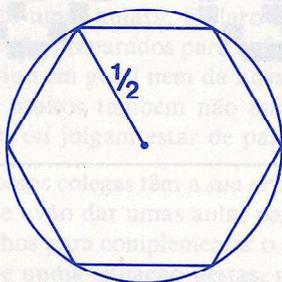


Calculando PI

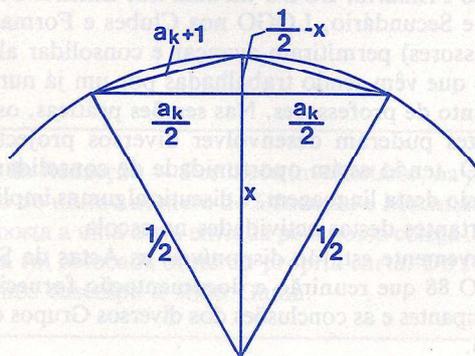
O cálculo de valores aproximados do número π é uma actividade susceptível de criar discussões interessantes em torno de diversos conceitos matemáticos, nomeadamente o conceito de limite. Existem diversos processos de obter um valor aproximado de π . Hoje abordaremos o cálculo através do processo de Arquimedes, considerando a aproximação da circunferência por polígonos regulares inscritos nessa circunferência.



Se considerarmos a circunferência de diâmetro 1, o seu perímetro será π . O hexágono inscrito terá perímetro 3, valor que poderá constituir uma primeira aproximação de π .

Poderemos a partir deste polígono construir novos polígonos inscritos na circunferência, obtidos sucessivamente por duplicação do número de lados do polígono anterior. Assim teremos polígonos com 12, 24, 48 lados... Naturalmente que os perímetros destes polígonos irão constituir valores aproximados por defeito do perímetro da circunferência, isto é, de π .

Consideremos o polígono de ordem k , em que o valor da medida do lado é a_k . Se duplicarmos o número de lados desse polígono passamos para o polígono de ordem $k+1$, em que a medida do lado é a_{k+1} . Se relacionarmos as medidas de a_k e a_{k+1} , poderemos construir um programa em LOGO que nos permita obter com facilidade os valores aproximados de π que procuramos.



Sendo x a medida do apótema do polígono de ordem k , é simples relacionar a_k , a_{k+1} e x e, eliminando x , obter uma relação entre a_k e a_{k+1} . Utilizando o teorema de Pitágoras teremos:

$$1) (a_{k+1})^2 = (a_k/2)^2 + (1/2 - x)^2$$

$$2) (1/2)^2 = x^2 + (a_k/2)^2$$

resultando, por eliminação de x ,

$$(a_{k+1})^2 = (1 - \sqrt{1 - a_k^2})/2$$

Desta forma podemos construir um procedimento recursivo simples que gere o valor do perímetro destes polígonos sucessivos. O procedimento **CALCULO.PI** é um exemplo:

```
to CALCULO.PI :n :a
make "novo.a sqrt ((1-sqrt(1-:a*:a))/2)
print :n print :n*:a
CALCULO.PI 2*:n :novo.a
end
```

Repare-se que neste procedimento as variáveis a e **novo.a** correspondem respectivamente a a_k e a_{k+1} , sendo n o número de lados do polígono. A chamada à recursão é realizada com o valor $2*:n$, duplicando o número de lados do polígono.

A introdução daquela relação no procedimento torna-se no entanto desastrosa. De facto, quando a_k diminui de valor, $1 - a_k^2$ é muito próximo de 1, tal como a raiz quadrada desse valor e a subtração de 1 tende a fazer perder algarismos significativos, isto é aumenta o erro. Esse erro (um número menor que 1) é então aumentado pela raiz quadrada seguinte e ainda pela multiplicação pelo número de lados que é necessário realizar para obter o perímetro do polígono.

Uma forma de resolver este problema é tornar racional o numerador da fracção, obtendo a expressão seguinte:

$$(a_{k+1})^2 = (a_k)^2 / (2 + 2\sqrt{1 - (a_k)^2})$$

Esta expressão não acarreta problemas de erro tão graves dado que a única subtração existente se realiza entre valores bastante diferentes. Assim, a segunda linha do procedimento **CALCULO.PI** pode ser substituída com vantagem por esta outra:

```
make "novo.a :a/sqrt (2 + 2*sqrt (1 - :a*:a))
```

Os valores que podemos obter com este procedimento dependem da versão LOGO que utilizarmos. Por exemplo, com o **LOGOWRITER**, obtivemos o valor

3.141592654, correspondente a 24 passos na iteração e a um polígono com 12 582 912 lados (!). Para além dos 24 passos a aproximação não melhora dado que o computador realiza o arredondamento dos valores calculados.

