Programação Linear: relato de uma experiência

Jorge Filipe

Este texto relata uma experiência conduzida numa turma do 11° ano em que uma sequência de aulas foi dedicada à resolução de problemas de programação linear. Dirigidos à compreensão de situações reais, estes problemas de optimização proporcionam o estabelecimento de conexões entre o estudo analítico e o estudo gráfico de funções. O balanço destas aulas, principlamente das duas em que os alunos trabalharam em grupos, foi muito positivo.

A experiência decorreu no ano lectivo de 95/96, numa turma do 11° ano da Escola Secundária da Cidade Universitária.

O objectivo era o de, retomando o capítulo Geometria II iniciado mas não concluído no 10° ano, explorar assuntos como intersecção de rectas, resolução de sistemas de equações lineares e domínios planos definidos por rectas.

Ocorreu-me a ideia de explorar problemas que têm uma função objectivo a optimizar. Estes problemas são geralmente muito interessantes pela ligação que têm à vida corrente. Permitem, por exemplo, estudar o plano de produção óptimo de uma fábrica de modo a maximizar o lucro e/ou minimizar a despesa ou ainda calcular a quantidade máxima de determinado produto que se pode produzir com certas quantidades existentes dos seus componentes.

Sebastião e Silva (1975) considerava que a inclusão de problemas de optimização no ensino liceal "está a tornar-se cada vez mais imperiosa" pois "é um dos tipos de problemas que se apresentam hoje com maior frequência em Investigação Operacional, no domínio da Economia" (p. 75).

O tema aparece oficialmente, pela primeira vez, no programa do então criado Ano Propedêutico (1978-1980). Com a sua substituição pelo 12° ano, o tema é suprimido. Actualmente faz parte do programa do ensino secundário como tema facultativo.

O aspecto mais inovador destes problemas prende-se com o facto de poderem ser resolvidos por via geométrica à custa do traçado de rectas. A fase inicial da escolha das variáveis e definição das condições ou restrições é porventura aquela onde o aluno poderá sentir mais dificuldades, como aliás acontece em qualquer outro tipo de problemas. No entanto, estes problemas permitem, por um lado, desenvolver capacidades como a criatividade, o espírito de pesquisa e a abstracção, bem como as capacidades de formular e validar conjecturas e de argumentar com base no racíocinio matemático. Por outro lado, são problemas dirigidos à compreensão de situações reais no domínio da matemática e proporcionam o estabelecimento de conexões entre o estudo analítico e o estudo gráfico de funções.

Relativamente aos objectivos específicos, são problemas que envolvem múltiplos conhecimentos sobre funções lineares e rectas:

- interpretar e equacionar problemas
- representar rectas em referenciais cartesianos do plano
- identificar regiões do plano limitadas por rectas
- identificar a posição relativa de rectas e determinar pontos de intersecção de rectas
- identificar geometricamente pontos do plano como solução óptima dum problema
- verificar analiticamente que determinados pontos são solução óptima dum problema
- escolher, analisar e validar a solução de um problema.

Metodologia de trabalho

Nas duas primeiras aulas pensei expôr um problema de maximização e outro de minimização. Colocaria uma variante deste segundo problema mudando apenas uma condição (uma recta). Esta variante teria várias soluções.

Para facilitar que os alunos se empenhassem apenas na interpretação e resolução do problema sem estarem preocupados em escrever e em desenhar rectas (que só resultam se forem traçadas com todo o rigor), achei oportuno fornecer-lhes uma ficha com a explicação e resolução do problema *A encomenda do comerciante* (ver abaixo). À medida que ia fazendo a explicação no quadro, íamos também seguindo a ficha. Posteriormente propus outros problemas que elaborei, entre os quais *As caixas de balões* e *A papa do bebé* (ver abaixo). Em duas das aulas considerei interessante organizar os alunos em trabalho de grupo.

Pensei também em pedir-lhes que fizessem um balanço ou comentário sobre este projecto, referindo-se, nomeadamente, aos seguintes itens: interesse do tema, aspectos mais relevantes e dificuldades encontradas.

Problema *A encomenda do comerciante*

Um comerciante pretende adquirir uma quantidade não superior a 5 toneladas de certo producto que pode encomendar a duas fábricas. A fábrica A garante ao comerciante um lucro de 4 contos por tonelada mas não pode fornecer mais de 3 toneladas do produto. A fábrica B pode fornecer toda a quantidade pretendida mas apenas garante um lucro de 2 contos por tonelada.

