



cobertura de toda a superfície do quadrado da hipotenusa, quadrado  $[AGIC]$ , com a totalidade das porções integrantes das superfícies dos quadrados dos catetos  $[AFPB]$  e  $[BHJC]$ , convenientemente deslocadas de um sítio para o outro, da figura anterior para a figura seguinte. (fig.s 2, 3, 4, 5 e 6).

Esta sequência de figuras pode ser obtida quase de imediato, pela aplicação de uma "Macro" conveniente sobre dois segmentos de recta, traçados em ângulo recto, como elementos iniciais de qualquer uma das figuras. (fig.s 7 e 8)

Até aqui não se usou nunca a propriedade dinâmica da figura, mas o teorema ficou demonstrado, já que o triângulo inicial foi escolhido de modo arbitrário. Não se trata de nenhum triângulo especial em particular, o que confere generalidade à demonstração.

Na grande exposição de Matemática aberta à população que tem acompanhado os últimos ProfMat, encontrase um outro exemplo de demonstração geométrica do mesmo teorema. Este exemplo mostra um outro enquadramento das áreas dos quadrados dos catetos, na área do quadrado da hipotenusa, a partir de

uma figura de madeira, em que os seus elementos integrantes, triângulo e quadrados respectivos permanecem sempre iguais a si mesmos. É uma figura estática. Contudo ninguém duvidará que está ali uma demonstração generalizada, porque a escolha do triângulo que serve de base neste exemplo não obedeceu a nenhum critério especial em particular. Foi uma escolha arbitrária. Escolheu-se aquele triângulo como se poderia ter escolhido outro qualquer.

Numa sessão do Cabri no ProfMat de Évora, em 1996, referi este exemplo de demonstração geométrica, numa

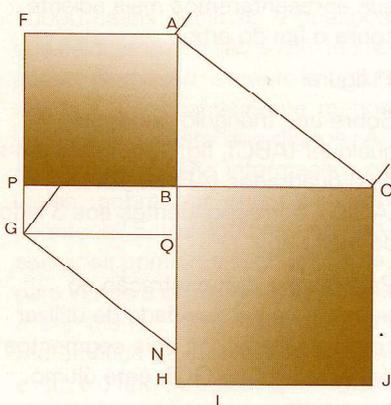
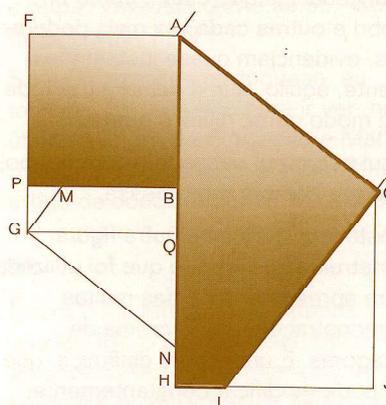
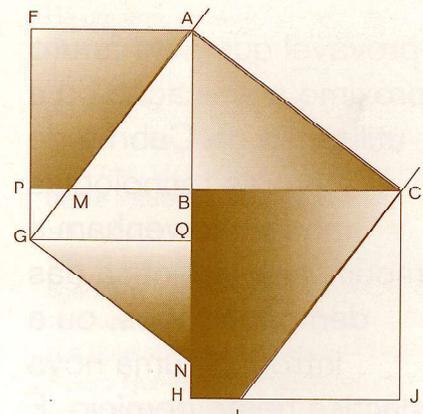
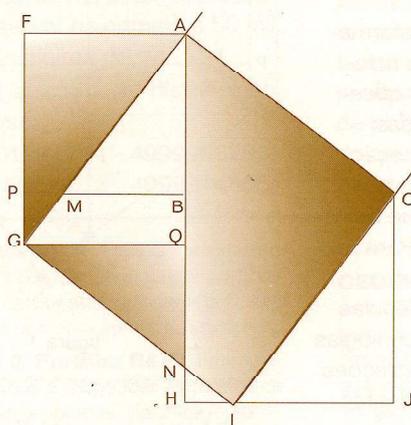
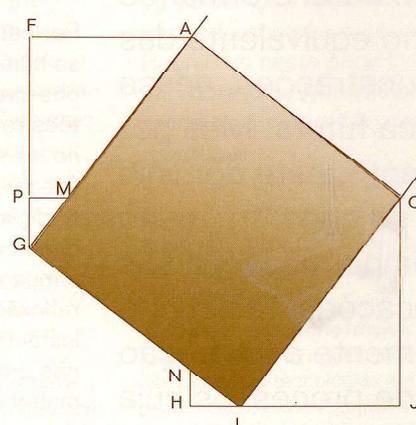


figura 2

figura 3 —  $\Delta[IJC] = \Delta[ABC]$ figura 4 —  $\Delta[ABM] = \Delta[GQN]$ figura 5. —  $\Delta[IHN] = \Delta[GPM]$ figura 6 —  $\Delta[AFG] = \Delta[AQG]$

