Para este número seleccionámos

"Hábitos de pensamento": um princípio organizador para o currículo (II)[1]

E. Paul Goldenberg

Publicamos a segunda parte do artigo de Paul Goldenberg, de que puderam ler a parte inicial no último número da revista. Enquanto na primeira parte o autor descreve o que pode ser um currículo em que o eixo central são os "hábitos de pensamento", no presente texto são descritos e exemplificados alguns deles.*

Alguns "hábitos de pensamento matemático" apropriados para o desenvolvimento curricular antecedente à especialização em matemática.

Os modos de pensar em matemática descritos a seguir, e os respectivos exemplos ilustrativos, são todos extraídos da colecção *Connected Geometry*.

A tendência para visualizar

Existe um grande conjunto de capacidades, relacionadas com este hábito de pensamento, e que não são ensinadas. Os tipos de visualização que os alunos precisam, tanto em contextos matemáticos como noutros, dizem respeito à capacidade de: criar, manipular e "ler" imagens mentais de aspectos comuns da realidade; visualizar informação espacial e quantitativa, e interpretar visualmente informação que lhe seja apresentada; re*ver* e analisar passos anteriormente dados com objectos que podiam tocar e desenhar; e interpretar ou fazer aparecer, como por magia imagens de objectos ou ideias que nunca foram vistos. Vem a propósito dizer que a habilidade para imaginar o que nunca foi visto é importante não apenas para abstrações matemáticas como pontos. Não podemos cortar o tecido para coser uma manga, ou desenhar os planos de uma estante, sem "ver" primeiro, na nossa cabeça, o que ainda não pôde ser visto com os próprios olhos.

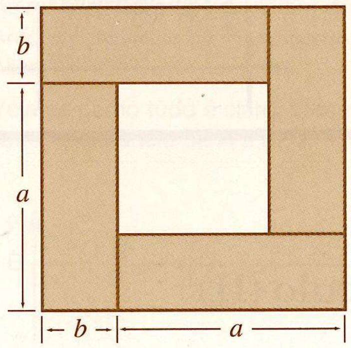
Tal como todas as destrezas, estas exigem aprendizagem, e devem ser sistematicamente construídas e exercitadas se se pretende que sejam adquiridas. As tarefas que contribuem para essa aprendizagem incluem propostas "não-matemáticas" como criar e ler imagens mentais para responder a perguntas do tipo "quantas portas tem a própria casa" (ou "de que cor estava vestido o companheiro do pequeno almoço"), ou analisar aspectos visuais (por exemplo, uma face ou uma "figura geométrica impossível") de modo que se torne possível desenhá-las. Também incluem tarefas reconhecidamente mais matemáticas como imaginar a sombra de um cubo iluminado obliquamente ou os tamanhos e disposição de quadrados (ou cubos) que utilizam dois pontos específicos do espaço como vértices, ou os sólidos que se obtêm quando se empilham camadas finas de material ou quando se rodam figuras planas. Estas destrezas têm larga aplicação. Para desenhar uma cena a partir da nossa imaginação, devemos ser capazes de imaginar as sombras correctamente; para fazer o *design* de uma peça de roupa, devemos ser capazes de imaginar o resultado final, e inferir correctamente a forma plana de partida e as transformações para a tornar na forma correcta tridimensional; para analisar um sólido em cálculo infinitesimal, ajuda a possuir algum sentido da natureza e carácter do sólido.

A visualização, talvez especialmente a componente da re*visão*, é também um instrumento valioso para apoiar os tipos de experiências mentais que orientam os alunos nas investigações matemáticas e os ajudam a construir conexões lógicas e demonstrações. As destrezas que apoiam a visualização têm um preço: o seu desenvolvimento deve constituir uma parte explícita da aprendizagem do estudante.

Interpretação de diagramas

Para utilizar bem a visualização em matemática, devemos respeitar o seu poder, reconhecer as suas limitações e conhecer as suas formas e aplicações. A comunicação corrente em assuntos como comparações quantitativas ou diagramas de estruturas empresariais, faz uso intensivo de representações visuais de informação que é basicamente não-visual. O mesmo acontece em matemática. Para um matemático, um diagrama como o da fig. 1, é uma "demonstração visual" da relação algébrica que o acompanha.

* Este artigo é traduzido e publicado com autorização do autor. Foi publicado em 1996, com o título "'Habits of mind' as an organizer for the curriculum" no *Journal of Education* 178 (1):13-34, da Boston University.



