Facilitando o ensino de volume através de quebra-cabeças geométricos

Ana Maria Kaleff

Através dos jogos, a criança tem oportunidade de entrar em contacto com aspectos da Matemática que irão contribuir para a formação de seu pensamento abstracto.
A actividade lúdica cria a motivação para outras actividades matemáticas.

Apresentação

Em nosso artigo *Incentivando a visualização espacial através de propriedades geométricas de tetraedros duais*, publicado na *Educação e Matemática nº 38*, mencionamos dificuldades apresentadas por estudantes secundários, universitários e professores de Matemática na visualização e interpretação de propriedades relativas aos conceitos de forma e de volume de um sólido geométrico. Dando continuidade à busca de recursos didácticos que tratem dessas dificuldades, elaboramos as actividades apresentadas a seguir, as quais podem ser aplicadas como introdutórias, alternativas ou intercaladas àquelas relatadas no artigo anterior.

Os jogos geométricos do tipo quebra-cabeças espaciais, aqui tratados, têm por objectivo fornecer ao aluno recursos que o levem a reconhecer, comparar, diferenciar, visualizar e relacionar algumas formas geométricas elementares e suas propriedades, facilitando o estudo de volume. Esses jogos são baseados nos cortes do cubo, do tetraedro e do octaedro regulares, podendo ser facilmente construídos com papel-cartão colorido ou com placas de acetato do tipo usado em chapas de raio-X.

Esses jogos têm sido aplicados em oficinas de Matemática realizadas com estudantes de 1° e 2° graus; alunos de graduação e professores de Matemática de 1° e 2° graus, em cursos de treinamento e de especialização.

Para utilizarmos esses quebra-cabeças com crianças pequenas, com cerca de oito anos de idade, confeccionamos previamente os jogos e, além desses, utilizando madeira, papel-cartão, plástico ou bloco de sabão, construímos modelos de um tetraedro e um octaedro regulares, de um cubo e de uma pirâmide regular de base quadrada. Então, mostrando à criança o modelo de um dos sólidos, pedimos que o reproduza fazendo uso das peças do jogo correspondente.

Observamos que as crianças constróem com facilidade os sólidos através da observação dos modelos; todavia, constatamos que, nesta faixa etária, elas têm grande dificuldade para interpretar desenhos e, portanto, evitamos apresentar-lhes planificações ou desenhos em perspectiva. Por outro lado, apesar dos jogos apresentarem diferentes níveis de complexidade, pois variam tanto em relação ao número, quanto em relação à forma das peças que os compõem, observamos que mesmo as crianças pequenas se divertem com essas construções.

Consideramos a vivência desse tipo de actividade, aparentemente lúdica, muito importante para a criança, que desde tenra idade vai formando, em sua mente, as imagens dos sólidos em questão e tomando consciência de suas formas. Todavia, nesta faixa etária (cerca dos oito anos), consideramos não ser muito importante que a criança saiba os nomes das figuras geométricas envolvidas, mas sim que estabeleça a identificação das suas formas. Por outro lado, como os jogos auxiliam o aluno a discriminar as partes nas quais os sólidos se constituem, favorecem o entendimento do conceito de fracção, possibilitando a avaliação das fracções correspondentes às partes do sólido. Os jogos ainda permitem que a criança inicie um processo de reconhecimento das relações entre as medidas das diferentes partes de um sólido, com vista ao estabelecimento do seu volume. Além disso, através dos jogos, a criança tem oportunidade de entrar em contacto com aspectos da Matemática que irão colaborar para a formação de seu pensamento abstracto, por meio de uma actividade lúdica que cria a motivação para outras actividades matemáticas.

Para os alunos mais velhos, com cerca de onze anos de idade, a confecção das peças dos quebra-cabeças tem mostrado ser um interessante exercício que lhes proporciona oportunidade de desenvolver, não somente a habilidade manual, mas também a habilidade para interpretar os desenhos das planificações dessas peças. Para tal confecção solicitamos ao aluno que copie, sobre cartolina, papel-cartão ou acetato, as planificações necessárias para cada um dos jogos; em seguida, dobre as linhas, formando as faces da peça planificada e cole as abas desenhadas. Temos sempre lembrado ao aluno que as abas não fazem parte da planificação da peça, mas são partes importantes, as quais nos possibilitam obter a peça desejada com o material utilizado.

