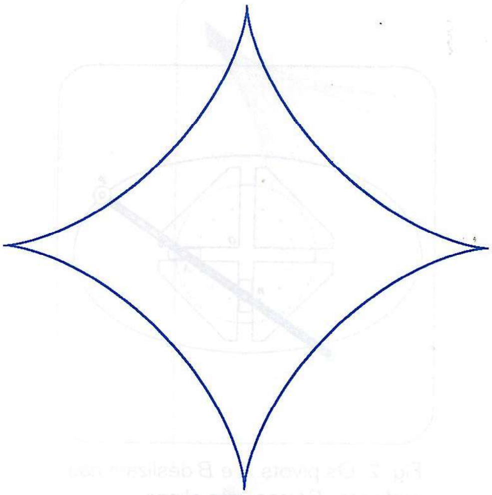


A astróide[1]

Anabela Torres, João Paulo Afonso e Sandra Afonso

A astróide foi descoberta por Roemer, em 1674, durante a sua pesquisa acerca das rodas dentadas. Jean Bernoulli (1667-1748) estudou a mesma curva, tendo obtido uma equação, a sua forma e o seu comprimento. Ao longo dos tempos, esta curva tem sido conhecida por várias designações, como por exemplo cubociclóide, paraciclo, curva de quatro reversões, etc. Em 1838 adquiriu o presente nome, que lhe foi atribuído por Littrow.

Descrição e métodos de construção da curva

1. *A astróide como envolvente de segmentos de recta*

A astróide é a envolvente (ver Glossário no fim do artigo) de uma família de segmentos de recta de comprimento constante (PQ, P_1Q_1,...) com extremidades sobre os lados OA e OB de um ângulo recto (fig. 1).

Um mecanismo que nos permite obter esta construção da curva é o Trammel de Archimedes, que pode também ser utilizado para gerar elipses (fig. 2).

2. *A astróide como hipociclóide*

A astróide é uma *roulette* que se obtém marcando a trajectória de um ponto fixo numa circunferência que rola sem deslizar no interior de uma circunferência base. Assim, a astróide é uma hipociclóide.

A circunferência base tem raio r e a circunferência que rola sem escorregar no seu interior pode ter raio $\frac{r}{4}$ ou $\frac{3}{4}r$ (fig. 3).

A astróide tem quatro pontos de reversão.

3. *Astróide como envolvente de elipses*

Se no mesmo sistema de eixos do caso 1, traçarmos elipses com os eixos sobre as rectas OA e OB e com a soma dos semi-eixos igual a OA, a mesma astróide é também a envolvente dessas elipses (fig. 4).

4. *Astróide como envolvente de semirectas*

Pode também obter-se uma astróide considerando uma circunferência de centro na origem de um referencial, que intersecta o eixo das abcissas em D e D', sobre a qual se marcam pontos em intervalos de 5°, com início em D. De forma análoga marcam-se pontos com início em D' em intervalos de 15° (fig. 5). O procedimento prolonga-se para os outros quadrantes.

Em seguida unem-se, por semirectas com origem nos pontos espaçados de 15°, os pontos de igual referência. A astróide surge como envolvente destas semirectas (fig. 6).

5. *Astróide como lugar geométrico — (um outro modo de obter a hipociclóide)*

Seja dada uma circunferência de raio a, seja I um ponto sobre ela, e $[OQRI]$ o rectângulo construído a partir do ponto I e indicado na figura 7. Seja M o ponto de intersecção das diagonais deste rectângulo e consideremos a circunferência de diâmetro $[MI]$.

Esta circunferência tem dois pontos de intersecção com $[QR]$, M e um outro ponto P. Como a circunferência de diâmetro $[MI]$ tem um raio igual a $a/4$, P descreve a astróide quando I percorre a circunferência inicial.