$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$$

figura 1

Mas isto não é, e *não deve* ser de todo, uma demonstração para quem tenha falta de preparação e perspectiva para saber (1) que aspectos do desenho são específicos demais e devem ser ignorados (o desenho mostra tanto os tamanhos absolutos como relativos de *a* e *b*, que são irrelevantes), e também (2) que aspectos do desenho não estão suficientemente específicos e devem ser assumidos (enquanto os tamanhos são arbitrários e podem ser ignorados, os ângulos não são arbitrários e devem ser tomados como rectos mesmo se, num desenho executado sem muito cuidado, eles não o sejam). Por outro lado, os que estão mais maduros em matemática compreenderão (mesmo que possam não detectar a "falha" por si próprios) que o diagrama *apenas* é uma abreviatura de uma demonstração válida da identidade descrita pela equação quando *a* e *b* são ambos números reais positivos. Muitos currículos usam diagramas como este, mas não fornecem suficientes oportunidades explícitas aos alunos para aprender melhor como produzir ou transformar estes diagramas, ou para compreender o seu conteúdo e limitações. Uma vez mais, estas capacidades não são naturais e necessitam ser aprendidas.

A tendência para descrever, formal e informalmente, relações e processos

Para fazer matemática, deve-se ter tendência para detectar e ter em atenção relações (quantitativas, espaciais, hierárquicas ou de inclusão, estruturais, etc), processos e conexões lógicas entre ideias, e deve-se ter capacidades para as descrever. Deve-se ser capaz de dizer com clareza o que estas coisas significam. A linguagem natural (informal) é boa para esta última tarefa: exprimir o significado geral de uma situação, as linhas mestras de uma argumentação, ou dizer "do que se trata". Para exprimir o restante significado matemático, precisamos de diversas linguagens formais — sistemas simbólicos como a notação algébrica para exprimir relações quantitativas, entre outras, linguagens de computador como o Logo, para exprimir algoritmos e processos, e os vocabulários e estilos específicos que se usam no discurso matemático para argumentar com clareza. Embora os detalhes e a necessidade de rigor possam ser específicos da comunicação matemática, as mesmas capacidades de expressão são importantes na comunicação, num sentido amplo: devemos ser capazes de exprimir o sentido geral do que queremos dizer de modo não-técnico, e devemos ser capazes de acrescentar precisão de modos variados, incluindo quantitativos, relativos a procedimentos, e outros. Um currículo, ao mesmo tempo que comunica uma selecção de conteúdos matemáticos, deve estar organizado de modo a ajudar os alunos a desenvolver estas capacidades essenciais da comunicação matemática.

Podemos notar, a propósito deste ponto, que temos aqui um outro caso em que as capacidades e a tendência para as utilizar estão interrelacionadas. Uma pessoa *pode* reparar em coisas que está mal preparado para descrever, mas está em melhor posição para tornar mais acutilante a sua percepção se for capaz de falar sobre ela. Do mesmo modo, uma pessoa pode aprender um vocabulário, sem ter muito que dizer com ele, mas, tendo alguma coisa de valor sobre a qual falar, torna a tarefa mais fácil. Uma das coisas não compensa a outra, neste caso. Um currículo atingirá certamente melhor cada um dos objectivos se tiver os dois em conta.

O papel das definições na linguagem matemática merece menção especial. Um aspecto importante do bom uso da linguagem matemática é o cuidado que se tem com as definições. No uso corrente, a maior parte das palavras tem muitas definições diferentes. Definir os termos que se usam tem um papel extremamente importante no pensamento matemático, mas uma tal sensibilidade às *nuances* ou ambiguidades é também importante em direito, e para falar e escrever. Para desenvolver este tipo de preocupação em matemática, os alunos devem ter oportunidade não apenas para usar definições, mas também para as analisar e para criar as suas próprias definições. Para comunicar com clareza — e mesmo, em certas circunstâncias, para pensar com clareza — os alunos necessitam de ter ocasião para dar conta e reflectir sobre aquilo que querem dizer com os termos matemáticos que usam, e ver como o contexto afecta o significado.

Por exemplo, consideremos a definição de circunferência. Esta é habitualmente definida como lugar geométrico dos pontos (do plano) equidistantes de um dado ponto, mas raramente temos tendência para pensar muito sobre o que queremos dizer com distância. Se somos obrigados a deslocarmo-nos apenas em duas direcções perpendiculares (no reticulado de rectas perpendiculares característico da "geometria do motorista de táxi", usando a "métrica de Manhattan"), então um conjunto de pontos que estão todos à mesma distância de um dado ponto (ou seja, uma circunferência, pela nossa definição), tem, na geometria do motorista de táxi (e não do corvo voador) a forma de um quadrado com uma diagonal horizontal.

Na fig. 2, cada um dos pontos da "circunferência" dista do centro, para o motorista de táxi, três quarteirões.