É importante notarmos que na construção de cada peça dos jogos, o aluno é levado a observar as formas geométricas desenhadas na planificação e a forma da peça construída; sendo, portanto, confrontado com uma representação plana e com uma representação espacial de uma mesma figura geométrica. Observações como estas ajudam a evitar que o aluno confunda o desenho de uma figura espacial com o de uma figura plana; como por exemplo, nos casos do tetraedro regular ser confundido com um triângulo e do octaedro regular ser confundido com um losango. Por outro lado, como as secções planas que dão origem às peças que compõem os jogos, são facilmente visualizadas, temos oportunidade de iniciar o aluno na visualização de cortes e de secções planas de uma maneira prazerosa, numa idade bem inferior (cerca de onze anos) à que habitualmente são introduzidos esses conteúdos na sala de aula (cerca de dezasseis anos). Além disso, a visualização dos cortes e a criatividade da criança podem ser conjuntamente incentivadas se a orientarmos para que crie e explore outros tipos de quebra-cabeças baseando-se nos sólidos conhecidos.

Alguns professores que trabalharam com esses jogos, constataram que alunos mais velhos e desinteressados pelas aulas de Matemática, são motivados para outras actividades matemáticas através dessas construções quando intercaladas com tarefas que envolvem construções dos esqueletos dos sólidos pela representação de suas arestas, como as que apresentamos na *Educação e Matemática nº 38*. No entanto, acreditamos que estudantes hábeis na visualização das figuras espaciais podem vir a ser desestimulados se forem obrigados a vivenciar muitas actividades de carácter manipulativo, cabendo ao professor a avaliação crítica da situação dos alunos e a elaboração de actividades desafiadoras alternativas para os mais habilidosos. De uma forma geral, é necessário que nos lembremos que, apesar da riqueza didáctica das actividades de carácter manipulativo-experimental indicadas para crianças e jovens, elas necessitam ser complementadas, em algum estágio da escolaridade, por actividades de carácter lógico-dedutivo, nas quais as propriedades geométricas, as relações algébricas e as correspondentes fórmulas geométricas serão desenvolvidas.

Por outro lado, nos cursos de treinamento que temos ministrado, constatamos que muitos universitários, futuros professores e até mesmo professores de Matemática de 1º e 2º graus apresentam um cepticismo alarmante quanto à utilidade do uso desse tipo de material concreto como ferramenta no processo do desenvolvimento da visualização (Kaleff, Garcia e Rei, 1996). Pois, apesar de um grande número de universitários e profissionais desconhecerem tais recursos para o ensino de volume e apresentarem dificuldades, tanto na manipulação desses materiais, quanto na elaboração dos conceitos geométricos envolvidos, alguns professores consideram esses meios didácticos como recursos infantis (p.137).

No que se segue, relacionamos alguns desses quebra-cabeças, indicando os seus objectivos e as peças que os compõem e acrescentando algumas observações de ordem prática sobre a sua confecção. Além disso, buscando motivar os colegas professores a se interessarem pela aplicação desses jogos em um nível de maior complexidade do que o das actividades mencionadas anteriormente, apresentamos dois problemas que envolvem poliedros duais. Consideramos dois poliedros como duais quando um está inscrito no outro, de tal forma que os vértices do poliedro inscrito são os baricentros das faces do poliedro circunscrito. A figura 1a) indica o caso do cubo e de seu dual, o octaedro; enquanto que na 1b) estão representados dois tetraedros duais (veja *Educação e Matemática n º 38*).