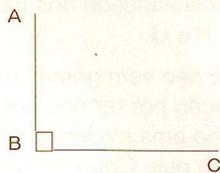


figura 7 — Elementos iniciais

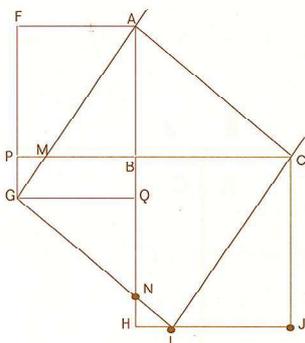


figura 8 — Resultado final

altura em que acabava de apresentar uma figura bastante semelhante, construída no Cabri para o mesmo fim. Dizia eu que "aquilo" era uma demonstração. Alguém comentou logo de imediato: "para aquele caso". Comentário que me deixou alguma perplexidade, porque a meu ver, "aquele caso", pelas razões já apontadas acima, é na verdade, uma demonstração autêntica.

A demonstração de Pitágoras foi com certeza uma demonstração do género, dado que a geometria era relevante no meio de todos os outros ramos da matemática da época.

É fácil de imaginar Pitágoras extremamente satisfeito quando descobriu a verdade do seu teorema, a propósito de um triângulo rectângulo qualquer, isto é, quando descobriu um processo engenhoso de comparar as áreas dos três quadrados do triângulo rectângulo e precisou com rigor a relação entre eles. Não havia dúvida. Estava diante de um triângulo particular, mas tinha descoberto uma lei geral. Um pensar diferente, o de Pitágoras! E no entanto, apesar da sua certeza não terá deixado de multiplicar a experiência com outros triângulos, para concluir sempre a mesma coisa. O Cabri teria facilitado imenso esta tarefa a Pitágoras, mas ao tempo, o Cabri não existia e a tecnologia mais avançada da época estava na régua e no compasso.

Mesmo assim, Pitágoras deve ter andado

entretido durante alguns dias, para gozo da sua curiosidade, a experimentar mais alguns triângulos. Poucos com certeza, uma meia dúzia se tanto!

Hoje com o Cabri nós podemos multiplicar as experiências de Pitágoras, por dezenas, centenas, milhares, por uma infinidade de triângulos rectângulos em escassos centésimos de segundo.

A figura com que iniciámos este trabalho é uma figura dinâmica construída pelo Cabri. Sendo dinâmica, leva algumas vantagens sobre as outras, as estáticas.

Podemos fazer observar a demonstração para outros triângulos rectângulos, para muitos outros, mesmo para uma infinidade deles, e tudo isto, dentro de um instante. Basta para isso, arrastar um qualquer dos vértices do triângulo. A, B ou C, para ver passar no écran, uma infinidade de triângulos rectângulos, onde a relação entre as áreas do quadrado da hipotenusa e as áreas dos quadrados dos catetos se mantém invariante, dentro da fórmula algébrica que traduz o teorema:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

A possibilidade de modificar uma figura por manipulação directa, mantendo invariantes a forma e as relações entre os seus elementos, é uma virtualidade do Cabri, cuja importância é de elevado alcance no ensino e na aprendizagem e geometria.

Assim, sobre a mesma figura, podemos fazer observar de imediato a validade do teorema nalguns casos particulares e até em casos limite, como aqueles em que se pode levar qualquer um dos lados do triângulo até ao anulamento.

A figura 9 obtida por arrastamento de um dos vértices do triângulo, mostra claramente a relação do teorema, no caso do triângulo rectângulo ser um triângulo isósceles.

Do mesmo modo se pode ainda exemplificar a mesma relação, verificando o que acontece quando se procede ao anulamento de um dos lados do triângulo, o que se consegue facilmente com o Cabri. Claro que esta relação se podia intuir racionalmente, mas poder vê-la, poder-la observar, é melhor.