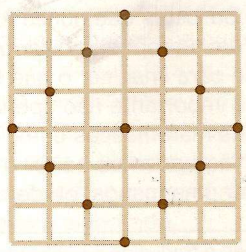


figura 2

Outras definições de circunferência — por exemplo, "uma curva de curvatura constante" — conduz a diferentes conjuntos generalizados. Mesmo no plano euclidiano, este conjunto inclui tanto circunferências como rectas; não é óbvio o que curvatura possa significar no plano da geometria do motorista de táxi.

Em alternativa, e com uma mensagem em parte diferente, imagine o que seria uma lista de cilindros pouco vulgares. A imagem de cilindro está tão ligada à forma e tamanho de uma lata de refrigerante que as pessoas têm que fazer um esforço para pensar em casos extremos: cilindros quase planos como numa moeda ou estreitos como um pedaço rígido de esparguete.

Um tal exercício tem muito mais consequências do que estender a nossa imagem de cilindro. É um dos primeiros exercícios para nos tornarmos conscientemente atentos à *independência* dos atributos que definem a forma: neste caso, reconhecer que o diâmetro da base e a altura são distintos, e que podem ser manipulados independentemente.

A tendência para traduzir informação apresentada verbalmente em informação visual (e vice-versa)

Em geometria, é muitas vezes pedido aos alunos que dêem sentido visual a descrições verbais (por exemplo, "Seja o ponto *M* a intersecção de duas medianas do triângulo *ABC* inscrito na circunferência *k*..."), e reciprocamente.

A capacidade de efectuar tais traduções tem muito valor também fora da matemática, não apenas para dar indicações claras ao viajante, mas também para descrever verbalmente uma bonita paisagem. De novo, situações matemáticas e outras que o não são tanto diferem, mas mais no pormenor do que em essência.

A tendência para fazer experiências (*tinker*)

Tal como ficamos a conhecer melhor os cilindros ao reparar nos seus atributos independentes e fazendo ensaios com eles, também ficamos a conhecer melhor um problema quando procuramos os seus atributos independentes, os mudamos e observamos os resultados. Os alunos devem aprender a fazer experiências e explorações. Um problema que é colocado a duas dimensões pode ser reexaminado a uma ou a três. Um problema que diz respeito a rectas pode ser reexaminado com linhas curvas. Um problema que é proposto no plano pode ser reexaminado numa esfera, num cilindro ou num toro. Um problema de números inteiros pode ser reexaminado com números reais. Um problema proposto em geometria euclidiana pode ser reexaminado na geometria do motorista de táxi. Quando os alunos fazem os seus próprios ensaios, ficam a reconhecer os factores independentes de uma situação problemática. Quando o currículo promove tais experiências, está a fornecer o contraponto necessário para que as ideias importantes se distingam nitidamente.

A tendência para procurar invariantes

Está aqui, em conjunto com a predisposição para encontrar argumentos lógicos (demonstração), o coração da matemática. Portanto esta procura de invariantes deve estar no centro do curso de matemática. Na medida em que a matemática é a ciência dos padrões, ela trata da procura da estrutura comum subjacente a coisas que em tudo o resto parecem completamente diferentes: coisas absolutas ou relativas que permanecem fixas enquanto o que as rodeia ou partes delas variam. Arranjos visuais "mostram um padrão" quando alguma coisa (por exemplo, relações locais) permanece constante apesar da mudança numa outra coisa (por exemplo, a região particular onde estamos a focar a nossa atenção); os esquemas de classificação e as definições exprimem o que há de comum ou de equivalente entre elementos que não são idênticos; as funções são relações invariantes entre objectos matemáticos. O facto da invariância *estar* no centro da matemática significa que *qualquer* conteúdo pode ser usado para ajudar os alunos a criar este hábito de pensamento: e no entanto o conteúdo pode ser ensinado de um modo que não torna visível para os alunos este aspecto globalizante .

Para vermos o que pode significar a procura de invariantes, consideremos este exemplo da geometria. No interior de uma circunferência dada, colocar um ponto *P*. Por esse ponto *P* fazer passar uma corda a partir de um ponto *A* sobre a circunferência. Proceder agora à experiência mental de mover o ponto *A* sobre a circunferência, fazendo-o dar uma volta completa.