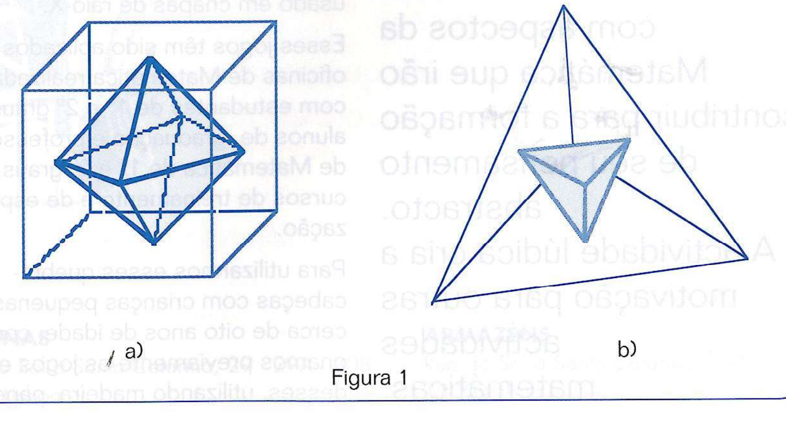

a) b)

Figura 1

Caracterização dos quebra-cabeças

Objectivos e composição

QUEBRA-CABEÇA Nº 1

Objectivo - Construção de uma pirâmide regular de base quadrada a partir de dois tetraedros não regulares.

Composição - Este jogo é formado por duas peças da mesma cor e confeccionadas a partir da planificação desenhada na figura 2.

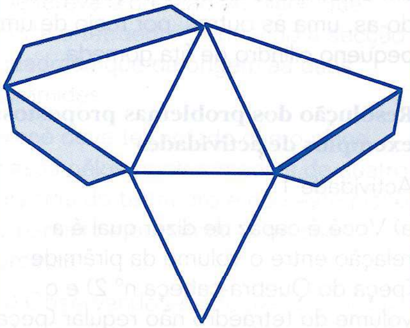


Figura 2

QUEBRA-CABEÇA Nº 2

Objectivo - Construção de um octaedro regular a partir de duas pirâmides regulares de base quadrada.

Composição - Este jogo é formado por duas peças da mesma cor, confeccionadas a partir da planificação desenhada na figura 3.

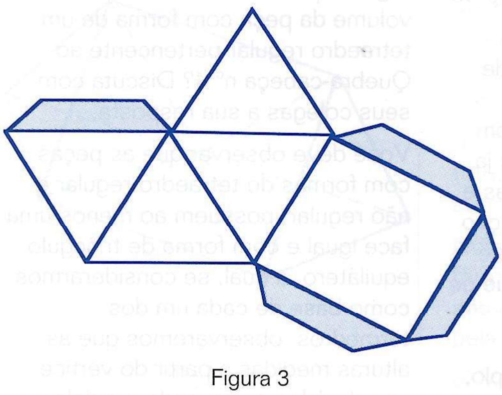


Figura 3

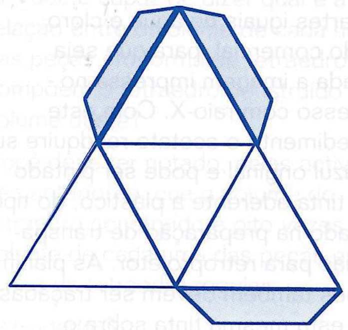


Figura 4

QUEBRA-CABEÇA Nº 3

Objectivo - Construção de um tetraedro regular a partir de quatro tetraedros regulares e de um octaedro.

Composição - Este jogo é formado por quatro peças da mesma cor, confeccionadas a partir da planificação desenhada na figura 4 e por uma, de outra cor, conforme a figura 5.

QUEBRA-CABEÇA Nº 4

Objectivo - Construção de um bloco poliédrico formado pela intersecção de dois tetraedros regulares, o qual, para facilitar a compreensão dos alunos, temos chamado de estrela de oito pontas (ver figura 6). Essa estrela é construída a partir de oito tetraedros regulares e de um octaedro, cujos lados medem a metade do comprimento do lado dos tetraedros que se interceptam para formá-la.

Composição - Este jogo é formado por nove peças, sendo quatro em uma cor e outras quatro em cor diferente, confeccionadas a partir da planificação desenhada na figura 4 e por uma peça de outra cor das anteriores, conforme a planificação desenhada na figura 5.

QUEBRA-CABEÇA Nº 5

Objectivo - Construção de um cubo constituído por doze tetraedros não regulares e por uma estrela de oito pontas.

Composição - Este jogo é formado por oito peças de mesma cor, confeccionadas a partir da planificação desenhada na figura 4; por uma peça de outra cor conforme a figura 5 e por doze peças de cor diferente das anteriores, cuja planificação está desenhada na figura 2.