Investigar qual a melhor maneira de o comerciante fazer as encomendas de modo a obter o lucro máximo.

Resolução do problema fornecida aos alunos

A finalidade do problema é determinar quais as quantidades, em toneladas, a encomendar a cada uma das duas fábricas, nas condições dadas, de modo a que o lucro obtido na venda da totalidade da mercadoria encomendada pelo comerciante, seja máximo.

Vamos então designar:

x - toneladas a encomendar à fábrica A

y - toneladas a encomendar à fábrica B

sendo portanto o par (x,y) a solução do problema.

Há duas questões distintas no enunciado do problema: uma em que se estabelecem restrições acerca das encomendas a fazer; outra que se dirige ao lucro a obter.

Vamos começar por analisar as *restrições*.

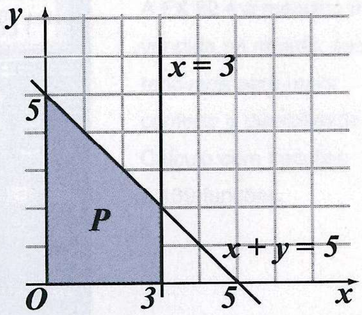
Como o comerciante pretende uma quantidade de produto não superior a 5 toneladas, então será $x+y \leq 5$ a primeira restrição.

A fábrica A não pode fornecer mais de 3 toneladas, logo $y \leq 3$ é outra restrição.

Uma vez que as quantidades x e y se referem a valores em toneladas, terá de ser $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Restrições ao problema:

$$\begin{cases} x+y \leq 5 \\ x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Conjunto das soluções admissíveis:

$$P = \{(x,y) \in R^2 : x+y \leq 5 \wedge x \leq 3 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$

Passemos à questão do lucro — a *função objectivo*.

Quatro contos por tonelada encomendada à fábrica A e dois contos à fábrica B dá o lucro Z definido pela função linear $Z=4x+2y$ que, geometricamente, representa uma família de rectas paralelas entre si e que se designam por *rectas de nível*.

Pretende-se então tornar máximo o valor de Z, sujeito às restrições estabelecidas. Assim, a solução óptima será um ponto que pertença simultaneamente a uma das rectas de nível e ao polígono que representa o conjunto P.

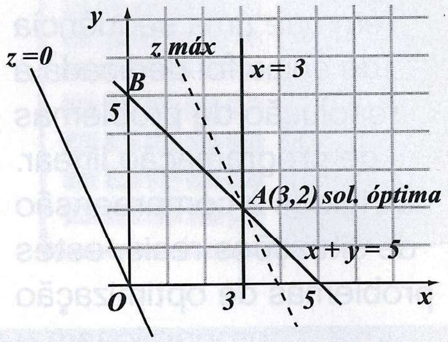
Fazendo por exemplo Z=0 (que não será certamente o máximo de Z pois assim o lucro seria nulo), vem

$Z=0 \Leftrightarrow 4x+2y=0 \Leftrightarrow y=-2x$

(1ª recta de nível, passando pela origem do referencial: solução (0,0)).

Deslocando-a paralelamente a si própria sobre o polígono, vamos encontrando soluções cada vez "melhores" até chegarmos à "última recta" que definirá a solução óptima.

Graficamente é fácil, neste caso, concluirmos que se trata do ponto A=(3,2) — ponto de intersecção das rectas x=3 e x+y =5.



Poderíamos ter dúvidas acerca do ponto que representa a solução óptima. Pode demonstrar-se que esta se encontra em um, pelo menos, dos vértices do polígono que representa o conjunto de soluções admissíveis. A via analítica vai permitir tirar as dúvidas:

Para a solução A(3,2) vem o lucro $Z=4\times3+2\times2=16$

Para a solução B(0,5) vem o lucro $Z=4\times0+5\times2=10$

Temos portanto a resposta a dar ao problema. O comerciante deve encomendar 3 toneladas à fábrica A e 2 toneladas à fábrica B, garantindo um lucro de 16 contos.

Problema *As caixas de balões*

A Mimi precisa de enfeitar uma sala com pelo menos 80 balões grandes (G) e 120 balões pequenos (P). Num supermercado encontra dois tipos de caixas contendo balões:

Caixa A - contém 6 balões G e 8 balões P - 100$00 cada caixa.

