Tecnologias na educação matemática

Conjectura de Kepler demonstrada com amplo recurso aos computadores!

Certamente que o leitor já encontrou num mercado pilhas de laranjas ou de outros frutos esféricos. Existem muitos modos de construir esses empilhamentos de esferas. Um dos mais característicos é o que era usado, na época de Kepler, e certamente antes dela, para "arrumar" as balas de canhão (fig. 1).

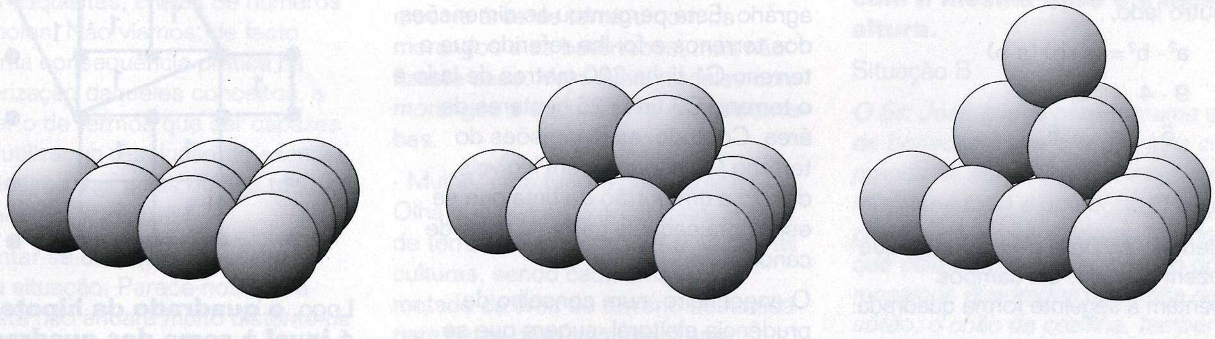

Fig. 1. Três fases do empilhamento tipo "balas de canhão".

Um pouco de história

Kepler, em 1611, descreveu este tipo de empilhamento e acrescentou:

> Este empilhamento é o mais compacto possível, de tal modo que em nenhum outro arranjo pode um maior número de esferas ser metido no mesmo recipiente.

Esta é a chamada conjectura de Kepler sobre empilhamentos de esferas. No Congresso Internacional de 1900, Hilbert incluiu esta conjectura de Kepler no nº 18 da sua famosa lista de problemas em aberto, que iria dominar grande parte da matemática do séc. XX. A formulação de Hilbert é naturalmente mais precisa:

Como podemos arranjar, de modo a obter a maior densidade no espaço, um número infinito de sólidos iguais, da mesma forma, por exemplo, esferas com um raio dado..., isto é, como podemos "empilhá-las" de modo que a razão do espaço ocupado para o espaço por ocupar seja a maior possível?

Existem infinitos empilhamentos diferentes de esferas, mas no entanto equivalentes, do ponto de vista da densidade, ao empilhamento da figura 1.

A razão referida por Hilbert é, para estes empilhamentos, $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$.

Já neste século, alguns resultados foram sendo obtidos. Assim, diversos matemáticos determinaram majorantes da densidade dos empilhamentos no espaço tridimensional. O limite superior foi reduzido sucessivamente de 0.828 para 0.7731.

Em 1953 L. Fejes Tóth reduziu a demonstração da conjectura de Kepler a um cálculo finito mas impossível (na época) devido à sua dimensão. Segundo refere Thomas Hales (que acaba de apresentar finalmente uma demonstração), Fejes Tóth imaginou que os computadores viriam mais tarde a ser usados para finalizar a demonstração:

Assim, parece que o problema [a conjectura de Kepler] pode ser reduzido à determinação do mínimo de uma função de um número finito de variáveis... Dado o rápido desenvolvimento dos computadores, é imaginável que o mínimo possa ser determinado com grande exactidão.

O anúncio da solução e reacções

Hales seguiu precisamente a sugestão de Fejes Tóth, recorrendo ao poder dos computadores actuais. Em 1994, propôs um verdadeiro plano de batalha em cinco passos para demonstrar a conjectura. Resultados parciais foram obtidos por Hales e pelo seu discípulo Sam Ferguson desde então. Finalmente, em Agosto passado, Hales enviou um e-mail, anunciando a solução, a vários matemáticos e instituições (ver parte na caixa na página seguinte).

No dia 26 de Agosto, Lee Rudolph envia uma mensagem para a lista de discussão do Math Forum chamada geometry-research, perguntando:

O que é que Thomas Hales acaba de demonstrar acerca de empilhamentos? É impossível perceber, a partir das notícias dos jornais, o que foi demonstrado. Alguém tem uma informação garantida? E acrescenta: aqui estão os primeiros parágrafos de um telegrama da Associated Press:

" **Matemático resolve um problema com 400 anos**

Ann Harbor, Michigan — Um matemático de Michigan gastou 10 anos e três gigabites de espaço em computador para demonstrar aquilo que qualquer marçano de uma mercearia já sabe: a melhor maneira de empilhar fruta é numa pirâmide.