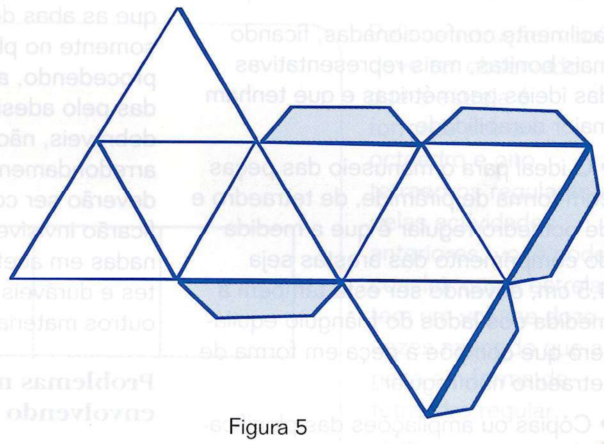


Figura 5

QUEBRA-CABEÇA Nº 6

Objectivo - Construção de um tetraedro regular a partir de onze tetraedros regulares e de quatro octaedros.

Composição - Este jogo é formado por onze peças de mesma cor, confeccionadas a partir da planificação desenhada na figura 4 e por quatro peças de uma outra cor e conforme a figura 5.

Observações sobre a confecção

Julgamos que algumas observações de ordem prática possam ser úteis aos leitores, a fim de que as peças dos quebra-cabeças possam ser mais

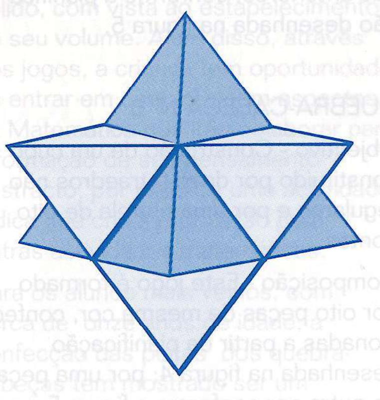


Figura 6

facilmente confeccionadas, ficando mais bonitas, mais representativas das ideias geométricas e que tenham maior durabilidade:

• O ideal para o manuseio das peças com forma de pirâmide, de tetraedro e de octaedro regular é que a medida do comprimento das arestas seja 4,5 cm, devendo ser esta também a medida dos lados do triângulo equilátero que compõe a peça em forma de tetraedro não regular.

• Cópias ou ampliações das planificações devem ser desenhadas no avesso do papel-cartão ou da cartolina e marcadas com a ponta de uma agulha ou estilete de metal, para que as arestas, quando dobradas, fiquem bem marcadas sem apresentarem arredondamentos. As abas devem ser coladas com cola ou fita gomada sob as faces.

• Peças de cartolina ou de papel-cartão têm maior durabilidade, quando recobertas por uma camada de cola plástica ou por uma camada de plástico adesivo.

• Nas épocas mais quentes do ano, não é aconselhável o uso da fita gomada na confecção das peças, pois a sua cola pode se desfazer com o calor. Porém, nas primeiras tentativas de confecção, permitimos aos alunos fazerem uso da fita devido à facilidade de manuseio.

• O acetato pode ser obtido de chapas usadas em raio-X, as quais deverão ser colocadas numa solução de partes iguais de água e cloro líquido comercial, para que seja retirada a imagem impressa no processo com raio-X. Com este procedimento o acetato readquire sua cor azul original e pode ser pintado com tinta aderente a plástico, do tipo utilizado na preparação de transparências para retroprojetor. As planificações também devem ser traçadas com esta mesma tinta sobre o acetato.

• As planificações, desenhadas sobre acetato, devem ter as faces recortadas e coladas, uma a uma, sobre a lâmina de plástico adesivo, enquanto que as abas devem ser cortadas somente no plástico. Assim se procedendo, as arestas serão formadas pelo adesivo sendo facilmente dobráveis, não apresentando arredondamentos e as abas, que deverão ser coladas sobre as faces, ficarão invisíveis. As peças confeccionadas em acetato são mais resistentes e duráveis do que as obtidas com outros materiais.

