têm os pontos de intersecção do gráfico da função com a diagonal? Noção de ponto fixo.
- *Problema 12.* Famílias de quadráticas, parametrizadas por um parâmetro e composição de funções: fixado o parâmetro o que pode acontecer às órbitas obtidas na iteração da quadrática? Como varia esse comportamento quando se muda o valor do parâmetro que caracteriza a quadrática? Conceito de comportamento assimptótico, regular ou caótico. Noção de bifurcação.
- *Problema 13.* Como contar pontos fixos das iteradas de funções quadráticas. Sucessões de números de pontos fixos das iteradas de funções quadráticas.

Os problemas precisam de ser formulados de uma forma mais clara e precisa. O objectivo é incluir toda a matéria através dos problemas e a aprendizagem será realizada pelas tentativas feitas para os resolver. O aluno tem de perceber e fazer seu o problema. Sentir a interrogação e o desafio da busca da solução. Quem não experimenta e vive o esforço do processo de descoberta não adquire a sensação da certeza do resultado. Apenas a aprendizagem resultante do exercício da inteligência e baseada na compreensão é eficaz. Aqui, o recurso ao computador pode tornar a aprendizagem mais rápida e menos cansativa, quando o computador é devidamente usado como *laboratório de experiências* e *base de conhecimentos.*

Exemplo desse uso:

É apresentado ao aluno uma função quadrática: $f(x) = 4\,b\,x\,(1-x)$, onde o parâmetro b começa por ser fixado e igual a 0.8, por exemplo. Pede-se que o aluno explore o que acontece na iteração dessa função. Dado um valor inicial a x o que acontece se repetidamente aplicarmos f a x? E o que acontecerá se variarmos b entre 0 e 1? Pretende-se ver até onde o aluno é capaz de chegar, de preferência sem ajudas. Isso não se pode obter em apenas uma aula, daí o interesse em dar muito cedo a lista dos problemas para investigarem. O aluno é livre de desenvolver o seu trabalho em qualquer lugar e recorrendo a qualquer ajuda. Pretende-se que o aluno chegue por ele ao *conceito de órbita*; que classifique os tipos de órbita ou pontos periódicos; que variando os parâmetros se aperceba da existência de *bifurcações*; que as classifique; que descubra as *ordens do Caos* nesse pequeno e barato laboratório de experiências; que introduza um *conceito de codificação*; que se aperceba da *complexidade das sucessões de símbolos*; que introduza *grandezas que meçam a complexidade* e dê a sua variação com o parâmetro b; que introduza um conceito de estabilidade e desenvolva métodos de a calcular. Por fim, que sugira aplicações dos resultados obtidos.

Depois, que repita o problema para a aplicação $g(x) = 1/x$ se $x<1$, senão $g(x)= x-1$; que introduza expansões de números positivos baseada na iteração de $g(x)$ (expansão em fracção contínua); que classifique os números conforme apresentem *expansão finita ou infinita*, isto é, que termine depois de um número finito de iteradas em 0 ou 1, ou *expansão periódica* ou *aperiódica*. Depois, que compare ao que se obtém usando a expansão habitual das dízimas.



Estude as sucessões de números geradas pelo número de pontos fixos da k iterada de f. Aplique a raiz k a esses números e estude a convergência quando k tende para infinito (medida da complexidade topológica de f). Compare para diversos valores de b.

Questões e perguntas, como estas ou outras igualmente interessantes e possíveis de o aluno expontaneamente ser levado a fazer, conduzem ao aparecimento do *espírito matemático*. O seu exercício, trabalho experimental e busca de provas levam a uma verdadeira aprendizagem que não se compara com a obtida tradicionalmente.

Em 2000, com o recurso generalizado à *Internet* e uma boa base de problemas: dados, perguntas e conhecimentos, é possível criar as condições para aprender, isto é, refazer a descoberta dentro de cada aluno, seja ele jovem ou adulto, estudante ou professor.

J. Sousa Ramos
Instituto Superior Técnico

[1]Ver http://www.math.ist.utlp.pt/~sramos/preuni. Estes problemas fazem parte de uma lista de 64.