A lemniscata de Bernoulli

Adília Ribeiro e Helena Torres

Alguns métodos de construção

1º Método

- Desenhar uma circunferência de centro *C* e raio *r*. (fig. 1)
- Assinalar o ponto *O* (centro da lemniscata) de modo a que a sua distância a *C* seja $r\sqrt{2}$.
- Traçar uma recta *m* que passe pelo ponto O e intersecte a circunferência nos pontos *Q* e *Q'*.
- Na recta *m* assinalar os pontos *P* e *P'* equidistantes de *O* a uma distância igual a *QQ'*.
- Quando a recta *m* ocupa todas as posições possíveis, os pontos *P* e *P'* descrevem a *lemniscata de Bernoulli*.

Este método foi a base para uma construção com o *Sketchpad* (fig. 2)

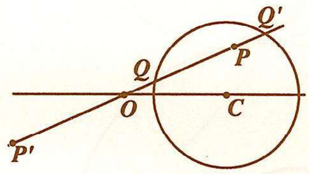

fig. 1

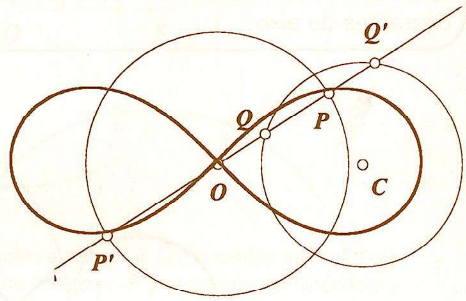

fig. 2

2º Método

- Desenhar duas circunferências, C_1 e C_2, de raio *r*, e cujos centros distem $r\sqrt{2}$. (fig. 3)
- Traçar um segmento de extremidades *M* e *M'*, de comprimento $r\sqrt{2}$ e tal que *M* e *M'* sejam pontos respectivamente de C_1 e C_2.
- Construir o ponto *P*, médio do segmento *MM'*.
- Quando o segmento *MM'* percorre todas as posições ppossíveis, *P* descreve a lemniscata de Bernoulli.

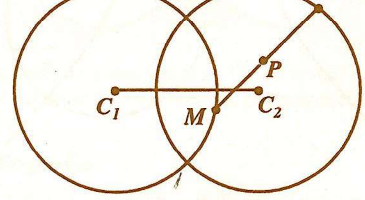

fig. 3

Nota: o segmento *MM"* nunca poderá estar paralelo a C_1C_2.

Este método fundamenta a construção de um mecanismo (fig. 7) para desenhar a lemniscata. Serve também de base para uma construção da lemniscata com o Sketchpad (fig. 5). Note-se que nesta construção foram necessários dois mecanismos (a cheio e a tracejado, para traçar a curva completa.

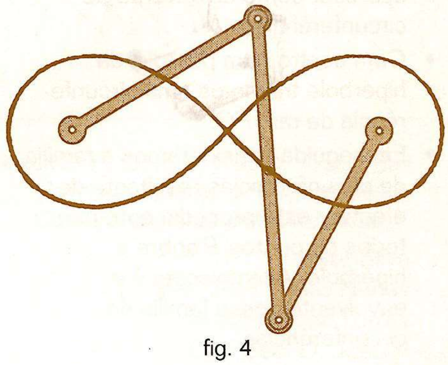

fig. 4

A lemniscata foi descoberta por Jacob Bernoulli (1654/1705), em 1694. Neste ano publicou um artigo sobre uma curva em forma de oito ou de um laço dado com uma fita (*lemniscus*). Não estava no entanto convencido que a curva por ele descrita fosse uma curva de Cassini (ver caixa no texto). As propriedades gerais da lemniscata foram descobertas por Giovanni Fagnano em 1750.

Ovais de Cassini

Giovanni Cassini (1625-1725), que dedicou grande parte da sua vida à astronomia, estudou em 1680 umas curvas, com forma oval, que julgava corresponderem aos movimentos relativos da Terra e do Sol. Ficaram conhecidas como as ovais de Cassini ou cassinianas. Caracterizam-se como o lugar geométrico dos pontos cujo produto das distâncias a dois pontos fixos (focos) é constante. Se a distância entre os focos é $2a$ e a constante b^2, a lemniscata de Bernoulli obtém-se quando $a = b$. As ovais de Cassini podem obter-se como secções planas de um toro por planos paralelos ao seu eixo (fig. 5). A lemniscata de Bernoulli é a secção por um plano paralelo ao eixo e tangente ao "equador interior" do toro. Na fig. 6, tirada da pág. da Internet http:/www.best.com/~xah/SpecialPlaneCurves_dir/CassinianOval_dir/cassinianOval.html, mostram-se as sucessivas ovais de Cassini para planos a distâncias diferentes do eixo.

