A estrofóide

Manuela Ribeiro

Pteróide, kukumaeide e *logocyclique* são três designações de uma mesma curva. A primeira deve-se a Roberval (1602-1675), provavelmente o primeiro geómetra a ocupar-se do seu estudo (1645). Só mais tarde Montucci dá a essa curva o nome de *estrofóide recta*. A *estrofóide oblíqua* foi pela primeira vez, em 1669, considerada por Barrow (1630-1677), tendo este precursor do cálculo infinitesimal determinado as suas tangentes. Posteriormente Quetelet (1796-1874) estudou-a com o nome de *focal com nó*, daí o nome de *focal de Quetelet*.

Definições e métodos de construção

A) Definição geral

Sejam dados

- uma curva *s*;
- um ponto *O*, chamado pólo;
- um ponto *A*, o chamado ponto fixo;

consideremos (fig. 1)

- uma recta passando por *O*, seja *r*;
- o ponto de intersecção de *r* com *s*, seja *Q*;

os pontos *P* e *P'* sobre r tais que $\overline{QP} = \overline{QP'} = \overline{QA}$.

O lugar geométrico dos pontos *P* e *P'*, quando *r* toma todas as posições possíveis; designa-se por estrofóide de *s* relativa ao pólo *O* e ao ponto fixo *A*.

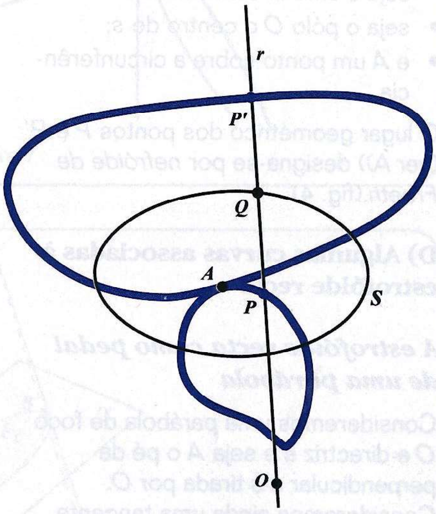


Figura 1. A curva s é neste exemplo uma elipse e a estrofóide é uma curva com dois ramos.

B) Estrofóide recta e estrofóide oblíqua

Se a curva *s* é uma recta e o pólo *O* um ponto qualquer, temos dois casos a considerar:

- o ponto *A* é o pé da perpendicular à recta *s* tirada pelo ponto *O*;
- o ponto *A* é um ponto de *s* distinto do pé da perpendicular a *s* tirada pelo ponto *O*.

O lugar geométrico dos pontos *P* e *P'*, obtidos pelo processo descrito em A), designa-se respectivamente por:

- *estrofóide recta* de *s*, relativa ao pólo *O* (fig. 2);
- *estrofóide oblíqua* de *s* relativa ao pólo *O* e ao ponto fixo *A* (fig. 3)

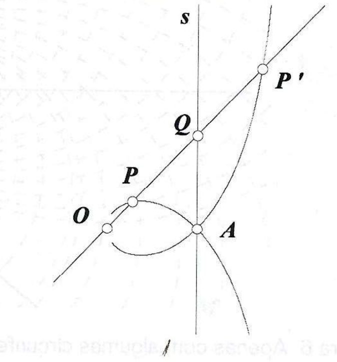


Figura 2

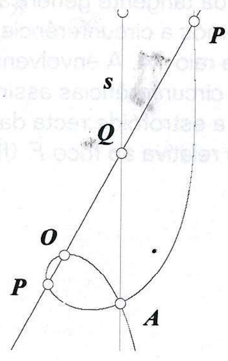


Figura 3

C) Estrófoide de uma circunferência/Nefróide de Freeth

Vejamos agora a estrofóide de uma circunferência no caso particular do pólo ser o centro da circunferência e o ponto fixo ser um ponto da circunferência. Assim:

- seja *s* uma circunferência;
- seja o pólo *O* o centro de *s*;
- e *A* um ponto sobre a circunferência.

O lugar geométrico dos pontos *P* e *P'* (ver A)) designa-se por *nefróide de Freeth*.(fig. 4).