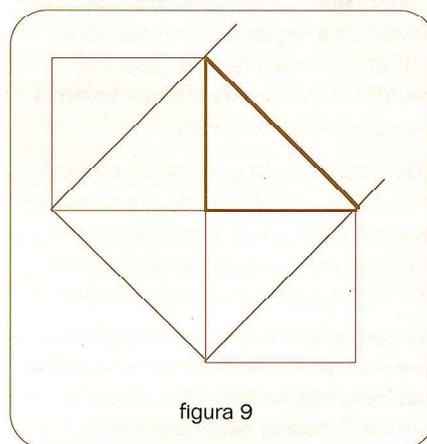


figura 9

É fácil de ver que, ao anular por exemplo, um dos catetos, a área do quadrado do outro cateto assume por si só, a área do quadrado da hipotenusa. Com efeito, o Cabri pode simular facilmente o comprimento de um dos catetos a tender para zero, e nós podemos observar perfeitamente a área deste cateto a anular-se igualmente, e a do outro a tender precisamente para a área do quadrado da hipotenusa, o que ainda confirma a relação do teorema de Pitágoras, neste caso-limite. (fig. 10 e 11).

Com o Cabri, estas figuras podem ser construídas e apresentadas directamente aos alunos na própria aula. Sem o Cabri, era obrigatório construir

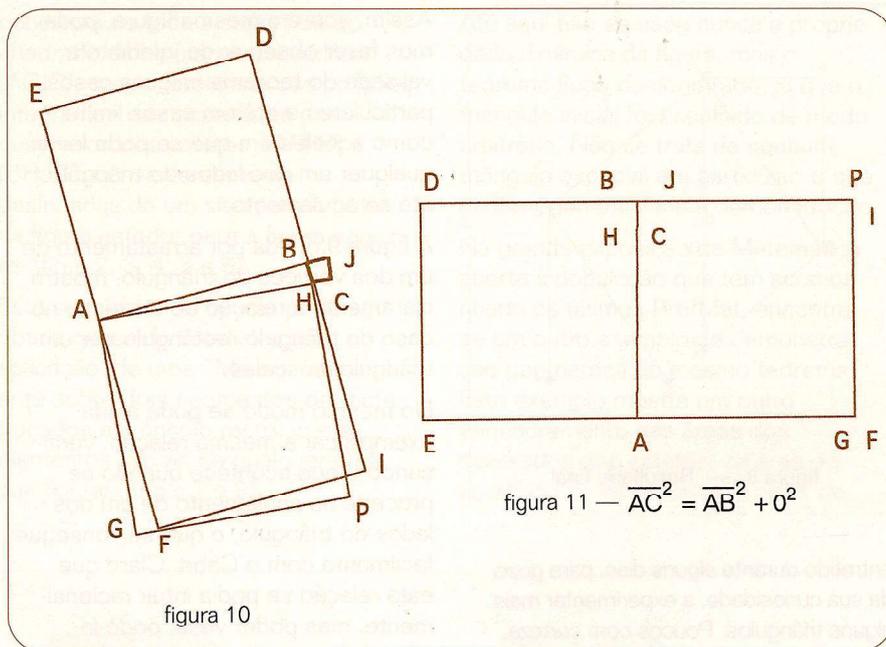


figura 10

$$\text{figura 11} \text{ — } \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + 0^2$$

a figura antes, com o máximo de rigor, utilizando a régua e o compasso e sobretudo muito tempo, para lhe estudar as propriedades que levam à demonstração com êxito.

Não conhecendo a figura de antemão e tentando construí-la de improviso no quadro, iriam surgir inevitavelmente erros de construção que acabariam por tornar a demonstração inviável.

Na verdade, não era ponto assente, que o vértice I viesse a ser localizado exactamente no lado [HJ] e que o vértice G caísse exactamente no prolongamento rectilíneo do segmento de recta [FP], isto é, que os pontos F, P e G ficassem alinhados.

Estas condições cumprem-se pela natureza da figura, são óbvias, mas não se descortinam de imediato, numa construção improvisada. Usando o Cabri não há desvios de construção e não são necessárias correcções. A figura fica imediatamente pronta a utilizar com um vasto conjunto de possibilidades de transformação, de medição, de verificação, de repetição e de alterações, que muito facilitam o desenvolvimento da demonstração.

Na demonstração aqui apresentada utilizámos alguns destes recursos possibilitados pela tecnologia do

Cabri. Todos os passos do seu desenvolvimento constituem uma sequência lógica, e aparentemente, a demonstração está correcta. Mas se reflectirmos um pouco sobre o modo como a figura foi preparada para dar início à demonstração, encontraremos nos traços auxiliares, nomeadamente no segmento de recta [PG], um pequeno pormenor que pode dar origem a alguns reparos.