Equações da astróide e outros resultados da análise

A partir da primeira definição que demos de astróide, como envolvente de segmentos,é possível deduzir a equação cartesiana da astróide (ver por exemplo a obra de Gomes Teixeira indicada na bibliografia). Para obter a equação tomamos as rectas OA e OB como eixos coordenados e l como comprimento do segmento $[PQ]$. Chegamos à equação

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

A expressão da área da astróide, que como dissemos foi determinada por Bernoulli (tal como a do comprimento, que referiremos em seguida), é

$$\frac{3}{8}\pi l^2.$$

O comprimento de um arco de astróide, compreendido entre os

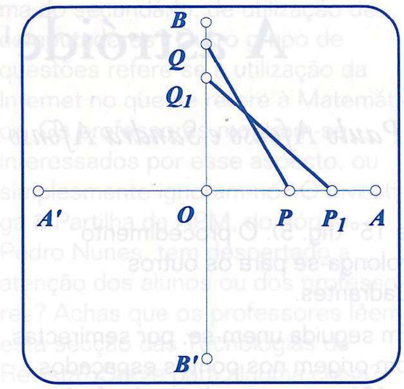
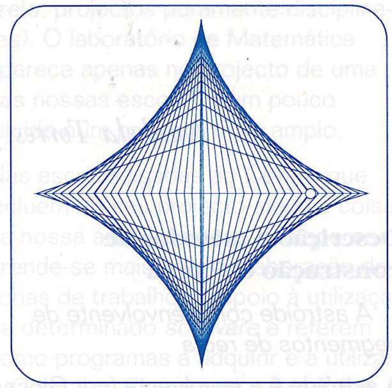


Fig. 1. A curva completa aparece como envolvente quando os pontos P e Q podem deslocar-se livremente sobre as rectas OA e OB.



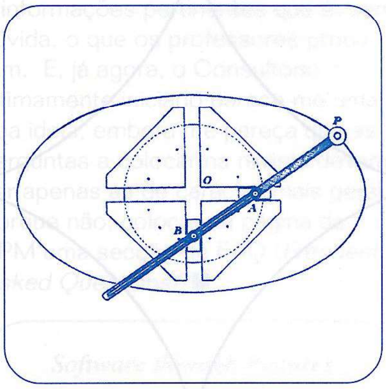


Fig. 2. Os pivots A e B deslizam nas ranhuras. P traça uma elipse.

pontos de abcissa 0 e x_0, é dado por

$$\frac{3}{2}\left(x_0^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

Resulta facilmente que o comprimento do arco compreendido entre dois pontos de reversão é $3l/2$.

Para obtermos as equações paramétricas da astróide partimos da fig. 7. No rectângulo $[OQIR]$,

$\overline{OI} = \overline{QR} = a$, $\overline{RI} = a\cos t$,

$\overline{RP} = \overline{RI}\cos t = a\cos^2 t$ e

$\overline{RP}\cos t = a\cos^3 t$.

Da mesma forma, $\overline{QP}\,sen\,t = a\,sen^3 t$.

As equações paramétricas são então

$$x = a\cos^3 t$$

$$y = a\,sen^3 t.$$

Relações com outras curvas

Existem muitas relações entre as curvas planas especiais, de que a astróide é apenas um dos exemplos. Algumas das relações da astróide com outras curvas, mostram-se na página 27.

Para isso recorreremos ao *Sketchpad* (fig. 8 e 10) e à Internet (fig. 9), onde existem locais onde pode ser encontrada informação sobre a astróide (por exemplo, os *sites* cujos endereços são indicados na bibliografia).

Nesses locais podemos encontrar, relativamente a cada curva, os vários tipos de definição, e figuras com as diferentes curvas e as suas relações.