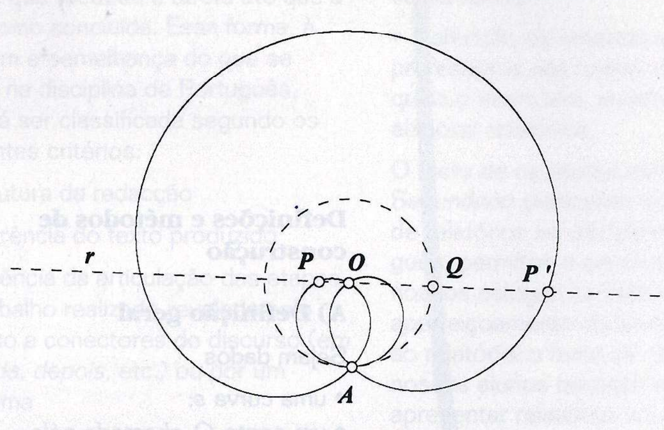


Figura 4

D) Algumas curvas associadas à estrofóide recta

A estrofóide recta como pedal de uma parábola

Consideremos uma parábola de foco *O* e directriz s e seja *A* o pé da perpendicular a *s* tirada por *O*. Consideremos ainda uma tangente genérica *t* à parábola e seja *V* o pé da perpendicular a *t* tirada pelo ponto *A*. É possível demonstrar (ver bibliografia) que a estrofóide recta da directriz *s* relativa ao pólo *B* (vértice da parábola) é a curva pedal da parábola relativa ao ponto *A* (fig. 5).

Esta conjectura é relativamente fácil de formular utilizando o *Geometer's Sketchpad*.

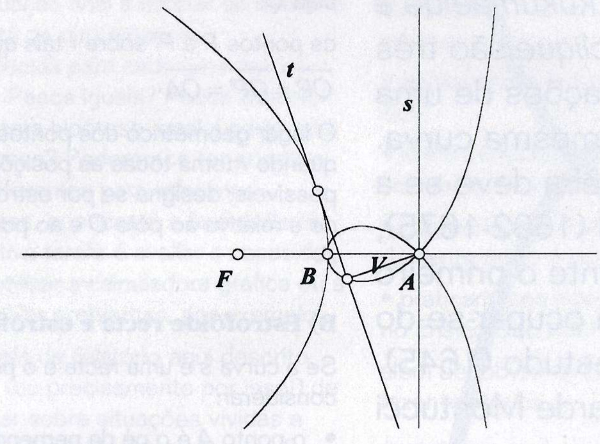


Figura 5

A estrofóide como envolvente de circunferências

Seja *T* o ponto de tangência, na parábola, da tangente genérica t, e consideremos a circunferência de centro *T* e raio *TA*. A envolvente das família de circunferências assim obtidas é a estrofóide recta da directriz *s* relativa ao foco *F*. (fig. 6)