Problemas motivadores envolvendo poliedros duais

Estabelecimento dos problemas

Os problemas seguintes, envolvendo poliedros duais, têm se mostrado desafiadores para muitos professores com os quais temos trabalhado.

1º - Determinar a relação entre o volume de um cubo e o de seu octaedro dual.

2º - Determinar a relação entre o volume de um tetraedro regular e o de seu dual.

Todavia, através da manipulação de quebra-cabeças, tais problemas podem ser propostos a alunos, com cerca de treze anos de idade, que já vivenciaram a confecção das peças e as experiências triviais de construção dos sólidos, como as anteriormente descritas. Porém, é necessário que os enunciados desses problemas também sejam relacionados aos quebra-cabeças, como, por exemplo, na forma que se segue:

1º - Qual é a relação entre o volume da peça em forma de octaedro que faz parte do Quebra-cabeça nº 5 e o do cubo construído com todas as peças desse jogo?

2º - Qual é a relação entre o volume da peça em forma de tetraedro regular que faz parte do Quebra-cabeça nº 6 e o volume do tetraedro construído com todas as peças desse jogo?

A resolução de cada um desses problemas pode ser visualizada através de actividades com os quebra-cabeças, nas quais, para facilitar a manipulação dos sólidos construídos, aconselhamos aos alunos a formarem um único bloco com as peças, fixando-as, uma às outras, por meio de um pequeno cilindro de fita gomada.

Resolução dos problemas propostos: exemplos de actividades

Actividade 1

a) Você é capaz de dizer qual é a relação entre o volume da pirâmide (peça do Quebra-cabeça nº 2) e o volume do tetraedro não regular (peça do Quebra-cabeça nº 1)?

b) Você é capaz de dizer qual é a relação entre o volume de cada um dos tetraedros não regulares que formam o octaedro e o volume desse octaedro?

Você deve ter notado, pela construção, que o volume do octaedro é quatro vezes o volume do tetraedro não regular.

c) Você é capaz de dizer qual é a relação entre o volume de cada uma das peças em forma de tetraedro não regular que formam o octaedro e o volume da peça com forma de um tetraedro regular pertencente ao Quebra-cabeça nº 4? Discuta com seus colegas a sua resposta.

Você deve observar que as peças com formas de tetraedro regular e não regular, possuem ao menos uma face igual e com forma de triângulo equilátero, a qual, se considerarmos como base de cada um dos tetraedros, observaremos que as alturas medidas a partir do vértice oposto à base, em cada um deles, têm a mesma medida. Desta forma as peças têm o mesmo volume.

Actividade 2

a) Construa um tetraedro regular com as peças do Quebra-cabeça nº 3.

b) Observe como são as faces do octaedro em relação às faces do tetraedro construído.

Você deve ter notado que cada face poderia ter sido formada pelo corte de um plano que passa por três arestas do tetraedro e que é paralelo a uma de suas faces.

c) Agora, substitua o octaedro pelas pirâmides do Quebra-cabeça nº 2. Descreva a posição do plano que corta o tetraedro, formando a secção quadrada que dá origem às duas pirâmides.

Você deve ter notado que o plano passa pêlos pontos médios de quatro arestas do tetraedro e que este plano é paralelo a outras duas de suas arestas.

d) Observando esse corte que divide o octaedro em duas pirâmides, você é capaz de construir um outro quebra-cabeça para o tetraedro e que seja formado por somente duas peças? E por quatro peças? E por seis?

Você deve ter notado que poderá construir o tetraedro com duas peças com a forma apresentada na figura 7; se dividi-las ao meio obterá quatro peças; por outro lado, cada uma dessas peças pode ser formada por uma pirâmide e por dois tetraedros regulares.

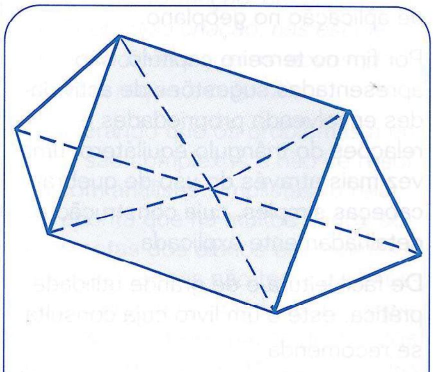


Figura 7

e) Você é capaz de dizer qual é a relação entre o volume de cada uma das peças em forma de tetraedro que compõem o tetraedro construído e o volume deste?