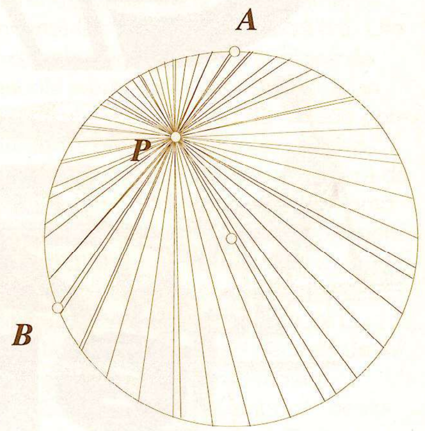


figura 3

Quando *A* se move, a outra extremidade da corda move-se também, e variam o comprimento (a não ser que *P* seja o centro da circunferência) e o declive da corda. As duas áreas em que a corda dividem o círculo também variam. Tudo parece variar, excepto aquilo que fixámos de princípio — uma circunferência e um ponto *P* fixos. Mas uma mente matemática sente-se infeliz se ficar por aqui. É uma característica da predisposição para a matemática perguntar se haverá alguma coisa nesta situação que *não* varie. De facto, há: uma relação funcional simples existe entre as duas partes da corda — o seu produto é constante —, sendo a distância entre *P* e o centro da circunferência um parâmetro desta função.

Até que tornemos este facto "óbvio", pela descoberta da razão porque tal acontece (por meio de uma boa demonstração), ele permanece inesperado.

Até termos encontrado essa demonstração, ainda não fizemos tudo o que um matemático faz, mas o acto de procurar invariantes é o início da matemática.[1]

Não esqueçamos de salientar que a noção de invariância é também essencial fora da matemática. Não podemos falar com inteligência sobre a história de uma língua, de um país ou de uma pessoa, sem identificar o que foi preservado e o que mudou. (Apenas posso falar sobre o meu próprio crescimento se assumir a existência de um Eu, através de mudanças em, virtualmente, todas as células do meu corpo e todos os pensamentos da minha mente). As categorias são também afirmações do que é invariante e o resultado da procura de invariantes. O dialecto "cockney" é uma abstracção das características comuns linguísticas de numerosas pessoas que têm vozes diferentes, falam sobre coisas diferentes, gaguejam ou não, e assim por diante. A língua inglesa é ainda uma abstracção maior — um conjunto invariante de propriedades de uma amostra muito maior de exemplos de modos de falar — e a família de línguas "germânicas" ou a reconstrução "indo-europeia" dizem respeito a invariantes ainda mais abstractos.

A tendência para misturar experimentação e dedução

A descoberta de padrões não é matemática (a matemática não é descoberta com base em dados), mas esta não é também feita apenas pela lógica. Mesmo antes da invasão dos computadores, os matemáticos sempre fizeram experiências. Muitas vezes estas experiências forneciam não apenas a conjectura, mas também alguma indicação sobre como poderia ser alcançada uma demonstração, ou alguma estrutura que mais tarde podia ser aperfeiçoada de modo a constituir uma demonstração. De modo semelhante, a procura lógica de uma demonstração sugere muitas vezes novas experiências. Para adquirir a compreensão da matemática tal como é feita, os alunos devem poder experimentar ambos os tipos de actividade, e ver como interagem. Um centro sério de incidência sobre a demonstração e sobre as suas partes constituintes (por exemplo, construir, e não apenas utilizar, definições) deve existir no currículo de Matemática e ser sistematicamente desenvolvido. Uma possível estratégia é ajudar os alunos a ver como podem (cuidadosamente) traduzir uma experiência em palavras, de modo a construir uma demonstração. (Para um exemplo, ver o ponto relativo aos algoritmos, mais à frente).

A tendência para construir explicações sistemáticas e demonstrações para invariantes observados

Um currículo razoável de matemática deve ter demonstração (adaptada à maturidade dos alunos) em todos os níveis e em todos os temas matemáticos, não apenas no curso de geometria do secundário. O que interessa não é a forma de uma demonstração, mas o acto de construir demonstrações e o conhecimento da estrutura de boa demonstração são essenciais em matemática.

Ao mesmo tempo que a demonstração é característica única da matemática, por causa dos critérios cuidadosos e do elevado nível que a matemática impõe ao seu raciocínio, o subjacento hábito de pensamento — mostrar como uma ideia deriva de outras — é uma disciplina central na literatura, na argumentação jurídica, na ciência e em geral, quando se pensa com clareza. *Todos* os alunos necessitam ter esta ideia básica. Os alunos não devem, certamente, confundir a indicação que dão das suas fontes e do seu raciocínio num trabalho de inglês com a apresentação dos dados e dos teoremas numa demonstração matemática e, por isso, para serem matematicamente "letrados", os alunos precisam mais do que a ideia básica. Mas é bom ser salientada a ideia de que podemos encadear os nossos pensamentos coerentemente, em qualquer disciplina, quando apresentamos e analisamos uma demonstração em matemática.