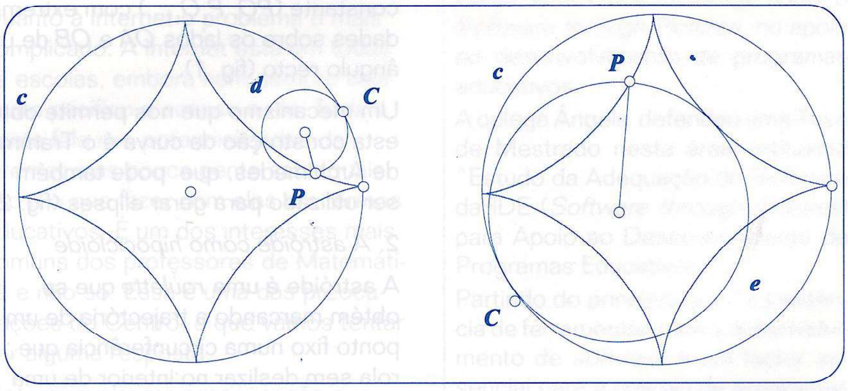


Fig. 3

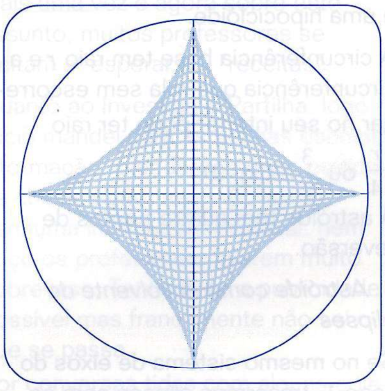


Fig. 4

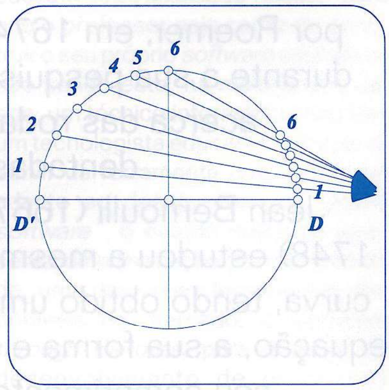


Fig. 5

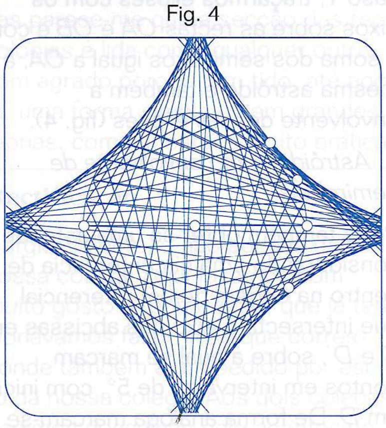


Fig. 6

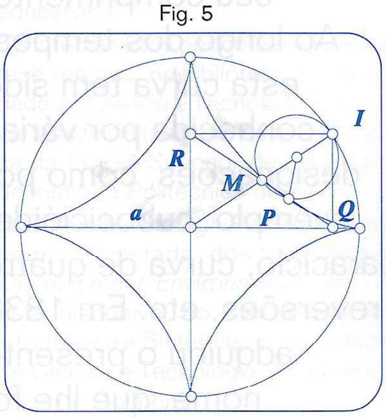


Fig. 7

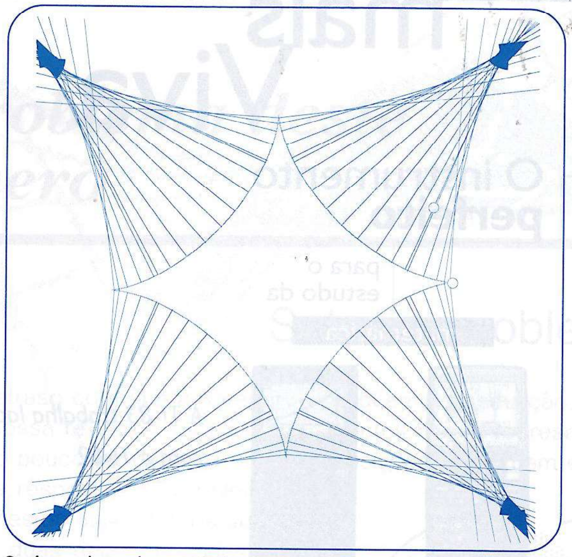


Fig. 8. A evoluta da astróide é uma nova astróide, aqui visionada como envolvente de (semirectas) normais à astróide.

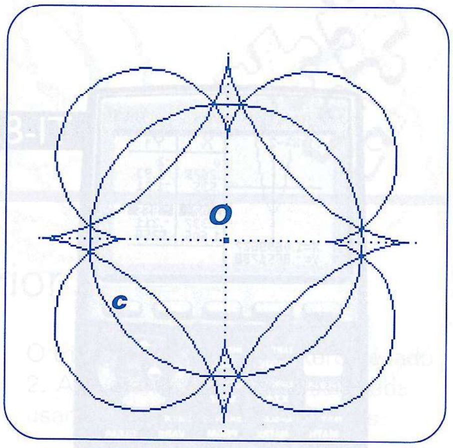


Fig. 9. Curva inversa da astróide em relação à circunferência *c*, de centro *O*.

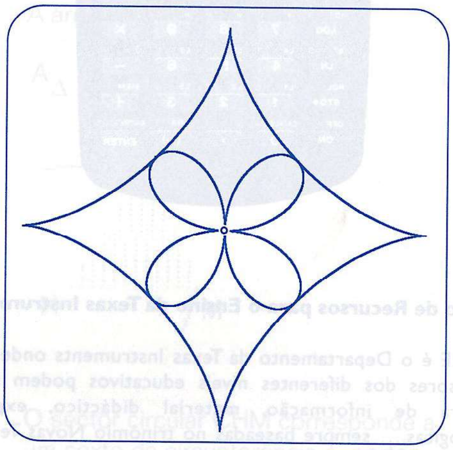


Fig. 10. Quadrifólio, curva pedal da astróide em relação ao centro.