Você deve ter notado, pelas actividades anteriores, que o volume do tetraedro construído é oito vezes o volume de cada uma das peças em forma de tetraedro regular.

Actividade 3

a) Usando acetato, construa uma caixa em forma de cubo com 7 cm de lado, conforme a planificação indicada na figura 8 e de maneira que fique com uma tampa aberta.

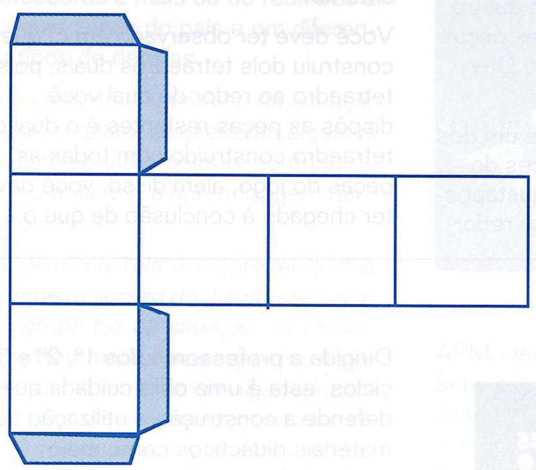


Figura 8

b) Construa um tetraedro regular com as peças do Quebra-cabeça nº 3, fixando-as por meio de fita adesiva.

c) Coloque o tetraedro formado dentro do cubo de acetato, de maneira que seus quatro vértices se encontrem com quatro vértices do cubo.

d) Observe como são as faces do tetraedro em relação às faces do cubo.

Note que as faces poderiam ter sido formadas pelo corte de um plano que passa por um dos vértices do cubo e pela diagonal de uma das faces.

e) Você é capaz de dizer qual é a relação entre o volume de cada uma das peças em forma de tetraedro que compõem o tetraedro colocado dentro do cubo e o volume deste? Se você ainda não consegue responder a esta questão, realize a actividade a seguir.

Actividade 4

a) Construa um cubo como na actividade anterior.

b) Construa uma estrela de oito pontas com as peças do Quebra-cabeça nº 4, fixando as peças através de fita adesiva.

c) Você é capaz de dizer qual é a relação entre o volume de cada uma das peças em forma de tetraedro que compõem a estrela e o seu volume?

Pela construção, você deve ter observado que a estrela é formada por um octaedro e oito tetraedros regulares e, pelas actividades anteriores, você pode concluir que a estrela tem um volume doze vezes maior do que a peça em forma de tetraedro regular.

c) Coloque a estrela dentro do cubo de acetato, de forma a que seus vértices se encontrem com os vértices do cubo. Você é capaz de dizer que forma de peças deveríamos ter para completar a estrela e obtermos o cubo?

d) Qual é a relação entre o volume de cada um dos tetraedros não regulares que formam o octaedro colocado no centro da estrela e o volume de cada um dos tetraedros que formam a estrela?

e) Qual é a relação entre o volume da peça em forma de octaedro que faz parte desse jogo e o volume do cubo construído com todas as suas peças?

f) Qual é a relação entre o volume do octaedro dual e o volume do cubo?

Você deve ter observado que, para completar a estrela e obtermos o cubo, são necessárias doze peças iguais ao tetraedro não regular do Quebra-cabeça nº 1, cujo volume é igual ao do tetraedro regular. Assim, o volume do cubo é igual ao volume de vinte tetraedros regulares, mais o volume do octaedro, o qual, por sua vez, é igual a quatro volumes do tetraedro não regular. Desta forma, o volume do cubo é vinte e quatro vezes o volume do tetraedro e, portanto, a relação entre o volume do octaedro dual e o volume do cubo é 4/24 = 1/6.