Caixa B - contém 2 balões G e 4 balões P - 40$00 cada caixa

Quantas caixas de cada tipo deverá comprar de modo a fazer a despesa mínima?

Variantes no preço dos balões

Como deverá ser feita a compra, supondo as seguintes variantes de preços:

a) Caixa A - 100$00 cada ; Caixa B - 60$00 cada

b) Caixa A - 90$00 cada ; Caixa B - 30$00 cada

Problema *A papa do bebé*

Uma mãe tem à sua disposição duas marcas diferentes de farinha láctea, A e B, para preparar o pequeno almoço do seu bebé e deseja obter as seguintes quantidades mínimas de nutrientes:

ferro - 600 mg; sódio - 400 mg; cálcio - 600 mg

As quantidades destes nutrientes existentes em 1 gr de cada tipo de farinha são dados pela tabela:

	Farinha A	Farinha B
Ferro	30 mg	10 mg
Sódio	10 mg	10 mg
Cálcio	10 mg	30 mg

Os preços são os seguintes: farinha A - 20$00 por grama; farinha B - 10$00 por grama.

Ajuda esta mãe a planear o pequeno almoço do seu bebé, de modo a que a despesa seja mínima.

Como decorreram as aulas

Na primeira aula fiz uma abordagem do problema *A encomenda do comerciante*.

A resolução correu bem, os alunos estavam interessadíssimos e o facto de não terem de escrever ajudou muito. É de referir que o problema tem uma solução óbvia da qual os alunos se aperceberam (compra-se o máximo possível na fábrica que dá mais lucro e o restante na outra). Este valor foi registado no quadro. Os alunos foram informados de que o método analítico e gráfico que se seguia para a resolução do problema era aplicável a outras situações, pelo que não perderam o interesse.

O mais difícil ou onde eles mostraram alguma "desconfiança", foi o considerar-se na função objectivo, a recta Z=0, e depois a família de rectas paralelas que se imaginou para se chegar à solução óptima. Com a resolução do problema *As caixas de balões*, ainda distribuído na primeira aula, esta dificuldade foi superada. Na segunda aula (hora seguinte) já este problema foi mais rapidamente resolvido, desta vez já com a ajuda dos alunos. Passou-se, depois, às questões relacionadas com *Variantes no preço dos balões*. Os alunos resolveram facilmente a alínea a). Começaram também a resolver a alínea b) e quando concluíram da

(continua na página 32)

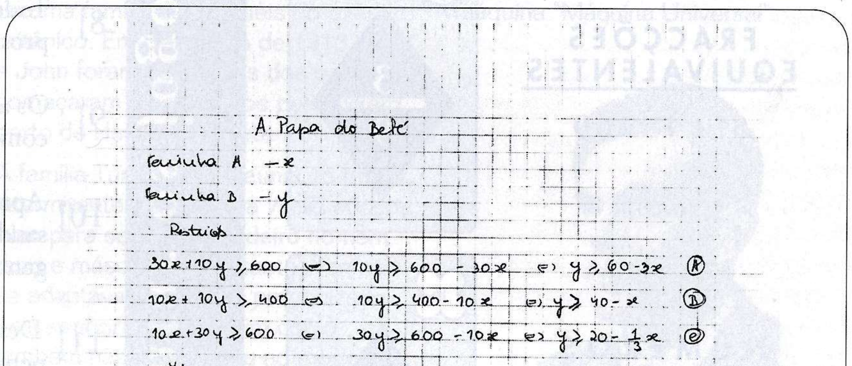


Figura 1 — Resolução do problema *A papa do bebé*, apresentada por um grupo de alunos

Maio de 1940 e o final da Segunda Guerra Mundial (1939-1945) terem sido destruídas pelos serviços secretos ingleses, há notícia que algumas deveriam dispor de um quantitativo superior a doze rotores *Enigma*.

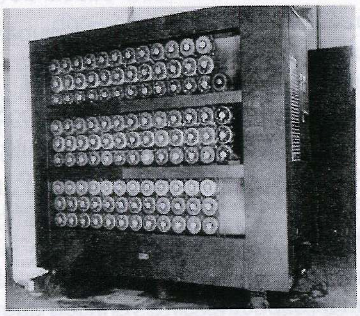


fig. 3 - *the Bombe*

Turing aplicou o processo clássico de "redução ao absurdo" para testar qual a sequência correcta para um determinado crib. Os rotores, na *the Bombe*, eram posicionados segundo uma sequência assumindo que era a correcta para cifrar o *crib*. A máquina começava a trabalhar e tentava provar que não era aquela a sequência correcta. No caso de não ser a sequência correcta a máquina passava automaticamente à segunda sequência que deveria ser testada e tentava provar que esta não era a sequência correcta. Se a máquina não conseguisse provar que a sequência era incorrecta, a sequência era anotada como boa, mas a máquina continuava a trabalhar pesquisando outras sequências correctas possíveis.