A tendência para construir algoritmos e raciocinar acerca deles (uma das muitas conexões com a álgebra)

Um princípio inicial no planeamento de *Connected Geometry* — de onde deriva mesmo o seu nome — era ajudar os alunos a construirem para si próprios uma imagem mais unificada da matemática. Em consequência, os problemas, o estilo, a estrutura e os conteúdos que seleccionámos deveriam, ao longo do currículo, fazer conexões entre a incidência central geométrica do curso e as ideias mais importantes da álgebra (o estudo de algoritmos, estrutura, cálculos, contagem, ...) ou da análise (o estudo da mudança contínua...).

A matemática analisa frequentemente algoritmos. Contrastando com isto, a experiência típica dos alunos é aprender algoritmos mas raramente inventá-los ou mesmo analisá-los. Um exemplo flagrante é a aritmética da escola elementar. A proficiência na execução do algoritmo da divisão com números grandes pode ter relativamente pouca importância nesta era da calculadora, mas compreender como funciona o algoritmo (e não meramente como obter na calculadora o resultado) explica, por um lado, porque se obtém um padrão de repetição na expressão decimal de 1/7, e porque se obtém o mesmo padrão de repetição (embora "deslocado") na expressão de 4/7. A análise do algoritmo está bem dentro das capacidades dos alunos da escola elementar — enquanto alcançar proficiência na sua execução pode requerer trabalho compulsivo enfadonho — e mesmo assim fornece certos conhecimentos que são a base para estudos em álgebra e em teoria dos números. O mesmo se pode dizer em relação à compreensão do algoritmo da multiplicação.

Os alunos que seguem o currículo *Connected Geometry* aprendem muito sobre a construção e análise de algoritmos num contexto geométrico. Alguns exercícios pedem aos alunos que escrevam algoritmos em Logo e que os comparem para descobrir invariantes geométricos; e depois, a partir da análise dos algoritmos, para construir demonstrações para esses invariantes. Outros requerem apenas a "tecnologia pobre" do papel e das tesouras.

É bem instrutivo estudar um exemplo com algum detalhe.

Veremos como a análise de um algoritmo conduz à análise da demonstração. A proposta inicial feita aos alunos pede-lhes que resolvam o problema de encontrar um processo seguro de transformar, por dissecção (dividir em partes e reuni-las de novo noutra figura), um triângulo num paralelogramo. Depois é-lhes pedido que transformem, do mesmo modo, um trapézio num rectângulo. Normalmente os alunos descobrem rapidamente soluções para o primeiro problema (por exemplo, cortar segundo uma mediana e rearranjar as duas partes), mas é um desafio maior para eles mostrar porque razão funciona o processo — isto é, demonstrar que as duas partes se podem unir de forma a obter um quadrilátero, não um pentágono, e que todas as outras propriedades dos paralelogramos se verificam.

Quando mais tarde transformam trapézios em rectângulos, de novo encontram rapidamente um algoritmo, mas tipicamente este algoritmo exige que se veja o trapézio como um rectângulo "ensandwichado" entre dois triângulos (fig. 4), da seguinte forma:

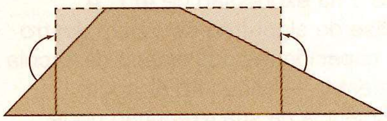
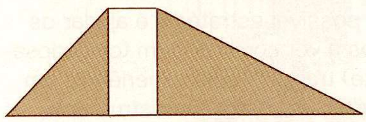


figura 4

Construa os pontos médios dos lados não paralelos do trapézio. A partir destes pontos, trace perpendiculares aos lados paralelos, cortando dois pequenos triângulos do trapézio. Rode os triângulos 180° em torno dos pontos médios criando um rectângulo.

Quando se pede aos alunos para justificar este procedimento como um algoritmo geral — para transformar qualquer trapézio num rectângulo — eles recorrem frequentemente aos algoritmos que construíram e provaram para os triângulos.

Esta solução tem elegância, no sentido em que se apoia em trabalho anterior já demonstrado. O facto de conduzir também a uma fórmula correcta para a área do trapézio parece confirmar que este processo é um algoritmo seguro para fazer a dissecção de um trapézio de modo a transformá-lo num rectângulo.



Resolve-se para os dois triângulos; a forma exacta do rectângulo intermédio não interessa.

figura 5

No entanto, tem uma falha importante. Nada garante que um trapézio geral possa ser decomposto em dois triângulos ladeando um rectângulo central.

Se se faz a dissecção do trapézio da figura 6

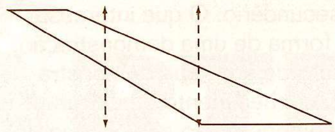


figura 6

de acordo com o algoritmo apresentado, o resultado é esta baralhada:

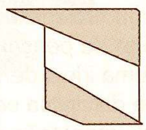


figura 7

É fácil ver que cortes adicionais deveriam ser feitos para resolver a situação, mas o algoritmo, tal como foi apresentado, falha. Este problema ilustra vários princípios, mas o foco aqui é a análise do algoritmo — que é equivalente à análise da demonstração.