'O problema parecia-me simples — disse Hales — mas quanto mais o estudava, mais via as suas complexidades.'

Mas testar todas as diferentes possibilidades de empilhamentos ultrapassou as possibilidades dos métodos de papel e lápis."

Uma hora depois, John Conway, o célebre geómetra de Princeton, responde a esta mensagem explicando a todos os participantes da lista o que era a conjectura de Kepler que Hales dizia ter demonstrado.

Uns dias depois, nova mensagem para a lista de um outro assinante:

From hales@math.lsa.umich.edu Wed Aug 19 02:43:02 1998
Date: Sun, 9 Aug 1998 09:54:56 -0400 (EDT)
From: Tom Hales <hales@math.lsa.umich.edu>
To:
Subject: Kepler conjecture
Dear colleagues,

I have started to distribute copies of a series of papers giving a solution to the Kepler conjecture, the oldest problem in discrete geometry. These results are still preliminary in the sense that they have not been refereed and have not even been submitted for publication, but the proofs are to the best of my knowledge correct and complete.

Nearly four hundred years ago, Kepler asserted that no packing of congruent spheres can have a density greater than the density of the face-centered cubic packing. This assertion has come to be known as the Kepler conjecture.

In 1900, Hilbert included the Kepler conjecture in his famous list of mathematical problems.

In a paper published last year in the journal "Discrete and Computational Geometry," (DCG), I published a detailed plan describing how the Kepler conjecture might be proved. This approach differs significantly from earlier approaches to this problem by making extensive use of computers. L. Fejes T'oth was the first to suggest the use of computers.) The proof relies extensively on methods from the theory of global optimization, linear programming, and interval arithmetic.

The full proof appears in a series of papers totaling well over 250 pages. The computer files containing the computer code and data files for combinatorics, interval arithmetic, and linear programs require over 3 gigabytes of space for storage.

Samuel P. Ferguson, who finished his Ph.D. last year at the University of Michigan last year under my direction, has contributed significantly to this project. [...]

Sim, mas alguém vai verificar a demonstração? Será que a comunidade matemática vai aceitar esta demonstração como válida? Penso que vamos ver muitas demonstrações deste tipo no futuro.

A resposta de John Conway é significativa. Por um lado, diz que

Existe um grande interesse em verificar esta demonstração [e acrescenta que], uma reunião vai ser convocada, de várias semanas, exactamente para isso, [e que] quando a demonstração tiver sido verificada [e corrigida de eventuais gralhas], estou convencido que vai ser aceite.

Mas quanto a haver muitas demonstrações deste tipo no futuro, diz que

"*infelizmente*, acho que sim." (itálico meu). É interessante ver que este tipo de demonstrações — envolvendo intensamente computadores — ainda são olhadas de lado por muitos matemáticos, mesmo por John Conway, não por desconfiarem da sua validade, mas certamente por estarem a compreender que um certo estilo de fazer matemática está lentamente a ser substituído por outro, em que parte do trabalho, mas não certamente o principal, acrescentamos nós, é feito "por máquinas".

Eduardo Veloso

Para mais informações sobre a conjectura de Kepler e a sua demonstração, visite o *site*: http://www.math.lsa.umich.edu/~hales/countdown/

Matemática na Internet para o 7º ano

Um exemplo positivo quanto ao apoio aos professores de Matemática na utilização dos computadores — e em particular da Internet — é a distribuição de um "livro do professor" para o 7º ano contendo, entre outros recursos, numerosas indicações de locais na rede onde é possível encontrar propostas e informação matemática adequadas ao ensino básico[1]. A presença entre os autores de Jaime Carvalho e Silva, autor da melhor página pessoal portuguesa sobre matemática, é desde logo uma garantia de qualidade. Entre as páginas recomendadas escolhemos as seguintes:

- http://www.eseset.pt/ip/ — uma página do Forum Pedro Nunes, da APM, com propostas de actividades de investigação;
- http://www.ies.co.jp/math/java/panta.html — uma página japonesa (em inglês!!) com um pantógrafo interactivo; faz parte de um conjunto muito interessante sobre geometria elementar (ângulos e rectas paralelas, figuras congruentes, semelhança, quadriláteros, etc.).
- http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/consulta.html — uma página brasileira onde se podem colocar perguntas de matemática ao Dr. Consultão (com arquivo de perguntas anteriores). Contém também outras informações e referências.
- http://softciências.ccg. pt/mocho/matematica/index.html — uma página com inúmeros links para outros recursos na Internet: em língua portuguesa, noutros idiomas, lista de páginas seleccionadas, etc.

Embora os recursos nas escolas ainda precisem naturalmente de melhorar, muitos professores dispõem já hoje de informação e meios que urge começar a aproveitar.

1. Autores: Domingos Fernandes, Isabel Vale, Lina Fonseca, Jaime Carvalho e Silva, Teresa Pimentel. Areal Editores.