Bibliografia

Em papel:

Lockwood, E. H..*A Book of Curves*. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.

Piskounov, *Cálculo Diferencial e Integral*. Vol. I. Lisboa: Lopes da Silva Editora, 1972.

Teixeira, F. G. *Obras sobre Matemática*, vol. IV, tomo I. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 1908

On-line:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/˜history/Curves/Curves.html

http://www.best.com/˜xah/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html

Nota

1. Síntese de um trabalho realizado em Dezembro de 1997 no âmbito da acção de formação "Inovação no Ensino da Geometria" (DE/FCUL).

Anabela Torres
João Paulo Afonso
Sandra Afonso
Esc. Sec. de Mafra

Glossário

Centro de curvatura - Se *s* for uma curva, *P* e *Q* dois pontos de *S*, *p* e *q* as normais a *s* em *P* e *Q*, e *T* a sua intersecção, o ponto limite *C* para que tende *T* quando *Q* tende para *P* diz-se *centro de curvatura* de *s* no ponto *P*.

Curvas cáusticas - Quando raios de luz são reflectidos por uma curva a envolvente dos raios reflectidos é uma cáustica por reflexão ou *catacáustica*. Quando raios de luz são refractados por uma curva a envolvente dos raios refractados é uma cáustica por refracção ou *diacáustica*.

Curva inversa - Dada uma circunferência *c* de centro *O* e raio *r*, e um ponto $P \neq O$, o ponto *P'* diz-se inverso de *P* relativamente a *c* se pertencer à semi-recta *OP* e se $\overline{OP}.\overline{OP'} = r^2$. Quando *P* descreve uma curva *s*, *P'* descreve *s'*, *curva inversa* de *s* relativamente a *c*.

Curva pedal - Sejam dados uma curva *s* e um ponto fixo *O* (chamado *ponto pedal*). Para cada tangente *t* à curva *s*, consideremos o ponto *P*, intersecção de *t* com a perpendicular a *t* passando por *O*. O lugar geométrico dos pontos *P* diz-se *curva pedal* de *s* relativamente ao ponto *O*.

Envolvente - Dada uma família de curvas *F*, uma curva tangente a todas as curvas $s \in F$ diz-se *envolvente* de *F*.

Evoluta - *Evoluta* de uma curva *s* é a curva envolvente das normais a *s*. É também o lugar geométrico dos centros de curvatura de *s*.

Hipociclóide- Dadas uma circunferência *c* e outra circunferência *d* tangente interior a *c*, a trajectória de um ponto *P* de *d* quando esta rola sem escorregar sobre *c* é uma hipociclóide (epiciclóide se *d* for exterior a *c*).

Involuta - Se *s* é uma curva e *s'* a sua evoluta, então *s* é uma *involuta* de *s'*. Quaisquer curvas paralelas a *s* são também involutas de *s'*. Assim uma curva tem uma única evoluta mas infinitas involutas. Alternativamente uma involuta de uma dada curva pode ser considerada como sendo uma curva ortogonal a todas as suas tangentes.

Normal - Dada uma curva *s* e um ponto $P \in s$ em que admita tangente *t*, a *normal* a *s* no ponto *P* é a perpendicular a *t* no ponto *P*.

Pedal negativa - Sejam dados uma curva *s* e um ponto fixo *O*. Se para cada ponto *P* da curva considerarmos a perpendicular *p* ao segmento *OP* passando por *P*, a envolvente das rectas *p* diz-se *pedal negativa* de *s* relativamente ao ponto *O*.

Ponto de reversão (*cusp, rebroussement*) - Se imaginarmos que uma curva é descrita por um ponto em movimento, um ponto de reversão é um ponto da curva em que o ponto móvel "inverte" a direcção do seu movimento. Se considerarmos as tangentes à curva nesse ponto que está a descrever a curva, num ponto de reversão a variação do declive da tangente muda de sentido (se estava a crescer, passa a decrescer, e vice-versa).

Roullette - Diz-se *roulette* qualquer curva que se obtém traçando a trajectória de um ponto de uma curva quando esta rola sem escorregar sobre outra curva.