A tendência para raciocinar por continuidade (uma das muitas conexões com a análise)

Tal como o Logo é uma tecnologia que centra a atenção na estrutura algorítmica, instrumentos para geometria dinâmica como o *Geometer's Sketchpad*, *Cabri* ou o *Geometry Inventor* ajudam a ampliar a ideia de funções num domínio contínuo e a construir conexões entre a geometria e a matemática da mudança contínua. Com estes instrumentos dinâmicos, os alunos criam construções, e arrastam um ponto sobre o ecrã ao mesmo tempo que observam o efeito que isso tem num outro objecto (ponto, segmento, medição, ...) ou relação entre objectos. Isto é a imagem de uma função num domínio contínuo em que a variável independente não é um número, o valor da função não é necessariamente um número e a definição é expressa não em notação algébrica mas geométrica. O livro *Optimization: A Geometric Approach* (EDC, 1996) desenvolve e usa muitas ideias do cálculo (por exemplo o teorema do valor intermédio, mas também ideias sobre curvas de nível e condições de tangência para encontrar extremos, e outras ainda) sem utilizar a maquinaria algébrica. Além de construir ligações conceptuais entre estes dois ramos da matemática, esta abordagem ajuda os alunos a desenvolver ideias que depois a linguagem algébrica pode exprimir e ampliar, em contraste com a abordagem tradicional de estudar uma linguagem sem ter ideias para exprimir com ela e depois, mais tarde, basear essas ideias numa linguagem ainda mal dominada.

Repensar a organização curricular de modo mais amplo

Argumentei a favor de que os modos de pensar, e não os produtos desses modos de pensar, devem orientar a organização do currículo de matemática. As razões que adiantei eram basicamente uma argumentação a favor da igualdade de oportunidades (*equity*), ou seja que esta era uma forma de servir *todos* os alunos e não apenas uma parte.

O conceito de procura de invariantes é um primeiro exemplo de uma ideia matemática, central e de nível elevado, que pode ser considerada de uma forma que permite a aprendizagem de bons princípios de pensamento que transcendem as disciplinas. A literatura sobre a "transferência" espontânea não é encorajadora, mas porque razão devíamos esperar que a transferência ocorra quando os temas são pensados de modo completamente isolado?

Quando a incidência central é o conteúdo matemático e ficam na rectaguarda os modos de pensar — as ideias que na realidade estão mais livres para ser transferidas —, estes podem perder-se. Quando o foco é nos modos de pensar, e especialmente quando os exemplos salientam a possibilidade de transferência, existe uma maior probabilidade de que sejam feitas as conexões correctas — conexões que servem a matemática de modo admirável, mas são úteis a *todos* os alunos independentemente dos seus interesses específicos.

De facto, existe um outro conjunto de razões que torna esta causa ainda mais defensável. Pode argumentar-se que utilizar factos e procedimentos na organização do currículo em lugar dos modos como as pessoas descobrem os factos e inventam os procedimentos *não* serve nenhum aluno adequadamente. A verdade é que pensar no futuro é simplesmente um negócio arriscado. A experiência ensina-nos que quando os alunos da primeira classe de hoje sairem da escola secundária, vão encontrar muito provavelmente problemas que ainda não existem. Dada a incerteza sobre as necessidades da próxima geração de jovens adultos, não podemos decidir que matemática ensinar baseados nos problemas actuais ou mesmo na nossa melhor previsão dos problemas de amanhã. Questões como "Devemos ensinar teoria dos grafos ou geometria no espaço? fazer modelação com álgebra ou com folha de cálculo? O teorema do binómio é parte do núcleo central do currículo ou é apenas para alguns alunos?" são as perguntas erradas a fazer, e, planear novos currículos em torno das respostas a estas questões é uma má ideia.

Durante gerações, os alunos do ensino secundário estudaram na escola qualquer coisa a que se *chamava* matemática mas que tinha pouco a ver com o modo como a matemática é criada ou aplicada fora da escola. Uma razão para este facto tem sido uma visão do currículo em que os cursos de matemática são apenas vistos como mecanismos para comunicar resultados e métodos. Os alunos aprendem a resolver equações, a calcular áreas e a determinar os juros de um empréstimo. Nesta perspectiva da matemática, a reforma do currículo significa simplesmente substituir um conjunto de resultados já estabelecidos por outro (talvez mais novo ou mais na moda). Assim, em vez de análise, os alunos estudam matemática discreta; em vez de geometria euclidiana, estudam geometria fractal; em vez de probabilidades, estudam análise de dados. Mas o que fazem com árvores binárias, com curvas flocos de neve e com diagramas de dispersão é a mesma coisa que faziam com hipérboles, triângulos e distribuições binomiais: aprendem algumas propriedades, resolvem alguns problemas aplicando as propriedades, e passam à frente. Os contextos em que trabalham podem ser mais modernos, mas os métodos que utilizam estão tão longe da matemática como há vinte anos.