A máquina utilizava um sistema binário que podia realizar os testes lógicos muito rapidamente.

Deste modo os decifradores ingleses utilizaram a máquina para determinar qual o conjunto reduzido de combinações possível para um determinado *crib*. Se o *crib* era bom a mensagem era rapidamente decifrada, se não, também rapidamente, seriam encontradas contradições.

No entanto, neste processo não era considerada a utilização do "Stecker" que equipava as *Enigma* e permitia trocar pares de letras. Welchman concebeu então um dispositivo denominado "diagonal board" que fisicamente era construído segundo uma matriz quadrada de 26 x 26 terminais. Cada linha da matriz correspondia aos 26 conectores A a Z do "Stecker". Utilizando as 26 colunas era possível realizar fisicamente, através de conexões eléctricas, todas as trocas de pares de letras. Este aperfeiçoamento eliminava falsas sequências "verdadeiras" e reduzia a pesquisa das sequências de rotores a 26 x 26 x 26 = 17.576.

Com a utilização da *the Bombe*, em finais de 1940 as mensagens de rotina da Luftwaffe eram descriptadas pelos ingleses. A decifragem regular das mensagens dos U-Boat começou a ser realizada nos meados de 1941, mas em 1 de Fevereiro de 1942 as *Enigma* que equipavam os U-boat foram modificadas e perdeu-se a capacidade de decifragem que só foi recuperada no início de 1943.

Em Novembro de 1942 Turing regressa aos EUA, oficialmente como membro de ligação com os aliados, mas efectivamente foi construir, em colaboração com os Bell Laboratories, um sistema electrónico para cifragem das comunicações telefónicas entre Roosevelt e Churchill. Regressa a Inglaterra em Março de 1943 e dedica-se a um projecto de construção de uma máquina para cifrar comunicações telefónicas.

Alan Turing faleceu no dia 7 de Junho de 1954 em Manchester, Inglaterra, e presumivelmente cometeu suicídio.

Uma vida dominada pelo segredo o último dos quais, as suas realizações práticas, só foi revelado após a NSA — The National Security Agency — dos EUA ter desclassificado os documentos referentes à máquina *Enigma* e processos de cifragem e decifragem utilizados durante a Segunda Guerra Mundial em 2 de Abril de 1996.

José Maria Fernandes de Almeida
Univ. Évora

Programação linear (conclusão)

existência de rectas paralelas, expliquei que isso conduzia a que o problema tivesse várias soluções.

No final da aula fiquei com a sensação de que os alunos tinham percebido bastante bem o método de resolução. Aguardei com expectativa as próximas aulas.

Nas duas aulas seguintes trabalharam em grupo com bastante entusiasmo. Levei para estas aulas uma calculadora gráfica TI82, para o caso de quererem comparar gráficos. Entretidos que estavam nos seus trabalhos, ninguém recorreu à máquina.

Pedi-lhes que entregassem os trabalhos feitos e que escrevessem um comentário exprimindo a sua opinião quanto a este tema. A fig. 1 representa a resolução do problema *A papa do bebé* apresentada por um grupo de alunos.

Balanço

Fazendo um balanço destas quatro aulas e principalmente das duas em que trabalharam em grupo, depois de analisar os trabalhos que apresentaram e os comentários que escreveram, acho que este projecto foi inteiramente positivo. Os alunos trabalharam em bom ritmo, três grupos resolveram todos os problemas propostos, dois grupos resolveram três problemas e um grupo apenas resolveu um problema. Todos os grupos expressaram uma opinião positiva sobre estas aulas, consideraram os problemas muito interessantes e motivadores e gostaram sobretudo do facto de terem trabalhado em grupo. Embora em dois grupos a opinião fosse a de que os problemas eram difíceis, nos restantes grupos foram considerados simples e acessíveis.

Referências

Sebastião e Silva, J. (1975). *Guia para a utilização do compêndio de Matemática*. 1º Volume. Lisboa: GEP

Jorge Filipe
Esc. Sec. da Cidade Universitária