Efectivamente, o passo da demonstração em que se substitui o  $\Delta$  [AFG] pelo  $\Delta$  [AQG] assenta a sua validade no facto de se considerar que o quadrilátero [AFGQ] é um rectângulo de diagonal [AG]. Este quadrilátero é um rectângulo se  $[FG] \parallel [AQ]$  e estes dois segmentos de recta são paralelos se for garantido que os segmentos de recta [FP] e [PG] são colineares. Esta colinearidade não ficou garantida quando se traçou o segmento de recta [PG], unindo simplesmente os seus extremos. No entanto partimos para a demonstração, seguros de que os pontos F, P e G estavam alinhados e que o polígono [AFPG] era um triângulo e não um quadrilátero. Esta certeza assenta numa evidência fornecida pela tecnologia do Cabri, ou se quisermos, num resultado fácil de observar e de verificar manualmente utilizando uma simples régua. Se

traçarmos o segmento de recta [FG] com o Cabri, verificamos que  $P \in [FG]$  e se unirmos os pontos P e G com uma régua, verificamos que  $F \in [PG]$ , o que mostra a colinearidade dos três pontos F, P e G.

É claro que não vem grande mal à demonstração por termos utilizado no seu caminho uma evidência tecnológica fornecida pelo Cabri ou um resultado fornecido por uma técnica mais rudimentar como a da régua. Todos sabemos como em matemática os conjuntos axiomáticos que fundamentam as diferentes teorias são constituídos por princípios evidentes, por resultados que se "vêm" e não se demonstram, por coisas simples e primitivas cuja verdade se aceita sem demonstração. E não se demonstram, porque é difícil demonstrar o que é evidente, o que é simples, básico e elementar como são os axiomas.

Mas demonstrar que [FP] e [PG] são colineares é possível, e por conseguinte, a demonstração deve ser feita. Para que a demonstração do teorema de Pitágoras por este processo fique completamente escorregada penso que é mesmo necessária esta demonstração prévia.

Visto que há com certeza mais do que uma demonstração e não querendo nós influenciar os leitores, deixamos este trabalho ao seu cuidado.

Para relevar ainda mais estas questões que foram sendo reflectidas ao longo destas linhas, permitam-me os leitores um pequenino problema, exclusivamente seleccionado para evidenciar melhor a diferença entre a verificação imediata de um resultado pelo Cabri e a demonstração matemática do mesmo resultado pelas propriedades matemáticas da figura.

O problema baseia-se numa figura dinâmica, a 2ª figura, construída também pelo Cabri, e foi recolhido do livro "Mathématiques, 2de, Nouveau Fractale", BORDAS, PARIS, 1994, pag. 43.

No  $\Delta$  [ABC] da figura 12, I é o ponto médio de [AB], D e E os pontos definidos por:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \text{ e } \overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AC}$$

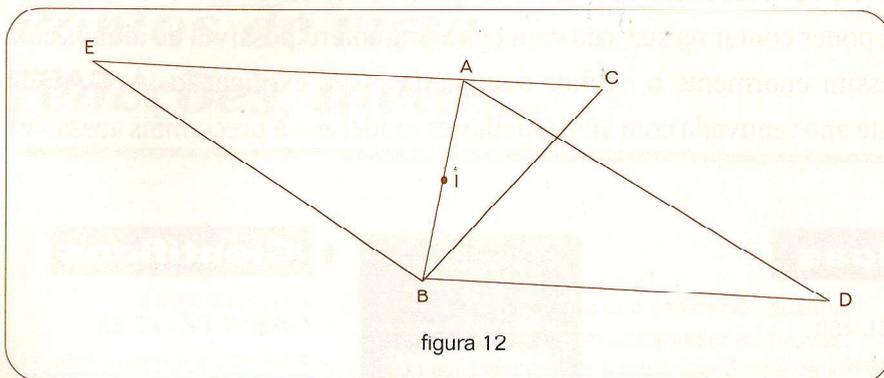


figura 12

Demonstre que os pontos D, I e E estão alinhados.