Um modo alternativo de pensar o currículo volta às avessas as prioridades. Muito mais importantes que resultados específicos da matemática são os hábitos de pensamento que foram utilizados pelas pessoas que criaram esses resultados. Mas esta maneira de ver o currículo tem uma aplicação muito mais ampla do que apenas na matemática. O problema da transferência, que parece sempre escapar às nossas abordagens, estaria mais perto de ser resolvido se *todos* os currículos começassem por perguntar "Que 'hábitos de pensamento' precisamos para viver em segurança, com saúde, com emprego e produtivos, socialmente conexos...?" e, especialmente, "Que hábitos de pensamento precisamos de modo que nos saibamos adaptar a obstáculos imprevistos e novos problemas que tenhamos que enfrentar para viver seguros, com saúde, produtivos, etc.?"[2] (Esperem! Devemos também perguntar que capacidades secundárias e conhecimentos precisamos, mas deixemos isso para um pouco mais tarde). As categorias de que nos lembramos são um pouco mais amplas do que as que listámos acima, mas não essencialmente diferentes. Para matemática, poesia, política ou direito, ou a gestão da própria saúde, precisamos de ser capazes de comunicar com clareza; para a gestão financeira pessoal, questões jurídicas, ecologia, gestão dos negócios ou matemática, necessitamos ter capacidade para raciocinar sob um conjunto de condições restritivas; para tudo o que requeira diagnóstico, desde detectar os males de um carro até detectar os males de uma pessoa, precisamos de saber como testar e experimentar, como procurar relações de dependência e como raciocinar logicamente. E assim por diante. Nenhum item deste *tipo* de lista pertence exclusivamente a uma disciplina actual. A Matemática pode ajudar a ensinar estes itens, mas o mesmo podem fazer outras disciplinas.

A segunda questão deveria, provavelmente, ser a seguinte: "Que contribuições especiais para tal hábito de pensamento pode dar a *minha* disciplina?" Dado que o nosso mundo é cada vez mais interdisciplinar e dada a minha preferência para pensar em ideias que atravessam as disciplinas, poder-se-ia perguntar porque razão continuo a pensar em termos de disciplinas. Existem duas razões. De um ponto de vista prático, as pessoas especializam-se, seja por interesse seja por limitações de tempo e oportunidade. Por isso, não é razoável esperar que muitas pessoas sejam ao mesmo tempo amplamente interdisciplinares e sejam profundas em várias áreas. A segunda razão é que não apenas as pessoas mas os próprios domínios especializados dependem de uma atenção sustentada e centrada. A distinção biologia-química-física dos meus anos no secundário deu lugar à bioquímica, biologia-molecular, química física, biofísica e muitas outras áreas que atravessam aquela distinção, mas não são tanto áreas interdisciplinares como disciplinas novas e ainda mais especializadas. Para fazerem progressos, elas não podem estar isoladas, mas também não podem ser difusas ou diluídas. Para ser mais específico, se a matemática deve permanecer uma disciplina, então não pode ser dissolvida até ao desaparecimento.

Assim, pode *ainda* fazer sentido as escolas terem departamentos de Matemática, Arte, Ciência, História, Música, Línguas Estrangeiras, e Inglês, apesar de lhes ser pedida uma organização do currículo que não consista nos conteúdos que as distinguem. Além disso, cursos nestes departamentos devem também ser fieis à natureza, aos métodos e aos conteúdos referentes a cada caso, tal como afirmei que os cursos de matemática devem ser. Mas a razão de tal fidelidade não é que se pretenda formar historiadores, investigadores matemáticos ou artistas, nem é sequer a organização por assuntos justificável por "largueza de vistas". Se qualquer destas razões fosse verdadeira, devíamos então perguntar por que não existem departamentos de linguística, psicologia, ciência política ou economia nas escolas públicas. Existem demasiados assuntos para aprender — muito que *vale a pena* aprender — que possa caber na educação geral.