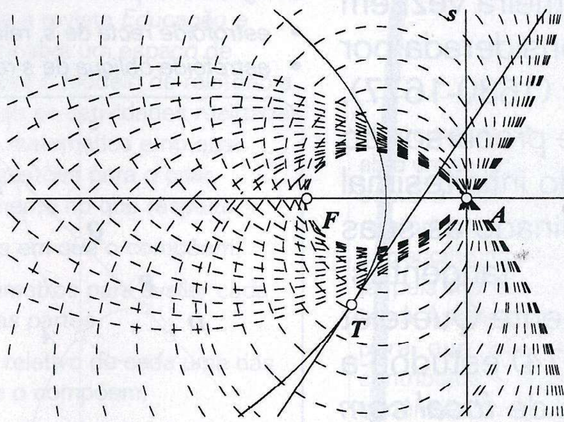


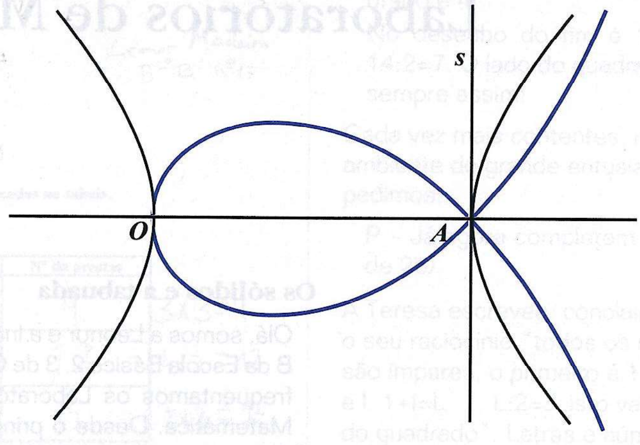
Figura 6. Apenas com algumas circunferências traçadas, a estrofóide começa a surgir.

Estrofóide recta e hipérbole equilátera como curvas inversas

Consideremos a estrofóide recta relativa à recta *s* e ao pólo *O* (fig. 7). Tomemos como centro de inversão o ponto *A* e raio da circunferência de inversão o segmento *OA*. Pode demonstrar-se (ver bibliografia) que a inversa da estrofóide é a hipérbole equilátera de vértices *O* e *A*.

Esta conjectura é relativamente fácil de formular utilizando o *Geometer's Sketchpad*.

Nota. O inverso de um ponto *P* relativo a uma circunferência *c* de centro *O* e raio *r* é o ponto *P'*, situado na semirecta *OP* e verificando $\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$.



Fgura 7

A focal de Quetelet e a estrofóide

Consideremos uma superfície cónica de revolução e uma secção por um plano α intersectando todas as geratrizes, isto é, uma elipse (fig. 8). Na figura 9 a superfície cónica está representada pelo triângulo *VMN*, plano da secção pela recta *α* e a elipse pelo segmento *AB*. Podemos imaginar que o plano da secção roda em torno de um eixo *e* que é a recta do plano α tangente à elipse no ponto *A*. Para cada posição do plano α, obtemos uma elipse diferente (e mesmo outras cónicas) e portanto a posição dos focos F_1 e F_2 (que para certas posições do plano se reduzem apenas a um foco, quando a secção é uma parábola) também varia, embora se situe sempre no plano do triângulo *VMN*. Se procurarmos determinar o lugar geométrico dessas posições dos focos, utilizando o *Sketchpad*, chegaremos à conjectura (que é possível demonstrar) que se trata de uma estrofóide oblíqua, desenhada na figura 9. É a focal de Quetelet.

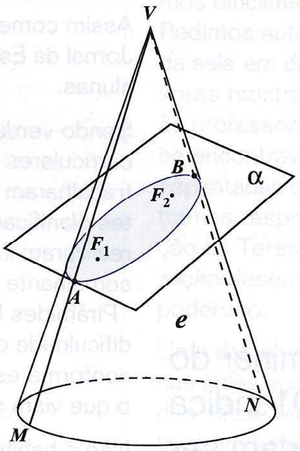


Figura 8

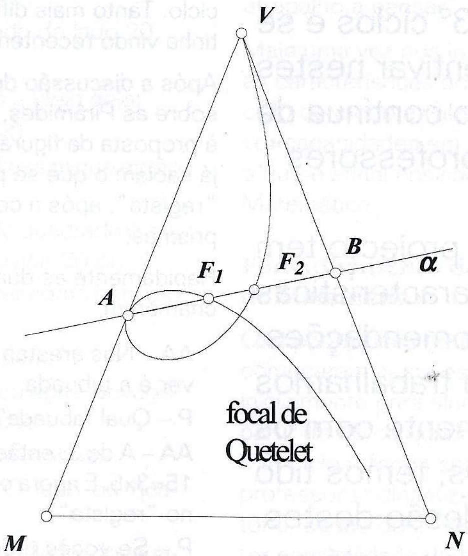


Figura 9

Bibliografia

Lockwood, E. H.(1961). *A Book of Curves*. Cambridge: Cambridge University Press.

Teixeira, F. Gomes (1908). *Traité des Courbes Spéciales Remarquables*. Coimbra: Imprensa da Universidade.

Manuela Ribeiro
Esc. Sec da Cidade Universitária