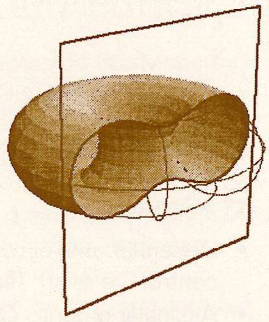

fig. 5

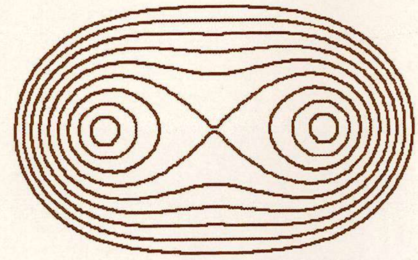

fig. 6

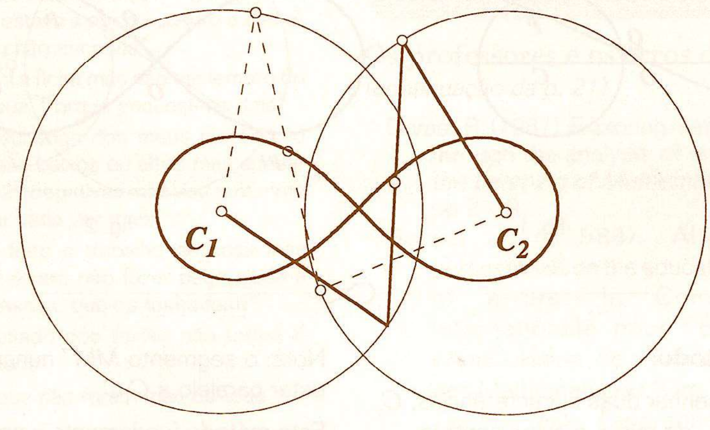

figura 7

3º Método

- Neste método partimos de uma hipérbole equilátera de centro em O e focos F e F'. A lemniscata vai aparecer como envolvente de circunferências.
- Com centro num ponto P da hipérbole traçamos uma circunferência de raio PO.
- Em seguida consideramos a família de circunferências resultante de efectuar este procedimento para todos os pontos P sobre a hipérbole. A lemniscata é a envolvente dessa família de circunferências.

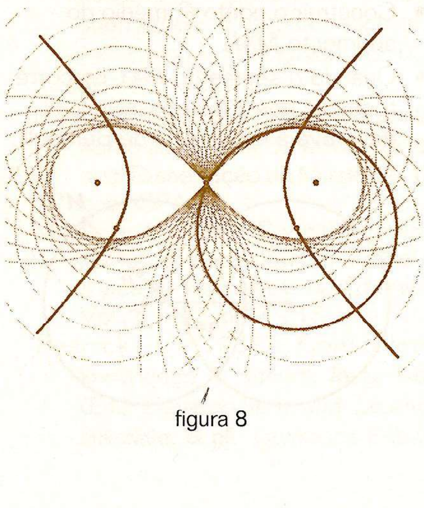

figura 8

Equações cartesiana e polar e algumas propriedades

Partindo de um dos métodos anteriores de construção e escolhendo um sistema apropriado de eixos coordenados (fig. 8), pode deduzir-se a seguinte equação da lemniscata de Bernoulli

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

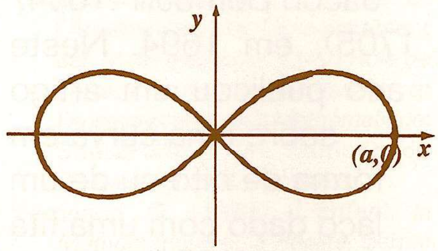

figura 9

Na teoria das curvas planas são estudadas dois tipos de lemniscatas, a lemniscata elíptica e a lemniscata hiperbólica, de equações respectivamente

$$(x^2+y^2)^2 = a^2y^2 + b^2x^2 \text{ e}$$

$$(x^2+y^2)^2 = b^2x^2 - a^2y^2.$$

Como se vê, a curva estudada por Bernoulli é um caso particular de uma lemniscata hiperbólica, em que $b = a$.

Substituindo x e y, na equação (1), respectivamente por $\rho\cos\theta$ e $\rho\operatorname{sen}\theta$ e simplificando, obtemos a equação polar da lemniscata

$$\rho^2 = a^2\cos(2\theta).$$

Algumas propriedades

A lemniscata de Bernoulli tem simetria bilateral em relação aos dois eixos coordenados e simetria central em relação à origem *O*.

Consideremos os pontos F_1 e F_2, de coordenadas respectivamente $(a\sqrt{2}/2,0)$ e $(-a\sqrt{2}/2)$ (fig. 8). Podemos notar que estes pontos correspondem aos pontos C_1 e C_2 da fig. 3. Pois bem, estes dois pontos F_1 e F_2 gozam da seguinte propriedade:

> É constante o produto das distâncias de um ponto *P* qualquer, sobre a lemniscata de Bernoulli, a F_1 e a F_2.