Actividade 5

a) Considere as peças do Quebra-cabeça nº 6.

b) Construa um tetraedro regular utilizando um octaedro e mais quatro tetraedros. Observe que essas peças são as mesmas que formam o Quebra-cabeça nº 3.

c) Utilizando fita gomada, cole um dos tetraedros sobre uma das faces do octaedro, na qual não esteja justaposto nenhum outro tetraedro. Ao redor deste tetraedro, justaponha as demais peças restantes de maneira a formar um tetraedro regular cujo lado seja três vezes maior do que o lado da peça em forma de tetraedro regular, que você colou numa das faces do octaedro.

d) Qual é a relação entre o volume da peça em forma de tetraedro regular e o volume do tetraedro construído com todas as peças desse jogo?

e) Analisando as relações entre os volumes das peças que compõem o tetraedro construído, você consegue determinar as relações entre os volumes dos dois tetraedros duais? Se você não consegue responder a esta questão refaça a actividade anterior.

Você deve ter observado em c) que construiu dois tetraedros duais, pois o tetraedro ao redor do qual você dispôs as peças restantes é o dual do tetraedro construído com todas as peças do jogo; além disso, você deve ter chegado à conclusão de que o volume do tetraedro dual é 1/27 do volume do tetraedro construído com todas as peças.

Bibliografia

Kaleff, A.M. e Rei, D.M. (1996). Incentivando a visualização espacial através de propriedades geométricas de tetraedros duais, *Educação e Matemática*, nº 38, pp. 6-11.

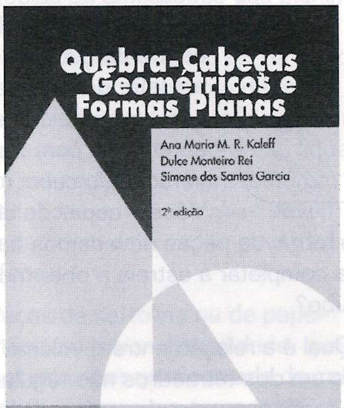
Kaleff, A.M. e Rei, D.M. (1996). Jogos geométricos e formas espaciais, *Revista do Professor de Matemática*, nº 31, pp. 25-31.

Kaleff, A.M., Garcia, S.S. e Rei, D.M. (1996). *Como adultos interpretam desenhos e calculam volumes de sólidos construídos por pequenos cubos*, Zetetiké, Faculdade de Educação, UNICAMP, nº 6, pp.135-152.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *A Educação Matemática em Revista*, nº 3, pp. 3-13.

Ana Maria Kaleff
Departamento de Geometria da Universidade Federal Fluminense
Niterói, Rio de Janeiro

Recensão



Quebra-cabeças geométricos e formas planas, de Ana Maria Kaleff, Dulce Monteiro Rei e Simone dos Santos Garcia, é o primeiro volume sobre geometria da série Conversando com o Professor, editada recentemente (1997) pela Universidade Federal Fluminense - Brasil.

Dirigida a professores dos 1º, 2º e 3º ciclos, esta é uma obra cuidada que defende a construção e utilização de materiais didácticos como meio privilegiado para atingir alguns dos objectivos do ensino da geometria, apelando à relação entre as formas geométricas e o mundo, e assente numa forte componente lúdica.

O livro é constituído por três capítulos. O primeiro tem por objectivo mostrar de que forma a utilização de quebra-cabeças planos, de fácil construção, pode ter um importante papel na aprendizagem da geometria, nomeadamente, na identificação, reconhecimento e comparação de formas e distâncias, na visualização e análise de figuras, na formulação de conjecturas sobre relações entre figuras planas, partindo da observação de movimentos realizados no plano e, ainda, na compreensão do conceito de área de uma figura plana.

No segundo capítulo as autoras defendem uma abordagem intuitiva do Teorema de Pitágoras, também através da utilização de quebra-cabeças, de modo a que, partindo da exploração de propriedades e relações geométricas em figuras variadas, os alunos possam estabelecer a fórmula relacionada com o referido teorema. Numa fase posterior são apresentadas actividades que permitem acompanhar uma demonstração do Teorema de Pitágoras e são sugeridas algumas actividades de aplicação no geoplano.

Por fim no terceiro capítulo, são apresentadas sugestões de actividades envolvendo propriedades e relações do triângulo equilátero, uma vez mais através do uso de quebra-cabeças simples, cuja construção é detalhadamente explicada.

De fácil leitura e de grande utilidade prática, este é um livro cuja consulta se recomenda.

Fernanda Perez
Esc. Sec. de Amora