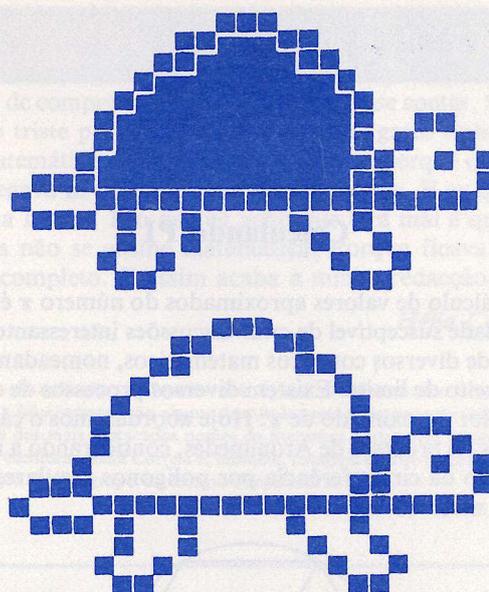
Utilizando a versão IBM-LOGO e a primitiva **SETPRECISION** (que fixa a precisão do cálculo num dado número de algarismos) podemos ter valores bastante melhores. Por exemplo, com **SETPRECISION 40**, o procedimento **CALCULO.PI 6 0.5** deu, em cerca de dois minutos (e 1.6×10^{35} lados!) o valor 3.1415926535897911985288787393140192102. Se tivermos a paciência de deixar o computador trabalhar durante cerca de dois dias podemos obter o valor aproximado de π com 1000 algarismos exactos...

3.1415926535897932384626433832795028841
 971693993751058209749442349883099412946
 832115974797454678553183221081922918347
 207964746468652011189411154040296289627
 400939112616414484974778696225990574304
 294428596972434408148420780952887521213
 579279186841982257370627744525979194595
 438831345806948962175697051793797491306
 854564481675371529568531973873859203853
 657494104863170009073889978510571218755
 385433033051327070519377190952636896874
 837514493992826063738877682671040746664
 152994641259583999391407970660315464747
 539507954151351989482565990661401633847
 089984960607327935773083547523985593960
 985938172006760621145453831638630937971
 141791007498306330682882871495681923370
 333907064605923687504376069131431222610
 232170837833087845745638663936494636853
 008965936745750641687416267999869931315
 481441819340224113232173187302376774007
 696020329464703190989407640334264325476
 567287276265593980589178945549056800889
 427762705257499342372690729745482688004
 466587528973344967429220476891817537513
 873760521827678092997052784437

João Filipe Matos

Bibliografia

Smith, D. (1987). Logo Serenpidity in the Calculus Lab. LOGO EXCHANGE, April.



Semana LOGO 88

Realizou-se na Escola Superior de Educação de Castelo Branco a segunda Semana do LOGO, organizada, em colaboração com esta Escola, pelos Núcleos do Projecto MINERVA do Departamento de Educação da FCL e do GEP, pelas Escolas Superiores de Educação de Portalegre e de Setúbal e pela APM. Mais de cem professores de todos os graus de ensino discutiram durante quatro dias as questões identificadas como mais importantes na problemática da utilização educativa dos computadores através de actividades em LOGO. Para além de uma sessão de iniciação à linguagem LOGO, os participantes realizaram uma simulação MOISES 1998 em que foi discutida uma situação hipotética de introdução de uma linguagem de programação na disciplina de Matemática.

As sessões dos quatro Grupos de Trabalho (LOGO no Ensino Primário, LOGO na aula nos Ensinos Preparatório e Secundário, LOGO nos Clubes e Formação de Professores) permitiram avançar e consolidar algumas ideias que vêm sendo trabalhadas por um já numeroso conjunto de professores. Nas sessões práticas, os participantes puderam desenvolver diversos projectos em LOGO, tendo assim oportunidade de consolidar o seu domínio desta linguagem, e discutir algumas implicações importantes destas actividades na escola.

Brevemente estarão disponíveis as Actas da Semana LOGO 88 que reunirão a documentação fornecida aos participantes e as conclusões dos diversos Grupos de Trabalho.