Por um lado, desenvolver com mais profundidade algumas áreas faz-se à custa das outras; mas, por outro, a tentativa de expor os alunos a demasiada matéria torna impossível alcançar profundidade em *qualquer* delas, o que, pode argumentar-se, prejudica *todas* as áreas, dado que os alunos não chegam a experimentar o que é pensar continuadamente ou prestar mais do que uma atenção superficial a determinado tema. Uma parte da aprendizagem para enfrentar um futuro que apenas pode ser fracamente previsto requer saber que é possível adquirir proficiência num domínio, seja de uma disciplina intelectual, seja uma capacidade manual ou mesmo um passatempo (*hobby*). Isto quer dizer, num certo sentido, que escolher departamentos da forma tradicional *não* prejudica disciplina alternativas. Pode ser que se venha a perguntar, na base de outras considerações independentes, se a organização tradicional nos departamentos habituais é a melhor, mas a perspectiva dos hábitos de pensamento não fornece, por si mesma, base para isso.

Só depois de termos perguntado, em primeiro lugar, quais são os hábitos de pensamento que precisamos e qual é a melhor contribuição que a nossa disciplina pode dar para o seu desenvolvimento, chega o momento de colocar questões sobre conhecimentos e capacidades. "Que conhecimentos e capacidades, na minha disciplina, ajudam melhor a transmitir a mensagem sobre o pensamento (que o currículo comporta)?", e, considerando a lista que obtemos como resposta à primeira questão, "Quais podem transmitir da melhor forma o gosto (*flavour*) da minha disciplina?" e, no fim de tudo, "Quais podem ser mais amplamente úteis aos alunos?". Haverá muitos conteúdos na lista final, como afirmei anteriormente, dado que não é possível fazer um curso para "ensinar a pensar" sem ter qualquer coisa sobre a qual valha a pena pensar — mas a perspectiva é diferente.

Vem a propósito dizer que esta mudança de perspectiva deve conduzir-nos a uma situação confortável. Todos costumamos divertir-nos acerca daquelas coisas que costumavamos saber, que esquecemos e sem as quais passamos perfeitamente. Como as pessoas esquecem coisas como que ao acaso — mesmo aquelas que *precisam* realmente de saber e têm um dia que aprender outra vez porque *não podem* passar sem elas — a incidência central nos hábitos de pensamento fornece alguma coisa mais difícil de esquecer. Porque razão é mais difícil de esquecer? Porque, se os hábitos de pensamento seleccionados *são* verdadeiramente tão amplamente úteis como afirmei, então estarão a ser experimentados, exercitados e usados constantemente, contrariamente aos nomes das capitais dos estados, que podemos aprender na escola primária e realmente necessitar para o nosso trabalho muitos anos mais tarde, mas não tiveram que ser recordados no período intermédio. E existe ainda outro facto reconfortante. A nossa experiência, quando testámos os materiais da *Connected Geometry*, revelou que quando as ideias matemáticas se tornaram os veículos pelos quais os alunos compreenderam que podiam *pensar* bem, e podiam reinventar as ideias sempre que precisavam delas, mesmo os conteúdos eram provavelmente menos esquecidos. Parece razoável supor que o mesmo é verdadeiro também noutras áreas.

Notas

1. Uma mensagem adicional deste exemplo é que a matemática não diz respeito a situações arbitrárias! Substituir a circunferência por um quadrado ou uma elipse pode ser interessante, ou não. Podemos *sempre* encontrar *alguma coisa* que não varie, mas só raramente é alguma coisa que valha o tempo de ser comunicada ou o papel para ser escrita. Como reconhecemos os resultados importantes? Em parte, vendo se o resultado conecta bem com outras ideias matemáticas. A demonstração estabelece estas conexões, e esta é uma razão porque os matemáticos por vezes procuram mais do que uma demonstração para o mesmo resultado.

2. Pessoalmente, acredito que aquilo que nós apelidamos "inteligência" é, em circunstâncias normais, mais uma questão de oportunidade e aprendizagem que de nascimento. Por isso, também pergunto "Que hábitos de pensamento distribuirão melhor a inteligência?" ou mais simplesmente " Como podemos ajudar as pessoas a ser mais espertas?" mas isto deve esperar até ser o assunto de outro artigo.

Referências bibliográficas

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., and J. Mark. 1994."Habits of Mind: an organizing principli for mathematics curriculum" Journal of Mathematical Behavior (no prelo).

Education Development Center, 1996. *Connected geometry* (colecção de cinco volumes. *Habits of Mind: An Introduction to Geometry. The Cutting Edge: Congruence, Area, and Proof. A Matter of Scale: Pathways to Similarity and Trigonometry. Coordinates and vectors: Connecting Algebra and Geometry.* E *Optimization: A geometric Approach.* Dedham, MA: Janson Publications.

E. Paul Goldenberg
Education Development Center, Inc.
(Tradução de Eduardo Veloso)