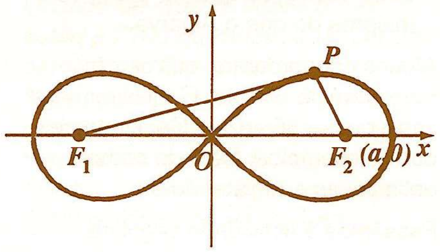

figura 10

Naturalmente, os pontos F_1 e F_2 são os chamados *focos* da lemniscata. A propriedade que enunciámos prova-se considerando as duas distâncias $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ e determinando o seu produto, em que *P* é um ponto de coordenadas (x,y) verificando a equação $\rho^2 = a^2\cos(2\theta)$. Conclui-se que esse produto é igual a $a^2/2$.

Lemniscata e hipérbole rectangular

Já encontrámos um método de definir a lemniscata a partir de uma hipérbole rectangular. Vamos referir-nos agora à lemniscata como inversa e como pedal em relação à origem de uma hipérbole rectangular (*inversa* e *pedal*: ver glossário na pág. 27 do número anterior da revista).

Inversa

Seja *c* uma curva cuja equação em coordenadas polares é $\rho = f(\theta)$. A curva *c'*, de equação $\rho = g(\theta)$, será a inversa de *c* em relação a uma circunferência de centro na origem e raio *k* se $f(\theta)g(\theta) = k^2$, para qualquer θ. Se a equação da curva c é da forma $\frac{\rho}{k} = f(\theta)$, então é fácil ver que a inversa tem por equação $\frac{k}{\rho} = f(\theta)$.

No caso da lemniscata, cuja equação em coordenadas polares é, como vimos, $\rho^2 = a^2\cos(2\theta)$, então a inversa tem por equação $a^2 = \rho^2\cos(2\theta)$. Mas esta é precisamente a equação da hipérbole equilátera ou rectangular (assímptotas ortogonais)[1].

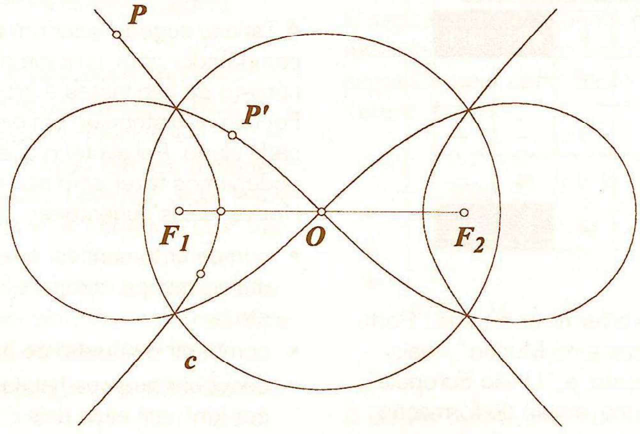

figura 11. F_1 e F_2 são os focos da hipérbole rectangular. *O* é o centro da hipérbole e *c*, de centro em *O*, é a circunferência de inversão. *P* é um ponto da hipérbole e *P'* o seu inverso.

Pedal

Outra relação entre a lemniscata e a hipérbole rectangular consiste no facto da lemniscata ser a pedal desta hipérbole em relação ao seu centro.

Isto quer dizer que se a partir do ponto O tirarmos perpendiculares às tangentes à hipérbole, o lugar geométrico dos pés das perpendiculares é a lemniscata de Bernoulli.

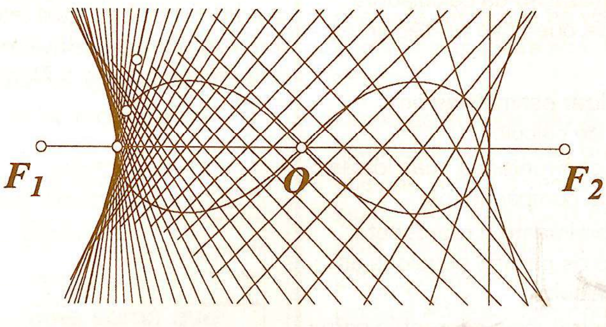

figura 12

Notas

1. Os desenhos das figuras 11 e 12 foram feitos recorrendo ao programa *Sketchpad*.

Bibliografia

Lockwood, E. H.(1961). *A Book of Curves*. Cambridge: Cambridge University Press.

Teixeira, F. Gomes (1908). *Traité des Courbes Spéciales Remarquables*. Coimbra: Imprensa da Universidade.

Adília Silva
Esc. Sec. Pedro Nunes
Maria Helena Torres
Esc. Sec. D. João V