Se utilizarmos a tecnologia avançada do Cabri, basta traçar o segmento de recta [ED] e verificar que  $I \in [ED]$ ; utilizando a técnica rudimentar da régua e seguindo uma estratégia idêntica, obtém-se o mesmo resultado. Contudo o Cabri leva uma pequena vantagem sobre a régua que é esta: como a figura construída com o Cabri é dinâmica, podemos verificar o alinhamento dos três pontos para cada um dos infinitos triângulos que se obtêm deslocando qualquer dos vértices do triângulo [ABC], para qualquer outro ponto do plano. Podemos até realizar esta operação levando, por exemplo, o vértice B até ao vértice C e verificar o alinhamento dos pontos E, I e D, para todos os triângulos [ABC] com o vértice B em cada um dos pontos do lado [BC], que são em número infinito como sabemos. Teremos assim uma demonstração por meio de uma verificação exaustiva da propriedade em questão para todos os elementos do conjunto de triângulos possíveis, ou seja, para todos os triângulos. É esta capacidade de levar as verificações de uma propriedade até ao último elemento de um conjunto, ainda que infinito, que não está ao alcance da régua. No entanto, neste caso, traduzi esta capacidade do Cabri numa pequena vantagem sobre as possibilidades da régua, pelo facto de que a única verificação feita com a régua sobre uma figura estática, com um triângulo [ABC] rígido, não nos deixaria muitas dúvidas sobre a colinearidade dos três pontos para

qualquer outro triângulo, visto que o triângulo escolhido, foi escolhido arbitrariamente. Ficaríamos numa posição de certeza igual à de Pitágoras com o seu teorema, e só por mera curiosidade iríamos repetir a experiência, com outros triângulos. Para tranquilizar a consciência.

Em matemática a escolha arbitrária de um elemento ou de um conjunto de elementos para verificar propriedades fundamenta a estratégia de muitas demonstrações.

Penso porém, que aquelas demonstrações em cujo processo as componentes técnica ou tecnológica são predominantes em relação aos processos exclusivamente matemáticos são de certo modo demonstrações estranhas à natureza da matemática. Demonstrações bastardas. A demonstração matemática é algo para além da simples verificação de um resultado e consiste em provar a verdade desse resultado por meios exclusivamente matemáticos. Só esta demonstração é verdadeiramente superior.

Relativamente ao problema enunciado, a observação da figura sugere que se utilize o método seguinte: *três pontos estão alinhados se um deles é o ponto médio do segmento definido pelos outros dois*. Aqui demonstraremos que I é o ponto médio do segmento [DE].

#### Uma solução:

Pela definição de adição de vectores:  $\vec{AE} + \vec{EB} = \vec{AB}$ , donde:  $\vec{EB} = \vec{AB} - \vec{AE}$ . Sendo  $\vec{AE} = -2\vec{AC}$ , vem  $\vec{EB} = \vec{AB} + 2\vec{AC}$ . Então  $\vec{EB} = \vec{AD}$ .

Daqui se deduz que o quadrilátero [AEBD] é um paralelogramo, e por conseguinte, as suas diagonais [AB] e [DE] têm o mesmo ponto médio.

O ponto médio de [AB] é I, e por isso é também o ponto médio de [DE].

Em consequência, os pontos D, E e I estão alinhados como se queria demonstrar.

O Cabri ajuda de uma forma extraordinária a descobrir os resultados, a pô-los em evidência, mesmo antes de os demonstrar. Mas se ao Cabri cabe descobrir resultados, cabe depois ao matemático demonstrá-los. O Cabri não dispensa as demonstrações. As evidências que surgem como consequência da aplicação das potencialidades do Cabri só podem ser comparadas aos resultados das demonstrações.

É provável que num futuro próximo a aplicação ou a utilização do Cabri e de outras tecnologias modernas venham a modificar a didáctica das demonstrações, ou a introduzir uma nova didáctica neste domínio. É provável que os processos de aplicação destas potencialidades venham a transformar-se no equivalente das demonstrações, nessa didáctica futura. Mas por enquanto, este domínio ainda se encontra muito impermeável a tais modificações, resistindo fortemente à infiltração de processos cuja natureza não é intrinsecamente matemática.

Notas para uma demonstração da colinearidade de dos três pontos F, P e G, da figura do teorema de Pitágoras.

1.  $\vec{FA} = \vec{AB}$  e  $\vec{AG} = \vec{AC}$
2.  $\vec{F\hat{A}G} = \vec{B\hat{A}C}$
3.  $\Delta [ABC] = \Delta [AFG]$
4.  $\vec{F\hat{A}G} + \vec{F\hat{G}A} = 90^\circ$  e  $\vec{F\hat{A}G} + \vec{G\hat{A}Q} = 90^\circ$
5.  $\vec{F\hat{G}A} = \vec{G\hat{A}Q}$
6.  $FG \parallel AQ$

c.q.d.

Vidal Augusto Minga  
Esc. EB 2+3  
Paço de Arcos